

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по молодежной политике и
развитию образования

А. В. Легостев

2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ВОСПИТАНИЯ ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

для всех направлений подготовки и специальностей

СОГЛАСОВАНО

Председатель Объединенного совета
обучающихся ФГБОУ ВО «УГГУ»
(протокол № 25 от 15.11.2023)

 А. А. Кухарева

Председатель Первичной профсоюзной
организации ФГБОУ ВО «УГГУ»
(протокол № 5 от 24.10.2023)

 П. А. Коновалов

Председатель Совета родителей
ФГБОУ ВО «УГГУ»
(протокол № 3/1 от 04.10.2023)

 В. А. Пивова

Составитель: начальник управления по внеучебной
и социальной работе Шехтман Д.А.

Екатеринбург

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Наименование программы

Рабочая программа воспитания ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» (далее – УГГУ, университет).

Рабочая программа воспитания ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» представляет собой ценностно-нормативную, методологическую, методическую и технологическую основы организации воспитательной деятельности.

Рабочая программа воспитания (далее – Программа) ориентирована на организацию воспитательной деятельности субъектов образовательного и воспитательного процессов.

Воспитательная работа в университете направлена на создание благоприятных условий для личностного и профессионального развития студенческой молодёжи, формирование профессиональных и общекультурных/универсальных компетенций, таких как гражданственность, трудолюбие, ответственность, организованность, самостоятельность, инициативность, дисциплинированность.

Разработчик и координатор программы

Управление по внеучебной и социальной работе.

Нормативно-правовые основания программы

- Конституция Российской Федерации;
- Федеральный закон от 29.12.2012 №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Федеральный закон от 05.02.2018 № 15-ФЗ «О внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации по вопросам добровольчества (волонтерства)»;
- Указ Президента Российской Федерации от 19.12. 2012 г. № 1666 «Стратегия государственной национальной политики Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Указ Президента Российской Федерации от 24.12.2014 № 808 «Основы государственной культурной политики»;
- Указ Президента Российской Федерации от 09.05.2017 № 203 «Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы»;
- Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2018 № 204 «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года»;
- Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года»;
- Указ Президента Российской Федерации от 02.07.2021 № 400 «Стратегия национальной безопасности Российской Федерации»;
- Указ Президента Российской Федерации от 09.11.2022 № 809 «Об утверждении основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских духовно-нравственных ценностей»;
- Постановление Правительства Российской Федерации от 26.12.2017 № 1642 «Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Развитие образования»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29.11.2014 № 2403-р «Основы государственной молодежной политики Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29.05.2015 № 996-р «Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 27.12.2018 № 2950-р «Концепция развития добровольчества (волонтерства) в Российской Федерации до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства Российской Федерации от 12.11.2020 № 2945-р «Об утверждении Плана мероприятий по реализации в 2021-2025 годах Стратегии развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года»;
- Устав ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет».

Сроки реализации программы - период реализации образовательной программы.

Ожидаемые результаты:

- исполнение положений Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» по вопросам воспитания обучающихся;
- реализация приоритетных направлений государственной молодежной политики по созданию условий для успешной социализации и эффективной самореализации обучающихся;
- привлечение к воспитательной работе в университете заинтересованных субъектов университетского сообщества;
- формирование у обучающихся духовных, социальных и профессиональных ценностей;
- обогащение личностного и социального опыта обучающихся;
- совершенствование форм и методов воспитательной работы;
- повышение степени вовлеченности обучающихся в организацию и проведение мероприятий воспитательного характера;
- совершенствование системы контроля и оценки воспитательной работы;
- расширение взаимодействия субъектов воспитательной работы с органами государственной власти и местного самоуправления, международными, всероссийскими, межрегиональными, региональными общественными объединениями, ключевыми стейкхолдерами;
- развитие традиций корпоративной культуры университета;
- повышение эффективности и качества реализуемых мероприятий;
- выпуск конкурентоспособных специалистов, обладающих высоким уровнем социально-личностных и профессиональных компетенций.

РАЗДЕЛ 1. ЦЕЛЕВОЙ

Воспитательная деятельность в университете, реализующем программы высшего и среднего профессионального образования, является одной из основных частей образовательного процесса, планируется и осуществляется в соответствии с приоритетами государственной политики в сфере воспитания.

Участниками образовательных отношений в части воспитания в университете являются:

- ректор;
- проректор по молодежной политике и развитию образования;
- начальник управления по внеучебной и социальной работе;
- заместители начальника управления по внеучебной и социальной работе;
- специалисты по социальной работе с молодежью;
- деканы факультетов;
- заведующие кафедрами;
- педагогические работники;
- академические кураторы;
- педагоги-психологи;
- члены Объединенного совета обучающихся;
- представители Совета родителей.

1.1 Цель и задачи воспитания обучающихся

Цель воспитания обучающихся ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет» - развитие личности, создание условий для самоопределения и социализации на основе социокультурных, духовно-нравственных ценностей и принятых в российском обществе правил и норм поведения в интересах человека, семьи, общества и государства,

формирование у обучающихся чувства патриотизма, гражданственности, уважения к памяти защитников Отечества и подвигам Героев Отечества, закону и правопорядку, человеку труда и старшему поколению, взаимного уважения, бережного отношения к культурному наследию и традициям многонационального народа Российской Федерации, природе и окружающей среде.

Задачи воспитания:

- усвоение обучающимися знаний о нормах, духовно-нравственных ценностях, которые выработало российское общество (социально значимых знаний);
- формирование и развитие осознанного позитивного отношения к ценностям, нормам и правилам поведения, принятым в российском обществе (их освоение, принятие), современного научного мировоззрения, мотивации к труду, непрерывному личностному и профессиональному росту;
- приобретение социокультурного опыта поведения, общения, межличностных и социальных отношений, в том числе в профессионально ориентированной деятельности;
- подготовка к самостоятельной профессиональной деятельности с учетом получаемой квалификации (социально-значимый опыт) во благо своей семьи, народа, Родины и государства;
- подготовка к созданию семьи и рождению детей.

1.2 Направления воспитания

Рабочая программа воспитания УГГУ реализуется в единстве учебной и воспитательной деятельности с учётом направлений воспитания:

гражданское воспитание — формирование российской идентичности, чувства принадлежности к своей Родине, ее историческому и культурному наследию, многонациональному народу России, уважения к правам и свободам гражданина России; формирование активной гражданской позиции, правовых знаний и правовой культуры;

патриотическое воспитание — формирование чувства глубокой привязанности к своей малой родине, родному краю, России, своему народу и многонациональному народу России, его традициям; чувства гордости за достижения России и ее культуру, желания защищать интересы своей Родины и своего народа;

духовно-нравственное воспитание — формирование устойчивых ценностно-смысловых установок, обучающихся по отношению к духовно-нравственным ценностям российского общества, к культуре народов России, готовности к сохранению, преумножению и трансляции культурных традиций и ценностей многонационального российского государства;

эстетическое воспитание — формирование эстетической культуры, эстетического отношения к миру, приобщение к лучшим образцам отечественного и мирового искусства;

физическое воспитание, формирование культуры здорового

образа жизни и эмоционального благополучия — формирование осознанного отношения к здоровому и безопасному образу жизни, потребности физического самосовершенствования, неприятия вредных привычек;

профессионально-трудовое воспитание — формирование позитивного и добросовестного отношения к труду, культуры труда и трудовых отношений, трудолюбия, профессионально значимых качеств личности, умений и навыков; мотивации к творчеству и инновационной деятельности; осознанного отношения к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной деятельности, к профессиональной деятельности как средству реализации собственных жизненных планов;

экологическое воспитание — формирование потребности экологически целесообразного поведения в природе, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние окружающей среды, важности рационального природопользования; приобретение опыта эколого-направленной деятельности;

ценности научного познания — воспитание стремления к познанию себя и других людей, природы и общества, к получению знаний, качественного образования с учётом личностных интересов

и общественных потребностей.

1.3 Целевые ориентиры воспитания

1.3.1 Инвариантные целевые ориентиры

Согласно «Основам государственной политики по сохранению и укреплению духовно-нравственных ценностей» (Указ Президента Российской Федерации от 09.11.2022 № 809) ключевым инструментом государственной политики в области образования, необходимым для формирования гармонично развитой личности, является воспитание в духе уважения к традиционным ценностям, таким как патриотизм, гражданственность, служение Отечеству и ответственность за его судьбу, высокие нравственные идеалы, крепкая семья, созидательный труд, приоритет духовного над материальным, гуманизм, милосердие, справедливость, коллективизм, взаимопомощь и взаимоуважение, историческая память и преемственность поколений, единство народов России.

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» воспитательная деятельность направлена на формирование у обучающихся чувства патриотизма, гражданственности, уважения к памяти защитников Отечества и подвигам Героев Отечества, закону и правопорядку, человеку труда и старшему поколению, взаимного уважения, бережного отношения к культурному наследию и традициям многонационального народа Российской Федерации, природе и окружающей среде».

Эти законодательно закреплённые требования в части формирования у обучающихся системы нравственных ценностей отражены в инвариантных целевых ориентирах воспитания выпускников университета и соотносятся с общими/универсальными компетенциями, формирование которых является результатом освоения образовательных программ в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов.

Инвариантные целевые ориентиры воспитания выпускников университета

Гражданское воспитание
– Осознанно выражающий свою российскую гражданскую принадлежность (идентичность) в поликультурном, многонациональном и многоконфессиональном российском обществе, в мировом сообществе. – Сознующий своё единство с народом России как источником власти и субъектом тысячелетней российской государственности, с российским государством, ответственность за его развитие в настоящем и будущем на основе исторического просвещения, российского национального исторического сознания. – Проявляющий гражданско-патриотическую позицию, готовность к защите Родины, способный аргументированно отстаивать суверенитет и достоинство народа России и российского государства, сохранять и защищать историческую правду. – Ориентированный на активное гражданское участие в социально-политических процессах на основе уважения закона и правопорядка, прав и свобод сограждан. – Осознанно и деятельно выражающий неприятие любой дискриминации по социальным, национальным, расовым, религиозным признакам, проявлений экстремизма, терроризма, коррупции, антигосударственной деятельности. – Обладающий опытом гражданской социально значимой деятельности (в студенческом самоуправлении, добровольческом движении, предпринимательской деятельности, экологических, военно-патриотических и др. объединениях, акциях, программах).
Патриотическое воспитание
– Осознающий свою национальную, этническую принадлежность, демонстрирующий приверженность к родной культуре, любовь к своему народу.

– Сознающий причастность к многонациональному народу Российской Федерации, Отечеству, общероссийскую идентичность. – Проявляющий деятельное ценностное отношение к историческому и культурному наследию своего и других народов России, их традициям, праздникам. – Проявляющий уважение к соотечественникам, проживающим за рубежом, поддерживающий их права, защиту их интересов в сохранении общероссийской идентичности.
Духовно-нравственное воспитание
– Проявляющий приверженность традиционным духовно-нравственным ценностям, культуре народов России с учётом мировоззренческого, национального, конфессионального самоопределения. – Проявляющий уважение к жизни и достоинству каждого человека, свободе мировоззренческого выбора и самоопределения, к представителям различных этнических групп, традиционных религий народов России, их национальному достоинству и религиозным чувствам с учётом соблюдения конституционных прав и свобод всех граждан. – Понимающий и деятельно выражающий понимание ценности межнационального, межрелигиозного согласия, способный вести диалог с людьми разных национальностей и вероисповеданий, находить общие цели и сотрудничать для их достижения. – Ориентированный на создание устойчивой семьи на основе российских традиционных семейных ценностей, рождение и воспитание детей и принятие родительской ответственности. – Обладающий сформированными представлениями о ценности и значении в отечественной и мировой культуре языков и литературы народов России.
Эстетическое воспитание
– Выражающий понимание ценности отечественного и мирового искусства, российского и мирового художественного наследия. – Проявляющий восприимчивость к разным видам искусства, понимание эмоционального воздействия искусства, его влияния на душевное состояние и поведение людей, умеющий критически оценивать это влияние. – Проявляющий понимание художественной культуры как средства коммуникации и самовыражения в современном обществе, значение нравственных норм, ценностей, традиций в искусстве. – Ориентированный на осознанное творческое самовыражение, реализацию творческих способностей, на эстетическое обустройство собственного быта, профессиональной среды.
Физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия
– Понимающий и выражающий в практической деятельности понимание ценности жизни, здоровья и безопасности, значение личных усилий в сохранении и укреплении своего здоровья и здоровья других людей. – Соблюдающий правила личной и общественной безопасности, в том числе безопасного поведения в информационной среде. – Выражающий на практике установку на здоровый образ жизни (здоровое питание, соблюдение гигиены, режим занятий и отдыха, регулярную физическую активность), стремление к физическому совершенствованию. – Проявляющий сознательное и обоснованное неприятие вредных привычек (курения, употребления алкоголя, наркотиков, любых форм зависимостей), деструктивного поведения в обществе и цифровой среде, понимание их вреда для физического и психического здоровья. – Демонстрирующий навыки рефлексии своего состояния (физического, эмоционального, психологического), понимания состояния других людей. – Демонстрирующий и развивающий свою физическую подготовку, необходимую для избранной профессиональной деятельности, способности адаптироваться к стрессовым ситуациям в общении, в изменяющихся условиях (профессиональных, социальных, информационных, природных), эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях. – Используемый средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.
Профессионально-трудовое воспитание

– Понимающий профессиональные идеалы и ценности, уважающий труд, результаты труда, трудовые достижения российского народа, трудовые и профессиональные достижения своих земляков, их вклад в развитие своего поселения, края, страны. – Участвующий в социально значимой трудовой и профессиональной деятельности разного вида в семье, образовательной организации, на базе производственной практики, в своей местности. – Выражающий осознанную готовность к непрерывному образованию и самообразованию в выбранной сфере профессиональной деятельности. – Понимающий специфику профессионально-трудовой деятельности, регулирования трудовых отношений, готовый учиться и трудиться в современном высокотехнологичном мире на благо государства и общества. – Ориентированный на осознанное освоение выбранной сферы профессиональной деятельности с учётом личных жизненных планов, потребностей своей семьи, государства и общества. – Обладающий сформированными представлениями о значении и ценности выбранной профессии, проявляющий уважение к своей профессии и своему профессиональному сообществу, поддерживающий позитивный образ и престиж своей профессии в обществе.
Экологическое воспитание
– Демонстрирующий в поведении сформированность экологической культуры на основе понимания влияния социально-экономических процессов на природу, в том числе на глобальном уровне, ответственность за действия в природной среде. – Выражающий деятельное неприятие действий, приносящих вред природе, содействующий сохранению и защите окружающей среды. – Применяющий знания из общеобразовательных и профессиональных дисциплин для разумного, бережливого производства и природопользования, ресурсосбережения в быту, в профессиональной среде, общественном пространстве. – Имеющий и развивающий опыт экологически направленной, природоохранной, ресурсосберегающей деятельности, в том числе в рамках выбранной специальности, способствующий его приобретению другими людьми.
Ценности научного познания
– Деятельно выражающий познавательные интересы в разных предметных областях с учётом своих интересов, способностей, достижений, выбранного направления профессионального образования и подготовки. – Обладающий представлением о современной научной картине мира, достижениях науки и техники, аргументированно выражающий понимание значения науки и технологий для развития российского общества и обеспечения его безопасности. – Демонстрирующий навыки критического мышления, определения достоверности научной информации, в том числе в сфере профессиональной деятельности. – Умеющий выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам. – Используя современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности. – Развивающий и применяющий навыки наблюдения, накопления и систематизации фактов, осмысления опыта в естественнонаучной и гуманитарной областях познания, исследовательской и профессиональной деятельности.

1.3.2 Вариативные целевые ориентиры

Вариативные целевые ориентиры воспитания обучающихся университета сформулированы с учётом этнокультурных и региональных особенностей и не противоречат инвариантным целевым ориентирам.

Вариативные целевые ориентиры воспитания

Гражданское воспитание
– Осознающий себя членом общества на региональном и локальном уровнях, имеющим представление о родном крае как субъекте Российской Федерации.

– Демонстрирующий понимание значимости выбранной профессии для развития страны, проявляющий уважение к своей профессии и профессиональному сообществу. – Знающий и соблюдающий нормы профессиональной этики работника, поддерживающий благоприятный образ профессии в обществе. – Разделяющий традиционные российские ценности, проявляющий активную гражданскую позицию, готовый к защите Родины. – Знающий государственные устои и символику России, родного края, города, района и муниципальных образований. – Проявляющий нетерпимость к коррупционному поведению, умеющий принимать решения и нести за них ответственность. – Обладающий культурой межнационального общения в студенческой среде и обществе в целом. – Проявляющий уважительное отношение к национальному достоинству людей, их чувствам, религиозным убеждениям.
Патриотическое воспитание
– Понимающий свою сопричастность к прошлому, настоящему и будущему родного края, своей Родины — России, Российского государства. – Понимающий значение гражданских символов (государственная символика России, своего региона), праздников, мест почитания героев и защитников Отечества, проявляющий к ним уважение. – Изучающий и владеющий знаниями по истории родного края и своей малой родины.
Духовно-нравственное воспитание
– Уважающий духовно-нравственную культуру своей семьи, своего народа, семейные ценности с учётом национальной, религиозной принадлежности. – Сознательный ценность каждой человеческой жизни, признающий индивидуальность и достоинство каждого человека. – Умеющий оценивать поступки с позиции их соответствия нравственным нормам, осознающий ответственность за свои поступки.
Эстетическое воспитание
– Проявляющий ценностное отношение к культуре и искусству, к культуре речи и культуре поведения, к красоте и гармонии. – Обладающий знаниями о культурном наследии родного края. – Способный воспринимать и чувствовать прекрасное в быту, природе, искусстве, творчестве людей, профессиональном мастерстве. – Проявляющий стремление к самовыражению в разных видах художественной деятельности, искусстве, профессиональной деятельности.
Физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия
– Владеющий знаниями о физической культуре и спорте, их истории, современном развитии в родном крае. – Ведущий и пропагандирующий здоровый образ жизни. – Проявляющий интерес к самообучению умениям и навыкам физкультурно-оздоровительной и спортивно-оздоровительной деятельности. – Бережно относящийся к физическому здоровью, соблюдающий основные правила здорового и безопасного для себя и других людей образа жизни, в том числе в информационной среде. – Владеющий основными навыками личной и общественной гигиены, безопасного поведения в быту, природе, обществе. – Ориентированный на физическое развитие с учётом возможностей здоровья, занятия физкультурой и спортом
Профессионально-трудовое воспитание
– Проявляющий уважение к труду, людям труда, бережное отношение к результатам труда, ответственное потребление. – Проявляющий интерес к разным профессиям. – Участвующий в различных видах трудовой деятельности.

– Владеющий комплексом знаний, умений и навыков, качеств личности, обеспечивающих возможность профессионального роста. – Обладающий основами экономической культуры и финансовой грамотности.
Экологическое воспитание
– Понимающий ценность природы, зависимость жизни людей от природы, влияние людей на природу, окружающую среду. – Выражающий готовность в своей профессиональной деятельности придерживаться экологических норм. – Содействующий сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действующий в чрезвычайных ситуациях. – Демонстрирующий экологическую культуру. – Проявляющий интерес к экологической обстановке в родном крае, вносящий свой вклад в ее улучшение.
Ценности научного познания
– Ориентированный на ценности непрерывного образования, в том числе и на самообразование. – Проявляющий интерес к участию в поисковой и исследовательской деятельности, техническому творчеству.

РАЗДЕЛ 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ

2.1 Уклад университета

Уральский государственный горный университет был учрежден 3 (16) июля 1914 года законом, утвержденным российским Императором Николаем II, как Екатеринбургский горный институт, который стал первым высшим учебным заведением на Урале.

Собранием Узаконений и Распоряжений Правительства, издаваемым при Правительствующем Сенате, от 27 января 1917 г. № 28 горный институт в городе Екатеринбурге был переименован в Уральский горный институт Императора Николая II, который приказом Главного управления учебными заведениями Народного Комиссариата тяжелой промышленности СССР от 18 декабря 1934 г. № 26/644 переименован в Свердловский горный институт, которому постановлением Совета Министров СССР от 13 января 1947 г. № 52 присвоено имя В.В. Вахрушева.

Указом Президиума Верховного Совета СССР от 12 мая 1969 года Свердловский горный институт им. В.В. Вахрушева был переименован в Свердловский ордена Трудового Красного Знамени горный институт им. В.В. Вахрушева, который распоряжением Совета Министров РСФСР от 10 июля 1991 г. № 736-р и приказом Государственного Комитета СССР по народному образованию от 22 июля 1991 г. № 346 был переименован в Уральский ордена Трудового Красного Знамени горный институт имени В.В. Вахрушева, переименованный приказом Государственного Комитета Российской Федерации по высшему образованию от 28 октября 1993 г. № 298 в Уральскую государственную горно-геологическую академию.

11 февраля 2003 года Уральская государственная горно-геологическая академия была внесена в Единый государственный реестр юридических лиц как государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Уральская государственная горно-геологическая академия, которое приказом Федерального агентства по образованию от 5 октября 2004 г. № 156 было переименовано в государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский государственный горный университет».

Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 23 мая 2011 г. № 1724 государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Уральский государственный горный университет» переименовано в федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального

образования «Уральский государственный горный университет», которое приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 29 октября 2015 г. №1261 переименовано в федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уральский государственный горный университет».

За 106 лет своей деятельности вуз подготовил для работы на горнодобывающих и геологоразведочных предприятиях, в научно-исследовательских и проектно-конструкторских институтах отрасли более 110 000 горных инженеров, талантом и трудом которых создавался Уральский горнопромышленный комплекс.

В 2024 году УГГУ - первый вуз Урала празднует 110 лет со дня учреждения.

Университет реализует программы высшего, среднего профессионального, дополнительного и послевузовского профессионального образования в области геологии, геофизики, горного дела, экологии, экономики, информатики, автоматизации, горного машиностроения, художественного проектирования и обработки материалов.

В университете представлены все уровни высшего образования: бакалавриат, специалитет, магистратура и аспирантура.

В университете обучаются около 10 000 студентов.

Отличительной особенностью университета являются сильные связи с производством. Вуз сотрудничает более чем с 300 предприятиями – партнерами со всей России, в их числе — крупнейшие компании горнодобывающей отрасли. Подписаны договоры о совместной работе в рамках подготовки кадров с крупнейшими отраслевыми предприятиями страны и региона: Русской медной компанией, Уральской горно-металлургической компанией, Уралмашзаводом, ЕВРАЗ-холдингом и др. Ведется системная подготовка специалистов для предприятий зарубежных стран: Китая, Гвинеи, Македонии, Узбекистана, Таджикистана, Туркменистана, Монголии, Казахстана и др.

Университет славится своим сильным профессорско-преподавательским составом. На 38 кафедрах работают более 350 педагогических работников, из них более 250 кандидатов наук, порядка 60 докторов наук.

Вековая история позволила университету создать не только мощные образовательные традиции, но и научные школы. Их коллективы регулярно участвуют в масштабных государственных программах. С 1976 г. в диссертационных советах вуза защищено свыше 750 диссертаций.

В университете выпускается два журнала, внесенных Высшей аттестационной комиссией в Перечень научных журналов, публикация в которых является обязательной для защиты диссертаций.

Студенты вуза регулярно побеждают на Всероссийских олимпиадах и инженерных соревнованиях. Горняки трижды становились триумфаторами Международного чемпионата по решению инженерных кейсов «Case-In». Свыше сорока студентов УГГУ каждый год удостоиваются стипендий Президента РФ, Правительства РФ и Губернатора Свердловской области. Одним из знаковых научных мероприятий УГГУ является Уральская горнопромышленная декада. Сотни специалистов из России и зарубежных стран ежегодно приезжают в Горный университет, чтобы обсудить актуальные вопросы отрасли и найти партнеров для решения производственных задач.

В университете есть свои корпоративные знаки отличия – это герб, гимн, флаг и форменная одежда, которые используются при проведении мероприятий в масштабах университета, городского, регионального и всероссийского уровней с целью формирования корпоративного сознания у обучающихся.

Наиболее значимыми традиционными мероприятиями, событиями, составляющими основу воспитательной системы, являются День знаний, День солидарности в борьбе с терроризмом, День первокурсника, День Героев Отечества, День матери, День студента, День защитников Отечества, конкурс красоты «Мисс и Мистер Горный университет» и многие другие.

2.2 Воспитательные модули: виды, формы, содержание воспитательной деятельности

Модуль «Образовательная деятельность»

Реализация воспитательного потенциала образовательной деятельности предусматривает:

- использование воспитательных возможностей содержания учебных дисциплин и профессиональных модулей для формирования у обучающихся позитивного отношения к российским традиционным духовно-нравственным и социокультурным ценностям, подбор соответствующего тематического содержания, текстов для чтения, задач для решения, проблемных ситуаций для обсуждений и т. п., отвечающих содержанию и задачам воспитания;
- привлечение внимания обучающихся к ценностному аспекту изучаемых на аудиторных занятиях объектов, явлений, событий и т. д., инициирование обсуждений, высказываний обучающимися своего мнения, выработки личностного отношения к изучаемым событиям, явлениям;
- использование учебных материалов (образовательного контента, художественных фильмов, литературных произведений и проч.), способствующих повышению статуса и престижа рабочих профессий, прославляющих трудовые достижения, повествующих о семейных трудовых династиях;
- инициирование и поддержка исследовательской деятельности при изучении учебных дисциплин и профессиональных модулей в форме индивидуальных и групповых проектов, исследовательских работ воспитательной направленности;
- реализация курсов, дополнительных факультативных занятий исторического просвещения, патриотической, гражданской, экологической, научно-познавательной, краеведческой, историко-культурной, туристско-краеведческой, спортивно-оздоровительной, художественно-эстетической, духовно-нравственной направленности, а также курсов, направленных на формирование готовности обучающихся к вступлению в брак и осознанному родительству;
- организация и проведение экскурсий (в музеи, картинные галереи, технопарки, на предприятия и др.), экспедиций, походов.

Модуль «Кураторство»

Реализация воспитательного потенциала кураторства как особого вида педагогической деятельности, направленной в первую очередь на решение задач воспитания и социализации обучающихся, предусматривает:

- организацию социально-значимых совместных проектов, отвечающих потребностям обучающихся, дающих возможности для их самореализации, установления и укрепления доверительных отношений внутри учебной группы и между группой и куратором;
- сплочение коллектива группы через игры и тренинги на командообразование, походы, экскурсии, празднования дней рождения, тематические вечера и т. п.;
- организацию и проведение регулярных родительских собраний, информирование родителей об академических успехах и проблемах обучающихся, их положении в студенческой группе, о жизни группы в целом; помощь родителям и иным членам семьи во взаимодействии с педагогическим коллективом и администрацией;
- работа со студентами, вступившими в ранние семейные отношения, проведение консультаций по вопросам этики и психологии семейной жизни, семейного права;
- планирование, подготовку и проведение праздников, фестивалей, конкурсов, соревнований и т. д. с обучающимися.

Модуль «Наставничество»

Реализация воспитательного потенциала наставничества как универсальной технологии передачи опыта и знаний предусматривает:

- разработку программы наставничества;
- содействие осознанному выбору оптимальной образовательной траектории, в том числе для обучающихся с особыми потребностями (детей с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья, одаренных, обучающихся, находящихся в трудной жизненной ситуации);
- оказание психологической и профессиональной поддержки наставляемому в реализации им индивидуального маршрута и в жизненном самоопределении;
- определение инструментов оценки эффективности мероприятий по адаптации и стажировке наставляемого;
- привлечение к наставнической деятельности признанных авторитетных специалистов, имеющих большой профессиональный и жизненный опыт (работников предприятий и организаций-партнеров).

Модуль «Основные воспитательные мероприятия»

Реализация воспитательного потенциала основных воспитательных мероприятий предусматривает:

- проведение общих для всей образовательной организации праздников, ежегодных творческих (театрализованных, музыкальных, литературных и т. п.) мероприятий, связанных с общероссийскими, региональными, местными праздниками, памяtnыми датами;
- проведение торжественных мероприятий, связанных с завершением образования, переходом на следующий курс, а также совместных мероприятий с организациями-партнерами, направленных на знакомство и приобщение к корпоративной культуре предприятия, организации;
- разработку и реализацию обучающимися социальных, социально-профессиональных проектов, в том числе с участием социальных партнёров университета;
- организацию тематических мероприятий, нацеленных на формирование уважительного отношения к противоположному полу, понимания любви как основы таких отношений и готовности к вступлению в брак (День матери, День семьи, любви и верности и т. д.);

Модуль «Организация предметно-пространственной среды»

Реализация воспитательного потенциала предметно-пространственной среды предусматривает совместную деятельность педагогов, обучающихся, других участников образовательных отношений по её созданию, поддержанию, использованию в воспитании:

- организация в доступных для обучающихся и посетителей местах музейно-выставочного пространства, содержащего экспозиции об истории и развитии университета с использованием исторических символов государства, региона, местности в разные периоды, о значимых исторических, культурных, природных, производственных объектах России, региона, местности;
- размещение карт России, регионов, муниципальных образований (современных и исторических, точных и стилизованных, географических, природных, культурологических, художественно оформленных, в том числе материалами, подготовленными обучающимися) с изображениями значимых культурных объектов своей местности, региона, России; портретов выдающихся государственных деятелей России, деятелей культуры, науки, производства, искусства, военных деятелей, героев и защитников Отечества;
- размещение, обновление художественных изображений (символических, живописных, фотографических, интерактивных) объектов природного и культурного наследия региона, местности, предметов традиционной культуры и быта;
- организацию и поддержание в университете звукового пространства позитивной духовно-нравственной, гражданско-патриотической воспитательной направленности (звонки-мелодии, музыка, информационные сообщения), исполнение гимна Российской Федерации (в начале учебной недели);

- оформление и обновление «мест новостей», стендов в помещениях общего пользования (холл первого этажа, рекреации и др.), содержащих в доступной, привлекательной форме новостную информацию позитивного профессионального, гражданско-патриотического, духовно-нравственного содержания;
- размещение материалов, отражающих ценность труда как важнейшей нравственной категории, представляющих трудовые достижения в профессиональной области, прославляющих героев и ветеранов труда, выдающихся деятелей производственной сферы, имеющих отношение к УГГУ, предметов-символов профессиональной сферы, размещение информационных справочных материалов о предприятиях профессиональной сферы, имеющих отношение к профилю университета;
- размещение, поддержание, обновление на территории университета выставочных объектов, ассоциирующихся с профессиональными направлениями обучения;
- создание и обновление книжных выставок профессиональной литературы, пространства свободного книгообмена;
- оборудование, оформление, поддержание и использование спортивных и игровых пространств, площадок, зон активного и спокойного отдыха;
- совместная с обучающимися популяризация символики УГГУ (флаг, гимн, эмблема, логотип и т. п.), используемой как повседневно, так и в торжественных ситуациях;
- разработка и обновление материалов (стендов, плакатов, инсталляций и др.), акцентирующих внимание обучающихся на важных для воспитания правилах, традициях, укладе образовательной организации, актуальных вопросах профилактики и безопасности.

Модуль «Взаимодействие с родителями (законными представителями)»

Реализация воспитательного потенциала взаимодействия с родителями (законными представителями) обучающихся предусматривает:

- организацию взаимодействия между родителями обучающихся и преподавателями, администрацией в области воспитания и профессиональной реализации студентов;
- проведение родительских собраний по вопросам воспитания, взаимоотношений обучающихся и педагогов, условий обучения и воспитания;
- привлечение родителей к подготовке и проведению мероприятий воспитательной направленности.

Модуль «Самоуправление»

Реализация воспитательного потенциала самоуправления обучающихся в университете, реализующем образовательные программы высшего и среднего профессионального образования, предусматривает:

- организацию и деятельность в университете органов самоуправления обучающихся (совет обучающихся и др.);
- представление органами самоуправления интересов обучающихся в процессе управления образовательной организацией, защита законных интересов, прав обучающихся;
- участие представителей органов самоуправления обучающихся в разработке, обсуждении и реализации рабочей программы воспитания, в анализе воспитательной деятельности;
- привлечение к деятельности студенческого самоуправления выпускников, работающих по специальности, добившихся успехов в профессиональной деятельности и личной жизни.

Модуль «Профилактика и безопасность»

Реализация воспитательного потенциала профилактической деятельности в целях формирования и поддержки безопасной и комфортной среды предусматривает:

- организацию деятельности педагогического коллектива по созданию в университете безопасной среды как условия успешной воспитательной деятельности;
- вовлечение обучающихся в проекты, программы профилактической направленности, реализуемые в УГГУ и в социокультурном окружении (антинаркотические, антиалкогольные, против курения, вовлечения в деструктивные детские и молодёжные объединения, культы, субкультуры, группы в социальных сетях; по безопасности в цифровой среде, на транспорте, на воде, безопасности дорожного движения, противопожарной безопасности, антитеррористической и антиэкстремистской безопасности, гражданской обороне и т. д.);
- сбор информации и регулярный мониторинг семей обучающихся, находящихся в сложной жизненной ситуации, профилактическая работа с неблагополучными семьями;
- организация психолого-педагогической поддержки обучающихся групп риска;
- организацию работы по развитию у обучающихся навыков саморефлексии, самоконтроля, устойчивости к негативному воздействию, групповому давлению;
- поддержку инициатив обучающихся, педагогов в сфере укрепления безопасности жизнедеятельности.

Модуль «Социальное партнёрство и участие работодателей»

Реализация воспитательного потенциала социального партнёрства университетом, реализующем образовательные программы высшего и среднего профессионального образования, в том числе во взаимодействии с предприятиями рынка труда, предусматривает:

- участие представителей организаций-партнёров, предприятий (организаций) и работодателей, в том числе в соответствии с договорами о сотрудничестве, в проведении отдельных производственных практик и мероприятий в рамках рабочей программы воспитания и календарного плана воспитательной работы (дни открытых дверей, ярмарки вакансий, государственные, региональные праздники, торжественные мероприятия и т. п.);
- участие представителей организаций-партнёров в проведении мастер-классов, аудиторных и внеаудиторных занятий, мероприятий профессиональной направленности;
- проведение на базе организаций-партнёров отдельных аудиторных и внеаудиторных занятий, презентаций, лекций, акций воспитательной направленности;
- проведение открытых дискуссионных площадок (студенческих, педагогических, родительских, совместных), куда приглашаются представители организаций-партнёров, на которых обсуждаются актуальные проблемы, касающиеся профессиональной сферы и рынка труда, жизни университета, муниципального образования, региона, страны;
- реализация социальных проектов, разрабатываемых и реализуемых обучающимися и педагогами совместно с организациями-партнёрами (профессионально-трудовой, благотворительной, экологической, патриотической, духовно-нравственной и т. д. направленности), ориентированных на воспитание обучающихся, преобразование окружающего социума, позитивное воздействие на социальное окружение.

Модуль «Профессиональное развитие, адаптация и трудоустройство»

Реализация воспитательного потенциала работы по профессиональному развитию, адаптации и трудоустройству в университете предусматривает:

- участие в конкурсах, фестивалях, олимпиадах профессионального мастерства (в т. ч. международных), работе над профессиональными проектами различного уровня (регионального, всероссийского, международного) и др.;
- циклы мероприятий, направленных на подготовку обучающихся к осознанному планированию своей карьеры, профессионального будущего (посещения центра содействия профессиональному трудоустройству выпускников, профессиональных выставок, ярмарок вакансий, дней открытых дверей на предприятиях и др.);
- экскурсии (на предприятия, в организации), дающие углублённые представления о выбранной специальности и условиях работы;

- организацию мероприятий, посвященных истории организаций/предприятий-партнёров; встреч с представителями коллективов, с работниками-стажистами, представителями трудовых династий, авторитетными специалистами, героями и ветеранами труда, представителями профессиональных династий;
- использование обучающимися интернет-ресурсов, способствующих более глубокому изучению отраслевых технологий, способов и приёмов профессиональной деятельности, профессионального инструментария, актуального состояния профессиональной области; онлайн курсов по интересующим темам и направлениям профессионального образования;
- консультирование обучающихся по вопросам построения ими профессиональной карьеры и планов на будущую жизнь с учётом индивидуальных особенностей, интересов, потребностей;
- проведение тренингов, нацеленных на формирование рефлексивной культуры, совершенствование умений в области анализа и оценки результатов деятельности.

Дополнительные модули

Модуль «Воспитание здорового образа жизни»

Реализация воспитательного потенциала работы по созданию условий для сохранения, укрепления и развития духовного, эмоционального, интеллектуального, личностного и физического здоровья обучающихся предусматривает:

- воспитание здоровой личности, формирование способности ставить цели и строить жизненные планы;
- формирование у обучающихся ответственного отношения к своему здоровью и потребности в здоровом образе жизни, физическом самосовершенствовании, занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью, развитие культуры безопасной жизнедеятельности, профилактику наркотической и алкогольной зависимости, табакокурения и других вредных привычек;
- формирование бережного, ответственного и компетентного отношения к физическому и психологическому здоровью – как собственному, так и других людей, развитие культуры здорового питания.

Модуль «Художественно-эстетическое воспитание»

Реализация воспитательного потенциала работы по формированию культурно-эстетических взглядов, нравственных принципов обучающихся, повышению общего уровня культуры, формированию способности воспринимать и понимать произведения искусства во взаимосвязи с окружающим миром предусматривает:

- воспитание эстетического отношения к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, общественных отношений;
- формирование способности к общему развитию, реализации творческого потенциала в учебной, профессиональной деятельности, самовоспитания и универсальной духовно-нравственной компетенции – «становиться лучше»;
- формирование чувства любви к Родине на основе изучения культурного наследия многонационального народа России;
- формирование художественно-эстетического мировоззрения, основанного на диалоге культур.

Модуль «Экологическое воспитание»

Реализация воспитательного потенциала работы по формированию экологической культуры, содействию сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, воспитанию и развитию у обучающихся любви к окружающей природе предусматривает:

- развитие у обучающихся экологической культуры, бережного отношения к родной земле, природным богатствам России и мира, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды;
- воспитание чувства ответственности за состояние природных ресурсов, формирование умений и навыков разумного природопользования, нетерпимого отношения к действиям, приносящим вред экологии; приобретение опыта эколого-направленной деятельности.

Модуль «Волонтерское движение»

Реализация воспитательного потенциала работы по формированию готовности к добровольчеству (волонтерству) предусматривает:

- развитие навыков волонтерской деятельности через участие в подготовке и проведении социально-значимых мероприятий;
- развитие мотивации к активному и ответственному участию в общественной жизни страны, региона, университета, государственному управлению через организацию добровольческой деятельности;
- развитие способностей к сопереживанию и формированию позитивного отношения к людям, в том числе к лицам с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья;
- развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

РАЗДЕЛ 3. ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ

3.1 Кадровое обеспечение

Реализация рабочей программы воспитания осуществляется квалифицированными специалистами университета, в частности Управления по внеучебной и социальной работе, которое несёт ответственность за организацию воспитательной работы в университете; Студенческого культурного центра, Студенческого спортивного клуба «Горная машина», Студенческого центра патриотического воспитания «Святогор», Волонтерского центра УГГУ, которые проводят с обучающимися мероприятия воспитательного характера; психолого-педагогической службы, кураторами, педагогом-психологом, преподавателями, функционал которых регламентируется требованиями профессиональных стандартов, должностными инструкциями и иными нормативными документами.

3.2 Нормативно-методическое обеспечение

Нормативно-методическое обеспечение воспитательной деятельности осуществляется следующим образом: воспитательная деятельность ведется в соответствии с нормативно-правовыми документами федеральных органов исполнительной власти в сфере образования, требованиями федеральных государственных образовательных стандартов, Уставом университета и локальными актами университета с учетом сложившегося опыта воспитательной деятельности, и имеющимися ресурсами в университете.

3.3 Требования к условиям работы с обучающимися с особыми образовательными потребностями

В воспитательной работе с категориями обучающихся, имеющих особые образовательные потребности: обучающиеся с инвалидностью, ограниченными возможностями здоровья, из социально уязвимых групп (воспитанники детских домов, обучающиеся из семей мигрантов, билингвы и др.), одарённые, с отклоняющимся поведением, создаются особые условия.

В системе организации воспитательной деятельности с категориями обучающихся, имеющих особые образовательные потребности, устанавливаются сотрудничество преподавателей и обучающихся.

давателей, кураторов, педагогов-психологов, родителей (законных представителей) обучающихся с целью устранения нарушенных функций, развития функциональных систем обучающихся, коррекции поведения, формирования социально-значимых качеств.

При организации воспитательного пространства создаются благоприятные условия для развития социально значимых отношений обучающихся, и, прежде всего, ценностных отношений к семье, труду, своему отечеству, своей малой и большой Родине, природе, миру, знаниям, культуре, здоровью, окружающим людям, к самим.

Формирование доброжелательного отношения к обучающимся, имеющим особые образовательные потребности и их семьям со стороны всех участников образовательных отношений, а также индивидуальный подход позволяет получить им необходимые социальные навыки, знания и умения необходимые для дальнейшей профессиональной деятельности.

При организации воспитания обучающихся с особыми образовательными потребностями осуществляется ориентация на:

- налаживание эмоционально-положительного взаимодействия с окружающими для их успешной социальной адаптации и интеграции как в университете, так и в профессиональной деятельности;
- формирование доброжелательного отношения к обучающимся и их семьям со стороны всех участников образовательных отношений;
- построение воспитательной деятельности с учётом индивидуальных особенностей и возможностей каждого обучающегося;
- обеспечение психолого-педагогической поддержки семей обучающихся, содействие повышению уровня их педагогической, психологической, социальной компетентности;
- формирование личности обучающегося с особыми образовательными потребностями с использованием адекватных физическому и психическому состоянию методов воспитания;
- создание оптимальных условий совместного воспитания и обучения обучающихся с особыми образовательными потребностями и их сверстников, с использованием адекватных вспомогательных средств и педагогических приёмов, организацией совместных форм работы с педагогом-психологом и другими специалистами университета;
- личностно-ориентированный подход в организации всех видов деятельности обучающихся с особыми образовательными потребностями.

3.4 Система поощрения профессиональной успешности и проявлений активной жизненной позиции обучающихся

Поощрение профессиональной успешности и проявлений активной жизненной позиции обучающихся осуществляется следующим образом:

- выплачивается повышенная государственная академическая стипендия;
- предоставляются путевки на летний отдых и оздоровление;
- представляются кандидатуры обучающихся на стипендию Правительства Российской Федерации;
- представляются кандидатуры обучающихся на стипендию Губернатора Свердловской области;
- вручаются благодарственные письма, письма участников.

Основания для поощрения обучающихся:

- успехи в учебной деятельности;
- успехи научной деятельности;
- успехи в культурно-творческой деятельности;
- успехи в общественной деятельности;
- успехи в физкультурной деятельности;
- победы в конкурсах, олимпиадах, фестивалях, соревнованиях различного уровня;

- активное участие в культурно-массовых мероприятиях на уровне университета, округа, региона, Российской Федерации, на международном уровне;
- спортивные достижения на различных уровнях.

3.5 Анализ воспитательного процесса

Основные направления анализа воспитательного процесса:

3.5.1 Анализ условий воспитательной деятельности

Анализ воспитательной деятельности проводится по следующим позициям:

- кадровое обеспечение воспитательной деятельности (наличие специалистов, прохождение курсов повышения квалификации);
- наличие и количество студенческих объединений, клубов, предметных кружков, кружков технического творчества, спортивных секций и кружков;
- количество социальных партнеров, вовлечённых в воспитательную деятельность (предприятия, учреждения культуры, здравоохранения, правоохранительные органы, образовательные организации др.);
- участие педагогических работников университета в конкурсах, семинарах, конференциях, вебинарах по направлениям воспитательной деятельности;
- оформление предметно-пространственной среды университета.

3.5.2 Анализ состояния воспитательной деятельности

Анализ состояния воспитательной деятельности проводится по следующим позициям:

- проводимые в университете дела и реализованные проекты;
- уровень вовлеченности обучающихся в проекты и мероприятия на уровне университета, районном, городском, региональном и федеральном уровнях;
- включенность обучающихся и преподавателей в деятельность различных объединений;
- участие обучающихся в конкурсах различного уровня и направленности;
- профессионально-личностное развитие обучающихся (анализ портфолио);
- снижение негативных факторов (уменьшение числа обучающихся, состоящих на различных видах профилактического учета/контроля, снижение/отсутствие совершенных правонарушений и преступлений).

Основным способом получения информации являются: педагогическое наблюдение, анкетирование, тестирование, беседы с обучающимися и их родителями (законными представителями), педагогическими работниками, представителями студенческого совета.

Анализ проводится проректором по молодежной политике и развитию образования, начальником управления по внеучебной и социальной работе, педагогом-психологом, кураторами академических групп.

Итогом самоанализа является перечень выявленных проблем, над решением которых предстоит работать коллективу университета.

Приложение к рабочей программе воспитания

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по молодежной политике и развитию образования

УТВЕРЖДАЮ

А. В. Легостев

14.11.2024



КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВОСПИТАТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ на 2024-2025 учебный год

В ходе планирования воспитательной деятельности университет учитывает воспитательный потенциал участия обучающихся в мероприятиях, проектах, конкурсах, акциях, проводимых на уровне:

Российской Федерации, в том числе:

«
Р «Большая перемена» <https://bolshayaperemena.online/>;
о «Лидеры России» <https://лидерыроссии.рф/>;
с «Мы Вместе» (волонтерство) <https://onf.ru/>;
с отраслевые конкурсы профессионального мастерства;
и движения «Ворлдскиллс Россия»;
я движения «Абилимпикс»;

субъектов Российской Федерации, а также **отраслевые профессионально значимые события и праздники.**

№	Модуль	Курсы, группы	Сроки	Ответственные
<i>1. Образовательная деятельность</i>				
1	Дисциплина «Основы российской государственности»	I,II,III	01.09.2024-31.05.2025	Зубов В. В.
<i>2. Кураторство</i>				
1	Воспитательное мероприятие «Час куратора»	I	01.09.2024-31.05.2025	Шехтман Д. А.
<i>3. Наставничество</i>				
1	Подготовка и проведение адаптационного мероприятия «Неделя первокурсника 2024»	I	30.08.2024 - 04.09.2024	Шехтман Д. А.
<i>4. Основные воспитательные мероприятия</i>				
1	Презентация студенческих общественных, спортивных, научных, творческих объединений	I	30.08.2024-04.09.2024	Шехтман Д. А.
2	Профориентационные мероприятия для студентов I курса	I	12.08.2024-17.08.2024	Коновалов П. А.
3	Спортивно-массовое мероприятие «Неделя футбола» и международный футбольный турнир к Дню народного единства	I-V	01.11.2024-05.11.2024	Сухомлин С. Д.
4	Культурно-массовое мероприятие «Новогодний ректорский прием»	I-V	23.12.2024	Нижников Е. В.
5	Празднование дня Российского студенчества, Молебен святой мученице Татьяне	I-V	25.01.2025	Бачинин И. В.
6	Организация игры «Патриот»	I-V	19.02.2025-23.02.2025	Комаров А. А.
7	Праздничный концерт «День защитника отечества»	I-V	22.02.2025	Нижников Е. В.
8	Праздничный концерт «Международный женский день»	I-V	07.03.2025	Нижников Е. В.

9	Участие в первомайской демонстрации	I-V	01.05.2025	Коновалов П. А.
10	Патриотическая акция «Бессмертный полк Горного»	I-V	08.05.2025	Комаров А. А.
11	Праздничные мероприятия, посвященные 80 годовщине Победы в ВОВ	I-V	09.05.2025	Нижников Е. В.
12	Легкоатлетическая эстафета «Горняк»	I-V	17.05.2025	Сидоров С. Г.
<i>5. Организация предметно-пространственной среды</i>				
13	Оформление и обновление новостных стендов	I-V	01.09.2024-30.05.2025	Пономарева Т. В.
14	Популяризация символики образовательной организации	I-V	01.09.2024-10.11.2024	Пономарева Т. В.
15	Подготовка и обновление тематических экспозиций в библиотеке университета	I-V	01.09.2024-30.05.2025	Справцева Е. А.
16	Разработка и реализация коворкинг зон для студентов	I-V	01.09.2024-30.05.2025	Коновалов П. А.
17	Оформление зданий университета, холлов, с использованием государственной символики России	I-V	10.09.2024	Комаров А. А.
<i>6. Взаимодействие с родителями (законными представителями)</i>				
18	Деятельность Службы примирения университета и работа с конфликтными ситуациями	I-V	01.09.2024 – 30.05.2025	Первушина А. А.
<i>7. Самоуправление</i>				
19	Обучающие мероприятия для студенческого актива УГГУ	I-V	01.09.2024-20.11.2024	Шехтман Д. А.
20	Обучающие мероприятия для активистов организационно-массовой комиссии ПСО УГГУ	I-V	14.09.2024-16.09.2024	Коновалов П. А.
21	Отчетно – выборные конференции профбюро факультетов	I-V	10.10.2024-25.10.2024	Коновалов П. А.
22	Проведение мероприятия среди студенческой молодежи, направленного на повышение уровня медиа грамотности "Медиадиктант"	I-V	18.10.2024	Пономарева Т. В.
23	Обучающее мероприятие «ПРОФшкола Горно-механического факультета»	I-V	08.11.2024-12.11.2024	Коновалов П. А.
24	Обучающие мероприятия для активистов ФГХ	I-V	08.11.2024-12.11.2024	Коновалов П. А.
25	Интеллектуальная игра для обучающихся УГГУ «Интуиция»	I-V	10.11.2024	Коновалов П. А.

26	Интеллектуальная игра для обучающихся УГГУ «Квиз-турнир»	I-V	16.12.2024	Коновалов П. А.
27	Новогодняя студенческая елка «Елка желаний»	I-V	24.12.2024	Коновалов П. А.
28	Традиционная новогодняя лотерея среди членов профсоюза	I-V	25.12.2024	Коновалов П. А.
29	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Турнир по киберспорту»	I-V	25.12.2024	Коновалов П. А.
30	Образовательный проект «MediaLife»	I-V	10.01.2025–28.03.2025	Сухомлин С. Д.
31	Интеллектуальная онлайн игра «Что? Где? Когда?», посвященная Всероссийскому дню студента	I-V	25.01.2025	Коновалов П. А.
32	Встреча ректора университета со студенческим активом	I-V	25.01.2025	Шехтман Д. А.
33	Традиционное исполнение студенческих желаний ректором УГГУ А.В. Душиным	I-V	25.01.2025	Шехтман Д. А.
34	Образовательный проект АССК.про	I-V	15.02.2025-01.04.2025	Сухомлин С. Д.
35	Образовательный проект «GM School» для студентов и активистов УГГУ	I-V	04.04.2025-08.04.2025	Сухомлин С. Д.
36	Очный этап образовательного проекта АССК.про	I-V	01.05.2025-30.05.2025	Сухомлин С. Д.
<i>8. Профилактика и безопасность</i>				
37	Подготовка к социально-психологическому тестированию (сбор сведений, проверка технических возможностей)	I-V	01.08.2024-31.08.2024	Первушина А. А.
38	Размещение информационных материалов по вопросам антитеррористической защищённости	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Волков С. А., Пономарева Т. В.
39	Профилактика деструктивных явлений в студенческой среде (подготовка и размещение публикаций на сайте ФГХ, в сообществе «Педагог-психолог УГГУ» и подготовка информационных листов-вкладышей)	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Первушина А.А.
40	Подготовка к социально-психологическому тестированию	I-V	01.09.2024-30.09.2024	Первушина А .А.

	(подготовка списков, генерация паролей, информационная кампания)			
41	Размещение информационных материалов об антикоррупционных мероприятиях и нормативной базе в сфере противодействия коррупции	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Волков С. А., Пономарева Т. В.
42	Патриотическая акция, посвященная Дню солидарности в борьбе с терроризмом	I-V	03.09.2024	Старостин А. Н. Суслонов П. Е
43	Проведение социально-психологического тестирования	I-V	01.10.2024-30.10.2024	Первушина А. А.
44	Основы безопасного общения и способы защиты от негативного влияния со стороны лиц и групп деструктивной и экстремистской направленности (беседа-тренинг с обучающимися)	I-V	01.10.2024-30.10.2024	Старостин А. Н. Суслонов П. Е
45	Подготовка документации по итогам социально-психологического тестирования	I-V	01.11.2024-30.11.2024	Первушина А. А.
46	Разговор на равных (Тема: профилактика межнациональных и межконфессиональных конфликтов)	I-V	12.11.2024	Старостин А. Н.
47	Организация процедуры получения результатов социально-психологического тестирования и подготовка плана работы с лицами «группы риска»	I-V	01.12.2024-30.12.2024	Первушина А. А.
48	Профилактика деструктивных явлений в период сессии: публикация «От сессии до сессии... Продолжение»	I-V	10.01.2025	Первушина А. А.
49	Профилактика деструктивных явлений в студенческой среде: публикации информационно-просветительского, профилактического характера на психологическую тематику: «Моя свобода и/или свобода другого?» (профилактика буллинга/кибербуллинга)	I-V	01.03.2025-31.03.2025	Первушина А. А.

50	Профилактика деструктивных явлений в студенческой среде: публикации информационно-просветительского, профилактического характера на психологическую тематику: «Кому выгодно кормить наше ЭГО?» (профилактика правонарушений и экстремистских проявлений)	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Первушина А. А.
<i>9. Социальное партнёрство и участие работодателей</i>				
51	Уральский горнопромышленный форум	I-V	01.10.2024-31.10.2024	Костюк П. А.
52	Экскурсионные мероприятия (Альфа-банк)	I-V	04.12.2024	Коновалов П. А.
53	VIII Международный инженерный чемпионат Case-in	I-V	01.03.2025-31.03.2025	Костюк П. А.
54	Экскурсионные мероприятия (Екатеринбургский метрополитен)	I-V	29.03.2025	Коновалов П. А., Коренькова М. А.
55	Всероссийский фестиваль по робототехнике	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Кухарева А. А.
56	Ярмарка студентов	I-V	20.04.2025	Коренькова М. А.
57	Уральская горнопромышленная декада	I-V	01.05.2025-30.05.2025	Валиев Н. Г. Лебзин М. С.
<i>10. Профессиональное развитие, адаптация и трудоустройство</i>				
58	Профориентационные презентации для абитуриентов	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Кухарева А. А.
59	Экскурсии по УГГУ для абитуриентов	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Кухарева А. А.
60	Культурно-массовое мероприятие «Межвузовский Since-Slame»	I-V	02.11.2024-03.11.2024	Шехтман Д. А.
61	День памяти погибших при исполнении служебных обязанностей сотрудников органов внутренних дел	I-V	08.11.2024	Мальцев Н. В.
62	Культурно-массовое мероприятие «Экскурсия в Уральский геологический музей»	I-V	17.11.2024	Иванова Н. С.
63	Отборочный этап студенческих проектов «Проектный конвейер»	I-V	19.11.2024	Шехтман Д. А.
64	Лекция от приглашенного спикера для обучающихся о развитии личностных качеств	I-V	24.11.2024	Коновалов П. А.
65	День юриста	I-V	03.12.2024	Мальцев Н. В.

66	Тематическая выставка «Пожарное и спасательное дело в России»	I-V	09.01.2025-31.01.2025	Справцева Е. А.
67	Конкурс профессионального мастерства «Студенческий лидер УГГУ»	I-V	25.03.2025	Коновалов П. А.
68	День открытых дверей УГГУ	I-V	26.03.2025	Гензель О. В.
69	Организация и проведение мероприятия «Встреча выпускников всех поколений и День геолога»	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Нижников Е. В.
70	Тематическая выставка «Нефтегазовая отрасль – поле для инноваций»	I-V	01.04.2025-15.04.2025	Справцева Е. А.
71	Поход студентов геологов «Тур де ФГиГ»	I-V	04.05.2025	Коновалов П. А.
72	Организация и проведение мероприятия «Торжественное вручение дипломов выпускникам УГГУ»	I-V	01.07.2025-10.07.2025	Нижников Е. В.
<i>II. Воспитание здорового образа жизни</i>				
73	Проект «Уральская студенческая баскетбольная лига»	I-V	01.09.2024-25.12.2024	Сухомлин С. Д.
74	Психологическое консультирование	I-V	01.09.2024-25.06.2025	Первушина А. А.
75	Спортивно-массовое мероприятие «Турнир по Пейнтболу среди обучающихся УГГУ»	I-V	20.09.2024-24.09.2024	Сухомлин С. Д.
76	Осенний турслет	I-V	24.09.2024-26.09.2024	Комаров А. А.
77	Чемпионат УГГУ по стрельбе «Меткий стрелок»	I-V	25.10.2024-31.10.2024	Комаров А. А.
78	Спортивно-массовое мероприятие «День Рождение ССК УГГУ «Горная Машина»	I-V	07.11.2024	Сухомлин С. Д.
79	Профилактическое мероприятие «Экспресс-тестирование на ВИЧ»	I-V	18.11.2024-19.11.2024	Медяникова Н. Г.
80	Спортивно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Неделя баскетбола»	I-V	13.12.2024-20.12.2024	Сухомлин С. Д.
81	Студенческий спортивный баттл	I-V	17.12.2024	Сухомлин С. Д.
82	Фестиваль зимних видов спорта, посвященный Всемирному дню снега	I-V	15.01.2025-16.01.2025	Сухомлин С. Д.
83	Внутривузовский отборочный этап чемпионата АССК России по 5-и видам спорта	I-V	15.02.2025–01.03.2025	Сухомлин С. Д.

84	Спортивно-массовое мероприятие Турнир по страйк-болу среди факультетов УГГУ, посвященный 23 февраля	I-V	21.02.2025	Коновалов П. А.
85	Спортивный турнир среди женских команд факультетов УГГУ, посвященный «Международному женскому дню»	I-V	04.03.2025	Коновалов П. А.
86	Проект «От Студзачета к знаку отличия ГТО»	I-V	14.03.2025-21.03.2025	Сухомлин С. Д.
87	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по баскетболу	I-V	15.03.2025	Коновалов П. А.
88	Профилактическое мероприятие для обучающихся УГГУ «Экспресс-тестирование на ВИЧ»	I-V	16.03.2025	Медяникова Н. Г.
89	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по настольному теннису	I-V	16.03.2025	Коновалов П. А.
90	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по стрельбе из пневматического ружья	I-V	17.03.2025	Коновалов П. А.
91	Спортивное мероприятие туристического клуба «Скалы Петра Гронского»	I-V	19.03.2025	Комаров А. А.
92	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по мини-футболу	I-V	22.03.2025	Коновалов П. А.
93	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по волейболу	I-V	23.03.2025	Коновалов П. А.
94	Ежегодная спартакиада общежитий УГГУ по шахматам	I-V	24.03.2025	Коновалов П. А.
95	Оценка уровня информированности и отношение к проблеме эпидемии ВИЧ-инфекции среди студентов	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Медяникова Н. Г.
96	Поход туристического клуба «Авантюрин» - «Покорение скал»	I-V	02.04.2025-03.04.2025	Комаров А. А.
97	Мероприятие, приуроченное к Всемирному дню здоровья	I-V	07.04.2025	Коновалов П. А.
98	Профилактическая акция для обучающихся УГГУ «Что выберешь ты?»	I-V	14.04.2025	Коновалов П. А.
99	Фестиваль летних уличных видов спорта «Горный X-games»	I-V	06.06.2025	Сухомлин С. Д.
12. Художественно-эстетическое воспитание				

100	Культурно-массовое мероприятие «День знаний»	I-V	01.09.2024	Нижников Е. В
101	Участие университетской команды КВН в центральной/официальной лиге МС КВН (полуфинал)	I-V	01.09.2024 30.10.2024	Нижников Е. В
102	Участие коллектива УГГУ «ГрандМажор» в Международном фестивале по «Мажореткам»	I-V	01.10.2024- 30.10.2024	Нижников Е. В.
103	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Литературный вечер»	I-V	07.10.2024	Коновалов П. А.
104	Культурно-массовое мероприятие «День культуры африканских стран»	I-V	12.10.2024	Иванова Н. С.
105	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ – Флешмоб, посвященный Дню первокурсника	I-V	14.10.2024- 21.10.2024	Коновалов П. А.
106	Культурно-массовое мероприятие Смотр Художественной Самодельности для обучающихся первого курса	I-V	20.10.2024	Коновалов П. А.
107	Культурно-массовое мероприятие «День первокурсника»	I-V	21.10.2024	Нижников Е. В.
108	Международная просветительская акция «Большой этнографический диктант»	I-V	01.11.2024- 30.11.2024	Старостин А. Н., Суслонов П. Е.
109	Участие университетской команды КВН в центральной/официальной лиге МС КВН (финал)	I-V	01.11.2024- 30.11.2024	Нижников Е. В.
110	Фестиваль команд КВН «Уральские горы юмора»	I-V	25.11.2024	Нижников Е. В.
111	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся УГГУ «Зимний бал 2024»	I-V	23.12.2024	Коновалов П. А.
112	Культурно-массовое мероприятие «Новый Год для детей работников УГГУ»	I-V	23.12.2024	Шехтман Д. А.
113	Культурно-массовое мероприятие «Новый год для иностранных студентов УГГУ». Конкурс рассказов о национальных новогодних традициях	I-V	24.12.2024	Иванова Н. С.
114	Конкурс красоты «Мисс и Мистер УГГУ-2025»	I-V	24.03.2025	Нижников Е. В.
115	Культурно-массовое мероприятие для обучающихся	I-V	21.04.2025	Коновалов П. А.

	УГГУ «Смотр художественной самодеятельности»			
116	Отчетный концерт студенческого культурного центра	I-V	26.05.2025	Нижников Е. В.
	<i>13. Экологическое воспитание</i>			
117	Экологическая акция по сбору отработанных батареек и пластиковых крышечек	I-V	01.09.2024-30.09.2024	Ершова А. А.
118	Реализация проекта «Экодворы» с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	01.09.2024-30.12.2024	Ершова А. А.
119	Проведение субботников, совместно с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	20.09.2024-20.10.2024	Ершова А. А.
120	Посадки саженцев деревьев с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	20.09.2024-20.11.2024	Ершова А. А.
121	Экологические занятия в школах г. Екатеринбург	I-V	01.01.2025-30.04.2025	Ершова А. А.
122	Выезд эковолонтеров университета ИЭФ-TRIP “Источники”	I-V	17.02.2025	Коновалов П. А.
123	Проведение субботников, совместно с Всероссийским экологическим движением «Делай!»	I-V	01.04.2025-30.04.2025	Ершова А. А.
124	Выезд эковолонтеров университета ИЭФ-TRIP «Челябинская область»	I-V	11.05.2025	Коновалов П. А.
	<i>14. Волонтерское движение</i>			
125	Ежегодная благотворительная акция «Полезная макулатура»	I-V	01.11.2024-01.12.2024	Коновалов П. А., Ершова А. А.
126	День добровольца (волонтера) в России	I-V	05.12.2024	Ершова А. А.
127	Акция, приуроченная к национальному дню донора в России	I-V	26.04.2025	Коновалов П. А.
128	Посещение волонтерами ветеранов ВОВ и тружеников тыла, приуроченное ко «Дню Победы»	I-V	02.05.2025-11.05.2025	Ершова А. А.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация

**Геофизические методы поиска и разведки месторождений
полезных ископаемых**

Автор: Вандышева К. В., к.г.-м.н.

Одобрена на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 29.09.2023

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Геологии и геофизики

(название факультета)

Председатель

Вандышева К. В.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 13.10.2023

(Дата)

Екатеринбург
2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	
1 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ	3
1.1 Требования к выпускной квалификационной работе	
1.2 Порядок выполнения выпускной квалификационной работы	
2 КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ И ЗАЩИТЫ ВЫ- ПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ	16
3 ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ	18
3.1 Тематика выпускных квалификационных работ	
3.2 Теоретические вопросы государственной итоговой аттестации, оценивающие сформированность общекультурных компетенций	
3.3 Теоретические вопросы государственной итоговой аттестации, оценивающие сформированность общепрофессиональных компетенций	
ПРИЛОЖЕНИЯ	20

ВВЕДЕНИЕ

Программа государственной итоговой аттестации по основной профессиональной образовательной программе по специальности 21.05.03 Технология геологической разведки, специализация «Геофизические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых» составлена в соответствии с требованиями:

- Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 29.06.2015 № 636;

- Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - специалитет по специальности 21.05.03 Технология геологической разведки, утверждённый приказом Минобрнауки России от 12.08.2020 № 977;

- локальных нормативных актов университета, регламентирующих порядок проведения государственной итоговой аттестации.

Программа государственной итоговой аттестации включает:

I. Требования к выпускным квалификационным работам и порядку их выполнения (методические рекомендации по выполнению выпускных квалификационных работ);

II. Критерии оценки защиты выпускных квалификационных работ;

III. Оценочные материалы.

IV. Приложения

I МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1.1 ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

1.1.1 Общие положения

Государственная итоговая аттестация представляет собой процесс итоговой проверки и оценки компетенций выпускника, полученных в результате обучения. Государственная итоговая аттестация выпускника высшего учебного заведения является обязательной и осуществляется после освоения образовательной программы в полном объеме. Цель итоговой государственной аттестации выпускников – установление уровня готовности выпускника к выполнению профессиональных задач.

Государственная итоговая аттестация выпускников, завершивших освоение основной профессиональной образовательной программы по специальности 21.05.03 Технология геологической разведки, специализация «Геофизические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых» осуществляется в форме подготовки к процедуре защиты и защиты выпускной квалификационной работы.

Трудоемкость государственной итоговой аттестации – 12 з.е.:

- подготовка к процедуре защиты выпускной квалификационной работы – 9 з.е.;

- процедура защиты выпускной квалификационной работы – 3 з.е.

Трудоемкость государственной итоговой аттестации				
кол-во з.е.	часы			
	общая	контактная работа	СР	
9	432	35	397	Подготовка к процедуре защиты выпускной квалификационной работы
3	108		108	Процедура защиты ВКР

1.1.2 Цели и задачи выпускной квалификационной работы

Цель выполнения выпускной квалификационной работы (далее – ВКР):

систематизация, закрепление и расширение теоретических и практических знаний по направлению специальности и применение этих знаний при решении конкретных профессиональных задач;

развитие навыков ведения самостоятельной работы и применения методик исследования и экспериментирования при решении разрабатываемых в выпускной квалификационной работе проблем и вопросов;

выяснение подготовленности обучающихся для самостоятельной работы по задачам профессиональной деятельности, определенных федеральным государственным образовательным стандартом (далее - ФГОС) специальности.

Выпускная квалификационная работа выполняется, как правило, на материалах организаций (баз практики) с учетом проблем, требующих решения в данной организации.

Основными задачами, которые должен решить обучающийся при выполнении выпускной квалификационной работы являются:

обоснование актуальности и значимости выбранной темы работы с точки зрения теории и практики управления деятельностью предприятия, составление программы исследования;

изучение теоретических положений по проблеме, составление литературного обзора по проблеме исследования;

обоснование необходимости и возможности применения определенных современных методик принятия управленческих решений по задачам, поставленным в работе;

сбор необходимой для проведения исследования информации с привлечением первичных и вторичных источников и использованием адекватных методов;

разработка практических рекомендаций и предложений, их экономическое и организационное обоснование, необходимое и достаточное для решаемой задачи;

обобщение результатов проведенных исследований, формулирование выводов о степени достижения целей, поставленных в работе, и возможности практического применения предложенных разработок;

оформление ВКР в соответствии с нормативными требованиями.

В ходе государственной итоговой аттестации проверяется сформированность следующих компетенций:

Универсальных

<i>Код и наименование компетенции</i>	<i>Код и наименование индикатора достижения компетенции</i>
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1.Выбирает информационные ресурсы для поиска информации в соответствии с поставленной задачей УК-1.2.Оценивает соответствие выбранного информационного ресурса критериям полноты и аутентичности УК-1.3.Систематизирует обнаруженную информацию, полученную из разных источников, в соответствии с требованиями и условиями задачи УК-1.4.Использует системный подход для решения поставленных задач.
УК-2. Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Разрабатывает план осуществления проекта на всех этапах его жизненного цикла с учетом потребностей в необходимых ресурсах, имеющихся ограничений, возможных рисков; УК-2.2 Осуществляет мониторинг реализации проекта на основе структуризации всех процессов и определения зон ответственности его участников. УК-2.3 Публично представляет результаты проекта, вступает в обсуждение хода и результатов проекта.
УК-3. Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи. УК-3.2 Вырабатывает стратегию командной работы и на ее основе организует отбор членов команды для достижения поставленной цели. УК-3.3 Организует и корректирует работу команды в том числе на основе коллегиальных решений.

УК-4. Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.1. Ведет обмен деловой информацией в устной и письменной формах на государственном языке. УК-4.2. Ведет обмен деловой информацией в устной и письменной формах не менее чем на одном иностранном языке. УК-4.3. Использует современные информационно-коммуникативные средства для коммуникации.
УК-5. Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия	УК-5.1. Толерантно воспринимает социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия УК-5.2. Анализирует современное состояние общества на основе знания истории. УК-5.3. Интерпретирует проблемы современности с позиций этики и философских знаний.
УК-6. Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки и образования в течение всей жизни	УК-6.1. Эффективно планирует собственное время. УК-6.2. Планирует траекторию своего профессионального развития и предпринимает шаги по ее реализации УК-6.3. Адекватно определяет свою самооценку, осуществляет самопрезентацию, составляет резюме
УК-7. Способен поддерживать должный уровень физической подготовленности для обеспечения полноценной социальной и профессиональной деятельности	УК-7.1. Использует основы физической культуры для осознанного выбора здоровьесберегающих технологий с учетом внутренних и внешних условий реализации конкретной профессиональной деятельности. УК-7.2. Выполняет индивидуально подобранные комплексы оздоровительной или адаптивной физической культуры. УК-7.3. Выбирает и применяет рациональные способы и приемы сохранения физического здоровья, профилактики заболеваний, психофизического и нервно-эмоционального утомления
УК-8. Способен создавать и поддерживать в повседневной жизни и в профессиональной деятельности безопасные условия жизнедеятельности для сохранения природной среды, обеспечения устойчивого развития общества, в том числе при угрозе и возникновении чрезвычайных ситуаций и военных конфликтов	УК-8.1. Выявляет возможные угрозы для жизни и здоровья в повседневной и профессиональной деятельности. УК-8.2. Понимает, как создавать и поддерживать безопасные условия жизнедеятельности, том числе при возникновении чрезвычайных ситуаций и военных конфликтов. УК-8.3. Демонстрирует приемы оказания первой помощи
УК-9. Способен использовать базовые дефектологические знания в социальной и профессиональной сферах	УК-9.1. Применяет базовые дефектологические знания в социальной и профессиональной сферах УК-9.2. Применяет навыки взаимодействия в социальной и профессиональной сферах с лицами из числа инвалидов и лицами с ограниченными возможностями здоровья
УК-10. Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности	УК-10.1. Понимает основные проблемы, базовые принципы и законы функционирования экономики, роль государства в экономическом развитии УК-10.2. Понимает поведение потребителей и производителей экономических благ, особенности рынков факторов производства. УК-10.3. Понимает цели, виды и инструменты государственной экономической политики и их влияние на субъектов экономики УК-10.4. Применяет методы личного финансового планирования, использует финансовые инструменты для управления собственным бюджетом, контролирует личные финансовые риски
УК-11. Способен формировать нетерпимое отношение к проявлениям экстремизма, терроризма, коррупционному поведению и противодействовать им в профессиональной деятельности	УК-11.1. Знает законодательство, направленное на борьбу с экстремизмом, терроризмом, коррупцией УК-11.2. Понимает правовые нормы, обеспечивающие борьбу с экстремизмом, терроризмом, коррупцией в различных областях жизнедеятельности

общепрофессиональных

<i>Код и наименование компетенции</i>	<i>Код и наименование индикатора достижения компетенции</i>
ОПК-1. Способен применять правовые основы геологического изучения недр и недропользования, обеспечения экологической и промышленной безопасности и уметь их учитывать при поисках, разведке и эксплуатации месторождений полезных ископаемых, а также строительстве	ОПК-1.1 Понимает правовые основы недропользования, обеспечение экологической и промышленной безопасности ОПК -1.2 Применяет правовые основы геологического изучения недр и их использования для оценки экологической и промышленной безопасности.
ОПК-2. Способен применять методы и способы геолого-экономической оценки минерально-сырьевой базы и месторождений полезных ископаемых	ОПК-2.1 Понимает методы и способы геолого-экономической оценки месторождений полезных ископаемых. ОПК-2.2 Применяет методику геолого-промышленной оценки месторождений полезных ископаемых. ОПК-2.3 Выбирает методы и способы геолого-экономической оценки минерально-сырьевой базы страны.
ОПК-3. Способен применять основные положения фундаментальных естественных наук и научных теорий при проведении научно-исследовательских работ по изучению и воспроизводству минерально-сырьевой базы	ОПК-3.1 Выбирает основные положения естественных наук научных теорий при проведении научно-исследовательских работ по изучению и освоению минерально-сырьевой базы. ОПК-3.2 Использует основные положения естественных наук при проведении научно-исследовательских работ по изучению и пополнению минерально-сырьевой базы.
ОПК-4. Способен применять методы обеспечения безопасности жизнедеятельности, в том числе в условиях чрезвычайных ситуаций, при производстве работ по геологическому изучению недр, поискам, разведке, добыче и переработке полезных ископаемых, промышленно-гражданскому строительству	ОПК-4.1 Определяет методы обеспечения безопасности жизнедеятельности, в том числе в условиях чрезвычайных ситуаций, при производстве работ по геологическому изучению недр, поискам, разведке, добыче и переработке полезных ископаемых. ОПК-4.2 Реализует методы обеспечения безопасности жизнедеятельности, в том числе в условиях чрезвычайных ситуаций, при производстве работ на всех стадиях по геологическому изучению недр и переработке полезных ископаемых.
ОПК-5. Способен применять навыки анализа горно-геологических условий при поисках, оценке, разведке и добыче полезных ископаемых, а также при гражданском строительстве	ОПК-5.1 Анализирует горно-геологические условия при поисках, оценке, разведке и добыче полезных ископаемых, а также при гражданском строительстве ОПК-5.2 Реализует на практике анализ горно-геологических условий при поисках, оценке, разведке и добыче полезных ископаемых, а также при гражданском строительстве
ОПК-6. Способен работать с программным обеспечением общего, специального назначения, в том числе моделировать горные и геологические объекты	ОПК-6.1 Имеет представления о программном обеспечении общего и специального назначения. ОПК-6.2. Выбирает и применяет программное обеспечение общего, специального назначения, и создавать модели горные и геологические объекты
ОПК-7. Способен осуществлять техническое руководство горными и взрывными работами при поисках, разведке и разработке месторождений полезных ископаемых, гражданском строительстве, в том числе в условиях чрезвычайных ситуаций	ОПК-7.1 Имеет представление о методике технического руководства горными и взрывными работами на всех стадиях геологических работ. ОПК-7.2 Реализует техническое руководство горными и взрывными работами при геологоразведочных работах, гражданском строительстве, в том числе в условиях чрезвычайных ситуаций
ОПК-8. Способен применять основные методы, способы и средства получения, хранения и обработки информации, используя навыки работы с компьютером как средством управления информацией	ОПК-8.1 Предлагает основные методы, способы и средства получения, хранения и обработки информации, используя навыки работы с компьютером как средством управления информацией ОПК-8.2 Выбирает и применяет основные методы, способы и средства получения, хранения и обработки информации, используя навыки работы с компьютером как средством управления информацией
ОПК-9. Способен ориентироваться на местности, определять пространственное положение объектов, осуществлять необходимые	ОПК-9.1 Имеет представления об ориентировании на местности, определении пространственного положения объектов. ОПК-9.2 Свободно ориентируется на местности, определяет пространственное положение объектов, осуществляет необходимые

геодезические и маркшейдерские измерения, обрабатывать и интерпретировать их результаты	геодезические и маркшейдерские измерения, обрабатывает и интерпретирует их результаты
ОПК-10. Способен планировать, проектировать, организовывать геологоразведочные и горные работы, вести учет и контроль выполняемых работ, анализировать оперативные и текущие показатели производства, обосновывать предложения по совершенствованию организации производства, оперативно устранять нарушения производственных процессов	ОПК-10.1 Планирует, проектирует организацию геологоразведочных и горных работ, ведения учета и контроля выполняемых работ. ОПК-10.2. Анализирует оперативные и текущие показатели производства, обосновывает предложения по совершенствованию организации производства, оперативно устраняет нарушения производственных процессов.
ОПК-11. Способен в составе творческих коллективов и самостоятельно, контролировать соответствие проектов требованиям стандартов, техническим условиям и документам промышленной безопасности, разрабатывать, согласовывать и утверждать в установленном порядке технические и методические документы, регламентирующие порядок, качество и безопасность выполнения поисковых, геологоразведочных, горных и взрывных работ	ОПК-11.1 Контролирует соответствие проектов требованиям стандартов, техническим условиям и документам промышленной безопасности. ОПК-11.2 Разрабатывает, согласовывает и утверждает в установленном порядке технические и методические документы, регламентирующие порядок, качество и безопасность выполнения поисковых, геологоразведочных, горных и взрывных работ.
ОПК-12. Способен проводить самостоятельно или в составе группы научный поиск, реализуя специальные средства и методы получения нового знания, участвовать в научных исследованиях объектов профессиональной деятельности и их структурных элементов	ОПК-12.1 Применяет специальные средства и методы получения нового знания. ОПК-12.3 Самостоятельно или в составе группы участвует в научных исследованиях объектов профессиональной деятельности и их структурных элементов.
ОПК-13. Способен изучать и анализировать вещественный состав горных пород и руд и геолого-промышленные и генетические типы месторождений полезных ископаемых при решении задач по рациональному и комплексному освоению минерально-сырьевой базы	ОПК-13.1. Демонстрирует знания вещественного состава горных пород и руд и геолого-промышленных и генетических типов месторождений полезных ископаемых. ОПК-13.2 Анализирует вещественный состав горных пород и руд и геолого-промышленные и генетические типы месторождений полезных ископаемых при решении задач по рациональному и комплексному освоению минерально-сырьевой базы.
ОПК-14. Способен выполнять маркетинговые исследования, проводить экономический анализ затрат для реализации процессов геологоразведочного производства в целом	ОПК-14.1 Имеет представление о маркетинговых исследованиях, с проведением экономического анализа затрат на геологоразведочные работы ОПК-14.2 Осуществляет маркетинговые исследования, проводит экономический анализ затрат для реализации процессов геологоразведочного производства в целом.
ОПК-15. Способен участвовать в разработке и реализации образовательных программ в сфере своей профессиональной деятельности, используя профессиональные знания	ОПК-15.1 Разрабатывает и реализует образовательные программы в сфере своей профессиональной деятельности.

профессиональных

<i>Код и наименование профессиональной компетенции</i>	<i>Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции</i>
ПК-1.1 Способен отслеживать тенденции и направления развития эффективных технологий геологической разведки, проявлением профессионального интереса к развитию смежных областей	ПК-1.1.1 Представляет тенденции и направления развития эффективных технологий геологической разведки ПК-1.1.2 Проявляет профессиональный интерес к развитию смежных областей

ПК-1.2. Способен проводить математическое моделирование и исследование геофизических процессов и объектов специализированными геофизическими информационными системами, в том числе стандартными пакетами программ	ПК-12.1 Имеет представление о математическом моделировании и исследовании геофизических процессов и объектов ПК-1.2.2 Специализированными геофизическими информационными системами, в том числе стандартными пакетами программ, проводит математическое моделирование и исследование геофизических процессов и объектов
ПК-1.3 Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат	ПК-1.3.1 Выявляет естественнонаучную сущность проблем профессиональной деятельности ПК-1.3.2 Привлекает физико-математический аппарат в ходе профессиональной деятельности для решения конкретных задач
ПК-1.4. Способен выполнять поверку, калибровку, настройку и эксплуатацию геофизической техники в различных геолого-технических условиях	ПК-1.4.1 Имеет представление о ведении технической документации по поверке, калибровке, настройке и эксплуатации геофизической техники в различных геолого-технических условиях ПК-1.4.2 Выполняет поверку, калибровку, настройку и эксплуатацию геофизической техники в различных геолого-технических условиях
ПК-1.5. Способен решать прямые и обратные (некорректные) задачи геофизики на высоком уровне фундаментальной подготовки по теоретическим, методическим и алгоритмическим основам создания новейших технологических геофизических процессов	ПК-1.5.1 Использует фундаментальную подготовку по теоретическим, методическим и алгоритмическим основам создания новейших технологических геофизических процессов ПК-1.5.2 Пользуясь фундаментальной подготовкой по теоретическим, методическим и алгоритмическим основам создания новейших технологий решает прямые и обратные (некорректные задачи) геофизики
ПК-1.6 способен профессионально эксплуатировать современное геофизическое оборудование, оргтехнику и средства измерения	ПК-1.6.1 Профессионально эксплуатирует современное геофизическое оборудование, оргтехнику и средства измерения
ПК-1.7. Способен разрабатывать комплексы геофизических методов разведки и методики их применения в зависимости от изменяющихся геолого-технических условий и поставленных задач	ПК-1.7.1. Демонстрирует знания о комплексах геофизических методах разведки ПК-1.7.2. Разрабатывает комплексы геофизических методов разведки и методики их применения в зависимости от изменяющихся геолого-технических условий и поставленных задач
ПК-1.8. Способен выполнять правила безопасного труда и охраны окружающей среды на объектах геологоразведочных работ	ПК-1.8.1 Выполняет правила безопасного труда и охраны окружающей среды на объектах геологоразведочных работ

При выполнении выпускной квалификационной работы обучающиеся должны *показать*, опираясь на полученные знания, умения и полученные навыки:

сформированные универсальные, общепрофессиональные и профессиональные компетенции;

способность самостоятельно решать на современном уровне задачи своей профессиональной деятельности;

навыки постановки исследовательской проблемы, ее самостоятельного обсуждения, анализа возможных вариантов ее решения;

способность грамотно излагать специальную информацию, аргументировать и защищать свою точку зрения;

умение самостоятельного квалифицированного библиографического поиска, изучения и анализа научной литературы по теме;

навыки использования методологических, историко-философских и конкретных знаний, полученных в процессе обучения, для решения поставленной в работе проблемы;

умение написания профессионально грамотного текста и оформления его в соответствии с требованиями, предъявляемыми к научным публикациям;

использование в работе современных технологий.

1.1.3 Общие требования к выпускной квалификационной работе

Выпускная квалификационная работа должна отвечать следующим требованиям:

- быть актуальной (иметь теоретическое обоснование актуальности изучаемой проблемы в современных условиях хозяйственной деятельности);
- носить научно-исследовательский характер;
- представлять самостоятельное исследование, демонстрирующее способность выпускника решать профессиональные проблемы, делать на основе анализа геологической литературы соответствующие выводы и вносить предложения;
- отражать добросовестность обучающегося в использовании опубликованных материалов других авторов.

Общие требования к выпускной квалификационной работе – целевая направленность; четкость построения; логическая последовательность изложения материала; глубина исследования и полнота освещения вопросов; убедительность аргументаций; доказательность выводов и обоснованность рекомендаций; грамотное оформление.

Текст выпускной квалификационной работы должен демонстрировать:

- знакомство автора с литературой вопроса;
- умение выделить проблему и определить методы ее решения;
- умение последовательно изложить существо рассматриваемых вопросов, грамотно цитировать ведущих исследователей, делать ссылки на использованные источники;
- умение собирать, обобщать, анализировать практические материалы, полученные в результате собственного исследования в организации практики;
- достоверность и конкретность изложения фактических и экспериментальных данных о работе организации;
- обоснование выводов и предложений по результатам исследования, их конкретный характер, практическую ценность для решения исследуемых проблем;
- владение соответствующим понятийным и терминологическим аппаратом;
- четкость и логичность изложения мыслей, доказательность целесообразности и эффективности предлагаемых решений;
- приемлемый уровень языковой грамотности, включая владение функциональным стилем научного изложения.

1.1.4 Выбор, согласование и утверждение темы выпускной квалификационной работы

Выбор темы выпускной квалификационной работы осуществляется обучающимся по согласованию с руководителем ВКР и специалистами организации-базы практики, где будет проходить преддипломная практика. При выборе темы ВКР необходимо исходить из:

- актуальности проблемы и значимости ее для научной и практической деятельности;
- потребностей развития и совершенствования деятельности конкретной организации;
- интересов, склонностей в научно-исследовательской работе обучающегося, а также перспектив его будущей профессиональной деятельности;
- возможности получения информации для проведения анализа и обоснования предлагаемых решений.

Примерный перечень тем выпускных квалификационных работ разрабатывается выпускающей кафедрой и доводится до сведения обучающихся. Обучающийся может предложить свою тему, обосновав целесообразность ее разработки. Тема выпускной квалификационной работы может являться продолжением тем, ранее представленных обучающимся в рамках курсовых работ (проектов).

Для успешного выполнения выпускной квалификационной работы необходимо уже на первом этапе (выбор темы) четко сформулировать цель работы (отражающуюся в ее названии) и задачи.

После выбора темы, согласования ее с руководителем ВКР, обучающийся подает заявле-

ние на имя заведующего кафедрой об утверждении темы выпускной квалификационной работы (приложение 1).

Закрепление тем выпускных квалификационных работ за обучающимися оформляется приказом по университету. Следует иметь в виду, что **тема, утвержденная приказом ректора университета, изменению не подлежит**. Исключение могут составить лишь случаи возникновения объективных непреодолимых препятствий к ее разработке. Изменение оформляется приказом по университету на основании письменного заявления обучающегося и представления заведующего кафедрой.

1.1.5 Структура и содержание выпускной квалификационной работы

Структурные элементы выпускной квалификационной работы **перечислены ниже в порядке их расположения и брошюровки**.

1. Титульный лист (приложение 2)

2. Сопроводительные документы к выпускной квалификационной работе:

2.1 Задание на выполнение выпускной квалификационной работы (приложение 3).

2.2 Отзыв руководителя ВКР (приложение 4).

2.3 Отзыв рецензента (приложение 5).

2.4 Если результаты исследования нашли практическое применение, то прилагается документ, подтверждающий внедрение результатов исследования в практическую деятельность (приложение 6)

2.5 Справка о проверке с системе «Антиплагиат. ВУЗ» (приложение 7).

3. Содержание (приложение 8).

4. Введение.

5. Основная часть работы.

6. Заключение.

7. Список использованных источников (приложение 9).

8. Приложения.

Титульный лист должен содержать все необходимые идентификационные признаки, в частности, название работы, указание автора работы, руководителя.

На титульном листе подписью руководителя, консультанта (при наличии) подтверждается допуск выпускной квалификационной работы к защите.

Титульный лист учитывается в общей нумерации страниц выпускной квалификационной работы, порядковый номер на титульном листе не ставится.

Сопроводительные документы подшиваются следом за титульным листом работы, но в общей нумерации страниц выпускной квалификационной работы они не учитываются и порядковые номера на них не ставятся.

Цель составления *задания на выполнение выпускной квалификационной работы* – уяснение замысла работы и поставленных в ней основных проблем. Оформление задания на работу предполагает составление под контролем руководителя ВКР плана будущей работы.

Наличие *содержания* (плана работы) позволяет уйти от освещения вопросов, не относящихся к теме работы, обеспечить четкость и последовательность изложения материала, избежать пробелов и повторений, рационально организовать самостоятельный труд, сэкономить время.

Содержание работы помещают после справки о внедрении (если она есть). Слово «СОДЕРЖАНИЕ» записывают в виде заголовка симметрично тексту прописными буквами. В содержании работы указывается перечень всех глав и параграфов выпускной квалификационной работы, а также номера страниц, с которых начинается каждый из них (точно по тексту). Главы

в выпускной квалификационной работе должны иметь в пределах всей работы порядковые номера, обозначенные арабскими цифрами. Параграфы каждой главы должны иметь нумерацию в пределах каждой главы. Номер параграфа состоит из номера главы и непосредственно номера параграфа в данной главе, отделенного от номера главы точкой. Заголовки содержания должны точно повторять заголовки в тексте. Сокращать или давать их в другой формулировке, последовательности и соподчиненности по сравнению с заголовками в тексте нельзя.

При этом надо иметь в виду, что названия глав и параграфов не должны дублировать друг друга, а также наименование темы работы. Каждая глава должна раскрывать часть темы, каждый параграф главы – часть содержания главы.

Введение, заключение, список использованных источников включают в содержание, но не нумеруют.

Пример оформления содержания выпускной квалификационной работы приведен в приложении 8.

Страницы содержания учитываются в общей нумерации страниц выпускной квалификационной работы, порядковый номер на странице не ставится.

Выполнение выпускной квалификационной работы рекомендуется начинать с написания «ВВЕДЕНИЯ». Естественно, в процессе исследования первичный текст введения будет меняться, иногда очень существенно. Но это не отрицает необходимости на начальном этапе поставить перед собой задачи исследования, отражаемые во введении.

«ВВЕДЕНИЕ» в общем случае имеет следующую структуру:

актуальность выбранной темы,

формулировка цели и определение конкретных задач исследования (они найдут отражение в содержании работы),

выбор объекта и предмета исследования,

информационная база исследования;

структура выпускной квалификационной работы.

Во введении следует коротко сформулировать актуальность темы исследования, т.е. причину возникновения проблемы и ее суть. Актуальность определяется как значимость, важность и приоритетность выбранной темы исследования среди других тем. Она должна подтверждаться положениями и доводами, свидетельствующими в пользу научной и практической значимости решения проблем и вопросов, исследуемых в работе. Необходимо объяснить, почему именно выбранная тема представляет интерес на современном этапе развития. Обоснование актуальности темы работы не должно быть многословным. Главное – показать, как автор оценивает своевременность и социальную значимость выбранной темы.

От доказательства актуальности следует перейти к формулировке цели исследования. Цель исследования – это образ желаемого результата, то, что намерен достичь автор работы.

Цель выпускной квалификационной работы должна соответствовать названию темы. Цель работы формулируется кратко и точно. Например, «Цель выпускной квалификационной работы – составление проекта на проведение эксплуатационной разведки в пределах северной части дайки Елизаветинская Березовского золоторудного месторождения». Конкретизация цели осуществляется в задачах исследования. «Исходя из поставленной цели, были поставлены следующие задачи выпускной квалификационной работы:

- обоснование методики эксплуатационной разведки;
- выбор технологии проходки горных выработок
- составление сметы на проведение проектируемых видов работ;
- расчет основных геолого-экономических показателей;
- оценка запасов по категории С₁».

Формулировки задач необходимо делать очень тщательно, так как описание их решения должно составить содержание последующих глав (параграфов) выпускной квалификационной работы.

Объект исследования – это процесс или явление, порождающее проблемную ситуацию и избранное для исследования. Выделение объекта происходит на основе анализа проблемы исследования.

Предмет исследования – это та часть объекта, которая и будет исследована. Предмет должен характеризовать тему выпускной квалификационной работы и включать в себя свойства и стороны объекта, которые следует рассмотреть в заявленной теме, установив пределы рассмотрения данного вопроса. Объект и предмет исследования соотносятся как общее и часть общего.

Объект и предмет исследования можно сформулировать так: «Объект исследования – Березовское золоторудное месторождение.

Предмет исследования – северная часть дайки Елизаветинская Березовского золоторудного месторождения».

Далее дается характеристика методов исследования. Методы исследования – основные приемы и способы, которые использовались при проведении исследования (диалектический метод, исторический метод, статистический и др.). В процессе обработки полученных данных практически всегда используются такие взаимосвязанные научные методы исследования, как анализ и синтез. Анализ – логический прием разделения целого на отдельные элементы и изучение каждого в отдельности и во взаимосвязи с целым. Синтез – объединение результатов для формирования (проектирования) целого.

После того, как сформулированы цель, задачи, объект и предмет, методы исследования, следует указать информационную базу и структуру ВКР:

«Информационная база выпускной квалификационной работы включает: труды ведущих отечественных и зарубежных авторов, посвященных проблемам, статьи, опубликованные в периодических изданиях, а также Интернет-ресурсы,, статистические материалы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав основного текста, заключения, списка использованных источников, приложений. Содержание работы изложено на 62 страницах машинописного текста и включает 2 таблицы. Библиографический список состоит из 35 источников».

Введение не должно превышать 2-3 страницы компьютерного набора.

Страницы введения учитываются в общей нумерации страниц работы, номер страницы проставляется.

Основная часть выпускной квалификационной работы

Основная часть работы состоит из разделов:

1 Геологический раздел

2 Методический раздел

3 Технический раздел

4 Экономический раздел

Текст работы излагается самостоятельно (не допускается дословное переписывание использованной литературы), последовательно, грамотно и аккуратно, при написании работы необходимо употреблять профессиональные термины, избегать сложных грамматических оборотов. Студент должен показать не только знание материала, но и умение разбираться в нем, творчески использовать основные положения источников. Материал, используемый из других источников, должен быть переработан, органически увязан с избранной студентом темой и изложен своими словами с приведением ссылок на источники информации.

Содержание выпускной квалификационной работы должно демонстрировать:

знакомство автора с учебной и научной литературой по теме выпускной квалификационной работы;

умение обобщать материал литературных источников, анализировать геологическую информацию, выявлять особенности геологических объектов, являющихся предметом исследования, выделить проблему и определить пути ее решения, последовательно изложить существо рассматриваемых вопросов, делать самостоятельные выводы;

владение понятийным и терминологическим аппаратом.

В тексте выпускной квалификационной работы следует избегать использования личных местоимений, заменяя их безличными формами (вместо «я считаю» - «автор считает», «мы полагаем»).

Рекомендуется использование вводных и соединительных слов – *таким образом, из этого следует, в связи и т.д.* – для подчеркивания причинно-следственных связей и выражения личного отношения к излагаемому материалу.

Все страницы основной части выпускной квалификационной работы участвуют в общей нумерации страниц, номера страниц проставляются.

«ЗАКЛЮЧЕНИЕ» выполняет роль концовки, обусловленной логикой проведенного исследования. Оно содержит изложение полученных итогов и их соотношение с общей целью и конкретными задачами, поставленными и сформулированными во введении. Именно здесь содержится «выводное» знание, полученное в результате исследования. В заключении указывается вытекающая из конечных результатов теоретическая и практическая ценность, значимость. Заключительная часть предполагает обобщенную итоговую оценку проделанной работы.

В «ЗАКЛЮЧЕНИИ» находят отражение основные положения и выводы, содержащиеся во всех главах работы. В нем отражаются степень решения поставленных задач, полученные результаты, указывается также где, и каким образом применение рекомендаций может принести практическую пользу в деятельности организации.

Объем заключения – 2-3 страницы.

Нумерация страниц, на которых приводится текст заключения, должна продолжать общую нумерацию страниц основного текста.

Список использованных источников является составной частью работы и отражает степень изученности рассматриваемой проблемы. При этом в список использованных источников включаются, как правило, те источники, на которые в работе имеются библиографические ссылки. Используемые источники должны содержать их полное описание по требованиям стандартов.

Порядок оформления списка использованных источников представлен в приложении 9.

Нумерация страниц, на которых приводится текст списка использованных источников, должна продолжать общую нумерацию страниц основного текста.

В *приложения* следует выносить вспомогательный материал, который при включении в основную часть работы загромождает текст.

К вспомогательному материалу относятся таблицы цифровых данных, инструкции, методики, иллюстрации вспомогательного характера, заполненные формы документов, выдержки из локальных нормативных актов и др.

Нумерация страниц, на которых даются приложения, должна продолжать общую нумерацию страниц основного текста.

Объем выпускной квалификационной работы должен составлять – 60 - 80 страниц компьютерного набора (без приложений).

При выполнении выпускной квалификационной работы обучающийся должен продемонстрировать навыки работы на персональном компьютере (например, статистическая обработка материалов, выполнение графических построений, проведения математических расчетов, использование программного обеспечения для решения конкретных задач, поставленных в работе).

1.1.6 Руководство выпускной квалификационной работой

Общее руководство и контроль за ходом выполнения ВКР осуществляет выпускающая кафедра в лице руководителя ВКР. Руководитель ВКР:

помогает обучающемуся с выбором темы и разработкой плана работы;

оформляет задание на выполнение выпускной квалификационной работы;

оказывает обучающемуся помощь в разработке календарного графика на весь период выполнения выпускной квалификационной работы;

рекомендует обучающемуся необходимую литературу;
систематически контролирует ход работы и информирует кафедру о состоянии дел;
дает подробный отзыв на законченную работу.

Проверяя работу, руководитель не должен превращаться в корректора или редактора, хотя замечания в этой части он тоже высказывает. Руководитель ВКР выявляет полноту, глубину и всесторонность рассмотрения поставленных в плане вопросов, последовательность изложения материала, достаточность использования литературы, аргументированность выводов, степень их обоснованности и самостоятельности. В случае обнаружения плагиата, ошибочных решений и научных положений по тем или иным вопросам, неполноты или поверхностности исследования, противоречивости, излишнего отклонения от темы и других недостатков руководитель предлагает выпускнику устранить их, рекомендует пути и сроки их устранения.

Руководитель ВКР помогает выпускнику на всех этапах его работы, но эта помощь не должна выливаться в соавторство. Отношения руководителя со обучающимся строятся на основе сотрудничества.

1.2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1.2.1 Основные этапы выполнения выпускной квалификационной работы

Соблюдение установленных сроков и последовательности выполнения выпускной квалификационной работы направлено на оптимизацию процесса достижения поставленных целей.

Рекомендуется следующая последовательность этапов выполнения выпускной квалификационной работы:

выбор темы работы, её утверждение;

подбор литературы, геологической документации и ознакомление с ними, составление литературного обзора по проблеме исследования;

сбор и обобщение аналитических материалов, анализ;

написание работы и представление её руководителю, доработка по замечаниям руководителя;

написание введения и заключения, подготовка списка использованных источников, приложений, представление работы руководителю ВКР;

прохождение нормоконтроля, исправление замечаний по оформлению работы;

проверка в системе «Антиплагиат. ВУЗ»;

размещение работы в портфолио;

подготовка к защите выпускной квалификационной работы: подготовка презентационных материалов, оформление документов на выпускную квалификационную работу.

1.2.2 Подготовка к защите выпускной квалификационной работы

Законченная ВКР, подписанная студентом, передается научному руководителю для проверки соответствия оформления работы предъявляемым требованиям и составления письменного отзыва руководителя. В отзыве руководителя указываются сведения об актуальности темы работы, достоинства и недостатки работы, практическая ценность работы, оценка подготовленности студента, инициативности и самостоятельности при решении задач выпускной квалификационной работы, умение студента работать с литературными источниками, и способность ясно и четко излагать материал, соблюдение правил и качества оформления работы. Особое внимание уделяется оценке выпускника по личностным характеристикам (ответственность, дисциплинированность, самостоятельность, активность, творчество, инициативность и т.д.), проявленным способностям к исследовательской деятельности, достигнутым результатам в формировании компетенций выпускника данной программы, мотивируется возможность или невоз-

возможность представления выпускной квалификационной работы на защиту в государственной экзаменационной комиссии.

Решение научного руководителя является основанием для допуска кафедрой ВКР к защите. Допуск работы к защите производится заведующим выпускающей кафедрой.

Текст ВКР должен быть проверен на объем заимствований в системе «Антиплагиат», отчет печатается. ВКР размещается в портфолио. Размещение ВКР – не позднее, чем за 3 дня до защиты.

Перед защитой студентом представляются в ГЭК следующие документы:

- 1) ВКР, подписанная на титульном листе выпускником, научным руководителем, консультантами (если есть) (Приложение А);
- 2) задание на выполнение работы с отметками сроков окончательной подготовки работы, подписанное научным руководителем и заключением кафедры о допуске к защите;
- 3) отзыв научного руководителя;
- 4) отзыв рецензента;
- 5) отчет о проверке в системе «Антиплагиат».

Готовясь к защите работы, студент составляет тезисы выступления, содержащего наиболее важные и интересные результаты исследования. При этом следует помнить о том, что выпускнику для доклада отводится ограниченное время;

оформляет наглядные пособия, раздаточный материал к докладу, продумывает ответы на замечания рецензента.

Работу над тезисами доклада следует начинать сразу же после представления работы на кафедру и продолжить после ознакомления с отзывом руководителя. На вопросы и замечания отзыва целесообразно подготовить письменные ответы.

Доклад на защите выпускной квалификационной работы, как правило, не должен превышать 7-10 мин. Следует помнить, что студент не просто излагает, а защищает положения своей работы.

1.2.3 Защита выпускной квалификационной работы

Защита выпускной квалификационной работы проводится на открытом заседании ГЭК.

Порядок защиты:

-председатель ГЭК объявляет фамилию, имя и отчество выпускника, название работы с указанием места ее выполнения;

-доклад продолжительностью, как правило, не более 7-10 минут, в течении которых он должен кратко сформулировать актуальность, цель и задачи работы, изложить основные результаты, выводы и рекомендации, конкретные предложения, обосновать возможность их реализации, эффективность. При этом необходимо уточнить личный вклад в разработку проблемы.

Студент может пользоваться заранее подготовленным тезисами доклада, но должен излагать основное содержание своей выпускной квалификационной работы свободно, не читая письменного текста. При чтении утрачивается эмоциональность изложения, монотонное чтение текста не привлекает внимания и утомляет слушателей. Свободный рассказ по теме свидетельствует об уровне подготовки и глубине специальных знаний по проблеме выпускной квалификационной работы. Все это существенно влияет на итоговую оценку работы.

Все принципиальные положения выпускной квалификационной работы для большей наглядности могут быть представлены на демонстрационном материале. К демонстрационным материалам относится информация из выпускной квалификационной работы (таблицы, диаграммы, схемы, иллюстрации и пр.), оформленная в виде презентаций или ксерокопий для каждого члена ГЭК. Во время доклада необходимо ссылаться на эти материалы;

-после окончания доклада члены ГЭК и присутствующие на защите предлагают выпускнику вопросы, касающиеся устного выступления, имеющие непосредственное отношение к теме работы, или же просто в связи с обсуждаемой проблемой;

- зачитывается внешняя рецензия на выпускную квалификационную работу;

-выступление руководителя выпускной квалификационной работы, а в случае его отсутствия секретарь ГЭК зачитывает отзыв руководителя;

- председатель ГЭК предоставляет желающим слово для выступления, затем выпускнику, которое предполагает ответы на замечания рецензента и всех, выступивших при обсуждении работы, после чего объявляет об окончании защиты.

После окончания открытой защиты проводится закрытое заседание ГЭК (возможно с участием руководителей), на котором определяются итоговые оценки по четырехбалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»). После закрытого обсуждения председатель объявляет решение ГЭК. Протокол заседания ГЭК ведется секретарем. В него вносятся все заданные вопросы, особые мнения, решение комиссии об оценке.

II КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ И ЗАЩИТЫ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Оценка выпускной квалификационной работы производится по четырем группам критериев:

Система оценивания по оценочным средствам государственной итоговой аттестации

Оценочное средство	Максимальная стоимость в баллах	Критерии начисления баллов
Выпускная квалификационная работа	0-70 балл	Качество выполненной работы, ее научно-теоретический уровень, степень самостоятельности и логичность изложения материала, правильность оформления и результат ее защиты
Отзыв руководителя ВКР	0-10 баллов	Ответственность, дисциплинированность, стремление к достижению высоких результатов самостоятельность, добросовестность в выполнении ВКР, контактность....
Отзыв рецензента ВКР	0-10 баллов	Теоретическая значимость исследования; анализ представленных методик исследования; практическая значимость исследования; степень полноты обзора состояния проблемы и корректность постановки задачи; уровень и корректность использования в работе методов исследования
Ответы на вопросы (проверка компетенций)	0-10 баллов	Полнота и правильность ответа
Итого	100 баллов	

Оценка по итогам государственной итоговой аттестации определяется простым суммированием баллов:

<i>Критерии оценки</i>	<i>Количество баллов</i>
<i>Критерии содержания ВКР</i>	
обоснованность выбора и актуальность темы исследования	0-5
обоснование практической и теоретической значимости исследования	0-5
уровень теоретической проработки проблемы, осмысления теоретических вопросов и обобщения собранного материала	0-5
умение представить литературный обзор проблемы исследования; широта и	0-5

качество использованных источников	
объем и уровень анализа профессиональной, научной литературы, релевантность, полнота, корректность и содержание цитирования	0-5
наличие в ВКР результатов, которые в совокупности решают конкретную научную и (или) практическую задачу, или - результатов (теоретических и (или) экспериментальных), которые имеют существенное значение для развития конкретных направлений в определенной отрасли науки (деятельности), или – научно-обоснованных разработок, использование которых в полном объеме обеспечивает решение прикладных задач	0-5
умение логически верно, аргументированно и ясно излагать материалы исследования в ВКР: обоснованность и четкость сформулированных выводов	0-5
умение использовать компьютерные технологии в режиме пользователя для решения профессиональных задач	0-5
Критерии оформления ВКР	0-10
владение научным стилем изложения, орфографическая и пунктуационная грамотность	0-5
соответствие формы представления работы требованиям, предъявляемым к оформлению данных работ	0-5
Критерии процедуры защиты	0-15
качество устного доклада: соответствие доклада содержанию работы, логичность, точность формулировок, обоснованность выводов, культура речи; владение профессиональной терминологией и навыками профессиональной аргументации	0-5
презентационные навыки: структура и последовательность изложения материала, соблюдение временных требований, использование презентационного оборудования и/или раздаточного материала, грамотность оформления иллюстрационных материалов, выразительность использования, контакт с аудиторией	0-5
поведение при защите (коммуникационные характеристики (культура) докладчика (речь, манера говорить, отстаивать свою точку зрения, привлекать внимание к важным моментам в докладе или ответах на вопросы)	0-5
качество ответов на вопросы членов ГЭК: логичность, глубина, правильность и полнота ответов	0-5
Отзыв рецензента ВКР	0-10
теоретическая значимость исследования; анализ представленных методик исследования; практическая значимость исследования; степень полноты обзора состояния проблемы и корректность постановки задачи; уровень и корректность использования в работе методов исследования; степень комплексности работы, применение в ней знаний социально-гуманитарных дисциплин, естественно-математических, общепрофессиональных и специальных дисциплин; ясность, четкость, последовательность и обоснованность изложения.	0-10
Отзыв руководителя ВКР	0-10
ответственное отношение к работе, дисциплинированность, стремление к достижению высоких результатов, самостоятельность, добросовестность в выполнении работы, соблюдение сроков представления материалов, контактность	0-5
владеет навыками самостоятельного получения новых знаний, использования современных технологий	0-5
Теоретические вопросы	0-10

качество ответов на вопросы членов ГЭК: правильность и полнота ответов	0-10
Итого баллов	100

Правила оценивания результатов защиты ВКР

80-100 баллов (80-100%) – оценка «отлично»;
65-79 баллов (65-79 %) – оценка «хорошо»;
50-64 балла (50-69%) – оценка «удовлетворительно»;
0-49 баллов (0-49%) – оценка «неудовлетворительно».

III ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Оценочными средствами результатов обучения на этапе государственной итоговой аттестации являются выпускная квалификационная работа (в которой выпускнику предлагается по поставленной научно-практической проблеме сформулировать самостоятельно гипотезы, цель, сделать разработку программы эмпирического исследования, собрать информацию, проанализировать ее, провести необходимые расчеты, построить модели, предложить варианты решения проблемы и обосновать показатели оценки результативности) и ее защита по установленной процедуре (доклад, презентация, ответы на вопросы государственной экзаменационной комиссии), позволяющей сделать вывод о сформированности компетенций, теоретические вопросы.

3.1 ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ РАБОТ

1. Проект геофизических работ с целью детализации геологического строения участка на участке.
2. Проект геофизических изысканий на лицензионном участке (ЯНАО)
3. Проект промыслово-геофизических работ на нефтяном месторождении с целью контроля его разработки
4. Районирование территории геолого-геофизическими методами на северной окраине Ивделя (Свердловская область)
5. Построение физико-геологической модели Северо- Тарашской группы железорудных месторождений
6. Проект промыслово-геофизических работ на месторождении с целью контроля за его разработкой.
7. Поиск золоторудных месторождений методом ВП-СГ
8. Проект геофизических работ на Ватлорском месторождении с целью контроля за его разработкой. (Западная Сибирь)
9. «Проект на проведение гравимагнитных работ в масштабе 1:10000 в республике Саха (Якутия)»

3.2 Теоретические вопросы государственной итоговой аттестации, оценивающие сформированность универсальных компетенций:

1. Каково значение коммуникативных навыков для успешной деятельности производственного коллектива?
2. В чем вы видите основные причины необходимости овладения навыками общения на иностранном языке для успешного решения профессиональных задач в современных условиях?
3. В чем проявляется толерантность в восприятии социальных, этнических, конфессиональных и культурных различий?

4. Чем обусловлена необходимость овладения правовой культурой для достижения высоких экономических результатов в современных условиях?

5. Какая формулировка образовательных потребностей специалиста в современных условиях является более актуальной: «образование для всей жизни» или «образование в течение всей жизни»?

6. Возможна ли успешная профессиональная самореализация работника без формирования потребности и способности к самоорганизации и самообразованию?

7. В чем вы видите значение здорового образа жизни, овладения методами и средствами физической культуры для обеспечения полноценной социальной и профессиональной деятельности?

8. Чем обусловлена в настоящее время необходимость овладения приемами первой помощи, методами защиты в условиях чрезвычайных ситуаций?

3.3 Теоретические вопросы государственной итоговой аттестации, оценивающие сформированность общепрофессиональных компетенций:

1 В чем Вы видите основные причины необходимости овладения навыками логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь?

2 Зачем необходимо повышать уровень своей профессиональной компетентности?

3 В чем вы видите основные причины необходимости овладения навыками профессионального общения на иностранном языке?

4 Какие информационные технологии использовались при выполнении работы?

5 Какие профессиональные задачи были решены при выполнении работы?

6 Какие методы применялись при выполнении экономической оценки объекта?

7 Каково значение информации в развитии современного информационного общества?

8 Какие методы защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий предусмотрены в проекте?

9 Аналитическая база, используемая при выполнении работы?

10 Как вы оцениваете свой вклад в представленную работу?

3.3 Теоретические вопросы государственной итоговой аттестации, оценивающие сформированность профессиональных компетенций:

1 Проанализировав геологическую ситуацию в пределах участка, сформулируйте необходимость постановки конкретной стадии геологоразведочных работ на объекте?

2 Преупреждения к проведению геофизических работ?

3 Геофизические работы текущего года?

4 Выбор комплекса методов?

5 Какие специализированные компьютерные программы использованы для обработки фактического материала?

6 Обоснуйте необходимость применения запроектированных геофизических методов?

7. Какова рентабельность проектируемых работ?

Форма заявления на утверждение темы выпускной квалификационной работы

Зав. кафедрой _

обучающегося группы _____

Заявление
на утверждение темы выпускной квалификационной работы

Прошу утвердить тему выпускной квалификационной работы (из числа предложенных университетом):

Прошу утвердить самостоятельно определенную тему выпускной квалификационной работы

Место прохождения производственной (преддипломной) практики:

Руководитель ВКР _____

(Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, должность)

Дата _

Подпись обучающегося _

Решение зав. кафедрой

«УТВЕРЖДАЮ»

Форма оформления титульного листа выпускной квалификационной работы

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРИАТ/СПЕЦИАЛИТЕТ /МАГИСТРАТУРА)**

ТЕМА: _____

Факультет: _____

Направление/Специальность: _____

Профиль/специализация: _____

Квалификация: _____

Кафедра: _____

Обучающийся: _____ *(подпись)*

Фамилия И.О.

Группа: _____

Руководитель: _____ *(подпись)*

Фамилия И.О.

Консультант: _____ *(подпись)*

Фамилия И.О.

(подпись)

Допустить к защите:

Зав.кафедрой _____

(Фамилия И.О., ученая степень, ученое звание)

Екатеринбург

20__

Пример оформления задания на выполнение выпускной квалификационной работы

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»
(ФГБОУ ВО «УГГУ»)

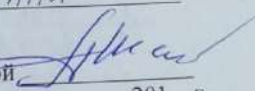
Факультет геологии и геофизики

Кафедра геофизики (ГФ)

Специальность 21.05.03 «Технология геологической разведки»

Специализация «Геофизические методы поиска и разведки НГП»

«Утверждаю»

Заведующий кафедрой 

«___» _____ 201 г.

ЗАДАНИЕ ПО ДИПЛОМНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ

Студенту Норанцовой Юлии Валерьевне
(фамилия, имя, отчество полностью)

1. Тема дипломного проекта (работы) Проект ядерно-геофизических исследований скважины Северо-Третьяковского месторождения с целью определения газосодержания контакта
утверждена приказом по университету № 1 от «___» _____ 201 г.

2. Срок сдачи студентом дипломного проекта (работы) «15» июня 2019 г.

3. Исходные данные к дипломному проекту (работе)

1. Материалы производственной практики
2. Литературные источники

4. Содержание расчетно – пояснительной записки:

4.1. Общий раздел

Введение

1. Описание скважины с районом работ
2. Геологическое строение района работ и метеорологические
3. Геологические и геофизические предпосылки к постановке

4.2. Технологический раздел

геофизических исследований скважины

4. Анализ ранее проведенных геофизических исследований
5. История представления работ
6. Спелл-таблица: Изучение пространственного распределения нейтронов при проведении нейтрон-нейтронного

4.3. Специальный раздел каротаж

7. Производственно-техническая часть проекта
8. Безопасность жизнедеятельности
- Заключение

4.4. Экономическое обоснование

смета

4.5. Безопасность жизнедеятельности

Оформлять оформляющий оформ 2
Оформлять оформ на оформ

5. Графический материал

1. Вводная карта Гео-Учебной карты
2. Методическо-сравнительная колонка
3. Текстовая карта
4. Гео-географические характеристики по разрезу
5. Аппаратура ГИС
6. Диаграмма ГИС
7. Иллюстрации к главе

6. Консультанты по разделам дипломного проекта (работы):

Фамилия, имя, отчество	Место работы, должность, ученая степень, звание	Раздел дипломного проекта (работы)
Коркин В.С.	доцент, к.т.-н.н.	2
Мухомов В.Г.	доцент, к.т.-н.н.	7

Ф., И., О. руководителя дипломного проекта (работы) Александрова И.Н.
Ученая степень к.т.-н.н. ученое звание доцент

7. График выполнения дипломного проекта (работы)

Наименование раздела дипломного проекта	Срок выполнения
Введение, глава 1, глава 2	25.05.19
Глава 3, глава 4, глава 5	01.06.19
Глава 6, глава 7, глава 8, заключение	15.06.19

Дата выдачи задания « 10 » мая 2019 г.

Руководитель дипломного проекта (работы) (подпись)

Задание по дипломному проектированию получил (подпись)

Примечание: Задание оформляется в 2-х экземплярах, один из которых хранится на кафедре
Другой выдается студенту и подшивается к расчетно – пояснительной записке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Примерная форма отзыва руководителя выпускной квалификационной работы

ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Выпускная квалификационная работа выполнена

Обучающимся _____

Направление подготовки _____

/специальность _____

Кафедра _____

Группа _____

Руководитель ВКР _____

Общая характеристика работы студента в период выполнения ВКР:

Актуальность темы _____

Степень достижения целей ВКР _____

Общая характеристика теоретической части (глубина разработки проблемы, логика изложения и проч.)_

Общая характеристика практической части работы (наличие элементов практической новизны, наличие и значимость практических предложений и рекомендаций)_

Степень владения профессиональными знаниями, умениями и навыками _____

Замечания к ВКР _____

Заключение: _____

Руководитель: _____ «__» _____ 20 ____ г.
подпись _____

Обучающийся: _____ «__» _____ 20 ____ г.
подпись _____

Примерная форма отзыва рецензента о выпускной квалификационной работе

ОТЗЫВ РЕЦЕНЗЕНТА О ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

Фамилия И.О. выпускника _____

Специальность _____

Профиль/специализация _____

Тема рецензируемой работы _____

Рецензент место работы, должность (при наличии) _____

Заключение о степени соответствия выпускной квалификационной работы заданию_

Оценка теоретической части ВКР (теоретическая значимость исследования, анализ использованных источников)_

Оценка аналитической части ВКР (анализ представленных методик исследования)_

Оценка проектной части ВКР (практическая значимость исследования)_

Логичность, четкость, грамотность изложения материала _____

Оценка сформированности компетенций, предусмотренных федеральным государственным образовательным стандартом:

ВКР демонстрирует (высокий, средний, низкий) уровень сформированности универсальных компетенций и (высокий, средний, низкий) уровень сформированности общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

Замечания и рекомендации (к публикации, внедрению, представлению на конкурс) по ВКР_

Общая оценка ВКР _____

Рецензент: _____ Фамилия И.О.
(подпись)

Обучающийся: _____ Фамилия И.О.
(подпись)

«_____» _____ 20 ____ г.

«_____» _____ 20 ____ г.

М.П

Пример оформления документа, подтверждающего использование результатов выпускной квалификационной работы

СПРАВКА

**об использовании результатов выпускной квалификационной работы
на тему: «Проект ГИС с целью определения ФЕС Федоровского нефтяного
месторождения»**

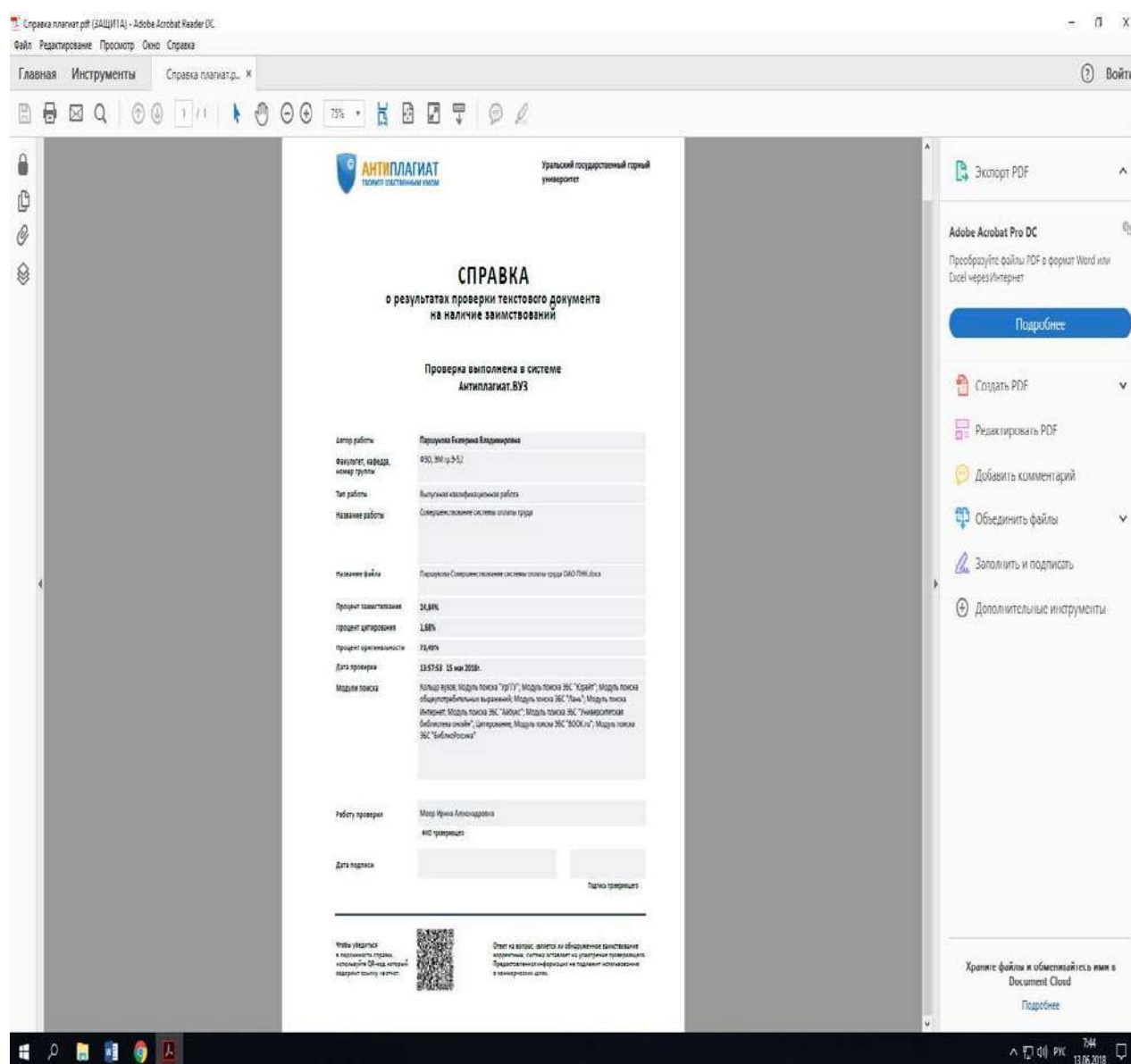
Выводы и предложения, представленные в исследовании Жуклина Е.А., нашли применение в практической деятельности.

Рекомендации автора по совершенствованию методики определения ФЕС взяты за основу при разработке перспективных направлений развития.

Директор
ВНИИГИС _

(подпись)
М.П.

Фамилия И.О.



Пример структуры и оформления содержания выпускной квалификационной работы Пример структуры и оформления содержания выпускной квалификационной работы

- ВВЕДЕНИЕ**Ошибка! Закладка не определена.**
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЙОНЕ РАБОТ**Ошибка! Закладка не определена.**
2. ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ РАЙОНА И УЧАСТКА РАБОТ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.1. Геологическая позиция и общая геологическая характеристика района работ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.2. Стратиграфия**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.3. Магматизм**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.4. Тектоника.....**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.5. Метаморфизм**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.6. Полезные ископаемые**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.7. Гидрогеологическая характеристика района работ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 2.8. Геологическое обоснование выбора участка работ и геологическое строение участка работ **Ошибка! Закладка не определена.**
3. ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ДЛЯ ПОСТАНОВКИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ РАБОТ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 3.1. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых района работ**Ошибка! Закладка не определена.**
4. АНАЛИЗ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОФИЗИЧЕСКИХ РАБОТ, РАНЕЕ ПРОВЕДЕННЫХ НА УЧАСТКЕ**Ошибка! Закладка не определена.**
5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ РАБОТ, ПРОВЕДЕННЫХ НА УЧАСТКЕ В СЕВЕРНОЙ ЧАСТИ С. БРОДОКАЛМАК.....**Ошибка! Закладка не определена.**
6. МЕТОДИКА ПРОЕКТИРУЕМЫХ РАБОТ. АППАРАТУРА**Ошибка! Закладка не определена.**
- 6.1. Выбор и обоснование комплекса методов электроразведки**Ошибка! Закладка не определена.**
- 6.2. Аппаратура для проведения работ методом ВЭЗ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 6.3. Аппаратура для проведения работ методом срединного градиента**Ошибка! Закладка не определена.**
- 6.4. Методика и техника работ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 6.5. Камеральная обработка и интерпретация результатов работ**Ошибка! Закладка не определена.**
7. ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 7.1. Мероприятия по охране труда и безопасному ведению работ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 7.2. Мероприятия по охране окружающей среды...**Ошибка! Закладка не определена.**
8. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ЧАСТЬ ПРОЕКТА.....**Ошибка! Закладка не определена.**
- 8.1. Сводный перечень проектируемых работ**Ошибка! Закладка не определена.**
- 8.2. Сводная смета.....**Ошибка! Закладка не определена.**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	Ошибка! Закладка не определена.
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	Ошибка! Закладка не определена.

Примеры библиографических описаний, применяемых при оформлении списка использованных источников

1. Об основополагающих принципах и правах в сфере труда и механизм её реализации [Текст]: Декларация МОТ от 18.06.1998 // МБТ.1998.
2. Конституция Российской Федерации [Электронный ресурс]: Доступ из справочно-правовой системы «КонсультантПлюс». - Режим доступа: <http://www.consultant.ru>.
3. Трудовой кодекс Российской Федерации [Электронный ресурс]: Федеральный закон от 30.12.2001 г. № 197-ФЗ (в ред. от 05.10.2015) – Доступ из справочно-правовой системы «КонсультантПлюс». - Режим доступа: <http://www.consultant.ru>.
4. О безопасности [Электронный ресурс]: Федеральный закон от 28.12.2010 г. № 390-ФЗ – Доступ из справочно-правовой системы «КонсультантПлюс». - Режим доступа: <http://www.consultant.ru>.
5. Об общих принципах организации законодательных (представительных) и исполнительных органов власти субъектов Российской Федерации [Текст]: Федеральный закон от 06.10.1999 г. № 184-ФЗ // Собрание законодательства РФ. - 1999. - № 43.
6. О концепции национальной безопасности Российской Федерации [Текст]: Указ Президента Российской Федерации от 10 января 2000 г. № 24 // Собрание законодательства РФ. - 2000. - № 2.- Ст.170.
7. О порядке разработки и утверждения административных регламентов исполнения государственных функций (предоставления государственных услуг) [Электронный ресурс]: Постановление Правительства РФ от 11.11.2005 г. № 679. - Доступ из справочно-правовой системы «КонсультантПлюс». – Режим доступа: <http://www.consultant.ru>.
8. Булаевский, Б.А. Правовое положение несовершеннолетних по российскому гражданскому законодательству [Текст]: Автореф. дисс. ... к.ю.н. М., 1998.
9. Гаврилов, Э. О наименовании юридического лица [Текст] / Э.О. Гаврилов // Хозяйство и право. - 2011. - № 12. - С. 3 – 11.
10. Мачульская, Е.Е. Право социального обеспечения [Текст]: учебник для бакалавров / Е.Е. Мачульская. – М.: Изд-во Юрайт, 2012. – 575 с.
11. Черткова, Е.Л. Утопия как способ постижения социальной действительности [Электронный ресурс] / Е.Л. Черткова // Социемы: журнал Уральского гос. ун-та. – 2002. - № 8. – Режим доступа: <http://2www.usu.ru/philosoph/chertkova>.
12. Цивилистические записки: [Текст]: Межвузовский сборник научных трудов. Выпуск 2. – М.: «Статут» - Екатеринбург: Институт частного права, 2002. – 511 с.
13. Юридический советник [Электронный ресурс]. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): зв., цв.; 12 см. – Прил.: Справочник пользователя [Текст]/ сост. В.А. Быков. – 32 с.
14. Временные методические рекомендации по вопросам реструктуризации бюджетной сферы и повышения эффективности расходов региональных и местных бюджетов (Краткая концепция реструктуризации государственного и муниципального сектора и повышения эффективности бюджетных расходов на региональном и местном уровнях) [Текст]. - М.: ИЭПП, 2006. - 67 с.
15. Свердловская область в 1992-1996 годах [Текст]: Стат. сб./ Свердлов. обл. комитет гос. статистики Госкомстата РФ. – Екатеринбург, 1997. – 115 с.
16. Социальное положение и уровень жизни населения России в 2010 г. [Текст]: Стат. сб. / Росстат. – М., 2011. – 320 с.
17. Социально-экономическое положение федеральных округов в 2010 г. [Электронный ресурс]. – Режим доступа <http://www.gks.Ru>.
18. An Interview with Douglass C. North [Text] // The Newsletter of The Cliometric Society. - 1993. - Vol. 8. - N 3. - P. 23–28.

19. Burkhead, J. The Budget and Democratic Government [Text] / Lyden F.J., Miller E.G. (Eds.) / Planning, Programming, Budgeting. Markham: Chicago, 1972. 218 p.
20. Miller, D. Strategy Making and Structure: Analysis and Implications for Performance [Text] // Academy of Management Journal. - 1987. - Vol. 30. - N 1. - P. 45–51.
21. Министерство финансов Российской Федерации: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.minfin.ru>.
22. Российская книжная палата: [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.bookchamber.ru>.
23. Инструкция по делопроизводству в ООО «СК-групп» [Текст]. - Екатеринбург, 2012. – 26 с.
24. Бухгалтерский отчет ЗАО «ФНК» за 2012 год [Текст]. - Екатеринбург, 2013. – 14 с.
25. Правила внутреннего трудового распорядка АО «Маяк» [Текст]. - Екатеринбург, 2010. – 22 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ
И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ***

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЕ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	5
1.1. Цель преподавателя дисциплины.....	5
1.2. Задачи изучения дисциплины.....	5
1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины	5
1.4. Содержание дисциплины	6
 Часть 2. ДИЭЛЕКТРИКИ.....	12
2.1. Основные сведения о пробое диэлектриков	12
2.2. Пробой газообразных диэлектриков.....	13
2.3. Пробой твердых диэлектриков.....	18
2.4. Практическая работа № 1. Определение электрической прочности твердых и газообразных диэлектриков. Цель работы	21
2.5. Объект исследования.....	21
2.6. Средства измерения.....	21
2.7. Рабочее задание.....	21
2.8. Методические указания по выполнению рабочего задания	22
2.9. Контрольные вопросы	27
 Часть 3. МАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ.....	28
3.1. Основные характеристики магнитных веществ	28
3.2. Физическая природа магнетизма	29
3.3 Классификация веществ по магнитным свойствам.....	32
3.4. Строение ферромагнетиков	33
3.5. Явления магнитной анизотропии и магнитострикции.....	36
3.6. Намагничивание ферромагнетика.....	38
3.7. Свойства ферромагнитных материалов в квазипостоянных магнитных полях.....	41
3.8. Дифференциальная магнитная проницаемость	44
3.9. Свойства ферромагнетиков в переменных магнитных полях.....	46
3.10. Индукционный метод определения параметров магнитных материалов с использованием осциллографа.....	53

3.11. Объект исследования.....	58
3.12. Средства измерения и вспомогательные средства исследования	59
3.13. Подготовка осциллографа к работе	59
3.14. Калибровка осциллографа и определение масштабов по напряженности и индукции магнитного поля	60
3.15. Подготовка звукового генератора к работе	61
3.16. Практическая работа №1. «Исследование свойств магнитных материалов в магнитных полях постоянной частоты». Цель работы	62
3.17. Рабочее задание.....	62
3.18. Методические рекомендации к выполнению рабочего задания	63
3.19. Содержание отчета	66
3.20. Вопросы для самоконтроля.....	67
3.21. Практическая работа №2. «Исследование свойств магнитных материалов в магнитных полях переменной частоты». Цель работы.....	67
3.22. Рабочее задание.....	68
3.23. Методические указания к выполнению рабочего задания	68
3.24. Содержание отчета	70
3.25. Вопросы для самоконтроля.....	70

Часть 4. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗОЛЯЦИИ ДВУХЖИЛЬНОГО КАБЕЛЯ»	72
4.1. Требование к оформлению контрольной работы.....	72
4.2. Задание на контрольную работу	72
4.3. Методические указания к выполнению контрольной работы	74
4.4. Экзаменационные вопросы.....	78
Учебно-методические материалы	80

Часть 1

ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цель преподавателя дисциплины

В дисциплине «Электротехническое и конструкционное материаловедение» излагается широкий круг вопросов, связанных со свойствами различных материалов по отношению к электрическому и магнитному полям. Излагаются свойства разновидностей электротехнических материалов, применяемых в технике.

Целью преподавания дисциплины является изложение основных сведений о процессах, происходящих в электротехнических материалах под воздействием электрического и магнитного полей, ознакомление с основными характеристиками и параметрами, посредством которых оцениваются свойства материалов к этим полям, методами их практического определения, ознакомление с основными видами электротехнических материалов, областями и способами их применения.

Дисциплина «Электротехническое и конструкционное материаловедение» является одним из основных предметов, необходимых для последующего успешного освоения специальных дисциплин, изучаемых студентами направления подготовки бакалавров «Электроэнергетика и электротехника».

1.2. Задачи изучения дисциплины

В результате изучения дисциплины «Электротехническое и конструкционное материаловедение» студенты должны иметь ясное представление о процессах, происходящих в электротехнических материалах при воздействии на них электрического и магнитных полей, знать основные характеристики и параметры материалов, научиться определять их экспериментально, усвоить требования, которым должны удовлетворять материалы при использовании в устройствах, предназначенных для работы в условиях горной промышленности, уметь производить выбор конкретных видов электротехнических материалов.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины

Успешное усвоение дисциплины «Электротехническое и конструкционное материаловедение» базируется на знаниях, полученных студентами при изучении физики (разделы: физика твёрдого тела, электричество, магнетизм),

химии, теоретических основ электротехники (разделы: электрические цепи постоянного и переменного тока, магнитные цепи), электрических измерений (разделы: основы метрологии, методы измерения электрических величин).

1.4. Содержание дисциплины

1.4.1. Введение

Краткий исторический обзор развития производства и использования электротехнических материалов. Значение электротехнических материалов в развитии и совершенствовании современного электромашиностроения.

Роль русских и советских учёных в создании и совершенствовании современных электротехнических материалов.

Предмет дисциплины «Электротехническое и конструкционное материаловедение». Классификация электротехнических материалов.

Вопросы для самопроверки

1. Какое значение имеют электротехнические материалы в развитии электромашиностроения?
2. Перечислите основные классы электротехнических материалов по свойствам, которыми обладают по отношению к электромагнитному полю.
3. Каковы перспективы развития производства электротехнических материалов?

1.4.2. Диэлектрики

Понятие о диэлектриках. Поляризация диэлектриков и основные виды поляризации.

Классификация диэлектриков. Понятие о диэлектрической проницаемости, абсолютная и относительная диэлектрические проницаемости. Зависимость величины диэлектрической проницаемости от внешних факторов.

Понятие о электропроводности диэлектриков. Удельные объёмное и поверхностное сопротивления и методика их определения.

Диэлектрические потери. Угол диэлектрических потерь. Схемы замещения диэлектриков для учёта диэлектрических потерь. Виды диэлектрических потерь.

Понятие о электрическом пробое диэлектриков. Пробивное напряжение и электрическая прочность. Пробой газообразных диэлектриков. Виды пробоев жидких и твёрдых диэлектриков.

Физико-механические свойства диэлектриков. Основные механические свойства диэлектриков. Нагревостойкость. Классы нагревостойкости. Температура воспламенения и температура вспышки. Морозостойкость и

тропикостойкость. Гигроскопичность и влагопроницаемость. Химические и радиационные свойства.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вещества называются диэлектриками?
2. По каким признакам классифицируются диэлектрики?
3. Какой процесс называется поляризацией диэлектриков?
4. Как происходит электронная поляризация?
5. Как зависит диэлектрическая проницаемость от температуры и частоты электрического поля при электронной поляризации?
6. Как происходит ионная поляризация, и в каких веществах она наблюдается?
7. Как происходит дипольная поляризация?
8. Как зависит величина диэлектрической проницаемости от температуры и частоты электрического поля?
9. Как происходит ионно-релаксационная, электронно-релаксационная и миграционная (структурная) поляризации?
10. Как осуществляется спонтанная поляризация и для каких диэлектриков она характерна?
11. На какие группы подразделяются диэлектрики в соответствии с видами поляризации, которыми они обладают?
12. Как зависит диэлектрическая проницаемость газообразных диэлектриков от давления и температуры, величины напряжённости и частоты внешнего электрического поля?
13. Как зависит диэлектрическая проницаемость жидких диэлектриков от температуры, величины напряженности и частоты электрического поля?
14. Как зависит диэлектрическая проницаемость твёрдых диэлектриков от температуры, величины напряженности и частоты электрического поля?
15. Как определяется диэлектрическая проницаемость сложных диэлектриков?
16. Назовите причины возникновения электрического тока в диэлектрике под воздействием внешнего электрического поля.
17. Что такое объёмное и поверхностное удельные сопротивления и как они определяются?
18. Как зависит электропроводность газообразных диэлектриков от напряжения и почему?
19. Чем обуславливается электропроводность твёрдых диэлектриков и как она зависит от температуры и напряжённости электрического поля?
20. Чем обуславливается электропроводность жидких диэлектриков, как она зависит от температуры и напряжённости электрического поля?
21. Какие потери называются диэлектрическими?
22. Какой угол называется углом диэлектрических потерь?

23. Нарисуйте схемы замещения диэлектрика и соответствующие им векторные диаграммы для учёта величины диэлектрических потерь.
24. Установите связь между параметрами параллельной и последовательной схем замещения диэлектрика с потерями.
25. Какие виды диэлектрических потерь существуют в диэлектриках?
26. Какое явление называется электрическим пробоем диэлектриков?
27. Каким образом происходит пробой газообразных диэлектриков?
28. От каких факторов зависит электрическая прочность газообразных диэлектриков?
29. Объясните, как осуществляется электрический пробой жидких диэлектриков с высокой степенью очистки?
30. Как осуществляется электрический пробой технически чистых диэлектриков?
31. Назовите виды пробоев твёрдых диэлектриков.
32. Как происходит электрический, электротепловой и электрохимический пробой?
33. Что такое гигроскопичность диэлектрика и как она влияет на его электрические свойства?
34. Перечислите основные механические свойства диэлектриков.
35. Назовите основные параметры, с помощью которых характеризуются тепловые свойства диэлектриков.
36. Перечислите классы нагревостойкости диэлектриков и дайте краткую характеристику каждого из них.

1.4.3. Изоляционные материалы

Газообразные изоляционные материалы. Сравнительные характеристики основных газообразных изоляционных материалов и области их применения.

Жидкие изоляционные материалы. Нефтяные масла. Трансформаторное масло, его основные характеристики и свойства, старение и регенерация, методы испытаний и области применения.

Синтетические жидкие диэлектрики, сравнительные характеристики и области применения. Компаунды.

Полимерные изоляционные материалы. Волокнистые изоляционные материалы и слоистые пластики.

Слюда и материалы на основе слюды. Керамика и стекло.

Вопросы для самопроверки

1. Какие из газообразных изоляционных материалов нашли наибольшее практическое применение?
2. Произведите сравнительный анализ свойств газообразных изоляционных материалов.
3. В чём заключается старение трансформаторного масла и как оно восстанавливается?

4. Какими параметрами характеризуется трансформаторное масло как электроизоляционный материал?
5. Перечислите основные синтетические жидкие диэлектрики, используемые на практике, их основные свойства и области применения.
6. Какие органические высокомолекулярные изоляционные материалы, используемые на практике, вам известны?
7. Какими свойствами обладают компаунды и основные области их применения?

1.4.4. Магнитные материалы

Природа магнетизма. Условия возникновения ферромагнитных свойств у веществ. Классификация веществ по магнитным свойствам.

Строение ферромагнетиков. Явление магнитной анизотропии и магнитострикции. Использование этих явлений в технике.

Основные характеристики магнитных материалов. Петля гистерезиса и основная кривая намагничивания. Остаточная индукция и коэрцитивная сила, индукция технического насыщения.

Относительная и абсолютная магнитные проницаемости. Потери на гистерезис и вихревые токи при перемагничивании в переменных магнитных полях. Явление вытеснения магнитного поля и его последствия.

Магнитомягкие, магнитотвёрдые материалы и магнитные материалы специального назначения.

Разновидности магнитных материалов. Листовые электротехнические стали и пермаллой, основные характеристики и применение.

Вопросы для самопроверки

1. Какие элементарные круговые точки существуют в атоме?
2. Какой круговой ток создаёт наибольший магнитный момент в атоме?
3. Чем объяснить то, что не у всех химических элементов атомы обладают собственным магнитным моментом?
4. Как называются области в ферромагнетиках, в пределах которых магнитные моменты атомов ориентированы параллельно?
5. Как происходит намагничивание ферромагнетиков?
6. Какое явление в ферромагнетиках называется магнитной анизотропией?
7. Где и как учитывается явление магнитной анизотропии?
8. В чём заключается явление магнитострикции и где оно используется?
9. Чем отличается основная кривая намагниченности от петли гистерезиса?
10. Назовите основные характеристики ферромагнитных материалов.

11. Как зависит величина магнитной проницаемости от напряжённости магнитного поля?
12. Как зависит магнитная проницаемость от частоты переменного магнитного поля?
13. Как расшифровать обозначения марок электротехнических сталей?
14. Назовите основные характеристики листовых электротехнических сталей и области их применения.
15. Что представляют собой сплавы пермаллой?
16. В чём преимущество холоднокатаных сталей перед горячекатаными?
17. Какие основные виды магнитотвёрдых материалов используется на практике?
18. Какие материалы специального назначения используются на практике?
19. Что представляют собой ферриты и в чём их преимущество перед другими видами магнитных материалов?

1.4.5. Полупроводники

Понятие о полупроводниках. Классификация полупроводников. Понятия о видах электропроводности полупроводников.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вещества называются полупроводниками?
2. Какие виды электропроводности свойственны собственным полупроводникам?
3. Как получить полупроводник с основной электронной электропроводностью?
4. Как получить полупроводник с основной дырочной электропроводностью?
5. Как зависит удельная электропроводность полупроводников от температуры?
6. Как влияет механическая деформация на электропроводность полупроводника?
7. Как зависит электропроводность полупроводников от частоты и интенсивности световой энергии?
8. Как влияет напряжённость электрического поля на электропроводность полупроводника?

1.4.6. Проводники

Понятие о проводниках природа электропроводности проводников. Основные характеристики. Классификация проводниковых материалов. Понятие о сверхпроводимости проводников.

Вопросы для самопроверки

1. Какой механизм электропроводности свойственен металлам?
2. Какой механизм электропроводности свойственен электролитам?
3. В чём разница в объяснении механизма электропроводности с позиций классической электронной теории строения металлов и кантовой механики?

4. Какими параметрами характеризуются свойства проводников?
5. Чем объяснить зависимость удельной электропроводности металлов от температуры?
6. Почему удельное сопротивление металла зависит от его деформации?
7. Какие материалы относятся к материалам высокой проводимости?
8. Дайте сравнительную характеристику меди и алюминия.
9. Какие сплавы высокого сопротивления применяются в технике?
10. Что такое явление сверхпроводимости?
11. Каким материалам и при каких условиях свойственно явление сверхпроводимости?

1.4.7. Примерный перечень лабораторных работ

1. Определение электрической прочности газообразных и твёрдых диэлектриков.
2. Определение динамических характеристик ферромагнетиков при постоянной частоте магнитного поля.
3. Определение динамических характеристик ферромагнетиков при изменяющейся частоте магнитного поля.

Часть 2

ДИЭЛЕКТРИКИ

2.1. Основные сведения о пробое диэлектриков

Важнейшей областью использования диэлектриков в технических целях является применение их в качестве изоляционных материалов, предназначенных для предотвращения протекания электрического тока по путям, не предусмотренным электрической схемой установки. Такое использование диэлектриков связано с их исключительно малой электропроводностью.

Так, удельная объемная электропроводность этих материалов при комнатной температуре не превышает 10^{-8} см/м, а удельное объемное сопротивление соответственно больше 10^8 Ом·м.

Такое значение электропроводности и удельного объемного сопротивления сохраняется только для определенного напряжения. Превышение этого напряжения приводит к резкому (скачкообразному) возрастанию электропроводности и уменьшению сопротивления диэлектрика.

Потеря диэлектриком изоляционных свойств под воздействием внешнего электрического поля называется **пробоем**.

Напряжение, при котором в диэлектрике возникает электрический пробой, называется **пробивным** или **напряжением пробоя**.

Пробивное напряжение обозначается $U_{пр}$. Единицей измерения пробивного напряжения в системе СИ является вольт (В). Допускается использовать в качестве единицы измерения пробивного напряжения киловольт (кВ).

Значение пробивного напряжения зависит от химического состава, структуры строения, толщины диэлектрика и воздействия ряда других факторов.

Другой важнейшей характеристикой способности диэлектриков выдерживать воздействие высоких напряжений без потери изоляционных свойств является электрическая прочность ($E_{пр}$). Под электрической прочностью понимается отношение пробивного напряжения диэлектрика к его толщине:

$$E_{пр} = \frac{U_{пр}}{h},$$

где h – толщина диэлектрика.

Единицей измерения электрической прочности в системе СИ является В/м. В связи с тем, что использование этой единицы на практике неудобно из-за малой толщины изоляции в различных электромеханических установках и больших значений пробивных напряжений, ГОСТом допускается применение

внесистемной единицы измерения, равной кВ/мм. Соотношение между этими единицами – $\text{кВ/мм} = 10^6 \text{ В/м}$.

Если на диэлектрик воздействует внешнее однородное электрическое поле, то электрическая прочность представляет собой напряженность этого поля, при которой происходит пробой.

В зависимости от механизма развития и причин возникновения различают следующие виды пробоев: электрический, тепловой и электрохимический.

Электрический пробой связан с развитием процессов ударной и фотонной ионизации, возникающих в сильных электрических полях и приводящих к быстрому росту концентрации свободных носителей электрических зарядов к скачкообразному увеличению электрического тока в месте пробоя при превышении значения напряженности электрического поля, равного электрической прочности диэлектрика.

Тепловой пробой возникает под воздействием тепловой энергии, выделяющейся в диэлектриках за счет диэлектрических потерь или поступающей от посторонних источников тепловой энергии. Тепловая энергия вызывает уменьшение активного сопротивления диэлектриков и возрастание активного потока, приводящих к дальнейшему увеличению температуры диэлектриков с последующим их термическим разрушением.

Электрохимический пробой возникает при длительной эксплуатации диэлектриков в электрических полях и связан с изменением химического состава в результате протекающих в диэлектриках электрохимических процессов.

Более подробно каждый из видов пробоя диэлектриков рассмотрен в последующих параграфах.

2.2. Пробой газообразных диэлектриков

В газообразных диэлектриках пробой является электрическим и связан с развитием процессов ударной и фотонной ионизации под воздействием сильных электрических полей.

В любом газообразном диэлектрике содержится малое количество положительных и отрицательных ионов и электронов, находящихся в хаотическом тепловом движении. Под воздействием электрического поля эти частицы начинают перемещаться либо в направлении напряженности поля (положительные ионы), либо в направлении, противоположном ей (электроны, отрицательные ионы).

При этом каждая из частиц получает добавочную энергию за счет электрического поля

$$W_{\text{ч}} = g \cdot U_{\lambda}, \quad (2.1)$$

где g – электрический заряд напряженной частицы; U_λ – разность потенциалов на длине свободного пробега заряженной частицы.

В однородном электрическом поле

$$U_\lambda = E \cdot \lambda, \quad (2.2)$$

где E – напряженность однородного электрического поля; λ – длина свободного пробега частицы.

Таким образом, в однородном электрическом поле добавочная энергия, приобретенная частицей в результате воздействия электрического поля:

$$W_q = g \cdot E \cdot \lambda. \quad (2.3)$$

В конце пути свободного пробега заряженная частица сталкивается с нейтральной молекулой. Если при этом энергия заряженной частицы оказывается больше энергии ионизации нейтральной молекулы газообразного диэлектрика, то последняя расщепляется на электрон и положительно заряженный ион. Этот процесс получил название процесса ударной ионизации.

Таким образом, условие возникновения ударной ионизации описывается уравнением

$$W_q \geq W_{\text{и}}. \quad (2.4)$$

С учетом уравнений (2.2) и (2.3) получим:

$$E_{\text{н}} \cdot g \cdot \lambda \geq W_{\text{и}},$$

а

$$U_\lambda = E_{\text{н}} \cdot \lambda \geq W_{\text{и}}, \quad (2.5)$$

где U_λ – ионизационный потенциал газообразного диэлектрика; $E_{\text{н}}$ – начальная напряженность поля.

Ионизационный потенциал характеризует энергию ионизации диэлектрика. У различных газообразных диэлектриков он лежит в диапазоне от 4 до 25 В, что соответствует энергии ионизации от 4 до 25 эВ.

Так как λ и g для каждого из газообразных диэлектриков постоянны, то ударная ионизация начинается при определенной напряженности поля, называемой начальной напряженностью.

В ряде случаев столкновение заряженной частицы с нейтральной молекулой может не ионизировать последнюю, а принести ее в возбужденное состояние. Через определенный промежуток времени возбужденная молекула испускает фотон, отдавая при этом избыточную энергию. Фотон поглощается другой нейтральной молекулой, которая в этом случае ионизируется, расщепляясь на электрон и положительно заряженный ион. Такая ионизация называется фотонной. Фотонная ионизация приводит к быстрому развитию канала пробоя в газообразном промежутке.

Развитие процессов ударной и фотонной ионизации при напряженности электрического поля большей, чем начальная, приводит к резкому возрастанию количества свободных носителей электрических зарядов и возникновению двух встречных источников разноименно заряженных частиц в канале пробоя.

В результате пробоя пространство, занимаемое каналом пробоя, заполнено движущимися заряженными частицами газа. Такое состояние газообразного диэлектрика получило название газоразрядной плазмы.

За счет фотонной ионизации пробой газов осуществляется практически мгновенно.

Электрическая прочность газообразного диэлектрика зависит от длительности воздействия электрического поля. При кратковременном воздействии напряжение пробоя диэлектрика, выше чем при длительном воздействии. Повышение пробивного напряжения характеризуется коэффициентом импульса

$$\beta = \frac{U_{\text{пр}}}{U_{\text{пр}50}}, \quad (2.6)$$

где $U_{\text{пр}}$ – пробивное напряжение при данной длительности импульса; $U_{\text{пр}50}$ – пробивное напряжение при постоянном или переменном напряжении частотой 50 Гц.

Значения коэффициента импульса находятся в диапазоне от 1 до 1,5.

Электрическая прочность газообразных диэлектриков зависит от расстояния между электродами или толщины диэлектрика. Зависимость $E_{\text{пр}}=f(h)$ представлена на рисунке 2.1.

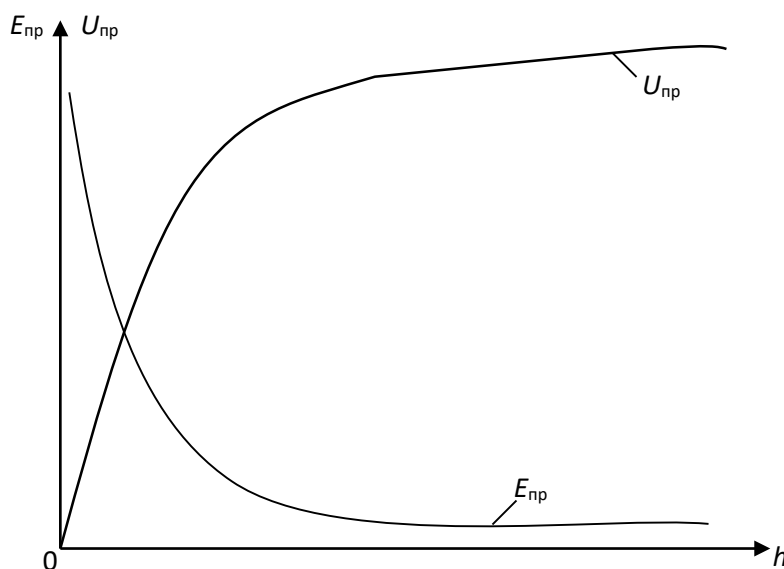


Рис. 2.1. Зависимость электрической прочности и пробивного напряжения газообразного диэлектрика от расстояния между электродами

Из рис. 2.1 видно, что с ростом толщины диэлектрика его электрическая прочность уменьшается, а пробивное напряжение увеличивается. Это объясняется тем, что при малых расстояниях между электродами затрудняется возникновение процесса ударной ионизации. Это видно из анализа уравнения (2.5).

Решив уравнение (2.5) относительно E_n , получим

$$E_n = \frac{W_n}{g \cdot \lambda}.$$

При малых расстояниях между электродами, когда $h \geq \lambda$, можно записать

$$E_n = \frac{W_n}{g \cdot h}. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) видим, что чем меньше толщина газообразного диэлектрика, тем больше начальная напряженность электрического поля, при которой энергия движущейся заряженной частицы обеспечивает ионизацию молекулы газообразного диэлектрика и возникновение процессов ударной и фотонной ионизации.

Электрическая прочность газообразного диэлектрика зависит также и от давления газа. Эта зависимость представлена на рисунке 2.2.

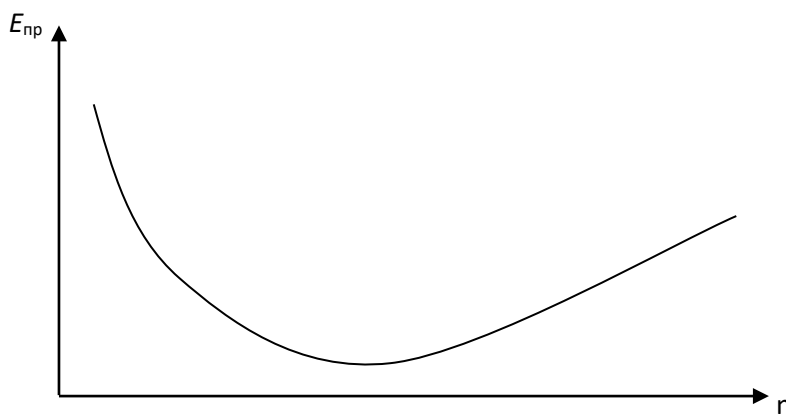


Рис. 2.2. Зависимость электрической прочности газа от давления

Как видно из рис. 2.2, при малых значениях давления наблюдается уменьшение электрической прочности с ростом давления. Такое явление объясняется тем, что при малых давлениях вероятность столкновения заряженной частицы с нейтральной молекулой незначительная, и затрудняется развитие процессов ударной и фотонной ионизации. С ростом давления плотность молекул газа увеличивается, что приводит к возрастанию вероятности столкновений заряженных частиц с молекулами газа и облегчает развитие процессов ударной ионизации. При сверхвысоких давлениях существенно уменьшается длина свободного пробега заряженной частицы, что, согласно уравнению (2.7), приводит к росту начальной напряженности поля.

Электрическая прочность газообразного диэлектрика существенно зависит от однородности электрического поля (рис. 2.3).

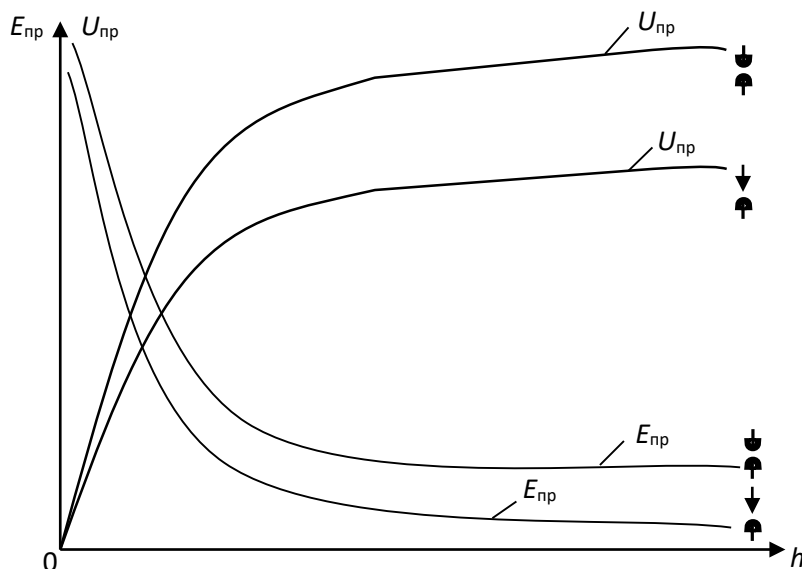


Рис. 2.3. Зависимости электрической прочности и пробивного напряжения газообразного диэлектрика от расстояния между электродами в однородном и неоднородном электрических полях

В однородных электрических полях, возникающих между плоскими электродами с закругленными краями, либо между сферическими электродами большого диаметра, электрическая прочность значительно выше, чем в неоднородных электрических полях между электродами типа «игла – игла», «полусфера – игла», «плоскость – игла» и т. п. Неоднородное электрическое поле возникает также между двумя полусферами, когда расстояние между ними больше радиуса сферы.

Меньшее значение электрической прочности газообразных диэлектриков в неоднородных электрических полях по сравнению с электрической прочностью в однородных полях объясняется тем, что при одной и той же разности потенциалов между электродами напряженность поля в точках, расположенных по кратчайшему расстоянию между двумя электродами, в неоднородных полях значительно выше, чем напряженность однородного электрического поля. Следовательно и электрический пробой газообразного диэлектрика в неоднородном электрическом поле произойдет при меньшем напряжении, приложенном к электродам, чем в однородном поле.

По разному развивается электрический пробой в однородных и неоднородных электрических полях.

В однородном электрическом поле при определенном значении напряжения, зависящем от температуры, давления газа и расстояния между

электродами возникает искровой разряд, переходящий в дуговой при дальнейшем росте напряжения.

В неоднородных электрических полях вначале возникает частичный разряд в местах, где напряженность достигает максимальных значений (коронный разряд). При дальнейшем возрастании напряжения коронный разряд переходит в искровой, а затем и в дуговой разряды.

Электрическая прочность газообразного диэлектрика зависит от полярности электродов типа «игла – плоскость», «игла – сфера».

При положительной полярности иглы пробой происходит при меньшем напряжении, чем при обратной полярности. Это явление объясняется тем, что ионизация газа начинается в районе кончика иглы, независимо от ее полярности, так как именно в этой области напряженность поля максимальная. При положительной полярности иглы у ее кончика возникает положительный объемный заряд из положительно заряженных ионов газа, который как бы является продолжением иглы, способствуя уменьшению длины газообразного промежутка и соответствующему уменьшению пробивного напряжения.

При отрицательной полярности иглы образовавшийся объемный положительный заряд как бы экранизирует иглу, препятствуя перемещению электронов от иглы к поверхности положительно заряженной плоскости или сферы. Наличие экрана из положительно заряженных ионов около кончика иглы и приводит к возрастанию пробивного напряжения при отрицательной полярности иглы, по сравнению с пробивным напряжением при обратной полярности иглы.

2.3. Пробой твердых диэлектриков

В твердых диэлектриках могут возникать четыре вида пробоев:

- электрический пробой макроскопически однородных твердых диэлектриков;
- электрический пробой макроскопически неоднородных твердых диэлектриков;
- электротепловой (тепловой) пробой;
- электрохимический пробой.

Электрический пробой макроскопически однородных твердых диэлектриков развивается аналогично электрическому пробую в газообразных диэлектриках в результате осуществления процесса ударной ионизации, когда исключено влияние электропроводности и диэлектрических потерь, обуславливающих разогрев диэлектрика.

В связи с этим, зависимости электрической прочности и пробивного напряжения твердых диэлектриков от толщины и конфигураций электродов

аналогичны таким же зависимостям для газообразных диэлектриков (рис. 2.1, рис. 2.3).

Электрический пробой неоднородных диэлектриков характерен для технических диэлектриков, в структуре которых имеются поры и капилляры, заполненные газообразным диэлектриком. Чаще всего таким газообразным диэлектриком является воздух. Так как электрическая прочность воздуха значительно меньше электрической прочности твердых диэлектриков, то наличие капилляров и пор в структуре твердых диэлектриков обуславливает значительную меньшую электрическую прочность неоднородных диэлектриков сравнению с однородными.

С ростом толщины неоднородного твердого диэлектрика наблюдается уменьшение его электрической прочности, так как возрастает количество газовых включений.

Электрическая прочность неоднородных твердых диэлектриков зависит от однородности и неоднородности электрического поля. Но, в отличие от газообразных и однородных твердых диэлектриков, электрическая прочность неоднородных твердых диэлектриков может быть в неоднородном поле больше, чем в однородном. Это связано с тем, что при большей площади электродов, между которыми создается однородное поле, возрастает количество слабых мест (пор, капилляров, трещин и т. д.), приводящих к снижению электрической прочности твердого диэлектрика.

Электротепловой (тепловой) пробой связан с разогревом материала в электрическом поле за счет возрастания сквозной электропроводности и диэлектрических потерь, приводящих к потере изоляционных свойств материала. Пробивное напряжение при электротепловом пробое зависит от частоты поля, условий охлаждения, температуры окружающей среды и т. п.

Установившийся температурный режим возникает тогда, когда выделение тепла в изоляционном материале равняется теплоотдаче в окружающую среду. Этот режим описывается следующим уравнением

$$U^2 \cdot \omega \cdot c \cdot \operatorname{tg} \delta = \sigma \cdot S (t_{\text{раб}} - t_0), \quad (2.8)$$

где U – напряжение на электродах; ω – угловая частота; c – емкость изоляционного материала; $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь изоляционного материала; σ – коэффициент теплоотдачи; S – поверхность изоляционного материала; $t_{\text{раб}}$ – температура изоляционного материала; t_0 – температура окружающей среды.

На рисунке 2.4 построены зависимости мощности диэлектрических потерь P_a и мощности теплоотдачи P_t от температуры.

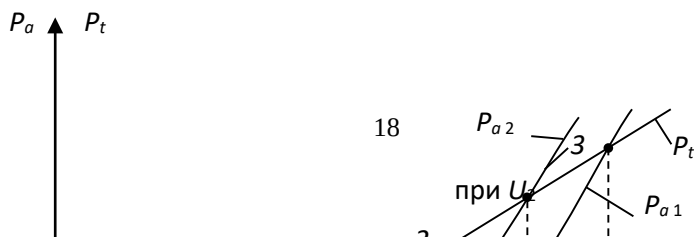


Рис. 2.4. Зависимость мощности диэлектрических потерь и мощности теплоотдачи изоляционного материала от температуры

Как видно из рис. 2.4, зависимость $P_{a1}=f(t)$ имеет две точки пересечения с прямой $P_t=f(t)$ и следовательно, два установившихся режима при $t_{1\text{раб}}$ и $t_{1\text{кр}}$. Учитывая, что в условиях эксплуатации не исключается дополнительный разогрев изоляционного материала за счет посторонних источников тепловой энергии, рабочая температура может случайно возрасти. Если с учетом возможного возрастания $t_{1\text{раб}} < t_{1\text{кр}}$, то тепловой пробой не произойдет, так как количество тепла, выделяемое внутри диэлектрика, возрастает медленнее, чем увеличивается теплоотдача. Если за счет дополнительного нагрева установится соотношение $t_{1\text{раб}} > t_{1\text{кр}}$, то количество тепловой энергии, выделяемой в изоляционном материале, превысит теплоотдачу, и температура будет расти до полного разрушения диэлектрика. С ростом напряжения зависимость $P_a=f(t)$ смещается вверх (см. кривую 3, полученную при $U_2 > U_1$). При тех же самых условиях охлаждения повышение напряжения приводит к росту рабочей температуры ($t_{2\text{раб}} > t_{1\text{раб}}$) и уменьшению критической температуры ($t_{1\text{кр}} > t_{2\text{кр}}$).

Таким образом, как видно из рис. 2.4, увеличение напряжения приводит к возрастанию рабочей температуры за счет роста количества тепла, выделяемого в материале.

Выделение тепловой энергии вследствие диэлектрических потерь приводит к увеличению электрической прочности диэлектрика. На рисунке 2.5 приведены зависимости электрической прочности и пробивного напряжения твердого диэлектрика от толщины при электрическом и электротепловом пробоях.

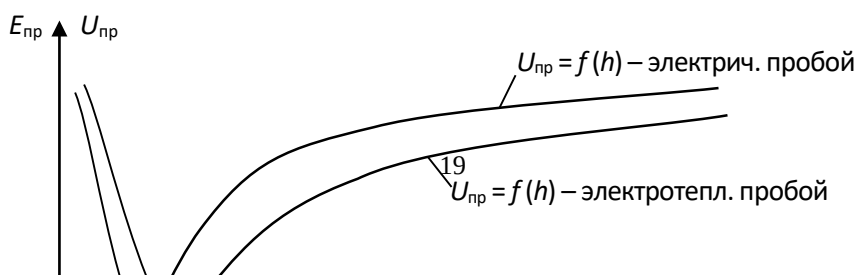


Рис. 2.5. Зависимости электрической прочности и пробивного напряжения от толщины диэлектрика

Как видно из рис. 2.5, электрическая прочность изоляционного материала при электротепловом пробое меньше, чем при чисто электрическом пробое.

Уменьшение электрической прочности при электротепловом пробое связано с одной стороны с разрушением структуры строения изоляционного материала (растрескивание, обугливание и т. д.), когда рабочая температура превышает критическую. С другой стороны, электрическая прочность при электротепловом пробое меньше, чем при электрическом даже в том случае, когда рабочая температура не превышает критическую. Такое явление можно объяснить следующим образом: с ростом температуры изоляционного материала увеличивается кинетическая энергия теплового хаотического движения заряженных частиц и нейтральных молекул твердого диэлектрика. Возрастание энергии теплового хаотического движения молекул приводит к тому, что полю необходимо сообщить меньшую дополнительную энергию движущихся заряженных частиц, чтобы последняя могла ионизировать нейтральную молекулу при столкновении с ней. И, следовательно, выполнение условия развития ударной ионизации наступает при меньшем напряжении, подаваемом на электроды.

2.4. Лабораторная работа № 1. Определение электрической прочности твердых и газообразных диэлектриков. Цель работы

Целью лабораторной работы является научить студентов определять электрическую прочность твердых и газообразных диэлектриков и выявлять зависимости электрической прочности от толщины диэлектрика и конфигурации электродов, формирование навыков использования теоретических сведений к объяснению результатов эксперимента.

2.5. Объект исследования

1. Образцы твердых диэлектриков. Материал, размеры образцов и их толщины задаются преподавателем.
2. Воздух. Длины воздушных зазоров задаются преподавателем.

2.6. Средства измерения

1. Испытательная высоковольтная установка с максимальным напряжением до 10 кВ. Принципиальная электрическая схема установки приведена на рис. 2.6.
2. Вольтметр переменного тока с пределом измерения до 150 В.
3. Микрометр типа МК с пределом измерения 0 – 25 мм. Цена деления микрометра – 0,1 мм.
4. Штангенциркуль. Цена деления – 0,1 мм.

2.7. Рабочее задание

1. Испытать на электрический пробой образцы твердого диэлектрика различной толщины, определяя пробивное напряжение каждого из них. Число образцов и измерений определяет преподаватель.
2. Рассчитать электрическую прочность каждого образца.
3. Произвести электротепловой пробой аналогичных по химическому составу и толщине образцов твердого диэлектрика, определяя пробивное напряжение каждого образца. Количество образцов и измерений такое же, как и при испытании на электрический пробой.
4. Рассчитать электрическую прочность каждого образца при электротепловом пробое.
5. Построить для одних и тех же образцов:
 - зависимости $U_{пр}=f(h)$ при электрическом и электротепловом пробоях в одних осях координат;
 - зависимости $E_{пр}=f(h)$ при электрическом и электротепловом пробоях в одних осях координат.
6. Осуществить электрический пробой воздуха при различных толщинах воздушного зазора h , определяя каждый раз значение пробивного напряжения. Электрический пробой произвести для двух сочетаний электродов с различной конфигурацией, заданных преподавателем.

7. Рассчитать электрическую прочность воздуха для каждого пробоя.
8. Построить:
 - зависимости $U_{пр}=f(h)$ для каждого из сочетаний электродов в одних осях координат;
 - зависимости $E_{пр}=f(h)$ для каждого из сочетаний электродов в одних осях координат.
9. Сделать выводы по работе.

2.8. Методические указания по выполнению рабочего задания

2.8.1. Устройство и принцип действия лабораторной установки

Принципиальная электрическая схема лабораторной установки для определения пробивного напряжения и электрической прочности твердых и газообразных диэлектриков приведена на рис. 2.6.

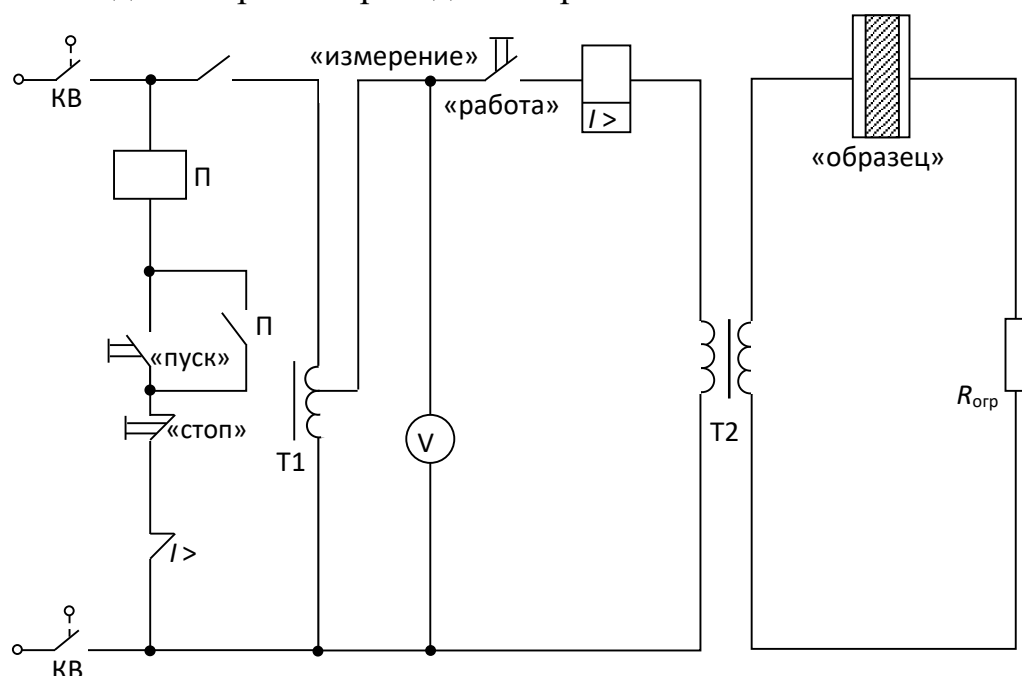


Рис. 2.6. Принципиальная электрическая схема установки

В состав установки входят:

- линейный автотрансформатор Т1, предназначенный для регулирования напряжения, подаваемого на испытательный образец;
- высоковольтный трансформатор Т2 с максимальным напряжением вторичной обмотки $U_{2max}=10$ кВ и коэффициентом $K=10$;
- сопротивление $R_{огр}$, предназначенное для ограничения тока в обмотке высокого напряжения при возникновении пробоя образца;
- электромагнитный пускатель: кнопки «пуск» и «стоп»;

- сигнальная лампа «напряжение подано»;
- переключатель режима работы установки «работа – измерение»;
- многопредельный вольтметр.

В нижней части лабораторной установки находится высоковольтный трансформатор и токоограничивающее сопротивление. Эта часть установки закрыта металлическим заземленным экраном, исключающим возможность попадания работающего на установке под высокое напряжение.

На верхней, горизонтально расположенной части установки находятся линейный автотрансформатор, вольтметр, переключатель режима работы и высоковольтная камера со сменными электродами.

Принцип действия лабораторной установки заключается в следующем. При закрытой дверце высоковольтной камеры контакты концевых выключателей КВ замкнуты и электрическая цепь установки подготовлена к работе.

При нажатии кнопки «пуск», расположенной в левом верхнем углу стенда, срабатывает электромагнитный пускатель П и через его замкнутые контакты напряжение подается на автотрансформатор Т1. Одновременно в камере высокого напряжения загорается сигнальная лампа «напряжение подано». Вторая пара контактов пускателя блокирует кнопку «пуск». Напряжение с выхода автотрансформатора поступает на обмотку низкого напряжения высоковольтного трансформатора, если переключатель режима работы установлен в положении «работа». Это напряжение измеряется многопредельным вольтметром переменного тока. На обмотке высокого напряжения трансформатора создается напряжение, значение которого может быть вычислено по формуле

$$U_2 = K \cdot U_1. \quad (2.9)$$

Когда напряжение U_2 достигает значения, равного напряжению пробоя $U_{пр}$, происходит пробой образца, и в цепи вторичной обмотки возрастает ток, амплитуда которого ограничивается сопротивлением $R_{огр}$. Возрастание тока вторичной обмотки вызывает соответствующее увеличение тока первичной обмотки трансформатора, в результате которого срабатывает реле максимального тока $I >$. Контакты этого реле размыкаются, разрывая цепь питания обмотки электромагнитного пускателя. Контакты пускателя размыкаются и отключают стенд от сети.

Обычно пробой образца происходит внезапно, что затрудняет отсчет по вольтметру напряжения, при котором произошел пробой. Поэтому для облегчения отсчета напряжения пробоя предусмотрена возможность работы установки в режиме «измерение». Для перевода установки в этот режим переключатель режима работы устанавливается в положение «измерение». В

этом режиме высоковольтный трансформатор отключается от выхода автотрансформатора. Если положение рукояти автотрансформатора, регулирующей его выходное напряжение, сохранить таким же, как и в момент пробоя, то после нажатия на кнопку «пуск» вольтметр покажет то же напряжение, что было установлено при пробое.

2.8.2. Методика экспериментального определения пробивного напряжения и электрической прочности твердых диэлектриков при электрическом пробое

1. Перед началом эксперимента необходимо проверить правильность подключения элементов установки (рис. 2.7), предварительно установив рукоятку автотрансформатора в нулевое положение и открыв дверку камеры высокого напряжения. Лампа «напряжение подано» не должна гореть.

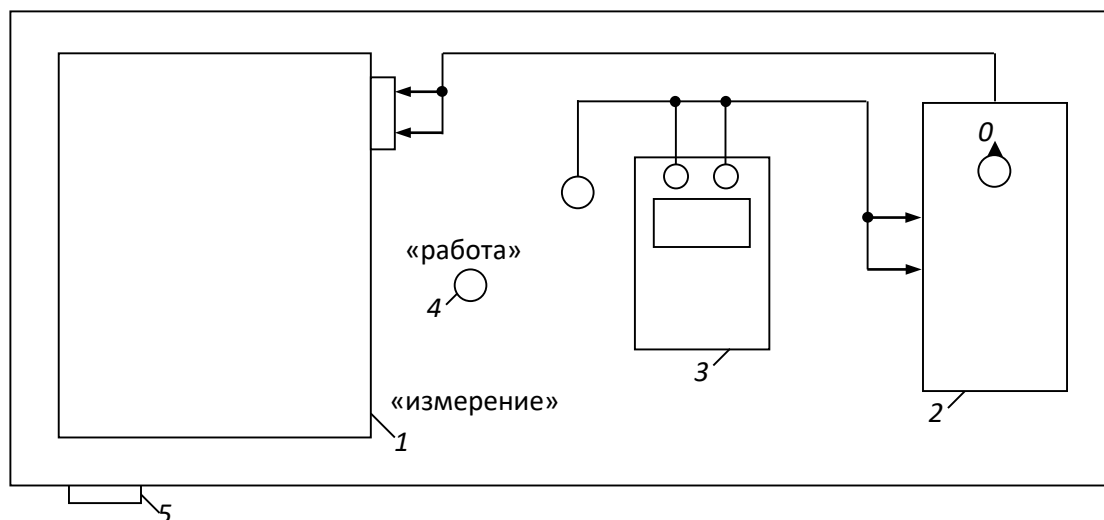


Рис. 7. Схема соединения элементов лабораторной установки:

1 – высоковольтная камера; 2 – линейный автотрансформатор; 3 – вольтметр;
переключатель режима работы установки; 5 – кнопки «пуск» и «стоп»

4 –

2. Установить по указанию преподавателя сменные электроды.

3. Измерить микрометром толщину испытываемого образца диэлектрика. Рекомендуется начинать эксперимент с образца наибольшей величины. Данные измерений записать в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Экспериментальное определение напряжение пробоя и электрической прочности твердых диэлектриков при электрическом пробое

№ п/п	h , мм	U_1 , В	$U_{пр}$, кВ	$E_{пр}$, кВ/мм	Конфигурация электродов

Примечание: высота столбцов таблицы должна быть рассчитана для записи результатов пробоя 7 – 8 образцов.

4. Разместить образец между электродами в высоковольтной камере. Для этого необходимо отвернуть стопорный винт верхнего электрода до тех пор, пока последний не начнет свободно перемещаться. Поднять верхний электрод и поместить образец в образовавшийся зазор. Опустить верхний электрод на образец и повернуть стопорный винт в обратном направлении до упора.

5. Закрывать крышку камеры высокого напряжения.

6. Установить переключатель режима работы в положение «работа».

7. Нажать кнопку «пуск». При этом загорается лампа «напряжение подано».

8. Плавно вращая рукоятку автотрансформатора, увеличивать напряжение, подаваемое на образец, до тех пор, пока не произойдет автоматическое отключение напряжения, свидетельствующее о пробое образца. Сигнальная лампа «напряжение подано» должна погаснуть.

9. Переключатель режима работы установить в положение «измерение».

10. Нажать на кнопку «пуск». Сигнальная лампа «напряжение подано» должна загореться.

11. По вольтметру отсчитать напряжение U_1 , при котором произошел пробой диэлектрика и записать в табл. 2.1.

12. Нажать кнопку «стоп». Сигнальная лампа «напряжение подано» должна погаснуть.

13. Установить рукоятку линейного автотрансформатора в нулевое положение, открыть дверцу камеры высокого напряжения и убрать пробитый образец.

14. Рассчитать пробивное напряжение и электрическую прочность образца по формуле

$$U_{пр} = \frac{K \cdot U_1}{1000}; \quad (2.10)$$

$$E_{пр} = \frac{U_{пр}}{h}, \quad (2.11)$$

где U_1 – действующее значение выходного напряжения автотрансформатора, В; $U_{пр}$ – действующее значение напряжения пробоя образца, кВ; $K=100$ – коэффициент трансформации высоковольтного трансформатора; $E_{пр}$ – электрическая прочность образца, кВ/мм.

Рассчитанные значения $U_{пр}$ и $E_{пр}$ записать в таблицу 2.1.

2.8.3. Методика экспериментального определения электрической прочности твердых диэлектриков при электротепловом пробое

1. Электротепловой пробой производится на образцах диэлектриков, аналогичных по химическому составу и геометрическим размерам образцам, использованным при электрическом пробое. Количество испытываемых образцов и их толщины задаются преподавателем.

2. Перед началом испытаний необходимо рассчитать значения начального напряжения $U_{\text{нач}}$ и интервал, через который будет изменяться напряжение установки ΔU по следующим формулам:

$$U_{\text{нач}} = 0,6 \cdot U_{\text{пр}} \cdot 1000; \quad (2.12)$$

$$\Delta U = 1000 \cdot U_{\text{пр}} \cdot \frac{(1-0,6)}{6 \div 7} = \frac{0,4}{6 \div 7} \cdot U_{\text{пр}} \cdot 1000, \quad (2.13)$$

где $U_{\text{пр}}$ – пробивное напряжение образца, полученное при электрическом пробое, кВ; ΔU – интервал, через который изменяется напряжение, приложенное к образцу при электротепловом пробое, В.

3. Выполнить пункты 3 – 7 из 2.8.2. данных методических указаний.

4. Плавнo вращая рукоятку автотрансформатора, установить напряжение, подаваемое на образец, равным ____.

5. Выдержать образец под действием напряжения $U_{\text{нач}}$ и в течение интервала времени, указанного преподавателем.

6. Вращая рукоятку автотрансформатора увеличить напряжение на образец на ΔU .

7. Выдержать образец под действием напряжения в течение указанного преподавателем интервала времени.

8. Повторить операции, перечисленные в пунктах 6 и 7, до тех пор пока не произойдет пробой образца.

9. Измерить пробивное напряжение в соответствии с пунктами 9 – 13 из методики 2.8.2.

10. Рассчитать пробивное напряжение и электрическую прочность образца при электротепловом пробое по формулам (2.10) и (2.11). Данные измерений и расчётов записываются в таблицу 2.2. Пример заполнения таблицы приведен ниже.

Таблица 2.2

Экспериментальное определение напряжения пробоя и электрической прочности твердых диэлектриков при электротепловом пробое

№ п/п	h , мм	$U_{\text{нач}}$, В	ΔU , В	U_1 , В	$U_{\text{пр}}$, кВ	$E_{\text{пр}}$, кВ/мм	Конфигурация электродов

11. Построить зависимости $U_{\text{пр}}=f(h)$ при электротепловом и электрическом пробоях в одних осях координат.

12. Построить зависимости $E_{\text{пр}}=f(h)$ при электротепловом и электрическом пробоях твердого диэлектрика в одних осях координат.

2.8.4. Методика экспериментального определения электрической прочности воздуха

1. Установить электроды заданной преподавателем конфигурации в высоковольтной камере стенда.

2. Установить необходимую толщину воздушного зазора между электродами. Для этого отвернуть стопорный винт верхнего электрода и разместить калиброванные пластины между электродами. Опустить верхний электрод на поверхность пластин и зафиксировать его положение с помощью стопорного винта. Убрать калиброванные пластины из камеры.

3. Осуществить электрический пробой воздуха в соответствии с пунктами 5 – 14 из 2.8.2. данных методических указаний. Электрический пробой воздуха произвести для двух сочетаний электродов различной формы в соответствии с указаниями преподавателя.

4. Построить зависимости $U_{пр}=f(h)$ для обоих сочетаний электродов в одних осях координат.

5. Построить зависимости $E_{пр}=f(h)$ для обоих сочетаний электродов в одних осях координат.

2.9. Контрольные вопросы

1. С помощью каких показателей характеризуется способность диэлектрика противостоять электрическому пробую?
2. Какая из величин (пробивное напряжение или электрическая прочность) более точно оценивает способность различных диэлектриков противостоять электрическому пробую?
3. Чем объяснить, что электрическая прочность пористых твердых диэлектриков ниже прочности однородных по структуре строения твердых диэлектриков?
4. Какими процессами обуславливается развитие электрического пробоя в газообразных диэлектриках?
5. В чем разница между электротепловым и чисто электрическим пробоем диэлектриков?
6. Какое явление называется пробоем диэлектриков?
7. В каком из электрических полей (однородном или неоднородном) электрическая прочность диэлектриков выше? Чем это можно объяснить?
8. По каким причинам электрическая прочность диэлектриков при тепловом пробое меньше, чем при электрическом?
9. Зависит ли электрическая прочность воздуха от полярности электродов при следующих сочетаниях электродов: игла – плоскость, игла – полусфера? Ответ аргументируйте.
10. Чем объяснить, что электрическая прочность воздуха при сочетании электродов игла плоскость или игла полусфера уменьшается в большем диапазоне, чем его прочность при сочетании электродов плоскость –

плоскость, полусфера – полусфера, с ростом толщины воздушного зазора?

11. Чем объяснить, что электрическая прочность диэлектриков уменьшается с ростом толщины?
12. При каких условиях в твердых диэлектриках может произойти электротепловой пробой?
13. Почему необходимо учитывать процесс старения электрической изоляции при определении рабочего напряжения различных электрических машин?
14. Как изменяется электрическая прочность газообразных диэлектриков с ростом давления и почему?
15. Влияет ли температура на электрическую прочность диэлектриков? Ответ аргументируйте.

Часть 3

МАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

3.1. Основные характеристики магнитных веществ

Магнитное состояние вещества оценивается намагниченностью. Намагниченностью называется сумма элементарных магнитных моментов в единице объема вещества

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{V}, \quad (3.1)$$

где m_i – элементарный магнитный момент (спин электрона); V – объем образца.

Значение намагниченности зависит от напряженности магнитного поля H и связано с последней в соответствии с уравнением:

$$M = \chi \cdot H$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

В системе СИ магнитная восприимчивость является безразмерной величиной.

Под воздействием напряженности магнитного поля в веществе создается магнитная индукция, зависимость которой от напряженности поля и намагниченности материала описывается уравнением

$$B = \mu_0 (H + \chi \cdot H), \quad (3.2)$$

где $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ – магнитная постоянная вакуума, Гн/м.

В системе СИ индукция измеряется в теслах (Тл), а в системе СГС – в гауссах (ГС).

Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля может быть также описана следующим уравнением:

$$B = \mu_a \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H, \quad (3.3)$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость; μ_r – относительная магнитная проницаемость.

Абсолютная магнитная проницаемость имеет ту же размерность, что и магнитная постоянная вакуума, а относительная магнитная проницаемость является безразмерной величиной.

Абсолютная и относительная магнитная проницаемости связаны между собой соотношением

$$\mu_a = \mu_0 \cdot \mu_r. \quad (3.4)$$

Если учесть, что

$$\mu_a = \frac{B}{H}, \quad (3.5)$$

а

$$\mu_r = \frac{B}{H \cdot \mu_0},$$

становится ясным физический смысл относительной магнитной проницаемости. Она показывает, во сколько раз магнитная индукция в веществе больше, чем индукция в вакууме под воздействием намагничивающих полей одинаковой напряженности.

3.2. Физическая природа магнетизма

Известно, что элементарный замкнутый круговой электрический ток i создает магнитное поле, основной характеристикой которого является магнитный элемент

$$\underline{m} = i \cdot \underline{S},$$

где $\underline{S}$ – векторная величина площади, охватываемой током.

На уровне атома можно условно выделить три основные формы движения электрических зарядов, создающих элементарные магнитные моменты:

- движение электронов по круговой орбите вокруг ядра;
- вращение электронов вокруг собственной оси;
- вращение протонов ядра атома.

Наибольший магнитный момент создается за счет вращения электрона вокруг собственной оси. Этот магнитный момент получил название – спин электрона. Спины электронов могут принимать только вполне определенные дискретные значения, кратные постоянной Планка. Минимальное значение спина электрона превышает магнитный момент, создаваемый протоном, примерно в 650 раз.

Но не все электроны, создающие электронные оболочки атома, участвуют в создании магнитного момента атома. Рассмотрим, как создается результирующий магнитный момент атома вещества. Электроны в атомах вещества занимают различные энергетические уровни, которые принято изображать в виде ряда электронных оболочек. Количество оболочек в атоме химического элемента определяется номером периода таблицы Менделеева, в котором расположен данный элемент. Каждая из электронных оболочек состоит из ряда подоболочек, число которых колеблется от 1 до 4. Номер электронной оболочки индексируется цифрами от 1 до 7, а номер подоболочки буквами s, p, d, f . Пример обозначения оболочек и подоболочек приведен на рис. 3.1.

В подоболочках с индексом S могут находиться максимально 2, в подоболочках p – 6, в подоболочках d – 10 и в подоболочках f – 14 электронов.

Заполнение электронами оболочек и подоболочек у подавляющего большинства элементов подчиняются следующему правилу.

Прежде всего заполняются наиболее близко расположенные к ядру атома оболочки и подоболочки. Заполнение последующих электронных подоболочек начинается после того, как полностью заполнена предыдущая.

В полностью заполненных подоболочках половина количества электронов, заполнивших электронную подоболочку, вращаются в одном направлении, создавая спиновые моменты, направление которых условно принимается за *положительное*.

Другая половина электронов данной подоболочки вращается в противоположном направлении, создавая спиновые моменты, направление которых принимается за *отрицательное*.

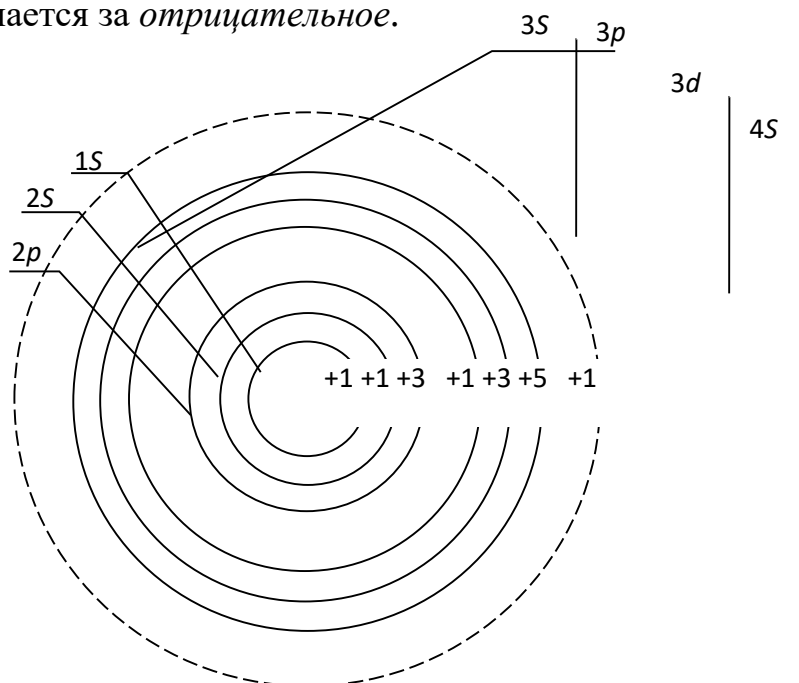


Рис. 3.1. Распределение электронов по оболочкам и подоболочкам в атоме железа

Так как количество положительных и отрицательных спинов в полностью заполненной электронной подоболочке одинаково, то они взаимокompенсируются.

Следовательно, атомы элементов, электронные оболочки и подоболочки которых полностью заполнены электронами, не имеют собственных магнитных моментов, а сами вещества слабо намагничиваются в магнитном поле.

Но у ряда химических элементов такой порядок заполнения электронами оболочек и подоболочек нарушается.

Как видно из рис. 3.1, у атома железа не заполнена полностью подболочка $3d$, на которой находится всего 6 электронов вместо 10, а уже заполнена следующая, валентная для железа, подболочка $4s$.

Пять из шести электронов подболочки $3d$ вращаются в одном направлении, создавая положительные спины электронов. Шестой электрон вращается в направлении обратном, создавая противоположно направленный спин – отрицательный.

Таким образом в подболочке $3d$ атома железа существует 4 нескомпенсированных спинов электронов, которые, суммируясь, вызывают появление магнитного момента у атома.

Наличие нескомпенсированных спинов электронов в различных подболочках наблюдается и у атомов ряда других элементов: кобальта, никеля, марганца и др.

Электроны, находящиеся в наружной валентной подболочке, служить источником магнитных моментов не могут, т. к. при образовании молекул и кристаллов их магнитные моменты компенсируются спинами валентных электронов соседних атомов.

Учитывая вышеизложенное, можно сформулировать первое условие возникновения ферромагнетизма у веществ.

Для того чтобы вещество хорошо намагничивалось и в нем создавалась большая магнитная индукция, необходимо, чтобы у атомов этого вещества существовали нескомпенсированные спины электронов в подболочках, предшествующих валентной.

Однако выполнения только одного этого условия недостаточно для того, чтобы вещество являлось ферромагнетиком. Связано это с тем, что в любом объеме вещества, с которым приходится иметь дело на практике, содержится большое количество атомов. Электроны атомов образуют многоэлектронный коллектив.

Между атомами происходит постоянный обмен электронами. При обмене между электронами соседних атомов возникает сильное электростатическое взаимодействие. Данное взаимодействие получило название «обменного», а энергия этого взаимодействия называется «обменной энергией».

Такое электростатическое взаимодействие электронов соседних атомов способно ориентировать нескомпенсированные спины электронов определенным образом. Направление ориентации спинов электронов соседних атомов определяется значением обменной энергии.

График зависимости обменной энергии от отношения K приведен на рис. 3.2.

Известно, что обменная энергия зависит от отношения

$$k = \frac{a}{r},$$

где a – расстояние между центрами соседних атомов; r – радиус электронной подболочки с некомпенсированными спинами электронов.

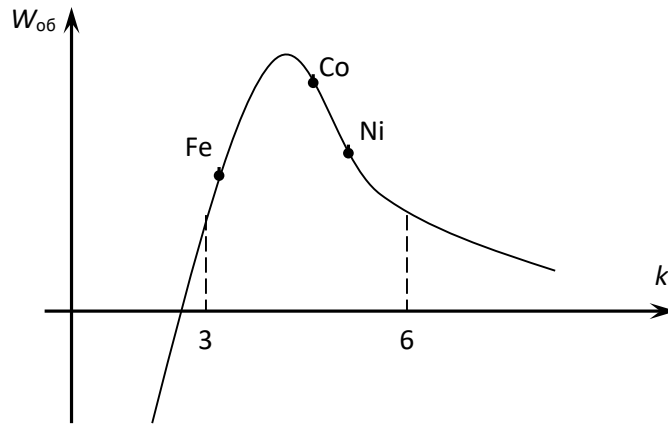


Рис. 2.2. Зависимость «обменной» энергии от геометрических размеров кристаллической решетки вещества

При $k > 3$ обменная энергия положительна, но настолько мала, что спины электронов соседних атомов ориентируются хаотично, вещества с такой ориентацией спинов намагничиваются слабо и относятся к классу парамагнетиков. С уменьшением k значение обменной энергии возрастает, что заставляет спиновые моменты соседних атомов ориентироваться параллельно друг другу. Это приводит к тому, что спиновые моменты атомов складываются и возникает самопроизвольное намагниченное состояние вещества. При $k = 3,5$ обменная энергия достигает максимума и при дальнейшем сближении атомов начинает убывать. Когда $k < 3$, обменная энергия становится отрицательной. При отрицательной обменной энергии энергетически выгодным становится взаимопротивоположная ориентация спинов электронов соседних атомов, приводящая к их взаимной компенсации. Вещества с отрицательной обменной энергией называются антиферромагнетиками.

Таким образом, второе условие возникновения ферромагнетизма в веществе заключается в том, что оно должно обладать достаточно большей положительной обменной энергией, т. е. отношение k должно находиться в диапазоне $3 < k < 6$.

При выполнении обоих условий в веществе возникает внутреннее магнитное поле, характеризуемое намагниченностью M , определяемой в соответствии с уравнением (3.1).

3.3. Классификация веществ по магнитным свойствам

В 3.2. показано, что магнитные свойства веществ зависят от наличия или отсутствия нескомпенсированных спиновых моментов в электронных подболочках атомов и от длины межуатомных расстояний между соседними атомами (отношение k).

По способности намагничиваться под воздействием магнитного поля все вещества подразделяются на следующие большие группы: диамагнетики, парамагнетики, магнетики.

Магнетики, в свою очередь, подразделяются на ферромагнетики, ферримагнетики и антиферромагнетики. Краткая характеристика каждой из групп материалов приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Классификация веществ по магнитным свойствам

Группа	Ориентация спиновых электронов соседних атомов	Краткая характеристика свойств
Диамагнетики	нескомпенсированные спины электронов, отсутствуют	при отсутствии намагничивающего поля ($H=0$), намагниченность $M=0$. При $H \neq 0$ появляются индуцированные магнитные моменты и $M \neq 0$. Отсюда $\chi = -10^{-6}$, а $\mu_r < 1$. Магнитная проницаемость μ_r не зависит от напряженности поля
Парамагнетики	ориентация спиновых моментов соседних атомов хаотичная	при $H=0$, у атомов существуют собственные магнитные моменты m , но намагниченность $M=0$, из-за хаотической ориентации спиновых моментов, $10^{-6} < \chi < 10^{-3}$. Магнитная проницаемость $\mu_r > 1$, но не значительно и не зависит от напряженности магнитного поля

Продолжение табл. 3.1

Группа	Ориентация спиновых электронов соседних атомов	Краткая характеристика свойств
Ферромагнетики	ориентация спиновых моментов параллельная	при $H=0$, у атомов существуют собственные магнитные моменты m , возникают области с самопроизвольной намагниченностью ($M \neq 0$). Но в целом намагниченность всего атома вещества равна 0. $\chi = 10^5 \dots 10^7$. Магнитная проницаемость $\mu_r \gg 1$ и ее значение зависит от напряженности магнитного поля
Ферримагнетики (ферриты)	антипараллельная ориентация магнитных моментов разного значения	материалы, получаемые спеканием оксидов железа, никеля, цинка, марганца и других металлов, являются

		нескомпенсированными антиферромагнетиками. При $H=0$ существуют области самопроизвольного намагничивания с $M \neq 0$. В целом вещество остается ненамагниченным. Магнитная проницаемость $\mu_r \gg 1$ и зависит от напряженности поля
Антиферромагнетики	антипараллельная ориентация спиновых моментов соседних атомов	атомы имеют собственные магнитные моменты, одинаковые по значению и противоположно направленные. При $H=0$, намагниченность $M=0$, т. к. эти вещества обладают отрицательной обменной энергией. Легированием других веществ могут быть превращены в ферромагнетики.

Из таблицы видно, что наиболее высокими свойствами обладают ферромагнетики и ферримагнетики, в которых можно создавать значительно большие магнитные индукции, чем в других материалах, из-за наличия у них самопроизвольной намагниченности.

3.4. Строение ферромагнетиков

Все процессы намагничивания и перемagnetизации обусловлены магнитным взаимодействием атомов. Это взаимодействие приводит к тому, что при отсутствии внешнего магнитного поля ферромагнитные тела разбиваются на области с самопроизвольным намагничиванием, называемые *доменами*.

Объем домена колеблется в пределах $10^{-1} \div 10^{-6} \text{ см}^3$. Каждый из доменов намагничен до насыщения в направлении, отличном от направления намагниченности соседних доменов. Насыщенное магнитное состояние домена оценивается намагниченностью насыщения M_S , которая определяется из следующего уравнения:

$$M_S = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{V} \right). \quad (3.6)$$

Направление намагниченности каждого из доменов устанавливается таким, чтобы магнитные моменты их взаимокompенсировались, и намагниченность ферромагнетика в целом равнялась нулю при отсутствии внешнего намагничивающего поля.

Рассмотрим подробнее, почему это происходит. Допустим, что ферромагнетик имеет однодоменную структуру, при которой магнитные моменты атомов ориентированы параллельно.

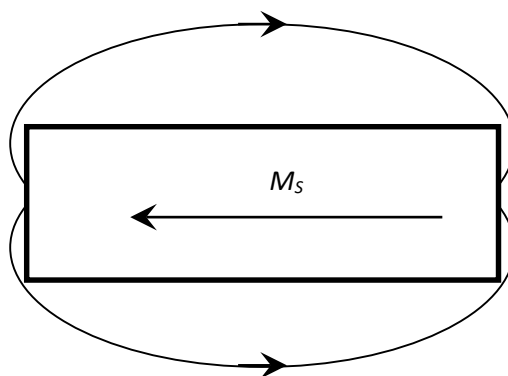


Рис. 3.3. Однодоменная структура строения ферромагнетика

При такой структуре строения (рис. 3.3.) силовые линии магнитного поля замыкаются через окружающее образец воздушное пространство, и, следовательно, в нем возникает размагничивающее поле напряженностью:

$$H_p = -N \cdot M_S, \quad (3.7)$$

где N – коэффициент размагничивания, значение которого зависит от структуры строения, ферромагнетика (числа доменов).

В отсутствие внешнего магнитного поля свободная магнитостатическая энергия образца в собственном размагничивающем поле зависит от коэффициента размагничивания и может быть определена из уравнения

$$W_{ст} = -0,5N \cdot H_p \cdot M_S = 0,5N \cdot M_S^2. \quad (3.8)$$

Так как коэффициент размагничивания имеет наибольшее значение при однодоменной структуре строения, то и свободная магнитостатическая энергия максимальна именно при такой структуре строения.

Известно, что при отсутствии внешних источников энергии вещество стремится приобрести такую структуру строения, при которой его собственная энергия была бы минимальна. С этой точки зрения однодоменная структура строения для ферромагнетика является энергетически невыгодной, так как в этом случае он обладает максимальной свободной магнитостатической энергией.

Стремясь уменьшить значение магнитостатической энергии, ферромагнетик начинает самопроизвольно делиться на области со спонтанным намагничиванием.

Энергетически более выгодными являются структуры с двумя и четырьмя доменами, рис. 3.4.

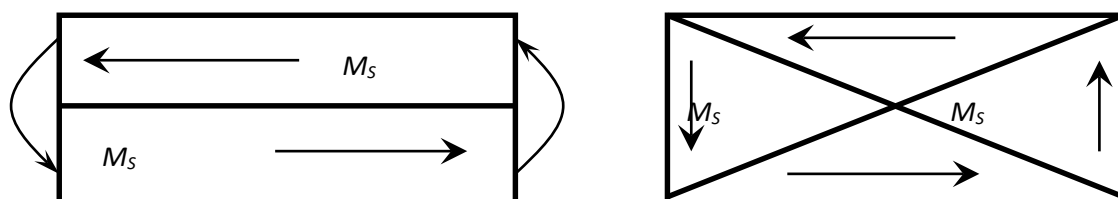


Рис. 3.4. Двухдоменная и четырехдоменная структура строения ферромагнетика

При двухдоменной структуре коэффициент размагничивания и, следовательно, свободная магнитостатическая энергия приблизительно в два раза меньше, чем при однодоменной.

Энергетически еще более выгодной является структура с четырьмя доменами. При самопроизвольном разбиении образца на 4 домена в каждом из них устанавливаются такие направления спонтанной намагниченности, при которых магнитный поток замыкается внутри образца и размагничивающее поле отсутствует, $H_p = 0$.

При переходе от домена к домену направление намагниченности изменяется плавно в пределах слоя, расположенного между соседними доменами. Этот слой получил название стенки, или границы (рис. 3.5).

В пределах границы происходит постепенный поворот спинов от одного направления намагниченности к другому. Толщина стенок соответствует определенному значению общей свободной энергии стенки, которая складывается из обменной энергии, магнитоупругой энергии и энергии магнитной анизотропии.

Спонтанное деление образца ферромагнетика на домены приводит к уменьшению свободной магнитостатической энергии образца. Но одновременно возрастает количество стенок между доменами, что приводит к увеличению свободной энергии, равной сумме свободных энергий всех стенок.

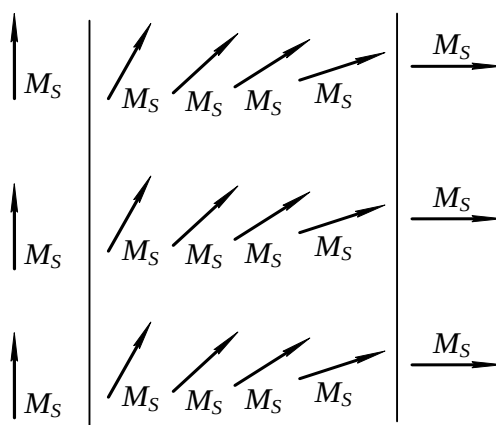


Рис. 3.5. Схема поворота спинов атома в пределах границы домена

Деление ферромагнетика на домены будет продолжаться до тех пор, пока затраты энергии на создание нового домена, равные свободной энергии стенки, не сравняются с уменьшением магнитостатической энергии. Дальнейшее деление ферромагнетика на домены становится энергетически невыгодным.

Доменная структура строения ферромагнетика сохраняется только до определенной температуры, называемой температурой Кюри, или точкой Кюри.

Точка Кюри соответствует равенству кинетической энергии теплового движения и обменной энергии. Поэтому у разных ферромагнетиков точка Кюри различна. Так, у железа она равна 770°C , у никеля – 358°C , у кобальта – 1127°C .

При температуре выше, чем точка Кюри, кинетическая энергия теплового движения становится достаточной для преодоления ориентирующего действия обменной энергии, и состояние самопроизвольной намагниченности доменов нарушается. Ферромагнетик превращается в парамагнетик.

3.5. Явления магнитной анизотропии и магнитострикции

Практически все ферромагнетики состоят из большого числа кристаллов. Кристаллы различных материалов имеют разные пространственные кристаллические решетки, в узлах которых находятся атомы вещества. Так, кристалл железа представляет собой куб, в вершинах и в центре которого располагаются атомы железа (рис. 3.6, а).

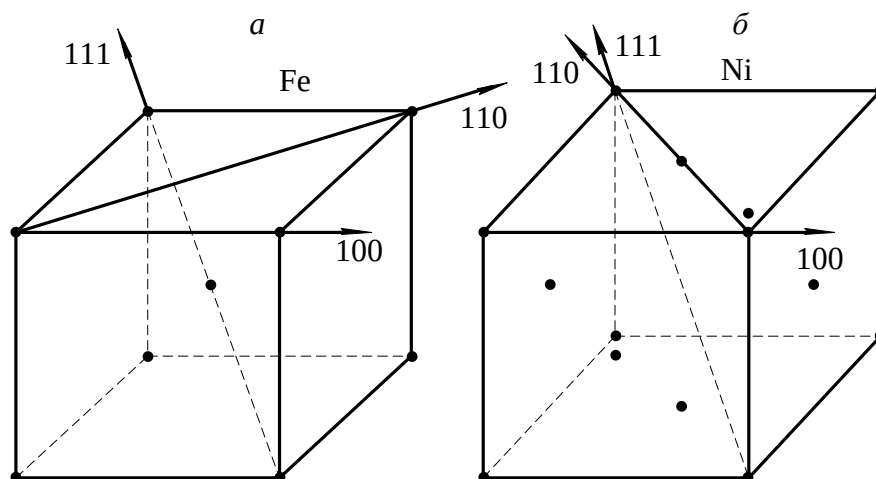


Рис. 3.6. Основные кристаллографические направления железа и никеля

В кристаллах железа различают три основных кристаллографических направления:

- 100 – направление по ребру куба;
- 110 – направление по диагонали грани куба;
- 111 – направление по диагонали грани самого куба.

Если ферромагнетик намагничивать по различным кристаллографическим направлениям, то состояние насыщения будет достигаться при разных значениях напряженности магнитного поля.

Состояние магнитного насыщения железа достигается при наименьшей напряженности намагничивающего поля, если намагничивание производится по направлению 100, т. е. по ребру куба. И наоборот, насыщение железа происходит

при максимальной напряженности намагничивающего поля, если намагничивание производится по кристаллографической оси 111.

Направление 100 называется *осью легкого намагничивания*, направление 111 – *осью трудного намагничивания*.

Если железо намагничивать по кристаллографическому направлению 110, то насыщение материала достигается при меньшей напряженности намагничивающего поля, чем при намагничивании по оси 111 и большей, чем при намагничивании по кристаллографическому направлению 100. Кристаллографическое направление 110 называется *осью среднего намагничивания*. Кривые намагничивания для разных направлений железа приведены на рисунке 3.7.

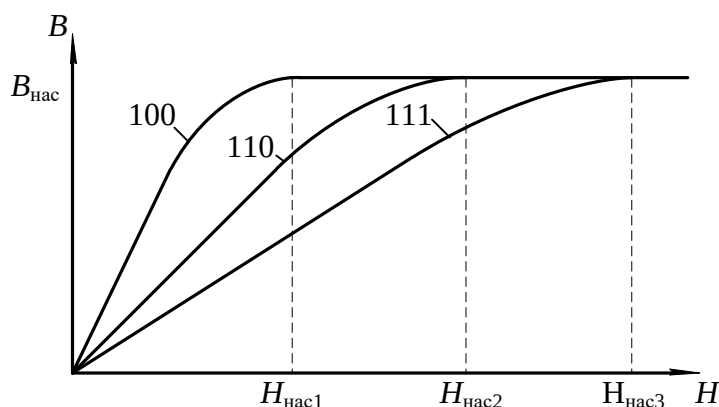


Рис. 3.7. Кривые намагничивания для разных направлений железа

В отличие от железа, у кристалла никеля атомы располагаются в вершинах и в центрах каждой грани куба. Такое расположение атомов в кристалле никеля приводит к изменению осей легкого и трудного намагничивания. У никеля осью легкого намагничивания является направление 111, а осью трудного намагничивания – кристаллографическое направление 100 (рис. 3.6, б). Направление среднего намагничивания у никеля остается таким же, что и у железа – 110.

Различие магнитных свойств у ферромагнетиков при намагничивании по различным кристаллографическим направлениям называется *магнитной анизотропией*.

Явление магнитной анизотропии учитывается при изготовлении холоднокатаных анизотропных текстурованных электротехнических сталей. У таких сталей оси легкого намагничивания всех кристаллов совпадают с направлением прокатки. Применение анизотропных холоднокатаных сталей позволяет уменьшить вес электрических машин примерно на одну треть, по сравнению с электрическими машинами такой же мощности, в которых используется изотропная горячекатаная сталь.

Намагничивание ферромагнетиков сопровождается изменением линейных размеров образца за счет магнитного взаимодействия электронов, вызывающего изменение расстояний и деформацию кристаллической решетки. Это явление называется *магнитострикцией*. Относительное изменение линейных размеров ферромагнетика при намагничивании оценивается коэффициентом магнитострикции:

$$\lambda = \pm \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl – удлинение образца ферромагнетика при намагничивании; l – исходная длина образца до намагничивания.

Значение и знак коэффициента магнитострикции зависят от направления намагничивания и вида ферромагнетика.

Так, при намагничивании кристалла железа по оси легкого намагничивания происходит его удлинение вдоль этой оси и, следовательно, коэффициент магнитострикции является положительным.

Если же железо намагничивать по оси трудного намагничивания, то происходит укорочение образца вдоль данной оси, т. е. коэффициент магнитострикции отрицателен.

В отличие от железа, у кристаллов никеля коэффициент магнитострикции отрицателен при намагничивании по оси легкого намагничивания 111, и положителен, если намагничивать кристалл по оси трудного намагничивания.

Удлинение или сжатие ферромагнетика в направлении намагничивающего поля сопровождается сжатием или удлинением, соответственно, в поперечном направлении.

Явление магнитострикции обнаруживается и во влиянии внешних механических воздействий на магнитные свойства ферромагнетиков.

Растяжение ферромагнетика внешними механическими силами вызывает облегчение, а сжатие – затруднение процесса намагничивания, если у ферромагнетика положительный коэффициент магнитострикции. Для материалов с отрицательным коэффициентом магнитострикции сжатие приводит к облегчению, а растяжение – к затруднению процесса намагничивания. Явление магнитострикции широко используется в технике. Например, в области ультразвуковой локации магнитострикционные материалы широко используются как источники ультразвука.

Явление магнитострикции, свойственное магнитным материалам, приводит к тому, что линейные размеры магнитопроводов машин переменного тока колеблются с частотой, равной частоте переменного магнитного поля. Это приводит к возникновению дополнительных механических напряжений в местах

крепления магнитопровода к корпусу электрической машины и появлению шума, что является нежелательным.

3.6. Намагничивание ферромагнетика

Если размагниченный ферромагнетик поместить в магнитное поле, то под воздействием напряженности поля начинается перераспределение магнитных моментов доменов, в результате которого появляется намагниченность ферромагнетика в направлении напряженности намагничивающегося поля.

Внутри ферромагнетика создается магнитная индукция, значение которой определяется намагниченностью ферромагнетика и напряженностью H намагничивающегося поля:

$$B = \mu_0(H + M). \quad (3.9)$$

В ферромагнетиках внутренняя намагниченность значительно больше напряженности намагничивающегося поля ($H > M$). В связи с этим значение магнитной индукции, в основном, определяется внутренней намагниченностью ферромагнетика, а не напряженностью внешнего поля.

Рассмотрим подробнее процесс намагничивания ферромагнетика. На рис. 3.8. приведена основная кривая намагничивания.

Выделим на этой кривой участки, в пределах которых возрастание магнитной индукции обуславливается различными процессами.

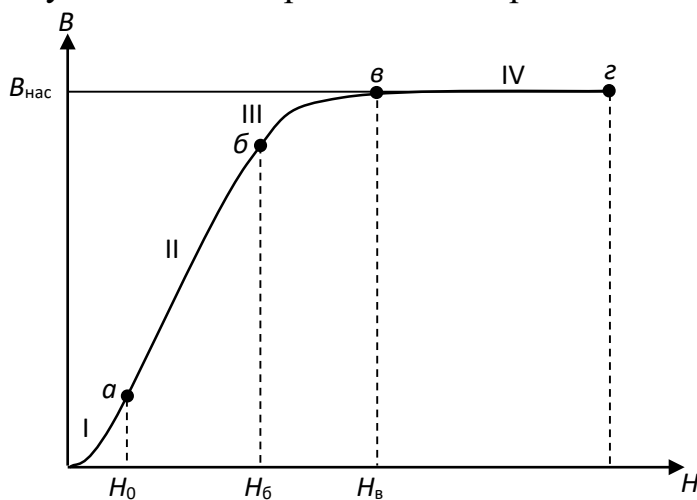


Рис. 3.8. Основная кривая намагничивания ферромагнетика

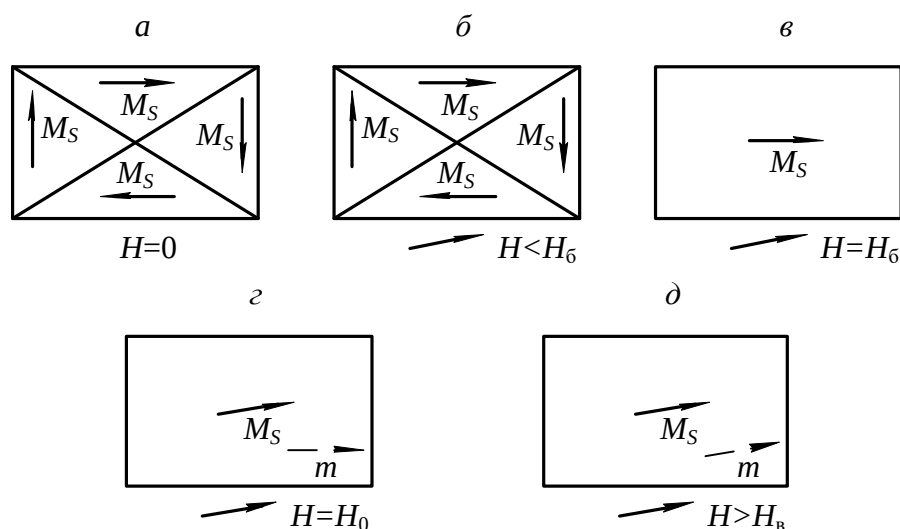


Рис. 3.9. Схема намагничивания ферромагнетика

Из параграфа 3.4. известно, что размагниченный образец ферромагнитного материала при отсутствии магнитного поля ($H = 0$) самопроизвольно разбивается на домены, направление намагниченности каждого из которых такое, что суммарная намагниченность образца в целом равна 0 (рис. 3.9, а).

Намагничиваем образец, плавно увеличивая напряженность магнитного поля. В диапазоне изменения напряженности H от 0 до H_a происходит рост объема (смещение границ) тех доменов, у которых направление собственной намагниченности наиболее близко к направлению напряженности внешнего намагничивающего поля (рис. 3.9, б). Процесс роста домена в этом диапазоне осуществляется вполне упруго и без потерь энергии. Если напряженность поля опять уменьшить до 0, то ферромагнетик вернется в исходное размагниченное состояние (см. рис. 3.9, а).

При возрастании напряженности в диапазоне $H_a < H < H_b$ магнитная индукция за счет продолжающегося смягчения границ доменов с наименьшим углом между собственностью и напряженностью намагничивающегося поля (рис. 3.9, б). Только этот процесс приобретает необратимый характер и связан с потерями энергии. Необратимость процесса на участке II кривой намагничивания (см. рис. 3.8) обусловлена тем, что неоднородные внутренние напряжения, инородные включения, пустоты и дефекты, всегда имеющиеся в материале, препятствуют смещению границ доменов. Наличие препятствий приводит к тому, что при плавном повышении напряженности поля индукция в ферромагнетике изменяется скачкообразно. Скачкообразное изменение индукции вызывает появление микроскопических вихревых токов, при протекании которых происходит нагрев образца, т.е. в материале возникают потери энергии на намагничивание.

Чтобы размагнитить образец после того, как напряженность поля возросла до $H > H_a$, необходимо изменить направление напряженности поля на обратное и опять затратить энергию. Когда напряженность поля $H = H_b$, ферромагнетик приобретает однодоменную структуру строения (рис. 3.9, в), но направление намагниченности отлично от направления напряженности намагничивающегося поля.

Дальнейшее повышение напряженности поля вызывает рост магнитной индукции в образце за счет процесса ориентации магнитных моментов в направлении поля (поворот моментов). Когда направление магнитных моментов домена совпадает с направлением напряженности намагничивающегося поля, рост магнитной индукции практически прекратится с ростом напряженности поля (рис. 3.9, г).

Такое состояние ферромагнетика называется техническим насыщением. Напряженность поля в точке «в» кривой намагничивания обозначается H_s и называется *напряженностью насыщения*.

С дальнейшим ростом напряженности поля ($H > H_b$) наблюдается медленное и весьма незначительное повышение намагниченности за счет парапроцесса, заключающегося в дополнительной ориентации спиновых моментов электронов, направление которых отлично от направления поля из-за теплового движения частиц.

3.7. Свойства ферромагнитных материалов в квазипостоянных магнитных полях

Квазипостоянным магнитным полем называется такое переменное поле, напряженность которого изменяется с частотой, близкой к 0, и амплитудой, равной H_m .

Если предварительно размагниченный образец поместить в квазипостоянное магнитное поле, то при возрастании напряженности поля от 0 до $+H_m$ индукция в образце увеличивается в соответствии с основной кривой намагничивания (участок *OA*, рис. 3.10).

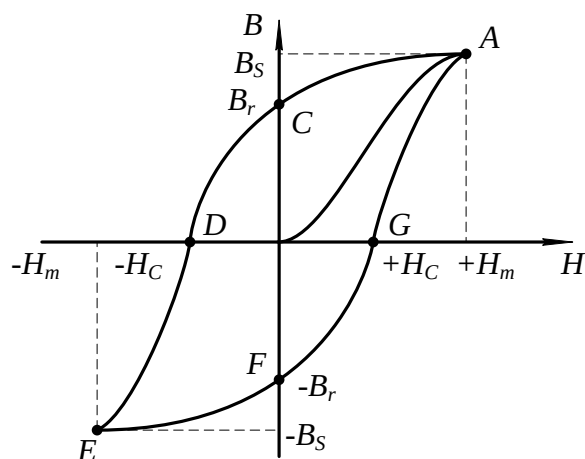


Рис. 3.10. Петля гистерезиса ферромагнетика

После того, как напряженность намагничивающего поля достигнет значения, равного амплитудному, она начинает уменьшаться до 0, вызывая снижение магнитной индукции за счет обратного поворота магнитного момента домена в направлении ближайшей оси легкого намагничивания. Когда напряженность поля станет равной 0, в ферромагнетике сохранится остаточная магнитная индукция B_r (участок AC, см. рис. 3.10). В дальнейшем напряженность намагничивающего поля изменяет свое направление на обратное и становится «отрицательной», вызывая дальнейшее уменьшение магнитной индукции (участок CD, см. рис. 3.10). На этом участке происходит необратимое разделение однодоменной структуры ферромагнетика на ряд доменов с различными направлениями собственных магнитных моментов. Когда напряженность поля H становится равной $-H_C$ (коэрцитивная сила), ферромагнетик приобретает структуру, аналогичную структуре строения до начала намагничивания, а индукция образца становится равной нулю (точка D, см. рис. 3.10).

На участке DE напряженность поля изменяется в пределах от $-H_C$ до $-H_m$. Магнитная индукция в образце возрастает за счет смещения границ доменов и последующей ориентации векторов намагниченности в направлении действия поля.

Достигнув амплитудного значения, напряженность магнитного поля начинает изменяться от $-H_m$ до 0.

Индукция в образце уменьшается до значения, равного остаточной магнитной индукции (участок EF) за счет процесса, аналогичного процессу размагничивания ферромагнетика на участке AC.

При изменении напряженности поля от 0 до $+H_C$ (участок FG) продолжается процесс размагничивания образца аналогично размагничиванию на участке CD. Когда $H = H_C$, индукция в образце равна 0.

Дальнейшее возрастание напряженности поля до амплитудного значения приводит к намагничиванию образца и возрастанию индукции.

Таким образом, зависимость магнитной индукции от напряженности квазипостоянного поля за полный цикл перемагничивания представляет петлю, называемую *петлей гистерезиса*.

Площадь петли гистерезиса пропорциональна потерям на гистерезис.

Если после каждого цикла перемагничивания увеличивать амплитуду напряженности квазипостоянного магнитного поля, то получится семейство петель гистерезиса. Причем большему значению амплитуды напряженности поля будет соответствовать петля с большей амплитудой магнитной индукции и площадью петли (рис. 3.11). Когда напряженность поля достигает значения, при котором наступает насыщение ферромагнетика, площадь петли гистерезиса максимальна. При дальнейшем возрастании амплитуды напряженности площадь петли остается постоянной, а в концах петли появляются прямолинейные участки со слабым возрастанием магнитной индукции.

Петля с наибольшей площадью называется *предельной петлей гистерезиса*.

По предельной петле гистерезиса определяются основные характеристики магнитных материалов, значения которых приводятся в справочниках; индукция технического насыщения, B_s ; напряженность поля, при которой достигается насыщение ферромагнетика, H_s ; остаточная индукция, B_r ; коэрцитивная сила, H_c .

Если через вершины семейства петель гистерезиса провести линию, то полученная кривая $B_m = f(H_m)$ представляет собой основную кривую намагничивания.

По основной кривой намагничивания определяются абсолютная и относительная магнитные проницаемости:

$$\mu_a = \frac{B_m}{H_m}; \quad (3.10)$$

$$\mu_r = \frac{B_m}{(\mu_0 \cdot H_m)}, \quad (3.11)$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость.

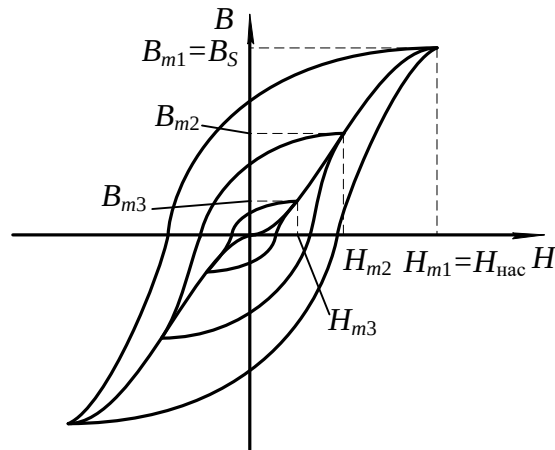


Рис. 3.11. Семейство петель гистерезиса

Определяя значение относительной магнитной проницаемости для каждого значения напряженности намагничивающего поля по основной кривой намагничивания, можно получить зависимость $\mu_r = f(H_m)$, (рис. 3.12).

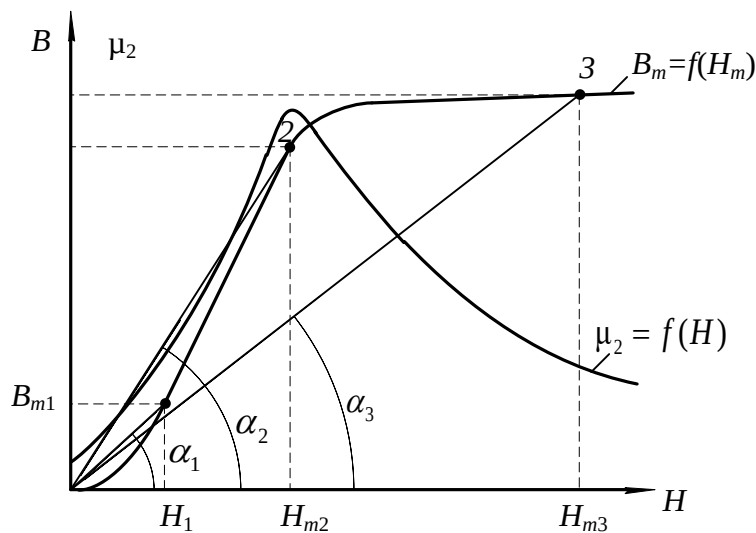


Рис. 3.12. Зависимость относительной магнитной проницаемости от напряженности поля

Как видно из рис. 3.12, относительная магнитная проницаемость с ростом напряженности поля вначале возрастает от $\mu_{нач}$ до μ_{max} , а затем уменьшается. Неоднозначный характер изменения μ_r связан с видом основной кривой намагничивания. Покажем это на примере. Допустим, что необходимо определить проницаемость материала μ_r в точках 1, 2 и 3.

Тогда, в соответствии с формулой (3.11):

$$\mu_{r1} = \frac{B_1}{(\mu_0 \cdot H_1)};$$

$$\mu_{r2} = \frac{B_2}{(\mu_0 \cdot H_2)};$$

$$\mu_{r3} = \frac{B_3}{(\mu_0 \cdot H_3)}.$$

B_1 и H_1 , B_2 и H_2 , B_3 и H_3 с учетом масштабов по индукции и напряженности представляют собой катеты прямоугольных треугольников с вершинами O_{11} , O_{22} и O_{33} соответственно, а отношения B_1/H_1 , B_2/H_2 , B_3/H_3 являются тангенсами углов наклона, образованных прямыми, проведенными из начала координат в точки 1, 2, 3, на кривой намагничивания.

Вследствие переменной крутизны основной кривой намагничивания, угол наклона этих прямых сначала возрастает, затем, когда ферромагнетик входит в состояние насыщения, уменьшается с ростом напряженности намагничивающего поля. Максимальное значение магнитной проницаемости μ_r достигается в той точке кривой намагничивания, в которой прямая, соединяющая эту точку с началом координат, является касательной к кривой намагничивания. Значение магнитной проницаемости в этой точке обозначается $\mu_{r \max}$ и обычно находится в начале участка *б – в* кривой намагничивания (см. рис. 3.8).

Определение магнитной проницаемости μ_r при напряженности поля $H = 0$ в соответствии с уравнением (3.11) лишено смысла, так как значение относительной магнитной проницаемости в этом случае неопределенно. В связи с этим введено понятие *начальной магнитной проницаемости* $\mu_{r \text{ нач}}$.

З а н а ч а л ь н у ю м а г н и т н у ю п р о н и ц а е м о с т ь принимается предельное значение отношения индукции, деленной на магнитную постоянную, к напряженности при стремлении напряженности магнитного поля к нулю:

$$\mu_{r \text{ нач}} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \lim_{H \rightarrow 0} \frac{B}{H}. \quad (3.12)$$

Практически начальная магнитная проницаемость $\mu_{r \text{ нач}}$ определяется при напряженности поля $H \leq 0,1$ А/м.

Значения начальной $\mu_{r \text{ нач}}$ и максимальной $\mu_{r \max}$ магнитных проницаемостей для каждого магнитного материала приводятся в справочниках.

3.8. Дифференциальная магнитная проницаемость

Неоднозначность зависимости магнитной индукции от напряженности поля существенно усложняет расчет и анализ цепей, содержащих магнитные элементы. С целью упрощения, расчеты и анализ электромагнитных цепей часто ведутся по основной кривой намагничивания $B=f(H)$, что в ряде случаев приводит к существенным ошибкам. Особенно это касается тех ферромагнитных устройств, форма и значение выходного напряжения которых зависят от того, как и в каких пределах изменяется на напряженность магнитного поля. Для таких устройств введена еще одна характеристика магнитного материала – дифференциальная магнитная проницаемость:

$$\mu_{rg} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dB}{dH}, \quad (3.13)$$

где $\frac{dB}{dH}$ – производная от магнитной индукции по напряженности поля в заданной точке петли гистерезиса.

Если определить μ_{rg} в каждой точке петли гистерезиса, то можно получить зависимость $\mu_{rg}=f(H)$, представленную на рис. 3.13.

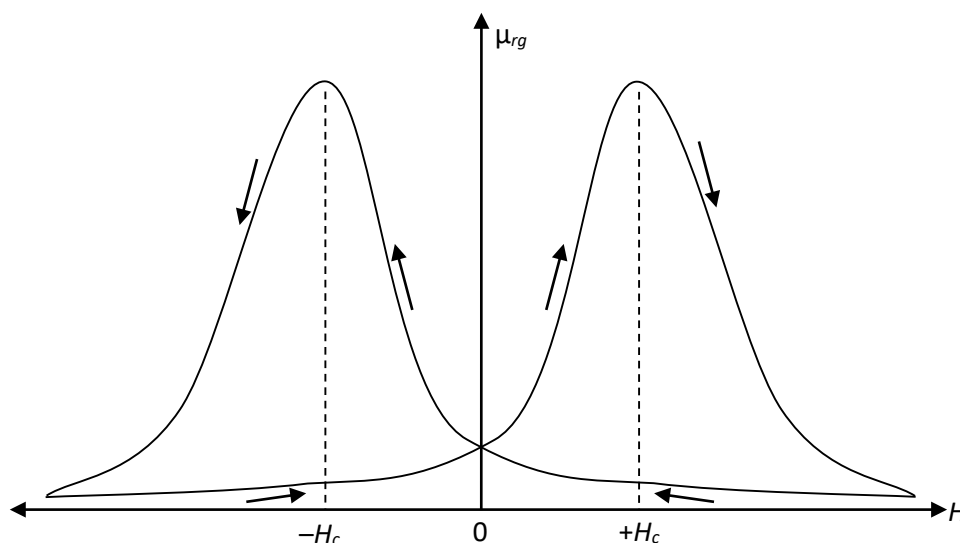


Рис. 3.13. Зависимость дифференциальной магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля

Полученная зависимость $\mu_{rg}=f(H)$ за полный цикл перемагничивания представляет собой замкнутую петлю с двумя максимумами. Максимальные значения μ_{rg} достигаются при напряженностях магнитного поля, приблизительно равных коэффициентной силе $H=\pm H_c$. Минимальные значения μ_{rg} соответствуют вершинам предельной петли гистерезиса.

В диапазоне напряженности от 0 до $+H_c$ дифференциальная магнитная проницаемость возрастает до $\mu_{rg\max}$, т. к. возрастает производная от индукции по напряженности (крутизна петли гистерезиса) $\frac{dB}{dH}$ (участок FG , рис. 3.10).

При изменении напряженности поля от $+H_c$ до $+H_m$ μ_{rg} уменьшается из-за уменьшения крутизны петли гистерезиса (участок GA рис. 3.10).

Последующее уменьшение H от $+H_m$ до 0, вызывает медленное возрастание дифференциальной магнитной проницаемости, т. к. крутизна петли гистерезиса на участке AC (рис. 3.10) медленно растет.

Характер зависимости $\mu_{rg}=f(H)$ при отрицательных значениях напряженности аналогичен характеру этой же зависимости при положительных значениях напряженности.

3.9. Свойства ферромагнетиков в переменных магнитных полях

3.9.1. Динамическая петля намагничивания

Когда на магнитный материал воздействует переменное магнитное поле, напряженность которого изменяется с частотой f , то он периодически перемагничивается с той же самой частотой. При таком циклическом перемагничивании зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля представляет собой петлю, которая называется *динамической петлей намагничивания*.

Площадь динамической петли намагничивания больше площади петли гистерезиса, полученной при той же амплитуде напряженности поля. Это объясняется тем, что потери на перемагничивание в переменных магнитных полях больше, чем в квазипостоянных. Если изменять амплитуду напряженности переменного магнитного поля, то можно получить семейство динамических петель намагничивания (рис. 3.14).

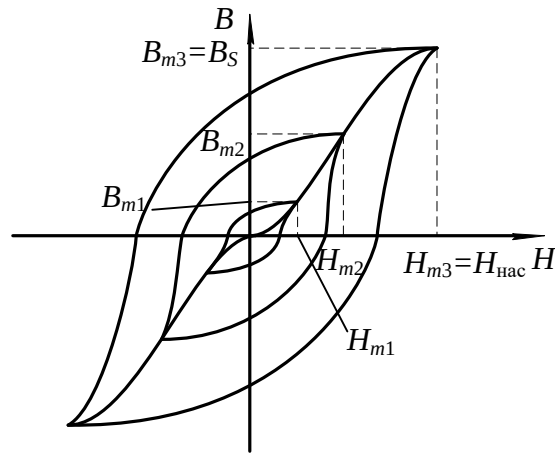


Рис. 3.14. Семейство динамических петель намагничивания

Как видно из рис. 3.14, с увеличением амплитуды напряженности магнитного поля растут амплитуда магнитной индукции и площадь динамической петли намагничивания. После того, как амплитуда напряженности поля достигает значения, при котором наступает насыщение магнитного материала, возрастание индукции и площади петли прекращается, а в вершинах петли появляются линейные участки, практически параллельные оси напряженности поля.

Петля с наибольшей площадью называется *предельной динамической петлей намагничивания*.

Если через вершины семейства динамических петель намагничивания провести линию, то полученная зависимость $B_m = f(H_m)$ называется *основной динамической кривой намагничивания*.

По предельной динамической петле намагничивания и динамической кривой намагничивания определяются основные характеристики магнитных материалов в переменном магнитном поле аналогично определению характеристик этих материалов в квазипостоянном магнитном поле.

3.9.2. Эффект вытеснения магнитного поля при перемагничивании ферромагнетиков в переменном поле

Перемагничивание в переменном магнитном поле приводит к появлению в магнитных материалах вихревых токов, протекание которых вызывает появление эффекта вытеснения магнитного поля из центра к периферии образца.

Рассмотрим подробнее это явление.

Пусть имеется образец магнитного материала площадью сечения S (рис. 3.15).

Можно разбить сечение такого образца на ряд элементарных замкнутых контуров толщиной Δh . Переменный магнитный поток, сцепляясь с каждым из элементарных витков, наводит в них ЭДС.

Под воздействием наведенной ЭДС в каждом из витков начнет протекать макроскопический вихревой ток, который создает свою магнитодвижущую силу $F_{\text{вт}}$, направленную противоположно основной магнитодвижущей силе, создающей переменный магнитный поток в образце. Таким образом, в переменном магнитном поле на магнитный материал воздействуют две магнитодвижущие силы, направленные встречно друг другу. В результате возникает результирующая магнитодвижущая сила (МДС), которая может быть определена как разность двух магнитодвижущих сил:

$$F_p = F - F_{\text{вт}},$$

где F_p – результирующая МДС; F – основная МДС, создаваемая намагничивающим током; $F_{\text{вт}}$ – МДС вихревого тока.

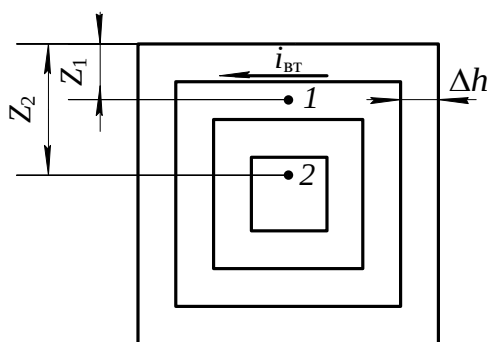


Рис. 3.15. К объяснению эффекта вытеснения

Известно, что значение магнитодвижущей силы вихревого тока в какой-либо точке сечения образца зависит от числа элементарных контуров, охватывающих данную точку. Поскольку точка 2 охвачена большим числом элементарных контуров с вихревыми токами, чем точка 1, то можно сделать вывод, что магнитодвижущая сила вихревого тока возрастает по мере удаления от поверхности образца к центру (рис. 3.16). Экспериментально установлено, что МДС вихревого тока зависит от расстояния до заданной точки от поверхности образца по экспоненциальному закону (кривые $F_{\text{вт}1}$ и $F_{\text{вт}2}$).

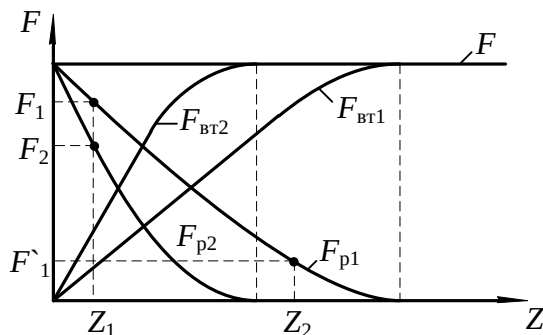


Рис. 3.16. Зависимость изменения результирующей МДС от расстояния до поверхности образца

На рис. 3.16 построены зависимости магнитодвижущих сил от расстояния Z для двух различных частот намагничивающего поля f_1 и f_2 ($f_1 > f_2$). Тогда

результатирующая магнитодвижущая сила по мере удаления от поверхности образца к его центру убывает также по экспоненциальному закону (кривые F_{p1} и F_{p2}). Аналогично результирующей магнитодвижущей силе уменьшается и напряженность магнитного поля по мере удаления от поверхности образца к центру. Зависимость напряженности поля от расстояния определяется из уравнения:

$$H(Z) = H_{\max} \cdot e^{-bz}.$$

где $H_{\max}$ – напряженность поля на поверхности образца; Z – расстояние от поверхности образца; $b = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_p \cdot \gamma}{T}}$; C – константа, обусловленная выбором системы единиц; T – период волны напряженности поля; γ – удельная проводимость образца.

В соответствии с изменением напряженности переменного магнитного поля уменьшается индукция в образце с увеличением расстояния от его поверхности. При достаточно большой толщине образца уменьшение индукции может привести к тому, что в центральной части сечения образца индукция будет равна 0, а магнитный поток в ней отсутствовать. Таким образом, за счет макроскопических вихревых токов возникает эффект вытеснения магнитного потока из центральной части сечения образца к периферии. Следовательно, из-за эффекта-вытеснения магнитного поля уменьшается площадь сечения образца, по которой проходит магнитный поток. Уменьшение площади сечения приводит к возрастанию магнитного сопротивления образца и соответствующему падению величины магнитного потока. Зависимость магнитного потока Φ в ферромагнетике от магнитодвижущей силы F и от сопротивления магнитной цепи R_m описывается формулой

$$\Phi = \frac{F}{R_m}.$$

Магнитное сопротивление определяется по уравнению:

$$R_m = \frac{l}{S' \cdot \mu_a},$$

где l – длина и площадь сечения образца ферромагнетика, через которую проходит магнитный поток; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость ферромагнетика.

Как видно из вышеприведенных равенств, уменьшение площади, по которой проходит магнитный поток, вызывает возрастание магнитного сопротивления образца. А увеличение магнитного сопротивления уменьшает

магнитный поток в ферромагнетике при неизменной магнитодвижущей силе. Т.к. геометрические размеры образца (длина и площадь сечения) остаются постоянными при намагничивании, то уменьшение магнитного потока к снижению магнитной индукции в образце:

$$B = \frac{\Phi}{S},$$

где S – геометрическая площадь сечения образца.

Для оценки влияния эффекта вытеснения на магнитное сопротивление образца используется характеристика, называемая *глубиной проникновения переменного магнитного поля в ферромагнетик*:

$$Z_1 = \frac{1}{b},$$

где Z_1 – глубина проникновения переменного магнитного поля.

Г л у б и н о й п р о н и к н о в е н и я называется расстояние от поверхности образца, на котором амплитудное значение напряженности магнитного поля уменьшается в 2,7 раза, по сравнению с напряженностью поля на поверхности образца.

Глубина проникновения определяется химическим составом ферромагнетика и частотой магнитного поля.

Для ослабления эффекта вытеснения магнитопроводы электрических машин собирают из отдельных листов электротехнической стали, толщина которых не превышает Z_1 . На поверхности листов стали наносятся электроизоляционные покрытия (лаковые, оксидные и т. п.), обладающие высокими электрическими сопротивлениями, наличие участков с высоким электрическим сопротивлением на пути протекания вихревых токов приводит к их уменьшению и соответственному ослаблению эффекта вытеснения.

При больших толщинах листов, чем Z_1 или цельнолитых магнитопроводах, магнитные свойства ферромагнетиков используются плохо из-за ярко выраженного эффекта вытеснения.

Существенное влияние на эффект вытеснения оказывает частота переменного магнитного поля. Это объясняется тем, что с ростом частоты увеличивается ЭДС $E_{вт}$, наводимая в элементарном контуре, так как значение ее прямо пропорционально частоте. Возрастание ЭДС приводит к увеличению вихревого тока и МДС $F_{вт}$. Поэтому на одном и том же расстоянии Z от поверхности образца (см. рис. 3.16) результирующая магнитодвижущая сила при большей частоте окажется меньше, чем при меньшей частоте намагничивающего тока. Следовательно, с ростом частоты глубина проникновения переменного магнитного поля уменьшается, что вызывает соответствующее снижение среднего значения индукции в образце.

На рис. 3.16 приведены зависимости $F_p = f(Z)$ для двух значений частоты магнитного поля. Зависимость $F_{p2} = f(Z)$ соответствует большей частоте магнитного поля, чем у $F_{p1} = f(Z)$.

3.9.3. Потери на перемагничивание в переменном магнитном поле

Потери мощности на перемагничивание в переменном магнитном поле больше, чем в квазипостоянном поле. Это связано с тем, что в переменном магнитном поле помимо потерь на гистерезис существуют также потери от вихревых токов и добавочные потери.

Потери мощности на перемагничивание определяются следующим образом:

$$P = P_r + P_{BT} + P_g, \quad (3.14)$$

где потери мощности на гистерезис:

$$P_r = \vartheta \cdot f \cdot B_{\max}^n \cdot V, \quad (3.15)$$

то же от вихревых токов:

$$P_{BT} = \xi \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2 \cdot V, \quad (3.16)$$

где ϑ – коэффициент, зависящий от марки ферромагнетика; ξ – коэффициент, зависящий от марки ферромагнетика, толщины листа и формы образца; V – объем ферромагнитного образца; P_g – добавочные потери; n – коэффициент, значение которого определяется величиной индукции в ферромагнетике.

Коэффициент n принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} n &= 1 && \text{при } B_{\max} \leq 0,1 \text{ Тл;} \\ n &= 1,6 && \text{при } B_{\max} \approx 0,1 - 1,0 \text{ Тл;} \\ n &= 2 - 3 && \text{при } B_{\max} > 1,0 \text{ Тл.} \end{aligned}$$

Природа добавочных потерь полностью не выяснена. Эти потери связаны со структурой строения ферромагнетика, формой и размерами зерен вещества. При практических расчетах потерь их значение принимается примерно равным (0,2 – 0,3) от суммы потерь на гистерезис и вихревые токи:

$$P_g = (0,2 - 0,3) \cdot (P_r + P_{BT}).$$

3.9.4. Потери на перемагничивание в переменном магнитном поле

Определение свойств ферромагнитных материалов может производиться двумя методами. Первый из них заключается в следующем. Изменяется частота магнитного поля, а индукция, создаваемая в образце, поддерживается неизменной ($f = V_{ar}$, $B_m = \text{const}$). При втором методе с изменением частоты поля поддерживается неизменной напряженность магнитного поля ($f = V_{ar}$, $H_m = \text{const}$).

С увеличением частоты переменного магнитного поля, при условии постоянства амплитуды магнитной индукции, в образце $B_m = \text{const}$, форма динамической петли приближается к эллипсу, вытянутому по оси H (рис. 3.17).

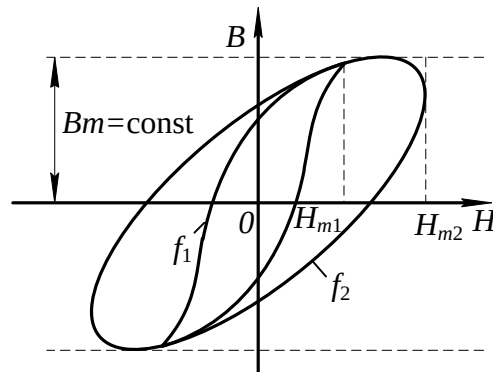


Рис. 3.17. Семейство динамических петель намагничивания

Площадь динамической петли с ростом частоты увеличивается пропорционально потерям мощности на перемагничивание.

Определив значения относительной магнитной проницаемости в вершинах семейства динамических петель намагничивания и потери на перемагничивание, можно построить зависимости $\mu_r = F(f)$ и $P = F(f)$. Эти зависимости приведены на рис. 3.18.

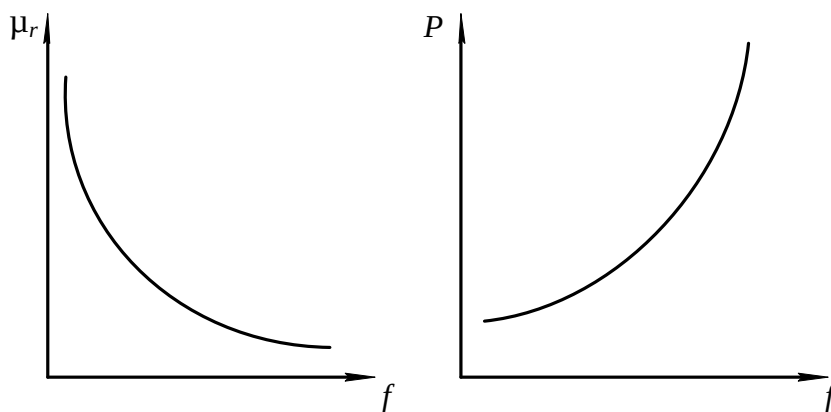


Рис. 3.18. Зависимости $\mu_r = F(f)$

Из рис. 3.18 видно, что с ростом частоты относительная магнитная проницаемость уменьшается. Это явление можно объяснить следующим. С возрастанием частоты переменного магнитного поля уменьшается среднее значение индукции в образце за счет усиления эффекта вытеснения магнитного поля.

Для того чтобы компенсировать уменьшение индукции, необходимо увеличивать напряженность намагничивающего поля. А так как

$$\mu_r = \frac{B_m}{H_m \cdot \mu_0},$$

то относительная магнитная проницаемость μ_r уменьшается с ростом частоты из-за увеличения амплитуды напряженности поля H_m .

При неизменной магнитной индукции характер изменения потерь мощности на перемагничивание определяется зависимостью этих потерь от вихревых токов. А так как потери мощности пропорциональны квадрату частоты переменного поля, то и зависимость этих потерь в ферромагнетике имеет квадратичный характер от изменения частоты (см. рис. 3.18).

Если увеличивать частоту переменного магнитного поля, поддерживая постоянной его напряженность, то форма динамической петли приближается к эллипсу, а амплитуда магнитной индукции уменьшается (рис. 3.19).

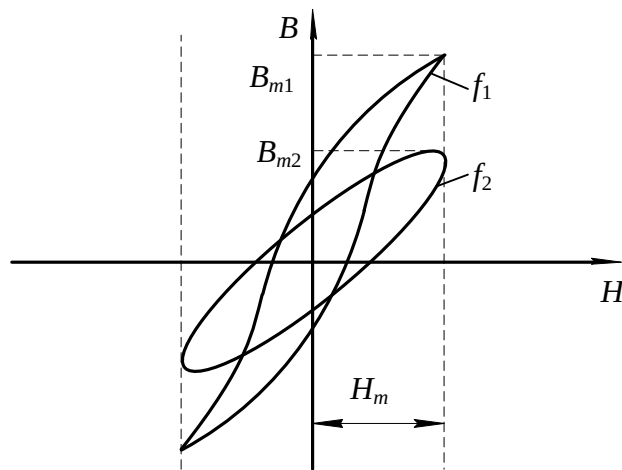


Рис. 3.19. Семейство динамических петель намагничивания при $H_m = \text{const}$

Определив по семейству динамических петель намагничивания значения магнитной проницаемости μ_r и потери мощности на перемагничивание, строим зависимости $\mu_r = F(f)$ и $P = F(f)$ (рис. 3.20).

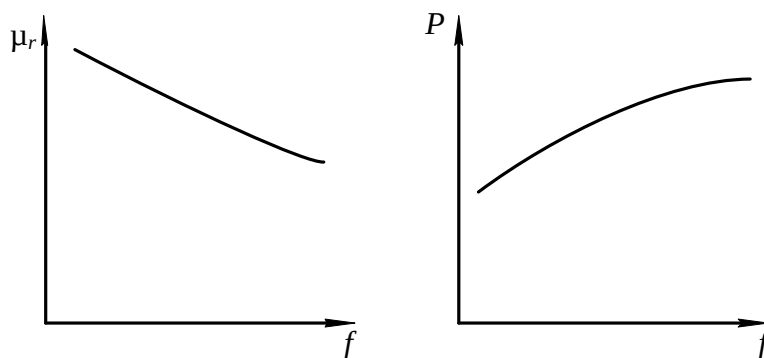


Рис. 3.20. Зависимости $\mu_r = F(f)$ и $P = F(f)$

С ростом частоты относительная магнитная проницаемость ферромагнетика уменьшается, но в меньших пределах, по сравнению с пределом изменения ее при $B_m = \text{const}$ в одном и том же интервале изменения частоты. Это объясняется тем, что с ростом частоты уменьшается амплитуда магнитной индукции ферромагнетика из-за усиления эффекта вытеснения. Электродвижущая сила, наводимая в элементарном контуре $E_{\text{вт}}$, зависит от индукции B_m и частоты f магнитного поля:

$$E_{\text{вт}} \approx S \cdot B_m \cdot f ,$$

где S – поперечное сечение образца.

Из приведенного уравнения видно, что электродвижущая сила вихревого тока при неизменной напряженности поля возрастает с увеличением частоты медленнее, чем при постоянной амплитуде магнитной индукции, так как рост ЭДС за счет частоты частично компенсируется ее уменьшением из-за снижения магнитной индукции. Медленное возрастание электродвижущей силы, а следовательно, и вихревого тока, протекающего по элементарному контуру, приводит к тому, что эффект вытеснения при неизменной амплитуде напряженности выражен менее ярко, чем при $B_m = \text{const}$.

Поэтому относительная магнитная проницаемость изменяется в меньшем диапазоне по сравнению со случаем, когда магнитная индукция поддерживалась неизменно.

Анализ уравнений (3.15, 3.16) показывает, что потери на гистерезис и вихревые токи возрастают незначительно с повышением частоты, так как их рост с повышением частоты частично компенсируется за счет уменьшения магнитной индукции в образце. Таким образом, потери на перемагничивание ферромагнетика в целом медленно увеличиваются с ростом частоты магнитного поля.

3.10. Индукционный метод определения параметров магнитных материалов с использованием осциллографа

Общие сведения

В связи с тем, что невозможно с достаточной степенью точности рассчитать характеристики магнитных материалов при намагничивании в переменном поле, широко используются экспериментальные методы их определения.

В настоящее время разработаны и используются на практике различные методы испытаний ферромагнитных материалов в переменном магнитном поле.

Основными из них являются:

- индукционный с использованием амперметра и вольтметра;
- индукционный с использованием фазочувствительного вольтметра (феррометр);
- индукционный с использованием осциллографического способа измерения (феррограф);
- индукционный с использованием компенсатора переменного тока;
- параметрический (мостовой).

При испытаниях индукционными методами измеряются ЭДС, индуцируемые в измерительных обмотках, и токи, протекающие по намагничивающим обмоткам, намотанным на образцах исследуемого магнитного материала.

Измерение ЭДС, пропорциональной магнитной индукции и намагничивающего тока, пропорционально магнитодвижущей силе намагничивающей обмотки, осуществляется с помощью либо показывающих приборов (амперметров и вольтметров) либо электронных осциллографов либо компенсаторов переменного тока.

Наиболее простым из индукционных методов является метод с использованием амперметра и вольтметра для определения магнитной проницаемости и потерь в образцах, основной динамической кривой намагничивания и динамических петель намагничивания. Недостатком этого метода является погрешность при перемагничивании материала до индукции свыше 1,2 Тл из-за отклонения формы кривой индукции от синусоидальной.

Наиболее точным из индукционных методов испытания магнитных материалов является компенсационный, основанный на измерении напряжений, пропорциональных индукций и напряженности магнитного поля с помощью компенсаторов переменного напряжения. С помощью этого метода определяется зависимости индукции от напряженности поля, потери на перемагничивание и т. д. Достоинствами способа являются полнота информации, высокая точность измерения, широкий диапазон измерения измеряемых величин. Недостатки заключаются в большой длительности процесса измерения, сложности и высокой стоимости аппаратуры.

Параметрический (мостовой) метод испытаний магнитных материалов, обеспечивающий высокую точность измерения в широком частотном диапазоне, заключается в определении индуктивности и сопротивления катушки с испытуемым образцом путем уравнивания мостовой схемы изменением двух переменных параметров. Метод позволяет исследовать зависимости максимальной индукции от максимального значения напряженности поля, определять магнитную проницаемость, потери на перемагничивание и составляющие комплексного магнитного сопротивления. В основном мостовой метод предназначен для определения характеристик в слабых полях, когда

индукция в образце не превышает 80 % от индукции насыщения исследуемого материала.

Достоинствами данного метода являются высокая точность измерения, возможность определения практически всех характеристик, широкий частотный диапазон испытаний.

Наиболее удобным и наглядным методом исследования динамических характеристик магнитных материалов является индукционный с использованием осциллографа, суть которого заключается в измерении электрических напряжений, пропорциональных магнитной индукции и напряженности поля, с помощью электронно-лучевого осциллографа. Этот метод используется для измерения показателей и визуального наблюдения основной динамической кривой намагничивания, семейств динамических петель намагничивания, определения потерь на перемагничивание, дифференциальной магнитной проницаемости, абсолютной и относительной магнитных проницаемостей в диапазоне частот магнитного поля от 20 Гц до нескольких десятков кГц.

Основной недостаток этого метода заключается в сравнительно высокой погрешности используемого средства регистрации, составляющей несколько процентов.

Вышеперечисленные достоинства осциллографического метода измерения, обусловили его использование для исследования свойств магнитных материалов в лабораторной работе.

Рассмотрим более подробно суть этого метода.

Принципиальная электрическая схема установки для исследования магнитных материалов индукционным методом с использованием электронно-лучевого осциллографа приведена на рис. 3.21.

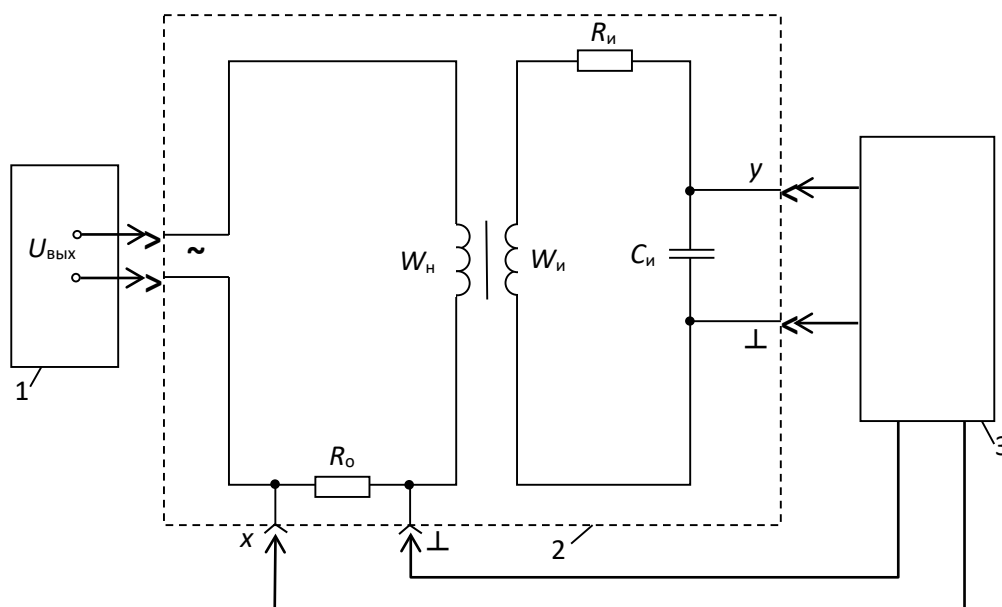


Рис. 3.21. Принципиальная электрическая схема установки:
1 – звуковой генератор; 2 – исследуемый образец; 3 – электронно-лучевой осциллограф

Для обеспечения необходимой точности измерений лучше всего применять образцы, в которых исключено влияние воздушных зазоров и рассеяния магнитного тока и в которых напряженность поля во всех точках образца практически одна и та же.

Чтобы выполнить данные требования, используются кольцевые (тороидальные) образцы и образцы в виде стержней с различным отношением длины к поперечному сечению.

Кольцевые образцы, намагничиваемые по замкнутому контуру, наиболее широко применяются для испытания магнитных материалов с максимальной напряженностью магнитного поля до 50 кА/м. Площадь сечения образца должна быть постоянной по всей длине. Разность между наибольшей и наименьшей площадями сечения допускается не более 1 %. Кольцевые образцы листовых и ленточных материалов изготавливают сборкой из штампованных и точеных колец или спиральной навивкой. Ферритовые образцы изготавливаются прессованием.

Внешний диаметр образца не должен превышать внутренний более чем в 1,3 раза. Это объясняется тем, что в кольцевых образцах с большим отношением внешнего диаметра к внутреннему наблюдается сильная неравномерность намагничивания, приводящая к значительным погрешностям при исследовании.

В работе исследуются образцы из различных магнитных материалов тороидальной формы, на каждом из которых намотано по две обмотки: намагничивающая W_n и измерительная $W_{и}$.

Последовательно с намагничивающей обмоткой включено активное сопротивление R_o , а к зажимам измерительной обмотки подключена интегрирующая цепь, состоящая из пассивных элементов: активного сопротивления $R_{и}$ и конденсатора емкостью $C_{и}$.

При подаче на зажим «~» выходного напряжения звукового генератора $U_{вых}$ по намагничивающей обмотке образца начнет протекать намагничивающий ток i_n , который создает магнитодвижущую силу, вызывающую появление в образце магнитного поля.

Мгновенное значение магнитодвижущей силы F_t связано с мгновенным значением напряженности поля в любой точке образца H_t следующим соотношением:

$$F_t = i_n \cdot W_n = 2\pi \cdot r_{cp} \cdot H_t, \quad (3.17)$$

где i_H – мгновенное значение намагничивающего тока; r_{cp} – средний радиус кольцевого образца, равный

$$r_{cp} = \frac{r_{вш} + r_{вн}}{2},$$

где $r_{вш}$ – внешний радиус сердечника образца; $r_{вн}$ – внутренний радиус сердечника образца.

Из уравнения (3.17) выразим H_t через намагничивающий ток. Получим:

$$H_t = \frac{i_H \cdot W_H}{2\pi \cdot r_{cp}}. \quad (3.18)$$

Из выражения (3.18) видно, что мгновенное значение напряженности магнитного поля в любой точке образца прямопропорционально намагничивающему току i_H .

Таким образом, измерив значение намагничивающего тока и зная число витков намагничивающей обмотки и средний радиус образца, можно определить по уравнению (3.18) мгновенное значение напряженности магнитного поля.

Преобразовав выражение (3.18), получим уравнение для амплитудных значений напряженности поля и намагничивающего тока.

$$H_m = \frac{I_{mH} \cdot W_H}{2\pi \cdot r_{cp}}. \quad (3.19)$$

Учитывая, что отклонение луча в электронно-лучевом осциллографе пропорционально значению напряжения, подаваемого на вход усилителя, возникает необходимость преобразования намагничивающего тока в напряжение. Это осуществляется последовательным включением с намагничивающей обмоткой эталонного активного сопротивления R_o (рис. 3.21). При протекании тока i_H по сопротивлению R_o , на последнем создается падение напряжения

$$U_x = R_o \cdot i_H.$$

Амплитудное значение этого напряжения

$$U_{mx} = R_o \cdot I_H. \quad (3.20)$$

Подставив в уравнение (3.19) вместо тока I_{mH} его выражение из (3.20), получим

$$H_m = \frac{W_H}{2\pi \cdot r_{cp} \cdot R_o} \cdot U_{mx}. \quad (3.21)$$

Из уравнения (3.21) видно, что если на вход «х» падать напряжение U_{mx} с сопротивления R_o , то отклонение луча осциллографа по горизонтальной оси прямопропорционально напряженности магнитного поля в образце.

Магнитодвижущая сила тока i_n создает в сердечнике образца магнитный поток, который наводит в измерительной наводке ЭДС

$$e = -W_n \cdot \frac{d\Phi_t}{dt} = -W_n \cdot S \cdot \frac{dB_t}{dt}. \quad (3.22)$$

где W_n – число витков измерительной обмотки; Φ_t – мгновенное значение магнитного потока в сердечнике образца; S – площадь поперечного сечения сердечника образца; B_t – мгновенное значение магнитной индукции в сердечнике образца.

Чтобы получить на экране осциллографа динамическую петлю намагничивания надо на вход «у» электронно-лучевого осциллографа подать напряжение, которое должно быть пропорционально магнитной индукции, создаваемой в образце. С этой целью измерительная обмотка образца подсоединяется по входу интегрирующей цепи с пассивными элементами R_n и C_n (рис. 3.21).

Тогда мгновенное значение тока, протекающего по интегрирующей цепи, определяется

$$i = \frac{e}{Z_n}. \quad (3.23)$$

Если выполнить условие $R_n \gg X_{C_n}$, то можно считать, что ток в интегрирующей цепи является практически активным ($i=i_a$). Тогда напряжение на входе интегратора будет равно интегралу от ЭДС, наводимой в измерительной обмотке

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{C_n} \int_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C_n} \int_0^t \frac{e}{R_n} \cdot dt \approx -\frac{W_n \cdot S}{R_n \cdot C_n} \cdot B_t. \quad (3.24)$$

Решив уравнение (3.24) относительно величины B_t получим

$$B_t = \frac{R_n \cdot C_n}{W_n \cdot S} \cdot U_{\text{вых}}, \quad (3.25)$$

где R_n – активное сопротивление интегрирующей цепи; C_n – емкость конденсатора этой цепи.

Из уравнения (3.25) видно, что индукция в образце пропорциональна выходному напряжению интегрирующей цепи.

Переходя к амплитудным значениям индукции и выходного напряжения интегрирующей цепи, получим

$$B_m = \frac{R_n \cdot C_n}{W_n \cdot S} \cdot U_{m\text{вых}}, \quad (3.26)$$

Подав напряжение с выхода интегратора $U_{\text{твых}}$ на вход «у» и напряжение с сопротивления R_0 на вход «х» осциллографа, на экране последнего получим динамическую петлю намагничивания.

Чтобы реакция измерительной цепи не влияла на форму динамической петли, желательно, чтобы магнитодвижущая сила тока измерительной обмотки была значительно меньше, чем магнитодвижущая сила тока намагниченной обмотки, т. е.

$$\frac{R_{\text{и}} \cdot C_{\text{и}}}{W_{\text{и}} \cdot S} \geq 0,001.$$

Для получения неискаженной формы динамической петли постоянная времени интегратора должна удовлетворять следующему требованию:

$$\tau_{\text{и}} = R_{\text{и}} \cdot C_{\text{и}} \geq (60 \div 100) \cdot \frac{1}{2\pi \cdot f_{\text{min}}}, \quad (3.27)$$

где f_{min} – наименьшая частота переменного магнитного поля.

По активному сопротивлению $R_{\text{и}}$ и емкости конденсатора $C_{\text{и}}$, рассчитывается постоянная времени интегрирующей цепи $\tau_{\text{и}}$ по уравнению

$$\tau_{\text{и}} = R_{\text{и}} \cdot C_{\text{и}}. \quad (3.28)$$

Затем определяется наименьшая частота магнитного поля, при которой выходное напряжение интегратора пропорционально магнитной индукции в образце:

$$f_{\text{min}} = \frac{60}{2\pi \cdot \tau_{\text{и}}}. \quad (3.29)$$

При частоте магнитного поля $f < f_{\text{min}}$ исследовать образец нельзя из-за больших искажений формы динамической петли намагничивания, вызываемых интегрирующей цепью образца.

3.11. Объект исследования

Образцы ферромагнитных материалов тороидальной формы с двумя обмотками: намагничивающей и измерительной. Параметры образцов и обмоток приведены в таблицах, расположенных на корпусах образцов. Параметры образцов и обмоток записываются в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Данные исследуемого образца

Номер образца			Данные схемы		
о	б	р	Число витков	о	б
п	о	п	Интегратор		н
п	л	о			а
					н

			намагничивающей обмотки, W_n	измерительной обмотки, W_n		активное сопротивление, R_n , Ом	емкость, C_n , Ф	постоянная времени, τ_n , С	

3.12. Средства измерения и вспомогательные средства исследования

Осциллограф универсальный типа CI-73.

Звуковой генератор с регулируемым напряжением и частотой.

3.13. Подготовка осциллографа к работе

Перед включением осциллографа установить органы управления на передней панели в следующие положения:

- ручку «яркость» – в крайнее левое;
- ручку «фокус» – в среднее;
- переключатель «V/дел» – 0,01;
- ручку «усиление» - крайнее правое;
- ручку « $\uparrow$ » – в среднее;
- переключатель « $\sim \perp \approx$ » в « $\approx$ »;
- ручку «уровень» – в крайнее правое»
- ручку « $\leftrightarrow$ » – в среднее.

Далее установить тумблер «разверт. X» на правой боковой панели в положение « $\odot$ X». Подключить осциллограф кабелем питания к сети 220 В и включить тумблер «питание» на передней панели осциллографа. При этом должна загореться сигнальная лампочка. В течение 2-3 минут прогреть осциллограф. Пока осциллограф прогревается, необходимо нанести координатную сетку осциллографа на листки кальки. После прогрева осциллографа установите ручкой «яркость» удобную яркость точки. Рукояткой « $\uparrow$ » установите точку на горизонтальную ось экрана осциллографа. Рукояткой « $\leftrightarrow$ » установите точку точно по центру экрана.

В результате выполнения вышеперечисленных операций осциллограф подготовлен к выполнению экспериментальной части лабораторной работы.

3.14. Калибровка осциллографа и определение масштабов по напряженности и индукции магнитного поля

Для определения амплитудных значений индукции и напряженности магнитного поля образца по динамическим петлям необходимо определить чувствительность осциллографа по входам «х» и «у». Если при зарисовке динамических петель намагничивания ручка «усиление» находится в крайнем правом положении, то чувствительность осциллографа по оси «у» определяется по числу, против которого находилась риска переключателя «V/дел», если осциллограф был правильно откалиброван. Для проверки правильности калибровки необходимо переключатель «V/дел» установить в положение «5 дел». При правильной калибровке на экране осциллографа появятся две горизонтальные линии или две точки, смещенные на 5 клеток (делений) относительно друг друга.

Пример: при зарисовке динамических петель намагничивания ручка «усиление» находится в крайнем правом положении, а переключатель «V/дел» – против числа 0,02. При переключении переключателя «V/дел» в положение «5 дел» на экране появились две горизонтальные линии на расстоянии 5 клеток друг от друга.

В этом случае масштаб осциллографа по входу «н» составляет

$$m_B = 0,02 \text{ В/дел.}$$

Масштаб m_B необходимо записать в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Определение масштабов по напряженности и индукции магнитного поля

Измерено				Вычислено			
n_B	m'_B	n_r	U_r	m_B	m_r	M_B	M_H
дел.	В/дел.	дел.	В	В/дел.	В/дел.	Т/мм	А/м/мм

Если ручка «усиление» находилась в положении, отличном от крайнего правого, то расчет масштаба осуществляется следующим образом. Сохраняя ручку «усиление» в том же положении, что и при зарисовке динамических петель намагничивания, переключатель «V/дел» установить в положение «5 дел». Измерить расстояние по вертикальной оси между двумя горизонтальными линиями или точками n_B и записать в таблицу 3.3. Тогда чувствительность осциллографа по оси «у» может быть рассчитана следующим образом:

$$m_B = \frac{m'_B}{n_B} \cdot 5, \quad (3.30)$$

где m'_B – чувствительность осциллографа, определенная числом напротив переключателя «V/дел» в рабочем положении; n_B – расстояние между горизонтальными линиями в дел.

Результат расчета записывается в табл. 3.3.

При калибровке усилителя сигнала на оси «х» необходимо соединить гнездо «X», расположенное на правой боковой панели. С гнездом « $\ominus \Gamma 1V$ », расположенным на левой боковой панели. Определить расстояние между двумя вертикальными линиями n_r и записать в табл. 3.3. Напряжение, подаваемое на вход усилителя x , равно 1 В. Тогда чувствительность осциллографа по горизонтальной оси (оси «х») рассчитывается по уравнению

$$m_r = \frac{U_r}{n_r}. \quad (3.31)$$

Рассчитанное значение m_r записывается в табл. 3.3.

По определенным масштабам m_B и m_H рассчитываются масштабы по индукции и напряженности магнитного поля M_B и M_H по уравнениям

$$M_B = \frac{m_B \cdot R_{и} \cdot C_{и}}{6 \cdot W_{и} \cdot S}; \quad (3.32)$$

$$M_H = \frac{m_r \cdot W_H}{6 \cdot R_0 \cdot 2\pi \cdot r_{ср}}, \quad (3.33)$$

где $r_{ср}$ – средний радиус сердечника, м; R_0 – образцовое сопротивление в цепи намагничивающей обмотки; W_H – число витков намагничивающей обмотки; $W_{и}$ – число витков измерительной обмотки; $R_{и}$ – сопротивление интегрирующей цепи, Ом; $C_{и}$ – емкость интегрирующей цепи, ф; S – площадь поперечного сечения сердечника образца m^2 .

Определенные масштабы M_B и M_H записываются в таблицу 3.3.

3.15. Подготовка звукового генератора к работе

Методика подготовки звукового генератора к работе, написана применительно к генератору ГЗ-53. При использовании генератора другого типа необходимо производить подготовку к работе согласно инструкции по эксплуатации или в соответствии с указанием преподавателя.

Перед включением звукового генератора необходимо установить органы управления на передней панели прибора в следующие положения:

- переключатель «поддиапазоны» – «Ок Hz»;

- рукоятку «частота Hz» – в положение при котором риска указателя частоты оказывается против цифры 0 на шкале частоты соответствующей поддиапазону 0 – 5 кГц;
- переключатель «пределы шкал, ослабление» – 3 в;
- рукоятка «регулировка выхода» – в положение, соответствующее значению выходного напряжения, равного нулю.

Затем следует подключить генератор кабелем питания к сети 220 В и включить переключатель «сеть». При этом должна загореться сигнальная лампа.

В течение 2 – 3 минут прогреть генератор. Если после прогрева вольтметр «напряжение выхода» покажет напряжение, отличное от нуля, необходимо плавным вращением рукоятки «уст. нуля» добиться нулевого показания вольтметра.

После выполнения вышеуказанных операций звуковой генератор подготовлен к работе.

3.16. Лабораторная работа №1. «Исследование свойств магнитных материалов в магнитных полях постоянной частоты». Цель работы

Целью лабораторной работы является ознакомление студентов с индукционным методом измерения магнитных величин и экспериментальное определение свойств и характеристик ферромагнитных материалов при воздействии на них магнитного поля постоянной частоты с изменяющейся по амплитуде напряженностью.

3.17. Рабочее задание

Собрать схему установки (рис. 3.21).

Зарисовать с экрана осциллографа семейство динамических петель намагничивания, начиная с предельной динамической петли до минимально различимой (6 – 7 петель.)

Произвести калибровку осциллографа.

По данным калибровки рассчитать масштабы по напряженности и индукции магнитного поля.

Для каждой из динамических петель намагничивания определить амплитудные значения напряженности и магнитной индукции.

Для каждой из динамических петель намагничивания определить удельные потери на перемагничивание.

Определить для каждой динамической петли значение магнитной проницаемости.

Рассчитать по предельной динамической петле дифференциальную магнитную проницаемость при различных значениях напряженности поля в диапазоне изменения ее от 0 до H_m и обратно.

Построить зависимости $B_m = F(H_m)$, $\mu_r = (H_m)$, $\mu_{rg} = (H)$, $P = F(B_m)$.

Сделать выводы по работе.

3.18. Методические рекомендации к выполнению рабочего задания

3.18.1. Подготовка к проведению эксперимента

Перед началом выполнения лабораторной работы необходимо получить у лаборанта комплект соединительных проводов, осциллограф, звуковой генератор и исследуемый образец по указанию преподавателя.

Данные образца записать в табл. 3.2.

По известным параметрам интегрирующей цепи образца рассчитайте наименьшую частоту магнитного поля $f_{\min}$ в соответствии с уравнением (3.29) и запишите ее в таблицу 3.2.

Соберите схему установки (рис. 3.21).

При сборке схемы, в соответствии с рис. 3.21, гнезда «вход y » и « $\perp$ » исследуемого образца соединить с гнездом « $\ominus$ УИМ Ω 35pF» тракта вертикального отклонения луча осциллографа, а гнезда «вход x » и « $\perp$ » образца с гнездом « $\otimes$ » осциллографа.

Произведите подготовку осциллографа к работе в соответствии с методикой, изложенной в разделе 3.13 данных методических указаний и звукового генератора (раздел 3.15).

3.18.2. Рекомендации по зарисовке семейства динамических петель намагничивания

Увеличивая выходное напряжение генератора, получите на экране осциллографа предельную динамическую петлю намагничивания. Предельной динамической петлей является наибольшая по площади динамическая петля, у которой появляются «усы», свидетельствующие о начале насыщения. Наложив кальку с нанесенной координатной сеткой, зарисуйте предельную динамическую петлю намагничивания.

Уменьшая выходное напряжение звукового генератора, зарисуйте на кальку семейство 6 – 7 динамических петель от предельной до минимально различимой петли намагничивания.

3.18.3. Калибровка осциллографа

Калибровка осциллографа осуществляется в соответствии с пунктом 3.14 данных методических указаний. При калибровке положение точки «усиление» должно быть таким же как и во время зарисовки динамических петель.

3.18.4. Определение амплитудных значений индукции, напряженности магнитного поля и потерь в сердечнике образца на перемагничивание

По имеющимся на кальках изображениям определяются для каждой динамической петли намагничивания координаты вершин H'_m и B'_m в миллиметрах. Значения H'_m и B'_m записываются в табл. 3.4. Пример определения координат H'_m и B'_m приведен на рис. 3.22.

Таблица 3.4

Определение амплитудных значений индукции, напряженности магнитного поля и потерь в сердечнике образца на перемагничивание

Номер опыта	Измерено				Вычислено			
	f	B'_m	H'_m	S_n	B_m	H_m	μ_r	P
	Гц	мм	мм	мм ²	Т	А/м	10 ³	Вт/кг

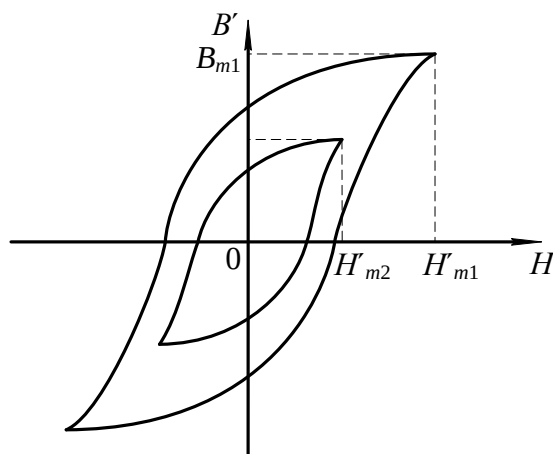


Рис. 3.22. Определение координат вершин динамических петель намагничивания

Амплитудные значения индукции и напряженности магнитного поля рассчитываются:

$$B_m = B'_m \cdot M_B. \quad (3.34)$$

$$H_m = H'_m \cdot M_H. \quad (3.35)$$

Для определения потерь на перемагничивание образца подсчитываются площади каждой из динамических петель намагничивания по клеткам миллиметровой бумаги, на которую накладывается калька с динамическими петлями намагничивания. Значения площадей записываются в табл. 3.4.

По найденным значениям B_m , H_m , S_n вычисляются значения относительной магнитной проницаемости и потери на перемагничивание для каждой петли

$$\mu_r = \frac{B_m}{\mu_0 \cdot H_m}; \quad (3.36)$$

$$P = \frac{S_n \cdot M_B \cdot M_H}{\gamma} \cdot f, \quad (3.37)$$

где $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная постоянная вакуума; f – частота намагничивающего потока, Гц; γ – плотность сердечника образца, кг/м³.

Результаты расчетов записываются в табл. 3.4.

3.18.5. Определение дифференциальной магнитной проницаемости

Определение дифференциальной магнитной проницаемости производится по предельной динамической петле намагничивания в следующем порядке. В интервале изменения H от 0 до H_m откладываются 6 – 7 значений H' (H_0 , H_1 , H_2 ... H_m) на одинаковом расстоянии друг от друга. Затем в окрестности каждого значения H' задаются приращениями $\Delta H'$ так, чтобы эти значения H' находились посередине отрезка равного $\Delta H'$ (рис. 3.23).

Проведя из концов $\Delta H'$ линии, параллельные оси B до пересечения с восходящей и нисходящей ветвями предельной динамической петли намагничивания, определяем для каждого значения напряженности поля приращение индукции $\Delta B'_1$ и $\Delta B'_2$. $\Delta B'_1$ – приращение индукции, когда размагничивание осуществляется по нисходящей ветви при уменьшении напряженности поля от H'_m до 0.

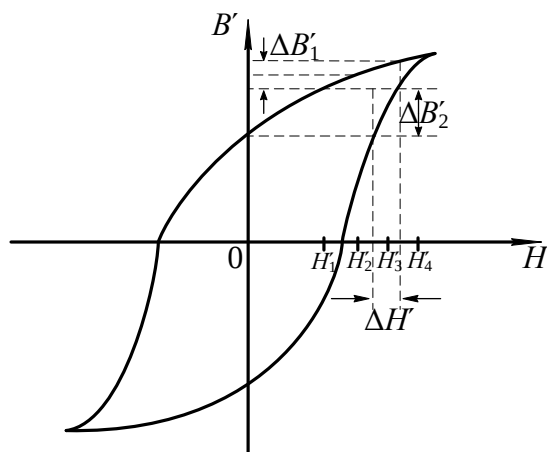


Рис. 3.23. К определению дифференциальной магнитной проницаемости

Значения напряженности $\Delta H'$, приращений $\Delta H'$, $\Delta B'_1$, $\Delta B'_2$ записываются в таблицу 3.5.

Таблица 3. 5

Определение дифференциальной магнитной проницаемости

H' , мм	$\Delta H'$, мм	$\Delta B'_1$, мм	$\Delta B'_2$, мм	H , А/м	ΔH , А/м	ΔB_1 , Тл	ΔB_2 , Тл	μ'_{rg}	μ''_{rg}

Затем производится перерасчет значений напряженности H' по уравнению (3.35), а $\Delta H'$, $\Delta B'_1$, $\Delta B'_2$ по нижеследующим формулам

$$\Delta H = \Delta H' \cdot M_H, \quad (3.38)$$

$$\Delta B_1 = \Delta B'_1 \cdot M_B, \quad (3.39)$$

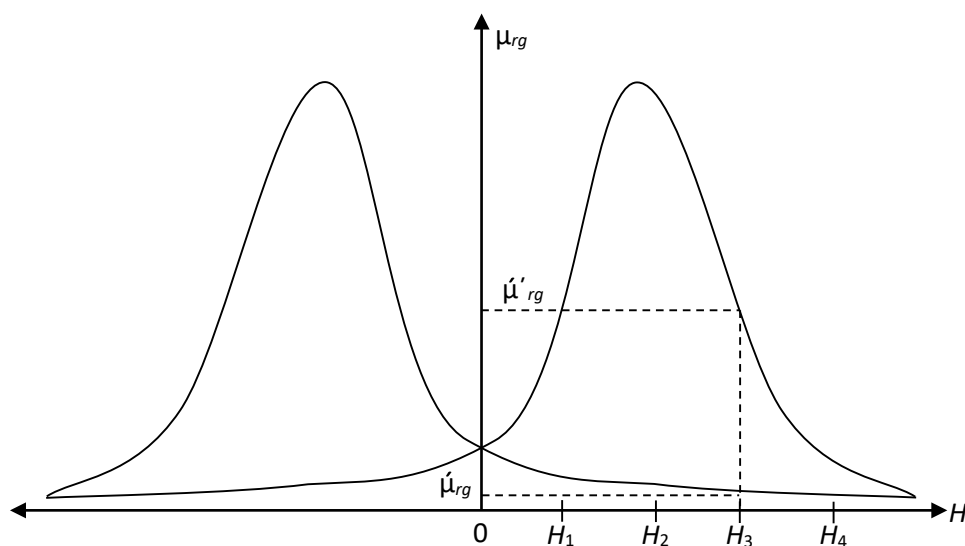
$$\Delta B_2 = \Delta B'_2 \cdot M_B. \quad (3.40)$$

Значения дифференциальной магнитной проницаемости рассчитывается по формулам

$$\mu'_{rg} = \frac{\Delta B_1}{\mu_0 \cdot \Delta H}, \quad (3.41)$$

$$\mu''_{rg} = \frac{\Delta B_2}{\mu_0 \cdot \Delta H}. \quad (3.42)$$

При построении зависимости $\mu_{rg}=F(H)$ по оси абсцисс откладываются значения напряженности H , а по оси ординат соответствующие им значения μ'_{rg} и μ''_{rg} . В результате построения должен получиться график, представленный на рис. 3.24.



3.19. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен иметь следующее содержание:

1. Цель лабораторной работы.
2. Характеристика и основные параметры исследуемого образца.
3. Характеристики средства измерения и вспомогательных средств исследования.
4. Таблицы с записью результатов экспериментальных исследований и расчетов.
5. Основные расчетные формулы.
6. Зависимости магнитной индукции $B_m=F(H_m)$ и относительной магнитной проницаемости $\mu_r=F(H_m)$, дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_{rg}=F(H)$ от напряженности магнитного поля.
7. Зависимость потерь на перемагничивание от индукции в образце $P=F(B_m)$.

Зависимости магнитной индукции $B_m=F(H_m)$ и относительной магнитной проницаемости $\mu_r=F(H_m)$ необходимо строить в одной системе координат, откладывая по оси абсцисс значения H_m , а по оси ординат значения B_m и μ_r , в выбранных для каждой из этих величин масштабах.

Отчет заканчивается выводами, в которых в краткой форме должны быть описаны характеры полученных экспериментально зависимостей и дано их теоретическое обоснование.

3.20. Вопросы для самоконтроля

1. Как зависит относительная магнитная проницаемость от напряженности магнитного поля?
2. Чем объяснить, что сначала магнитная проницаемость возрастает с ростом напряженности, а затем уменьшается при дальнейшем возрастании последней?
3. Как изменяется магнитная индукция в образце с ростом напряженности намагничивающего поля?
4. На чем основан принцип действия лабораторной установки?
5. Какими параметрами установки ограничивается наименьшая частота намагничивающего тока?
6. Определите наименьшую частоту магнитного поля, при которой можно исследовать образец.

7. Как зависят потери на перемагничивание от магнитной индукции, создаваемой в образце?
8. Какие причины обуславливают рост потерь на перемагничивание с ростом магнитной индукции?
9. Объясните, как осуществляется намагничивание ферромагнетиков на различных участках основной кривой намагничивания?
10. В какой точке основной кривой намагничивания относительная магнитная проницаемость максимальна?
11. Каким основным условиям должно удовлетворять вещество, являющееся ферромагнетиком?
12. Какой из видов элементарного движения электрических зарядов создает основной магнитный момент в атоме?
13. Какое явление называется магнитной анизотропией?
14. Какое явление называется магнитострикцией?
15. Почему ферромагнетик самопроизвольно делится на отдельные области, домены?
16. Какая область ферромагнетика называется доменом?
17. Как и где происходит изменение направления намагниченности между доменами?

3.21. Лабораторная работа №2. «Исследование свойств магнитных материалов в магнитных полях переменной частоты». Цель работы

Целью лабораторной работы является ознакомление студентов с индукционным методом измерения магнитных величин и экспериментальное определение свойств и характеристик магнитных материалов при воздействии на них магнитного поля переменной частоты.

3.22. Рабочее задание

Рассчитать для полученного образца постоянную времени интегрирующей цепочки τ_i и минимальную частоту магнитного поля, при которой его можно исследовать.

Собрать схему установки (рис. 3.21).

Зарисовать с экрана осциллографа семейство динамических петель намагничивания при различных частотах намагничивающего тока, поддерживая неизменной магнитную индукцию $B_m = \text{const}$.

Зарисовать семейство динамических петель намагничивания при различных частотах намагничивающего тока, поддерживая неизменной напряженность магнитного поля $H_m = \text{const}$.

Произвести калибровку осциллографа.

По данным калибровки рассчитать масштаб по напряженности и индукции магнитного поля.

Для каждой из динамических петель намагничивания рассчитать амплитудные значения напряженности и магнитной индукции.

Для каждой из динамических петель намагничивания определить потери на перемагничивание образца.

Рассчитать для каждой динамической петли значение относительной магнитной проницаемости.

Построить зависимости $\mu_r = F(f)$, $P = F(f)$ для обоих семейств динамических петель намагничивания.

Сделать выводы по работе.

3.23. Методические указания к выполнению рабочего задания

3.23.1. Подготовка к проведению эксперимента.

Подготовка к проведению эксперимента осуществляется в соответствии с пунктом 3.18.1.

3.23.2. Рекомендации по зарисовке семейств динамических петель намагничивания.

Перед началом экспериментальных исследований выбирается диапазон частот магнитного поля в пределах от $f_{\min}$ до $f_{\max}$, который задается преподавателем.

Зарисовка динамических петель намагничивания при различных частотах магнитного поля с неизменной магнитной индукцией в образце $B_m = \text{const}$ производится в следующем порядке. Необходимо установить на генераторе частоту $f = f_{\max}$. Увеличивая выходное напряжение генератора добиться, чтобы динамическая петля намагничивания касалась двух горизонтальных линий, отстоящих друг от друга на расстоянии 5 клеток (рис. 3.26) и зарисовать на кальку.

Затем уменьшить частоту генератора на Δf . При этом амплитуда B_m возрастает. Уменьшая выходное напряжение генератора, восстановить прежнее значение индукции B_m в образце и снова зарисовать динамическую петлю намагничивания. В диапазоне изменения частоты генератора от $f_{\max}$ до $f_{\min}$

необходимо зарисовать шесть – семь петель, сохраняя индукцию в образце неизменной при каждой частоте.

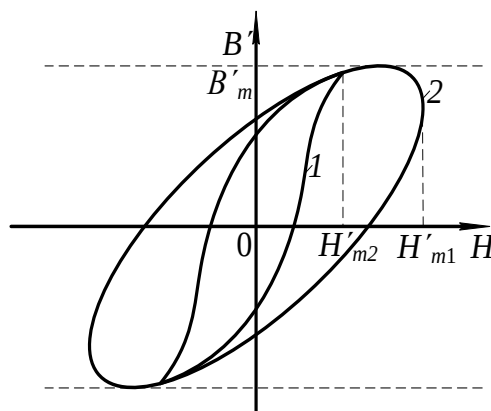


Рис. 3.26. Свойство динамических петель намагничивания с постоянной магнитной индукцией и различной частотой магнитного поля

Зарисовка семейства динамических петель намагничивания на различных частотах магнитного поля при постоянной напряженности магнитного поля в образце производится следующим образом. Частота звукового генератора устанавливается равной $f_{\min}$. Увеличивая выходное напряжение генератора добиваются максимальной по размеру экрана магнитной индукции B_m . Через вершины петель параллельно оси B_m проводятся две вертикальные линии на кальке. Затем увеличивают частоту генератора до следующего значения. При этом ширина динамической петли или H_m уменьшится. Увеличивая выходное напряжение генератора, добиваются, чтобы динамическая петля касалась линий, проведенных параллельно оси B_m и зарисовывают петлю на кальку (см. рис. 3.27).

Изменяя частоту генератора в диапазоне от $f_{\min}$ до $f_{\max}$ зарисовывают 6 – 7 динамических петель намагничивания на различных частотах, сохраняя $H_m = \text{const}$ по вышеприведенной методике.

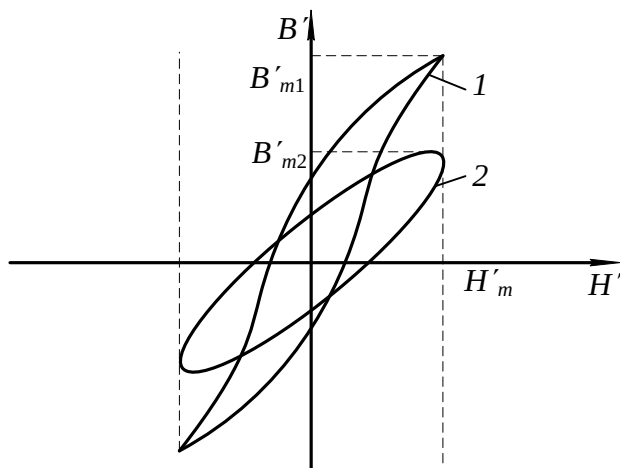


Рис. 3.27. Семейство динамических петель намагничивания при $H_m = \text{const}$

3.23.2. Рекомендации по зарисовке семейств динамических петель намагничивания.

Определение амплитудных значений индукции и напряженности магнитного поля потерь в сердечнике, значений относительной магнитной проницаемости для вершин каждой из зарисованных динамических петель намагничивания производится в соответствии с методикой, изложенной в пункте 3.18.4 данных методических указаний.

3.24. Содержание отчета

Содержание отчета по данной лабораторной работе должно отличаться от содержания отчета по лабораторной работе 1 (см. 3.19) полученными экспериментально зависимостями.

В этой работе определяются и строятся графики зависимостей $\mu_r = F(f)$, $P = F(f)$, когда $B_m = \text{const}$, и эти же зависимости, когда $H_m = \text{const}$. Необходимо строить зависимости $\mu_r = F(f)$ при $B_m = \text{const}$ и $\mu_r = F(f)$ при $H_m = \text{const}$ в одной системе координат откладывая по оси абсцисс значения H_m , а по оси ординат – значения μ_r .

Аналогично, в одной системе координат строятся зависимости $P = F(f)$ для обоих режимов испытания образца.

3.25. Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается динамическая петля намагничивания от петли гистерезиса?
2. Какие виды потерь существуют при перемагничивании ферромагнетика в переменном магнитном поле?
3. От каких параметров намагничивающего поля и как зависят потери на гистерезис?
4. От каких параметров намагничивающего поля и как зависят потери на вихревые токи?
5. Объясните суть явления вытеснения магнитного поля.
6. К каким последствиям приводит явление вытеснения магнитного поля?
7. Почему с ростом частоты уменьшается индукция, если $B_m = \text{const}$?
8. Почему с ростом частоты уменьшается магнитная индукция, если $H_m = \text{const}$?
9. Как и почему изменяются потери на перемагничивание с ростом частоты при $B_m = \text{const}$?

10. Как и почему изменяются потери на перемагничивание с ростом частоты при $H_m = \text{const}$?
11. Почему в одном и том же диапазоне изменения частоты относительная магнитная проницаемость изменяется в больших пределах, когда, как и почему изменяются потери на перемагничивание с ростом частоты при $B_m = \text{const}$, а не при $H_m = \text{const}$?
12. Почему в одном и том же диапазоне изменения частоты потери на перемагничивание ферромагнетика изменяются в больших пределах при $B_m = \text{const}$, а не при $H_m = \text{const}$?

Часть 4

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1. «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗОЛЯЦИИ ДВУХЖИЛЬНОГО КАБЕЛЯ»

4.1. Требование к оформлению контрольной работы

Контрольная работа состоит из двадцати вариантов с нумерацией вариантов от 0 до 19.

Номер варианта задачи, решаемой студентов в контрольной работе, определяется суммой двух последних цифр шифра студента. Например, если номер шифра студента 4298, то номер варианта задачи – 17.

К оформлению контрольной работы предъявляются следующие требования:

1. Контрольная работа выполняется в тетради, на обложке которой должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, учебный шифр, наименование дисциплины и домашний адрес.

2. Условия задачи переписываются полностью, без сокращений.

3. Текстовая часть, формулы, числовые выкладки должны быть выполнены чернилами без помарок и исправлений.

4. Графическая часть работы выполняется в карандаше с помощью чертёжных инструментов.

5. Электрические схемы вычерчиваются с соблюдением установленных стандартом условных обозначений.

6. Ответы на вопросы должны быть аргументированы теоретически с использованием в необходимом объёме рисунков, графиков.

7. В конце работы необходимо привести список использованной при выполнении контрольной работы литературы.

8. После списка литературы необходимо проставить дату выполнения работы и подпись.

4.2. Задание на контрольную работу

Питание электротехнической установки осуществляется с помощью кабельной линии длиной l . Кабель со свинцовой оболочкой имеет две токопроводящие жилы радиусом R (Рис.1). В качестве электрической изоляции жил друг от друга и жил от оболочки использована кабельная бумага. В пористой структуре диэлектрика имеются капилляры, заполненные воздухом. К жилам кабеля приложено переменное напряжение, действующее значение которого U , частотой f . При расчёте считать, что электрическое поле внутри кабеля однородно.

Требуется определить:

- 1) ёмкость между жилами кабеля, C_k ;
- 2) сопротивление изоляции между жилами кабеля, $Z_{из}$;
- 3) значение тока утечки между жилами кабеля, I_y ;
- 4) диэлектрические потери в изоляции кабеля, P ;
- 5) пробивное напряжение изоляции между жилами кабеля, $U_{пр}$;
- 6) ёмкость $C_{кп}$, сопротивление изоляции $Z_{изп}$ и ток утечки $I_{уп}$

диэлектрические потери P_p , пробивное напряжение $U_{прп}$ при условии, что оболочка кабеля заполнена газообразным либо жидким диэлектриком. При расчёте принять, что поры и капилляры полностью заполнены этим диэлектриком;

7) после расчёта составить таблицу сравнительных данных кабелей без пропитки и с пропиткой и произвести анализ влияния пропитки изоляции кабеля на его электрические свойства;

8) определить соответствие изоляционных свойств электрической изоляции кабеля требованиям правил установки электропотребителей (ПУЭ);

Геометрические размеры кабеля и электрические параметры диэлектриков, использованных в качестве изоляции, приведены в таблице 4.1.

Вопросы к контрольной работе

1. Дайте расшифровку цифр, используемых в обозначениях марок электрических сталей.
2. На основной кривой намагничивания укажите участки, на которых намагничивание осуществляется за счёт роста доменов. В чём отличие процессов намагничивания на этих участках?
3. Как влияют на магнитные свойства материалов вихревые токи. В каких магнитных полях возникают эти токи?

Таблица 4.1

Исходные данные для решения контрольной работы

Номер варианта	Длина линии l	Радиус жилы, R	Расстояние между жилами, S	Рабочее напряжение, U	Частота, f	Плотность		Относительная диэлектрическая проницаемость			Тангенс угла диэлектрических потерь			Электрическая прочность		
						Целлюлозы, D_1	Бумаги, D	Целлюлозы, ϵ_{21}	Воздуха, ϵ_{22}	Пропитки, ϵ_{23}	Целлюлозы, $tg\delta_1$	Воздуха, $tg\delta_2$	Пропитки, $tg\delta_3$	Целлюлозы, $E_{пр1}$	Воздуха, $E_{пр2}$	Пропитки, $E_{пр3}$
	м	мм	мм	В	Гц	кг/м ³	кг/м ³				10 ⁻⁴	10 ⁻⁶	10 ⁻³	кВ/мм	кВ/мм	кВ/мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	120	1,38	7,5	220	50	1550	780	6,6	1,00059	2,1	65,0	4,0	3,0	15,0	3,2	20,0
1	50	1,78	8,3	380	50	1550	850	6,6	1,00059	2,7	65,0	4,0	10,0	15,0	3,2	60,0

2	1000	2,25	12,24	2200	50	1550	1100	6,6	1,00059	4,5	65,0	4,0	25,0	15,0	3,2	50,0
3	800	2,82	13,58	1100	50	1550	1090	6,6	1,00059	4,1	65,0	4,0	15,0	15,0	3,2	55,0
4	150	3,34	17,92	6600	50	1550	780	6,6	1,00059	2,8	65,0	4,0	0,2	15,0	3,2	43,0
5	1500	3,99	19,42	3300	50	1550	770	6,6	1,00059	5,2	65,0	4,0	30,0	15,0	3,2	35,0
6	3000	4,72	14,18	6600	50	1550	900	6,6	1,00059	4,8	65,0	4,0	5,0	15,0	3,2	20,0

Окончание табл. 4.1

Номер варианта	Длина линии l	Радиус жилы, R	Расстояние между жилами, S	Рабочее напряжение, U	Частота, f	Плотность		Относительная диэлектрическая проницаемость			Тангенс угла диэлектрических потерь			Электрическая прочность		
						Целлюлозы, D_1	Бумаги, D	Целлюлозы, ϵ_{21}	Воздуха, ϵ_{22}	Пропитки, ϵ_{23}	Целлюлозы, $tg\delta_1$	Воздуха, $tg\delta_2$	Пропитки, $tg\delta_3$	Целлюлозы, $E_{пр1}$	Воздуха, $E_{пр2}$	Пропитки, $E_{пр3}$
	м	мм	мм	В	Гц	кг/м ³	кг/м ³				10 ⁻⁴	10 ⁻⁶	10 ⁻³	кВ/мм	кВ/мм	кВ/мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
7	500	5,5	15,74	380	50	1550	970	6,6	1,00059	2,4	65,0	4,0	3,0	15,0	3,2	18,0
8	250	6,18	19,5	2200	50	1550	800	6,6	1,00059	1,01	65,0	4,0	4,0	15,0	3,2	20,0
9	2000	6,91	20,76	1100	50	1550	1100	6,6	1,00059	3,8	65,0	4,0	0,2	15,0	3,2	45,0
10	200	7,68	24,8	3300	50	1550	1100	6,6	1,00059	2,1	65,0	4,0	3,0	15,0	3,2	20,0
11	4000	8,74	27,3	6600	50	1550	850	6,6	1,00059	2,3	65,0	4,0	1,0	15,0	3,2	18,0
12	3500	1,38	11,2	1100	50	1550	780	6,6	1,00059	5,0	65,0	4,0	20,0	15,0	3,2	42,0
13	1600	1,78	11,2	2200	50	1550	900	6,6	1,00059	4,4	65,0	4,0	5,0	15,0	3,2	45,0
14	600	7,68	20,1	220	50	1550	770	6,6	1,00059	2,8	65,0	4,0	0,2	15,0	3,2	24,0
15	800	8,74	22,2	660	50	1550	970	6,6	1,00059	4,8	65,0	4,0	8,0	15,0	3,2	25,0
16	300	2,25	16,14	3300	50	1550	1090	6,6	1,00059	2,7	65,0	4,0	10,0	15,0	3,2	25,0
17	1400	3,34	17,92	6600	50	1550	780	6,6	1,00059	1,019	65,0	4,0	0,2	15,0	3,2	50,0
18	700	6,18	17,1	660	50	1550	780	6,6	1,00059	3,8	65,0	4,0	20,0	15,0	3,2	32,0

4.3. Методические указания к выполнению контрольной работы

Кабельная бумага представляет собой механическую смесь целлюлозы и воздуха с неодинаковой относительной диэлектрической проницаемостью. Определение относительной диэлектрической проницаемости такого диэлектрика производится в соответствии с уравнением Лихтенеккера для последовательного расположения компонентов. В связи с тем, что при использовании этого уравнения необходимо знать объёмные концентрации компонентов, расчёт следует начать с

определения последних по заданным значениям плотности целлюлозы и кабельной бумаги в соответствии с уравнениями

$$\theta_1 = \frac{D}{D_1} ; \quad (4.1)$$

$$\theta_2 = 1 - \frac{D}{D_1}, \quad (4.2)$$

где θ_1 – объёмная концентрация целлюлозы; θ_2 – объёмная концентрация воздуха; D – плотность кабельной бумаги, кг/м³; D_1 – плотность целлюлозы, кг/м³.

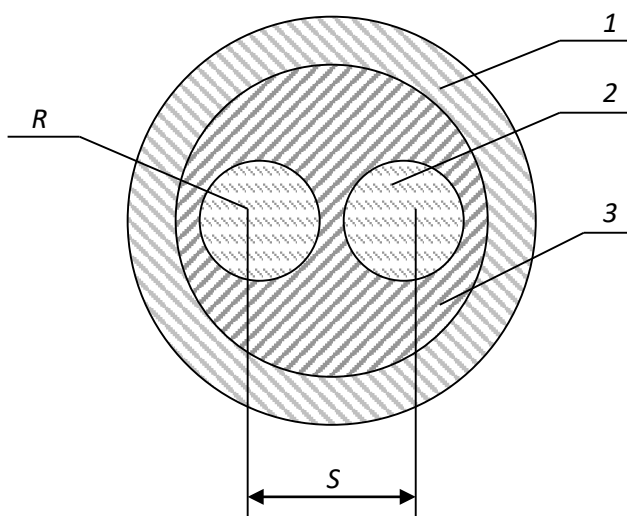


Рис. 4.1. Сечение двухжильного кабеля
1- оплётка кабеля; 2- жила кабеля; 3- изоляция кабеля

По вычисленному значению относительной диэлектрической проницаемости непропитанной кабельной бумаги и заданным геометрическим размерам кабеля рассчитывается ёмкость кабельной линии.

Для двухжильного кабеля ёмкость между жилами может быть определена из уравнения:

$$C_k = \xi_r \cdot \xi_0 \times \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\ln K^2}, \quad (4.3)$$

где

$$K = \frac{a + x - R}{a + R - x};$$

$$x = \frac{S}{2};$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - R^2};$$

S – расстояние между центрами жил кабеля, м; R – радиус жил кабеля, м; l – длина кабельной линии, м.

Тангенс угла диэлектрических потерь кабельной бумаги вычисляются по заданным значениям тангенсов углов диэлектрических потерь целлюлозы и воздуха по формуле

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{1 + \frac{\theta_2 \cdot \xi_{r1}}{(1 - \theta_2) \cdot \xi_{r2}}} + \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{1 + \frac{(1 - \theta_2) \cdot \xi_{r2}}{\theta_2 \cdot \xi_{r1}}}. \quad (4.4)$$

Удельная активная (γ_a) и удельная реактивная (γ_p) проводимости изоляции в переменном электрическом поле с частотой f вычисляются по формулам, приведённым в основных учебных пособиях.

Удельная полная проводимость изоляции кабеля связана с удельными активной и реактивной проводимостями соотношением

$$\gamma_{\text{из}} = \sqrt{\gamma_a^2 + \gamma_p^2} \quad (4.5)$$

Полная проводимость $Y_{\text{из}}$ изоляции кабеля определяется по удельной проводимости $\gamma_{\text{из}}$ и геометрическим размерам кабеля

$$Y_{\text{из}} = \gamma_{\text{из}} \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\ln K^2} \quad (4.6)$$

Ток утечки кабеля, возникающий под воздействием приложенного напряжения, сопротивление изоляции между жилами в двухжильных кабелях рассчитываются на основании соотношений

$$I_y = U \cdot Y_{\text{из}}; \quad (4.7)$$

$$Z_{\text{из}} = \frac{1}{Y_{\text{из}}}. \quad (4.8)$$

Диэлектрические потери в изоляции кабеля P находятся по действующему значению приложенного переменного напряжения, ёмкости кабельной линии, тангенсу угла диэлектрических потерь и частоте питающей сети

$$P = U^2 \cdot 2\pi \cdot f \cdot C_k \cdot \operatorname{tg} \delta, \quad (4.9)$$

где U – рабочее напряжение кабельной линии, В; f – частота, Гц; C_k – ёмкость кабельной линии, Ф; $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь; P – диэлектрические потери, Вт.

Для упрощения расчёта величины пробивного напряжения делаем допущение, что электрическое поле внутри кабеля однородное, то есть напряженность поля в любой его точке одинакова. Тогда электрическая прочность кабельной бумаги может быть получена по заданным значениям электрической прочности компонентов (целлюлозы и воздуха) из следующего уравнения

$$E_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр1}} \cdot E_{\text{пр2}}}{E_{\text{пр1}} + E_{\text{пр2}} \cdot \left(1 - \frac{\xi_{r2}}{\xi_{r1}}\right)}. \quad (4.10)$$

Пробивное напряжение изоляции:

$$U_{\text{пр}} = E_{\text{пр}} \cdot h_{\text{из}}, \quad (4.11)$$

где $h_{\text{из}}$ – минимальная толщина изоляции, мм.

Минимальная толщина изоляции между жилами кабеля для двухжильного кабеля определяется из уравнения

$$h_{\text{из}} = S - 2R \quad (4.12)$$

Вычислив электрические параметры линии, в кабеле которой в качестве изоляции использована непропитанная кабельная бумага, следует произвести расчёт параметров этой линии при условии, что оболочка кабеля заполнена вместо воздуха либо газообразным диэлектриком, либо жидким изоляционным материалом. При этом считаем, что в порах капиллярах воздух полностью замещается этими диэлектриками.

Последовательность расчёта остаётся той же, что для непропитанной кабельной бумаги. В уравнениях (4.2), (4.4) и (4.10) необходимо вместо электрических параметров воздуха подставлять аналогичные параметры замещающего воздух другого диэлектрика согласно условию задачи. При записи расчётного уравнения необходимо индекс 2, обозначающий, что это параметр воздуха, изменить на индекс 3.

Например, при определении $\text{tg}\delta_n$ пропитанной жидким диэлектриком кабельной бумаги уравнение (4.4) нужно записать в следующем виде:

$$\text{tg}\delta_{\text{п}} = \frac{\text{tg}\delta_q}{1 + \frac{\theta_3 \cdot \xi_{r1}}{(1 - \theta_3) \cdot \xi_{r2}}} + \frac{\text{tg}\delta_3}{1 + \frac{(1 - \theta_3) \cdot \xi_{r3}}{\theta_3 \cdot \xi_{r1}}}.$$

При расчёте следует полагать, что объёмные концентрации целлюлозы и заменяющего воздух другого газообразного или жидкого диэлектрика остались такими же, как целлюлозы и воздуха, то есть

$$\theta_3 = \theta_2.$$

После окончания расчёта следует *обязательно* проанализировать, как влияет на электрические параметры кабельной линии пропитка её изоляции жидким диэлектриком. Для удобства анализа необходимо составить таблицу расчётных значений электрических параметров кабельной линии до и после пропитки. Образец такой таблицы представлен ниже.

Таблица 4.2

Таблица сравнительных данных кабельной линии

Обозначение параметра	ξ_r	C_k, Φ	$X_{из}, \text{См/м}$	$Z_{из}, \text{Ом}$	$Y_{из}, \text{См}$	$P, \text{Вт}$	$U_{пр}, \text{кВ}$
Кабель без пропитки							
Кабель с пропиткой							

При анализе необходимо указывать, как влияет пропитка изоляции на значение каждого из рассчитанных параметров с использованием теоретических сведений.

В конце анализа необходимо сделать вывод о соответствии изоляции пропитанного и непропитанного кабелей требованиям, предъявляемых к кабельной линии правилами устройства электроустановок (ПУЭ).

В соответствии с этими требованиями кабельные линии с рабочим напряжением до 1000 В должны обладать сопротивлением изоляции $R_{из} > 0,5 \text{ МОм}$ при прозвонке их мегаомметром на напряжение 2,5 кВ.

Изоляция кабельных линий с рабочим напряжением более 1 кВ должна выдерживать воздействия постоянных напряжений, значение которых приводятся в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Испытательное напряжение выпрямленного тока для силовых кабелей

Изоляция	Напряжение, кВ, для кабелей на рабочее напряжение, кВ								Продолжительность
	2	3	6	10	20	35	110	220	
Бумажная	12	18	36	60	100	175	300	450	

Для установления соответствия изоляции кабельных линий с рабочим напряжением до 1 кВ требованиям ПУЭ необходимо рассчитать сопротивление изоляции $R_{из}$ постоянному току. Расчёт $R_{из}$ осуществляется по активной удельной проводимости в соответствии с уравнениями

$$g_{из} = \gamma_a \cdot \frac{2\pi \cdot l}{\ln K^2}; \quad (4.13)$$

$$R_{из} = \frac{1}{g_{из}}, \quad (4.14)$$

где $g_{из}$ – активная проводимость кабельной линии, См; γ_a – удельная активная проводимость кабельной линии, См/м; $R_{из}$ – сопротивление изоляции постоянному току, Ом.

Если рассчитанное значение сопротивления изоляции $R_{из}$ больше 0,5 МОм, то кабельная линия удовлетворяет требованиям ПУЭ.

Для кабельных линий с рабочим напряжением свыше 1000В проверка изоляции на соответствие требованиям ПУЭ производится путём сравнения

рассчитанного пробивного напряжения с $U_{пр}$ с испытательным напряжением, приведённым в табл. 4.3.

4.4. Экзаменационные вопросы

1. Понятия об электротехнических материалах. Классификация (определения).
2. Диэлектрики. Основные понятия. Определения. Классификация.
3. Понятия поляризации. Механизм поляризации.
4. Виды поляризации. Электронная поляризация.
5. Виды поляризации. Ионная поляризация.
6. Виды поляризации. Спонтанная (остаточная) поляризация.
7. Обобщенная схема замещения диэлектрика.
8. Относительная диэлектрическая проницаемость газообразных диэлектриков.
9. Относительная диэлектрическая проницаемость твердых диэлектриков
10. Относительная диэлектрическая проницаемость сложных диэлектриков. Уравнение Лихтеннекера.
11. Понятия об электропроводности диэлектриков. Электропроводность твердых диэлектриков. Объемное и поверхностное удельные сопротивления диэлектриков.
12. Диэлектрические потери. Основные понятия. Схемы замещения. Виды диэлектрических потерь.
13. Понятие пробоя диэлектриков. Электрический пробой газообразных диэлектриков.
14. Понятие электрического пробоя диэлектриков. Электротепловой пробой.
15. Механические, физические и тепловые свойства диэлектриков.
16. Электроизоляционные материалы. Газообразные, жидкие твердые и твердеющие изоляционные материалы.
17. Физика магнетизма. Условия возникновения ферромагнетизма.
18. Основные характеристики магнитных веществ.
19. Строение ферромагнетиков.
20. Явление магнитной анизотропии и магнитострикции.
21. Намагничивание ферромагнетиков.
22. Свойства ферромагнетиков в квазипостоянных магнитных полях.
23. Динамическая петля намагничивания.
24. Эффект вытеснения магнитного поля диэлектрика в переменном магнитном поле.
25. Потери мощности на перемагничивание ферромагнетиков в переменном магнитном поле.
26. Магнитные материалы. Магнитомягкие и магнитотвердые магнитные материалы.
27. Исследование ферромагнетика в переменном магнитном поле.

- 28.Полупроводники. Основные понятия. Классификация.
- 29.Электропроводность полупроводников.
- 30.Электронно-дырочный переход полупроводников.
- 31.Проводники. Классификация. Основные понятия.
- 32.Удельное сопротивление проводников. Температурный коэффициент удельного сопротивления.
- 33.ТермоЭДС. Температурный коэффициент линейного расширения металлических проводников.
- 34.Основы конструкционного и электротехнического материаловедение.
- 35.Агрегатные состояния и дефекты строения материалов.
- 36.Термическая обработка.
- 37.Металлы и сплавы.
- 38.Искусственные и синтетические материалы.
- 39.Классификация материалов.
- 40.Технологии получения материалов.

Учебно-методические материалы

Основная литература

Богородицкий Н. П., Пасынков В. В., Тареев Б. М. Электротехнические материалы. 7-е издание. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 304 с.

Угольников А. В. Электротехническое и конструкционное материаловедение. Екатеринбург, Изд-во УГГУ, 2015. 147 с.

Хахин Ю. М. Электротехническое материаловедение. Екатеринбург, Изд. УГГГА, 1995. 100 с.

Дополнительная литература

Справочник по электрическим материалам / под ред. Ю. В. Корицкого 2-е изд. М.: Энергия, том 1, 1974. 583 с.; том 2, 1974. 615 с.; том 3, 1976. 896 с.

Агеева Н. Д., Винаковская Н. Г., Лифанов В. Н. Электротехническое материаловедение, Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2006. 76 с.

Дудкин А. Н. Ким В. С. Электротехническое материаловедение. Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2012. 216 с.

Журавлева Л. В. Электроматериаловедение, М ПрофОбрИздат, 2001. 312 с.

Попов В. С. Теоретическая электротехника. М.: Энергоатомиздат, 1990.

Розенблат М. А. Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники. М.: Наука, 1966. 720с.

Тареев Б. М. Физика диэлектрических материалов. М.: Энергия, 1982. 320 с.

Штофа Ян. Электротехнические материалы в вопросах и ответах. М.: Энергоатомиздат, 1984. 200 с.

Электротехнические и конструкционные материалы. В. Н. Бородулин, А. С. Воробьев, В. М. Матюгин и др. М: Издательский центр «Академия», 2005. 280 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

***МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ***

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЕ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация

Геофизические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ	4
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса	4
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам	5
Подготовка и написание контрольной работы	6
Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)	7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ	8
Подготовка к зачёту	8
Подготовка к экзамену	8

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов – это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы – закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

для подготовки ко всем видам текущего контроля:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы;
- выполнение и написание курсовой работы (проекта);

для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:

- подготовка к зачёту;
- подготовка к экзамену.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита контрольных и курсовых работ (проектов), защита зачётных работ в виде доклада с презентацией и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи экзамена / зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса:

для овладения знаниями:

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

для формирования навыков и умений:

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам

Практические занятия по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования, выполняются доклады с презентацией по определенным учебно-практическим, учебно-исследовательским или научным темам с последующим их обсуждением.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям:

для овладения знаниями:

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам.

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Лабораторные занятия по дисциплине выступают средством формирования у студентов навыков работы с использованием лабораторного оборудования, планирования и выполнения экспериментов, оформления отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к лабораторным занятиям:

для овладения знаниями:

- изучение методик работы с использованием различных видов и типов лабораторного оборудования;
- изучение правил безопасной эксплуатации лабораторного оборудования;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

для закрепления и систематизации знаний:

- составление плана проведения эксперимента;
- составление отчётной документации по результатам экспериментирования;
- аналитическая обработка результатов экспериментов.

для формирования навыков и умений:

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению лабораторных работ.

Подготовка и написание контрольной работы

Контрольная работа – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе:

для овладения знаниями:

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- оформление отчётной документации по выполнению контрольной работы.

Контрольная работа может быть выполнена в виде доклада с презентацией.

Доклад с презентацией – это публичное выступление по представлению полученных результатов знаний по определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной теме.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления;
- осуществить сбор материала к выступлению;
- организовать работу с источниками;
- во время изучения источников следует записывать вопросы, возникающие по мере ознакомления, ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- сформулировать возможные вопросы по теме доклада, подготовить тезисы ответов на них;
- обработать материал и представить его в виде законченного доклада и презентации.

При выполнении контрольной работы в виде доклада с презентацией самостоятельная работа студента включает в себя:

для овладения знаниями:

- чтение основное и дополнительной литературы по заданной теме доклада;
- составление плана доклада;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей по теме доклада

для закрепления и систематизации знаний:

- составление плана и тезисов презентации по теме доклада;
- составление презентации;
- составление библиографического списка по теме доклада;
- подготовка к публичному выступлению;
- составление возможных вопросов по теме доклада и ответов на них.

для формирования навыков и умений:

- публичное выступление;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Варианты контрольных работ и темы докладов приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

Подготовка к выполнению и написанию курсовой работы (проекта)

Курсовая работа (проект) – форма контроля для демонстрации обучающимся умений работать с объектами изучения, критическими источниками, справочной и энциклопедической литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать и строить априорную модель изучаемого объекта или процесса, создавать содержательную презентацию выполненной работы.

При выполнении и защите курсовой работы (проекта) оценивается умение самостоятельной работы с объектами изучения, справочной литературой, логично и грамотно излагать собственные умозаключения и выводы, обосновывать выбранную технологическую схему и принятый тип и количество оборудования, создавать содержательную презентацию выполненной работы (пояснительную записку и графический материал).

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к курсовой работе (проекту):

для овладения знаниями:

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- составление плана выполнения курсовой работы (проекта);
- составление списка использованных источников.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа учебно-методическими материалами по выполнению курсовой работы (проекта);
 - изучение основных методик расчёта технологических схем, выбора и расчёта оборудования;
 - подготовка тезисов ответов на вопросы по тематике курсовой работы (проекта).
- для формирования навыков и умений:*
- решение задач по образцу и вариативных задач;
 - выполнение рисунков, схем, компоновочных чертежей;
 - оформление текстовой и графической документации.

Тематика курсовых работ (проектов) приведены в комплекте оценочных средств дисциплины.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Подготовка к зачёту

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы (доклад с презентацией).

Тест – это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;
- выяснить условия проведения теста: количество вопросов в тесте, продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».

Подготовка к экзамену

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в форме экзамена.

Билет на экзамен включает в себя теоретические вопросы и практико-ориентированные задания.

Теоретический вопрос – индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся.

Практико-ориентированное задание – средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по определенной теме.

При самостоятельной подготовке к экзамену студенту необходимо:

- получить перечень теоретических вопросов к экзамену;
- проработать пройденный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине, при необходимости изучить дополнительные источники;
- составить планы и тезисы ответов на вопросы;
- проработать все типы практико-ориентированных заданий;
- составить алгоритм решения основных типов задач;
- выяснить условия проведения экзамена: количество теоретических вопросов и практико-ориентированных заданий в экзаменационном билете, продолжительность и форму проведения экзамена (устный или письменный), систему оценки результатов и т. д.;
- приступая к работе с экзаменационным билетом, нужно внимательно прочитать теоретические вопросы и условия практико-ориентированного задания;
- при условии проведения устного экзамена составить план и тезисы ответов на теоретические вопросы, кратко изложить ход решения практико-ориентированного задания;
- при условии проведения письменного экзамена дать полные письменные ответы на теоретические вопросы; изложить ход решения практико-ориентированного задания с численным расчётом искомых величин.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому

комитету

С.А. Уиоров



**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО ФИЗИКЕ ЗЕМЛИ**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Болотнова Л. А., Филатов В. В.

Екатеринбург

2020

Рецензенты: *Д. С. Вагшаль*, канд. геол.-минерал. наук, Геофизический отдел Комитета природных ресурсов по Свердловской области;
В. В. Кормильцев, д-р геол.-минерал. наук, профессор, зав. лабораторией электрометрии ИГ УрО РАН

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета

Филатов В. В., Кузин А. В.

Ф 51 ФИЗИКА ЗЕМЛИ: практикум / В. В. Филатов, А. В. Кузин; Урал. гос. горный ун-т. – Изд. 3-е, исправл. и доп. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. – 26 с.

Практикум содержит темы, методические указания, формулы, варианты заданий для выполнения практических занятий по дисциплине «Физика Земли». В справочном отделе приведены численные значения основных физических параметров Земли и физических констант, указания по переводу единиц физических величин в Международную систему СИ.

Практикум предназначен для студентов вузов, обучающихся по специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки».

© Филатов В. В., Кузин А. В., 1999

© Филатов В. В., Кузин А. В., 2001

© Филатов В. В., Кузин А. В., 2011

© Уральская государственная горно-геологическая академия, 1999, 2001

© Уральский государственный горный университет, 2011

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОГО ВОЗРАСТА ГОРНЫХ ПОРОД

Содержание работы: по результатам определения изотопов свинца Pb^{204} , Pb^{206} , Pb^{207} , Pb^{208} в горных породах различных месторождений вычислить абсолютный возраст этих пород.

Расчетные формулы:

$$\frac{Pb^{206}}{Pb^{204}} = 18,90 - 12,00(e^{0,159t} - 1); \quad (1.1)$$

$$\frac{Pb^{207}}{Pb^{204}} = 15,98 - 0,086(e^{0,072t} - 1); \quad (1.2)$$

$$\frac{Pb^{208}}{Pb^{204}} = 38,82 - 37,00(e^{0,049t} - 1). \quad (1.3)$$

Пример задания исходных данных и оформления результатов расчетов дан в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Содержание изотопов свинца, возраст образцов горных пород

Месторождение	Изотопный состав свинца			Возраст по трем изотопным отношениям, млрд лет	Среднее значение возраста, млрд лет
	Pb^{206}	Pb^{207}	Pb^{208}		
Рудник Садбери	16,20	15,36	36,99		
Рудник Садбери	16,15	15,60	35,94		
Юго, Швеция	15,92	15,61	35,89		
Корске, Финляндия	15,95	15,57	36,26		
Перная, Финляндия	15,85	15,51	36,00		
Сандава, Карелия	14,88	14,91	33,31		
Питкранта, Карелия	14,26	14,77	33,23		
Ксми, Карелия	15,43	14,87	34,50		
Сала, Швеция	15,40	14,95	34,00		

Примечание. Содержание Pb^{204} равно 1, варианты исходных заданий приведены в главе 10.

Задание

1. Преобразовать формулы (1.1)–(1.3) к виду, позволяющему определить время t .

2. Провести расчеты абсолютного возраста для каждого образца по трем преобразованным формулам (1.1)–(1.3).

3. Рассчитать среднее значение возраста каждого образца по трем определениям (резко отличающиеся значения возраста при расчете среднего значения следует отбросить, так как отдельные изотопы могли быть привнесены или вынесены из горных пород при метасоматозе и других геологических явлениях).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Содержание работы: по формуле Гельмерта 1884 г. и одной из формул (2)–(15) вычислить нормальное значение ускорения силы тяжести в зависимости от ширины точки на поверхности Земли в интервале широт от 90° (полюс) до 0° (экватор). Шаг измерения широты $\Delta\varphi = 10^\circ$. Величину долготы (при расчетах по некоторым формулам) принять 60° . По результатам расчетов построить графики (рис. 2.1).

Расчетные формулы:

1. Гельмерт, 1884 г.

$$\gamma_0 = 978,00(1 + 0,005310 \sin^2 \varphi);$$

2. Гельмерт, 1901–1909 гг.

$$\gamma_0 = 978,030(1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi);$$

3. Гельмерт, 1915 г.

$$\gamma_0 = 978,052[1 + 0,005285 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000018 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 17^\circ)];$$

4. Боуи, 1917 г.

$$\gamma_0 = 978,039(1 + 0,005294 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi);$$

5. Гейсканен, 1924 г.

$$\gamma_0 = 978,052[1 + 0,005285 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000027 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 18^\circ)];$$

6. Гейсканен, 1928 г.

$$\gamma_0 = 978,049[1 + 0,005293 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi + 0,000019 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 0^\circ)];$$

7. Гейсканен, 1928 г.

$$\gamma_0 = 978,049(1 + 0,005289 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi);$$

8. Кассинис, 1930 г.

$$\gamma_0 = 978,049(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi);$$

9. Гейсканен, 1938 г.

$$\gamma_0 = 978,0524[1 + 0,0052970 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi + 0,0000276 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 25^\circ)];$$

10. Жонглович, 1952 г.

$$\gamma_0 = 978,0573(1 + 0,0052837 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi);$$

11. Жонглович, 1952 г.

$$\gamma_0 = 978,0573[1 + 0,005268 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi + 0,0000155 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 6^\circ)];$$

12. Гейсканен, 1957 г.

$$\gamma_0 = 978,0497(1 + 0,0032902 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi);$$

13. Гейсканен, 1957 г.

$$\gamma_0 = 978,0516[1 + 0,0052910 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi + 0,0000106 \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda + 6^\circ)];$$

14. Грушинский, 1960 г.

$$\gamma_0 = 978,0531(1 + 0,0052883 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi);$$

15. Международная формула, 1967 г.

$$\gamma_0 = 978,01318(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi).$$

Пример оформления результатов расчетов.

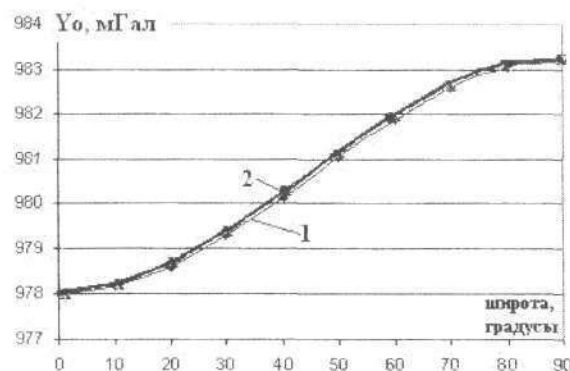


Рис. 2.1. Изменение нормального значения ускорения силы тяжести в зависимости от широты:

1 – формула Гельмерта, 1884 г.; 2 – одна из формул (2)–(15)

3. ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Содержание работы: провести измерение ускорения силы тяжести по вертикальному профилю и вычислить нормальное значение вертикального градиента ускорения силы тяжести.

Оборудование: гравиметр типа ГАК, ГНУ-КС, батарея напряжением 3 В, мерная лента (рулетка).

Порядок выполнения работы

1. Место проведения измерений. Измерения выполняют вдоль вертикального профиля, совмещенного с лестничным пролетом. Пункты наблюдения располагаются на площадках первого и четвертого этажей.

2. Методика измерений.

а) установить гравиметр на площадке, провести его горизонтирование с помощью подъемных винтов;

б) подключить батарею к разъемам гравиметра, при этом загорится лампочка подсветки оптической системы, прибор готов к работе;

в) вращая микрометренный винт измерительного устройства, совместить блик в окуляре гравиметра с нулевой линией внутренней шкалы;

г) взять отчет S_i на отсчетном устройстве гравиметра, записать его в журнал;

д) вращением измерительного винта (влево или вправо, но всегда в одну сторону) отвести блик и снова совместить его с нулевой линией, взять новый отчет. Должно быть взято пять отсчетов на каждой точке измерения. Исключить из отсчетов наибольший и наименьший, по оставшимся трем рассчитать среднее значение.

3. Схема измерений. Измерения относительного изменения ускорения силы тяжести на двух площадках, расположенных на различной высоте, выполняют по цикловой схеме (рис. 3.1). Цикловая схема измерений предусматривает взятие отсчета S_1 на площадке I, переход на площадку II, взятие отсчета S_2 , возвращение на площадку I, взятие отсчета S'_1 .

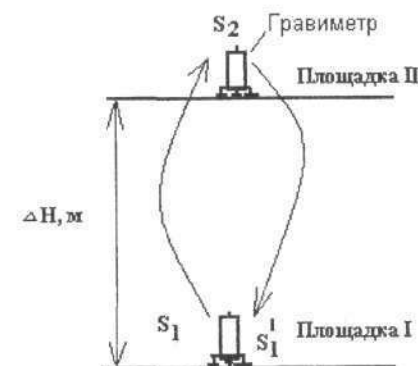


Рис. 3.1. Схема измерений ускорения силы тяжести и ее вертикального градиента

4. Расчет относительного изменения силы тяжести между двумя площадками проводят по формуле

$$\Delta g = C \left[S_2 - \frac{1}{2}(S_1 + S'_1) \right], \quad (3.1)$$

где C – цена деления гравиметра.

5. Мерной лентой измеряют разность высот ΔH между площадками.

6. Вычисляют вертикальный градиент ускорения силы тяжести (мГал/м):

$$g(H) = \frac{\Delta g}{\Delta H} \quad (3.2)$$

и сравнивают его с теоретическим значением 0,3086 мГал/м.

4. ПОСТРОЕНИЕ ГОДОГРАФОВ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Содержание работы:

- выполнить корреляцию (с помощью преподавателя) на учебной сейсмограмме фаз прямой и преломленной волн;
- построить на миллиметровой бумаге годографы волн: прямой ($\Gamma_{пр}$), преломленной ($\Gamma_{гол}$) (рис. 4.1);
- рассчитать скорость волн по годографам (см. рис. 4.1).

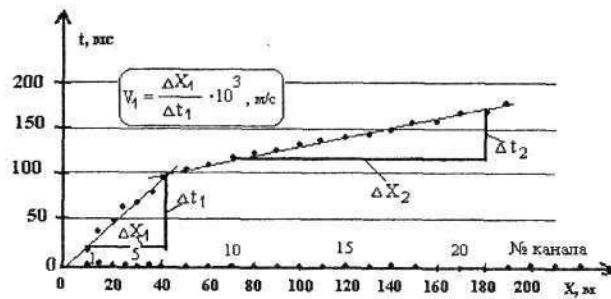


Рис. 4.1. Годографы прямой и преломленной волн

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЭПИЦЕНТРА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Содержание работы: зная координаты планового положения сейсмических станций (рис. 5.1) и время регистрации продольных T_p и поперечных T_s упругих волн от очага землетрясения (табл. 5.1), определить координаты эпицентра землетрясения.

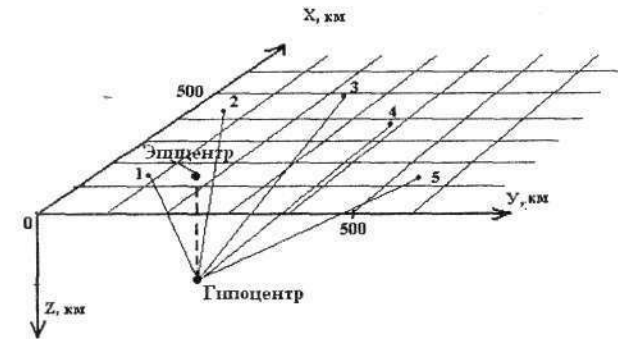


Рис. 5.1. Схема хода лучей упругих волн от гипоцентра землетрясения к сейсмическим станциям

Таблица 5.1
Координаты станций и время регистрации прихода волн

Сейсмологические станции	Координаты станций, км		Отметка прихода времени волн, с		Разность, с $T_s - T_p$	Абсолютное время, с	
	X	Y	T_p	T_s		t_p	t_s
1	800	200	70,28	109,77			
2	1000	900	99,98	160,68			
3	1100	400	85,72	136,23			
4	400	100	99,98	160,68			
5	200	300	106,28	171,48			

$$V_p = 6 \text{ км/с}, V_s = 3,5 \text{ км/с}.$$

Порядок выполнения работы

Построить график Вадати (рис. 5.2) и определить по нему время, когда произошло землетрясение (t_0).

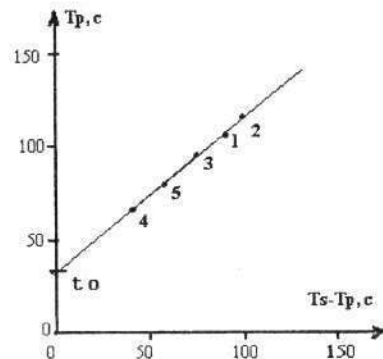


Рис. 5.2. График Вадати

2. Вычислить время распространения продольной и поперечной волн от очага землетрясения до сейсмических станций по формулам:

$$t_p = T_p - t_0; \quad (5.1)$$

$$t_s = T_s - t_0. \quad (5.2)$$

По формулам (5.3) и (5.4) определить координаты эпицентра землетрясения:

$$x_0 = \frac{B_2 D_1 - B_1 D_2}{A_1 B_2 - B_1^2}; \quad (5.3)$$

$$y_0 = \frac{A_1 D_2 - B_1 D_1}{A_1 B_2 - B_1^2}, \quad (5.4)$$

где A_1, B_1, B_2, D_1, D_2 – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$A_1 = \sum_{i=2}^5 [2(x_1 - x_i)]^2; \quad B_1 = \sum_{i=2}^5 [2(x_1 - x_i)][2(y_1 - y_i)]; \quad B_2 = \sum_{i=2}^5 [2(y_1 - y_i)]^2;$$

$$D_1 = \sum_{i=2}^5 \{2(x_1 - x_i)[(x_1^2 - x_i^2) + (y_1^2 - y_i^2) + V_p^2(t_{pi}^2 - t_{p1}^2)]\};$$

$$D_2 = \sum_{i=2}^5 \{2(y_1 - y_i)[(x_1^2 - x_i^2) + (y_1^2 - y_i^2) + V_p^2(t_{pi}^2 - t_{p1}^2)]\}.$$

4. Построить на миллиметровой бумаге схему расположения сейсмических станций и показать на ней положение эпицентра землетрясения.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ МОДЕЛИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Содержание работы:

1. Рассчитать теоретические значения среднего температурного градиента (G) по данным табл. 6.1:

$$G = \left(\frac{A}{\lambda} \right) H. \quad (6.1)$$

Таблица 6.1

Значения удельной объемной теплогенерации и коэффициента теплопроводности для модели земной коры

Теплогенерация $A \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^3$	Теплопроводность $\lambda, \text{Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$
7,5	1,9–3,2
7,6	2,6–3,5
8,9	2,1–2,3

2. Рассчитать кривые теоретических температур T в земной коре по формуле:

$$T = T_0 + \frac{A}{3\lambda} \left[\frac{1}{2} (R_3^2 - R^2) - (R_3 - H)^3 \frac{R_3 - R}{R_3 R} \right], \quad (6.2)$$

где $T_0 = 0^\circ\text{C}$ – температура на поверхности Земли; R_3 – радиус земного шара, 6371 км; R – расстояние от центра Земли до произвольной точки внутри земной коры, R изменяется от 6369 до 6331 км с шагом 2 км; $H = 40$ км – мощность коры.

3. Построить график изменения температуры для модели земной коры (рис. 6.1).

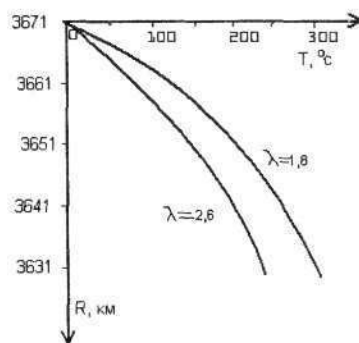


Рис. 6.1. Графики температуры для модели земной коры

7. ИЗМЕРЕНИЕ ВАРИАЦИЙ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Содержание работы: провести измерение вариаций вертикальной составляющей магнитной индукции (z -составляющей) геомагнитного поля в течение 5 минут с интервалом времени 5-10 с путем снятия отсчетов по шкале оптико-механического магнитометра типа М-27. Результаты измерений и вычислений записать в специальный журнал.

Обработка результатов:

1. Значения отсчетов магнитометра умножить на цену деления (10 нТл/деление), записать в соответствующую колонку таблицы.
2. Построить вариограмму (рис. 7.1).
3. Определить амплитуду изменения значений магнитной индукции за время наблюдения.
4. Оценить интенсивность вариаций в баллах (табл. 7.1).



Рис. 7.1. Вариограмма значений вертикальной составляющей магнитного поля (время местное)

Таблица 7.1

Шкала балльности вариаций магнитного поля

Амплитуда изменения индукции магнитного поля, нТл	0-5,5	11	22	44	77	132	220	363	550	>550
Баллы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Оценка	Норма		Возмущение			Буря				

8. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГРАВИТАЦИОННЫХ И РОТАЦИОННЫХ СИЛ ЗЕМЛИ

1. Определить величину ускорения силы тяжести на полюсах Земли в единицах СИ, в миллигалах, по формуле

$$g = \frac{kM_3}{R^2}, \quad (8.1)$$

где k – гравитационная постоянная; M_3 – масса Земли; R – полярный радиус Земли (см. эти и прочие параметры в главе 11).

Рассчитать силу гравитационного притяжения единичной массы (1 кг).

2. Рассчитать центробежную силу, действующую на физическое тело, расположенное на: а) экваторе Земли, б) на широте

56°. Определить центробежное ускорение, действующее на единичную массу данного тела, перевести значение ускорения в миллигалы по формулам:

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R, \quad (8.2)$$

$$C = \frac{F_{\text{цб}}}{m}, \quad (8.3)$$

3. Определить соотношение силы притяжения и центробежной силы, действующих на единичную массу, расположенную: а) на экваторе Земли на широте 30°, по формулам (8.1), (8.3), (8.4)

$$C_{(\varphi)} = \omega^2 R \cos^2 \varphi. \quad (8.4)$$

4. Рассчитать линейную скорость материальной точки, расположенной: а) на экваторе Земли, б) на широте 35° по формулам:

$$V = \frac{2\pi}{T} R; \quad (8.5)$$

$$V = \frac{2\pi}{T} R \cos \varphi. \quad (8.6)$$

5. Определить силу притяжения между Землей и Луной по формуле

$$F = \frac{kM_3M_{\text{Л}}}{R_{3\text{Л}}^2}. \quad (8.7)$$

6. Определить линейную скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца по формуле

$$V_3 = \frac{2\pi}{T_3} R_{\text{С-З}}, \quad (8.8)$$

где T_3 – время движения Земли по орбите вокруг Солнца, звездный год (в секундах).

9. ОБРАБОТКА ДАННЫХ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ

Содержание работы. При магнитотеллурических зондированиях (МТЗ) регистрируют в течение нескольких часов или суток вариации геомагнитного поля и вариации наведенных (индуцированных) электрических токов в Земле. По соотношению напряженности E электрического и индукции B магнитного полей рассчитывают комплексное сопротивление среды – импеданс $Z = E/H$. По импедансу рассчитывают значения удельного электрического сопротивления ρ_T . Индекс T при сопротивлении означает, что его величина определяется для электромагнитного поля с определенным периодом колебаний T , то есть с различной частотой. Известно, что волны с низкой частотой распространяются на больших глубинах, а с высокой – у поверхности проводника (Земли). Это проявление так называемого «поверхностного эффекта» в распространении электромагнитных волн в проводнике. Выделяя на вариограммах волны различной частоты, можно оценить удельное электрическое сопротивление различных слоев Земли, вплоть до ее ядра.

При построении кривых МТЗ на билогарифмических бланках по одной из осей откладывают ρ_T , а по другой – значения корня квадратного из величины периода электромагнитного колебания (рис. 9.1).

На кривых МТЗ к ее восходящим частям можно провести вспомогательные линии продольной проводимости S , а к нисходящим – линии h мощности слоев высокого поперечного сопротивления. Используя значения квадратного корня из периода колебаний волн, отсекаемых этими линиями по формулам (9.1)–(9.6), можно определить значения продольной проводимости низкоомных слоев и мощности слоев высокого сопротивления:

$$S_1 = 356\sqrt{T_S}; \quad (9.1)$$

$$S_{10} = 114\sqrt{T_S}; \quad (9.2)$$

$$S_{100} = 35,6\sqrt{T_S}; \quad (9.3)$$

$$h_1 = 0,396\sqrt{T_h}; \quad (9.4)$$

$$h_{10} = 1,28\sqrt{T_h}; \quad (9.5)$$

$$h_{100} = 3,96\sqrt{T_h}. \quad (9.6)$$

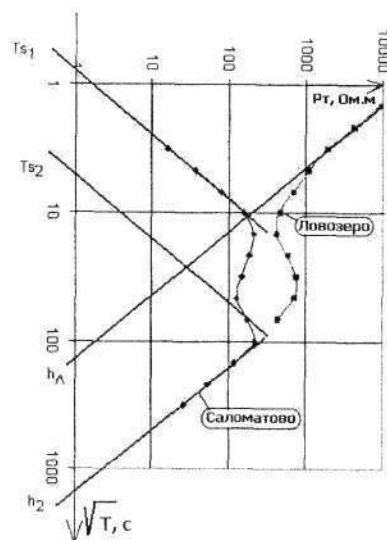


Рис. 9.1. Кривые МТЗ и вспомогательные линии

Индексы 1, 10, 100 означают значение r_T на билогарифмическом бланке, через которое проходит ось $\sqrt{T}$, на которой для конкретной кривой МТЗ сняты значения T_S и T_h .

Порядок выполнения работы

1. Построить на билогарифмическом бланке кривую МТЗ.
2. Провести на кривой асимптотические линии продольной проводимости S и мощности слоев высокого поперечного сопротивления h .

3. Снять значения $\sqrt{T_S}$ и $\sqrt{T_h}$ для выделяемых пластов с повышенной продольной проводимостью и повышенным поперечным сопротивлением и по формулам (9.1)–(9.6) рассчитать значения продольной проводимости и мощности слоев высокого поперечного сопротивления.

4. Рассчитать удельное электрическое сопротивление r_T верхнего слоя мощностью $H = 40$ км (40000 м), воспользовавшись формулой: $H = S r_T$.

5. Дать геологическое истолкование полученным при обработке кривой МТЗ результатам, то есть оценить мощности выделяемых слоев: коры, глубины до астеносферного слоя, мощности высокоомной мантии, глубины до электропроводного ядра и т. п.

6. Составить краткую пояснительную записку к выполненной работе.

10. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Определение абсолютного возраста горных пород свинцовым методом.

Месторождение	Содержание изотопов свинца		
	Pb ²⁰⁶	Pb ²⁰⁷	Pb ²⁰⁸
1	2	3	4
Задание 1			
Питкеранта, Карелия	14,26	14,77	33,23
Кинов-Кознала, Финляндия	14,27	14,64	32,96
Кинов-Кознала, Финляндия	14,85	14,99	34,44
Беломорье, Карелия	14,97	15,13	35,00
Северная Варака, Карелия	14,76	14,96	35,20
Кемь, Карелия	15,43	14,87	34,50
Сала, Швеция	15,40	14,95	34,00
Орнарви, Финляндия	15,74	15,46	34,04
Орнарви, Финляндия	16,50	15,70	36,80
Задание 2			
Лонгбон, Швеция	15,83	15,45	35,60
Тэдино, Карелия	14,76	14,85	35,17
Юто, Швеция	15,92	15,61	35,89

Продолжение задания 1

Месторождение	Содержание изотопов свинца		
	Pb ²⁰⁶	Pb ²⁰⁷	Pb ²⁰⁸
1	2	3	4
Фалун, Швеция	15,34	14,99	33,84
Фалун, Швеция	15,89	15,66	35,86
Корске, Финляндия	15,95	15,57	36,26
Атту, Финляндия	15,82	15,47	35,89
Айла, Финляндия	15,95	15,64	36,24
Пакили, Финляндия	15,73	15,36	35,30
Задание 3			
Парнайа, Финляндия	15,85	15,51	36,00
Пенийавара, Финляндия	15,74	15,45	35,98
Оутокульту, Финляндия	14,90	15,23	35,21
Ялонвара, Приладожье	14,95	15,04	34,35
Клее 6, Питкеранта	14,72	14,96	33,61
Люпико, Питкеранта	14,66	14,88	33,75
Хонунвара, Питкеранта	14,60	14,86	33,54
Фадейн, Келья	14,90	14,92	33,71
Сондала, Карелия	14,88	14,91	33,31
Задание 4			
Рудник Садбери	16,20	15,76	36,99
То же	16,15	15,60	35,94
Юто, Швеция	15,92	15,61	35,89
Корске, Финляндия	15,95	15,57	36,26
Пернайа, Финляндия	15,85	15,51	36,00
Сондала, Карелия	14,88	14,91	33,31
Питкеранта, Карелия	14,26	14,77	33,23
Кемь, Карелия	15,43	14,87	34,50
Сала, Швеция	15,40	14,95	34,00
Задание 5			
Галениты из Тандер	18,19	15,31	37,78
Бай, Онтарио	18,32	15,25	37,14
Рудник Садбери, Онтарио	16,30	15,49	36,97
То же	16,43	15,69	36,93
— " —	15,99	15,48	36,56
— " —	16,20	15,16	36,99
— " —	16,15	15,60	35,94
— " —	15,94	15,34	36,56
«8-е Марга»	18,02	15,42	37,91

5. Определение координат эпицентра землетрясения

Сейсмологические станции	Координаты станций, км		Отметка времени прихода волн, с	
	X	Y	T _p	T _s
1	2	3	4	5
Задание 1				
1	300	500	78,87	127,80
2	500	200	70,10	113,03
3	1200	300	101,28	166,48
4	1000	600	62,78	100,48
5	700	900	78,87	127,80
Задание 2				
1	200	400	104,98	165,68
2	600	500	43,35	60,40
3	1000	700	82,37	126,91
4	800	300	60,82	89,97
5	1100	100	115,73	184,11
Задание 3				
1	800	200	70,28	109,77
2	1000	900	99,98	160,68
3	1100	400	85,72	136,23
4	400	100	99,98	160,68
5	200	300	106,28	171,48
Задание 4				
1	1000	400	65,28	104,77
2	300	900	105,73	174,11
3	400	400	65,28	104,77
4	700	1000	94,98	155,68
5	200	800	108,60	179,03
Задание 5				
1	500	600	55,82	84,97
2	900	1000	106,28	171,48
3	300	800	99,98	160,68
4	100	400	117,74	191,11
5	1100	500	83,87	12,80
Задание 6				
1	600	400	33,87	54,48
2	900	1000	94,75	158,96
3	100	500	105,00	176,43
4	300	1100	125,18	211,03
5	200	800	102,18	171,60

Продолжение задания 5

1	2	3	4	5
Задание 7				
1	100	400	115,73	189,11
2	400	1200	141,02	232,46
3	1000	600	68,28	107,77
4	1200	700	104,28	169,48
5	300	100	108,73	177,11
Задание 8				
1	1200	900	115,02	192,17
2	800	300	47,82	76,97
3	200	1000	126,02	211,03
4	600	200	62,28	101,77
5	100	700	113,72	189,94
Задание 9				
1	900	900	94,75	158,86
2	1000	400	77,65	129,54
3	800	300	67,36	111,90
4	500	200	83,17	139,01
5	600	600	60,28	99,76
Задание 10				
1	1000	500	80,09	123,01
2	400	400	82,36	126,90
3	300	100	120,08	191,43
4	1000	200	98,07	154,01
5	300	700	101,65	159,97

6. Вычисление температуры (T) и геотермического градиента (G) для модели земной коры

Задание	Плотность тепловых источников $A \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^3$	Температуропроводность горных пород, $\text{Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$
1	7,9	2,1–3,1
2	8,0	2,2–2,8
3	8,4	2,1–3,7
4	8,5	3,6–5,3
5	7,9	2,0–3,0
6	8,9	2,1–2,7
7	8,2	1,5–2,2
8	8,3	2,0–2,3
9	8,6	2,5–3,2
10	8,7	1,3–1,8

Продолжение задания 6

Задание	Плотность тепловых источников, $A \cdot 10^{-7}, \text{Вт/м}^3$	Температуропроводность горных пород, $\text{Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$
11	8,0	1,9–3,2
12	8,1	2,6–3,5
13	8,0	1,8–3,1
14	8,1	2,5–3,4
15	8,6	2,6–3,3
16	8,7	1,4–1,9
17	8,2	1,6–2,3
18	8,3	2,1–2,4
19	8,4	2,0–3,8
20	8,5	3,7–5,2

11. СПРАВОЧНЫЙ ОТДЕЛ

Радиоактивные элементы и константы их распада

Элемент	Кларк изотопа, умноженный на относит. содержа- ние изотопа в природной смеси элементов, %	Конечный продукт распада	Постоянная распада λ , 1/лет	Период полураспада, T, лет
Уран U_{92}^{238}	$2,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,993$	Свинец Pb_{82}^{208}	$1,53 \cdot 10^{-10}$	$4,498 \cdot 10^9$
Актиноуран U_{92}^{235}	$2,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,0073$	Свинец Pb_{82}^{207}	$9,722 \cdot 10^{-10}$	$7,13 \cdot 10^8$
Торий Th_{90}^{232}	$11,3 \cdot 10^{-4} \cdot 1$	Свинец Pb_{82}^{208}	$4,931 \cdot 10^{-11}$	$1,39 \cdot 10^{10}$
Рубидий Rb_{37}^{87}	$0,009 \cdot 0,272$	Стронций Sr_{38}^{87}	$1,39 \cdot 10^{-11}$ $1,47 \cdot 10^{-11}$	$5,0 \cdot 10^{10}$ $4,7 \cdot 10^{10}$
Самарий Sm_{62}^{146}	$7 \cdot 10^{-4} \cdot 0,149$	Неодим Nd_{60}^{143}	$6,6 \cdot 10^{-12}$	$1,05 \cdot 10^{10}$
Неодим Nd_{60}^{150}	$3,2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,056$	Прометий Pm_{61}^{150}	$6,9 \cdot 10^{-17}$	$1 \cdot 10^{16}$
Радиоуглерод C_6^{14}		Азот N_7^{14}	$1,245 \cdot 10^{-4}$	5568

Некоторые параметры и законы Солнечной системы

Масса Солнца $M_C = 1,991 \cdot 10^{30}$ кг.

Масса Земли $M_3 = 5,976 \cdot 10^{24}$ кг.

Масса Луны $M_L = 7,17 \cdot 10^{22}$ кг.

Расстояние от Земли до Солнца $150 \cdot 10^6$ км.

Расстояние от Земли до Луны 388400 км.

Экваториальный радиус Земли $R_3 = 6378,16$ км.

Полярный радиус Земли $R_n = 6356,18$ км.

Сжатие Земли $e = (R_3 - R_n)/R_3 = 1/298,25$.

Гравитационная постоянная $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/кг·с².

Сила гравитационного притяжения Землей массы m :

$$F = K \frac{mM_3}{R^2}.$$

Центробежная сила, действующая на массу m :

$$F_u = m\omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r,$$

где T – период вращения; r – радиус вращения.

Звездный год Земли $T_3 = 365$ сут. 6 ч. 9 мин. 10 с = 31558150 с.

Перевод внесистемных единиц в единицы СИ

Параметр	Единица измерения	Перевод единицы в СИ
Длина	ангстрем	$1 \cdot 10^{-10}$ м
Объем	литр	$1 \cdot 10^{-3}$ м
Давление	Атмосфера	101325 Па
	мм рт. ст.	103,322 Па
	бар	$1 \cdot 10^5$ Па
	760 мм рт. ст.	101325 Па
Мощность	Лошадиная сила	735,499 Вт
Удельная теплоемкость	кал/(г·К°)	$4,1868 \cdot 10^3$ Дж/(г·К°)
Количество теплоты	кал	4,1686 Дж
Удельное количество теплоты	кал/г	$4,1868 \cdot 10^3$ Дж/кг
Тепловой поток	кал/с	4,1868 Вт
Теплопроводность	кал/(с·см·К°)	$4,1868 \cdot 10^2$ Вт/(м·К°)
Коэффициент лучеиспускания	кал/(с·см ² ·К°)	$4,1868 \cdot 10^4$ Вт/(м ² ·К°)
Газовая постоянная	кал/(г·К°)	$4,1868 \cdot 10^3$ Дж/(г·К°)

Перевод различных единиц в метрическую систему

Параметр	Единица измерения	Метрическая система
Длина	1 дюйм	2,54 см
	1 фут	30,3 см
	1 миля	1,61 км
	1 морская миля	1,85 км
Объем	1 л	10^3 см ³
Масса	1 кг	10^3 г
Скорость	1 км/ч	27,8 см/с
Ускорение	1 гал	1 см/с ²
Давление	1 бар	10^6 дин/см ²
	1 атм	$1013 \cdot 10^3$ дин/см ²
Энергия	1 Дж	10^7 эрг

Соотношение единиц температуры в различных системах

По Цельсию, °C	По Кельвину, К	По Фаренгейту, F
0	273,2	32
10	283,2	50
20	293,2	68
30	303,2	86
40	313,02	104
100	373,02	212
-40	233,02	-40

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Определение абсолютного возраста горных пород	3
2. Вычисление нормального значения ускорения силы тяжести ...	4
3. Измерение ускорения силы тяжести	6
4. Построение годографов сейсмических волн	8
5. Определение координат эпицентра землетрясения	9
6. Вычисление температуры и температурного градиента для модели земной коры	11
7. Измерение вариаций геомагнитного поля	12
8. Теоретический анализ гравитационных и ротационных сил Земли	13
9. Обработка данных магнитотеллурических зондирований	15
10. Варианты заданий	17
11. Справочный отдел	21

МИНОБРНАУКИ РФ

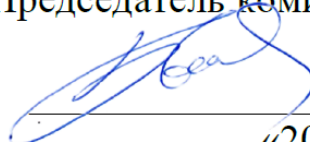
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО

методической комиссией

факультета геологии и геофизики

Председатель комиссии



В. И. Бондарев

«20» марта 2020 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

«ФИЗИКА ЗЕМЛИ»

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Екатеринбург

2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Задания контрольной работы
2. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
 - 2.1 Оформление контрольной работы
 - 2.2 Критерии оценки контрольной работы
3. Методические рекомендации по составлению глоссария
4. Рекомендуемая литературы для выполнения контрольной работы

Введение

Данные методические указания разработаны в помощь для выполнения контрольной работы по курсу «Физика Земли».

В методических рекомендациях содержится: перечень вопросов контрольной работы, методические рекомендации по выполнению контрольной работы, перечень рекомендуемых учебных изданий, интернет-ресурсов, дополнительной литературы.

Внимательно прочитайте задание контрольной работы, подготовьте рекомендуемую вам литературу (при необходимости), ознакомьтесь с рекомендациями по выполнению работы, с критериями оценивания работы.

Прежде чем сдать выполненную контрольную работу преподавателю на проверку, выполните самооценку по заданным критериям.

Контрольная работа является обязательной для каждого обучающегося и определяется учебным планом. Наличие положительной оценки по контрольной работе необходимо для получения промежуточной аттестации по дисциплине «Физика Земли».

1. Задания для контрольной работы

Вариант 1

Дайте определения следующим понятиям: сила тяжести, сила тяготения, ускорение силы тяжести, гравитационный потенциал. Укажите на отличительные особенности силы тяжести и силы тяготения.

Вариант 2

Для исследования внутреннего строения Земли используют различные методы. Перечислите эти методы и дайте им сравнительную характеристику.

Вариант 3

Опишите сущность радиоизотопного метода определения абсолютного возраста горных пород?

Вариант 4

Земной магнетизм обусловлен действием постоянных источников, расположенных внутри Земли и испытывающих лишь медленные вековые изменения (вариации) и

внешних (переменных) источников, расположенных в магнитосфере Земли и ионосфере. Что это за источники геомагнитного поля и почему различают основное (главное ~99%) и переменное (~1%) геомагнитные поля?

Вариант 5

Для исследования внутреннего строения Земли используют различные методы. Перечислите эти методы и дайте им сравнительную характеристику.

Вариант 6

Земля несет на себе отрицательный электрический заряд. Откуда и как берется этот на Земле этот заряд? Какие сопутствующие явления имеют место при образовании электрического заряда Земли?

Вариант 7

С какой линейной скоростью (в метрах в секунду) движется Екатеринбург, широта которого $56^{\circ} 51'$.

Вариант 8

Если Землю представить глобусом с диаметром в 3 м, как выразится тогда сжатие Земли?

Вариант 9

О глубинном строении Земли судят по продольным и поперечным сейсмическим волнам, которые, распространяясь внутри Земли, испытывают преломление, отражение и затухание, что свидетельствует о расслоенности Земли. Сформулируйте основные законы, описывающие указанные процессы.

Вариант 10

Тепловой поток в точке поверхности Земли составляет 0.071 Вт/м^2 . Какой тепловой поток поступает с поверхности мантии, если коэффициент теплопроводности пород земной коры здесь составляет в среднем 2.5 Вт/(мК) , а её мощность — 40 км ? Температурный градиент $-2^{\circ}/100 \text{ м}$.

Вариант 11

Для того чтобы стрелка компаса, устанавливаясь в плоскости магнитного меридиана, находилась в то же время в горизонтальном состоянии, на южную или северную часть стрелки прикрепляют уравнивающий груз. С какой стороны необходимо прикрепить груз к стрелке компаса в двух исследуемых точках (долгота 0° , широта 20 и широта -40)? В какую сторону (к центру или от центра стрелки) необходимо переместить груз для пользования в настоящем году, если последний раз компасом пользовались в 1975 году?

Вариант 12

Охарактеризуйте карты элементов геомагнитного поля (Z, H, T, dT, dH, dZ) эпохи 2015 года.

Вариант 13

Считая скорость изменения элементов геомагнитного поля постоянной с 1975 года, определите значения элементов магнитного поля для текущего года. Начертите в плоскости магнитного меридиана полный вектор геомагнитного поля T , его горизонтальную (H) и вертикальную (Z) составляющие. Покажите на построенной векторной диаграмме наклонение I . В чем принципиально отличаются векторные диаграммы геомагнитного поля в северных и южных широтах?

Вариант 14

Рассчитайте энергию, выделяющуюся в Земле за счёт радиоактивного распада в течение года. Русский учёный В.И. Вернадский считал радиогенную энергию основной для эволюции Земли. Прав ли он, если Земля ежегодно излучает в космическое пространство порядка $9,2 \cdot 10^{20}$ Дж, а потери её на тектоно-магматические процессы составляют около $1,26 \cdot 10^{20}$ Дж/год?

Вариант 15

Определите энергию приливного торможения Земли, выделившуюся за период её жизни, если угловая скорость вращения Земли за это время уменьшилась в 2 раза. За счёт чего происходит замедление вращения Земли?

Вариант 16

Оцените среднюю плотность слоев Земли: земной коры, мантии и ядра. Сравните со средней плотностью вещества Земли. Плотности каких минералов они соответствуют? Предложите состав ядра.

2. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

Контрольная работа является индивидуальной самостоятельно выполненной работой студента.

Контрольная работа должна содержать следующие структурные элементы:

1. титульный лист;
2. содержание;
3. ответы на контрольные вопросы;
4. список использованных источников;
5. приложения (при необходимости).

Количество источников в списке определяется студентом самостоятельно, рекомендуемое количество от 5 до 10. При этом в списке обязательно должны присутствовать источники, изданные в последние 5 лет.

2.1 Оформление контрольной работы

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

- текст располагается на одной стороне листа белой бумаги формата А-4;
- размер шрифта - 14 Times New Roman, цвет – черный;
- междустрочный интервал – полуторный;
- поля на странице – размер левого поля – 2 см, правого – 1 см, верхнего - 2 см, нижнего – 2 см;
- текст должен быть отформатирован по ширине листа;
- на первой странице необходимо изложить план (содержание) реферата;
- в конце работы необходимо указать источники использованной литературы.

Список использованных источников должен формироваться в алфавитном порядке по фамилии авторов.

Включенная в список литература нумеруется сплошным порядком от первого до последнего названия. По каждому литературному источнику указывается: автор (или группа авторов), полное название книги или статьи, место и наименование издательства (для книг и брошюр), год издания; для журнальных статей указывается наименование журнала, год выпуска и номер. По сборникам трудов (статей) указывается автор статьи, ее название и далее название книги (сборника) и ее выходные данные. На использованные источники в тексте работы должны быть ссылки

2.2 Критерии оценки контрольной работы

Срок сдачи готовой контрольной работы определяется утвержденным графиком. В случае отрицательного заключения преподавателя студент обязан доработать или переработать контрольную работу. Срок доработки контрольной работы устанавливается преподавателем с учетом сущности замечаний и объема необходимой доработки.

Контрольная работа оценивается по системе:

Оценка "отлично" выставляется за контрольную работу, которая носит исследовательский характер, содержит грамотно изложенный материал, с соответствующими обоснованными выводами.

Оценка "хорошо" выставляется за грамотно выполненную во всех отношениях контрольную работу при наличии небольших недочетов в его содержании или оформлении.

Оценка "удовлетворительно" выставляется за контрольную работу, которая удовлетворяет всем предъявляемым требованиям, но отличается поверхностностью, в ней просматривается непоследовательность изложения материала, представлены необоснованные выводы.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется за контрольную работу, которая не носит исследовательского характера, не содержит анализа источников и подходов по выбранной теме, выводы носят декларативный характер.

Обучающийся, не представивший в установленный срок готовую контрольную работу, которая была оценена на «неудовлетворительно», считается имеющим академическую задолженность и не допускается к сдаче экзамена или зачета.

3. Составление глоссария

Выполнить подбор и систематизации терминов, непонятных слов и выражений, встречающихся при выполнении контрольной работы. Расположить после основной части контрольной работы название и значение терминов, слов и понятий в алфавитном порядке.

Роль студента: прочитать материал источника, выбрать главные термины, непонятные слова; подобрать к ним и записать основные определения или расшифровку понятий; критически осмыслить подобранные определения и попытаться их модифицировать (упростить в плане устранения избыточности и повторений).

4.Рекомендуемая литературы для выполнения контрольной работы

Основная литература

1. Магницкий В.А. Внутреннее строение и физика Земли / В.А.Магницкий. - М. : Недра, 2006 - 390 с Гаврилов В.П. Физика Земли: учебник для вузов.М.: Недра – Бизнесцентр, 2008. – 287 с.
2. Павлов А. Н. Геофизика. Общий курс о природе Земли: Учебник / Павлов А. Н. - Санкт-Петербург: Российский государственный гидро-метеорологический университет,2006, ISBN 5-86813-175-4.-454. <http://www.iprbookshop.ru/12484>
3. Алексеев А. С. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли/ Алексеев А. С.- Новосибирск: Сибирское отделение РАН,2010, ISBN 978-5-7692-1135-5.-310 <http://www.iprbookshop.ru/15806>

Дополнительная литература

1. Орленок В. В. Глобальный вулканизм и океанизация Земли и планет: Монография / Орленок В. В.- Калининград:Российский государственный университет им. Иммануила Канта,2010, ISBN 978-5-9971- 0022-3.-196. <http://www.iprbookshop.ru/7358>
2. Павлов А. Н. Геофизика. Тема 3 Физические модели Земли. Тема 4 Геофизические поля: Конспект лекций / Павлов А. Н. - Санкт-Петербург: Российский государственный гидро- метеорологический университет, 2004.-69. <http://www.iprbookshop.ru/17906>
3. Авсюк Ю.Н. Приливные силы и природные процессы. М.: ОИФЗ РАН, 1996, 188 с.
4. Моги К. Предсказание землетрясений / Пер. с англ. М.: Мир, 1988, 382 с.
5. Моисеенко У.И., Смыслов А.А. Температура земных недр. Л.: Недра, 1986, 180 с.
6. Орленок В.В. Физика и динамика внешних геосфер. М.: Недра, 1985, 183 с.
7. Паркинсон У. Введение в геомагнетизм / Пер. с англ. М.: Мир, 1986, 528 с.

Единое окно доступа к образовательным ресурсам - Режим доступа: <http://window.edu.ru>

Составитель: _____ Л.А. Болотнова, доцент, к.г.-м.н.
подпись

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
С. М. Упоров



МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ФИЗИКА ГОРНЫХ ПОРОД»

специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

год набора: 2021

Автор: Земцов Н.С. к.г.-м.н.

Одобен на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 05.10. 2020

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Бондарев В. И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 8 от 13.10. 2020

(Дата)

Екатеринбург
2020

Петрофизика-это одна из наук о Земле, изучающая физические свойства минералов, горных пород и руд. Целью изучения петрофизических характеристик является установление состава, структуры и состояния пород, особенностей дифференциации физических свойств горных пород, околорудных зон и полезных ископаемых при решении задач поисков и разведки МШИ, геологического картирования, геотектоники, геодинамики, инженерной геологии геологии.

Петрофизические исследования позволяют обосновать возможность применения отдельных геофизических методов и комплекса геофизических исследований. Наряду с этим петрофизика позволяет решать широкий класс задач прикладного и теоретического характера, от изучения состава и генезиса рудных и акцессорных минералов (магнитная минералогия, петрофизика полупроводниковых минералов) до опробования полезных ископаемых (скважинная и шахтная геофизика), от стратиграфии осадочных комплексов (палеомагнитология) до прогнозирования состояния вещества в глубинных частях Земли (экспериментальная и теоретическая петрофизика).

Современная петрофизика изучает широкий спектр Физических свойств минералов, горных пород и полезных ископаемых: коллекторские (пористость, проницаемость, влажность, влагоемкость, нефте- и газонасыщенность), плотностные, магнитные (магнитная восприимчивость, остаточная намагниченность, температура Кюри), электрические (Удельное сопротивление, диэлектрическая проницаемость, вызванная поляризация, диффузионно-адсорбционная активность, терма—ЭДС), тепловые (теплоемкость, теплопровод—ность), ядернофизические (естественная радиоактивность, сечения взаимодействия и параметры переноса излучений), упругие (упругие модули, скорости распространения упругих волн).

Курс петрофизики в УГГГА читается на 5 семестре, опережая или параллельно с основными методами разведочной геофизики. Малый объем часов (около 40 лекционных) не позволяет подробно изложить все традиционные разделы петрофизики, обычно рассматриваемые в учебниках. Поэтому автор рассматривает физические свойства, лежащие в основе гравirazведки, магниторазведки, электроразведки,

сейсморазведки. Главное внимание уделяется факторам, определяющим петрофизические характеристики горных пород, связям физических свойств с петрографическими характеристиками. Петрофизические модели месторождений полезных ископаемых рассмотрены на отдельных примерах, методики и аппаратура петрофизических исследований вынесены на лабораторный практикум и учебно-методическую практику,

1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Когда ставится задача изучения каких—либо физических свойств

(например, плотности или магнитной восприимчивости) массива магматических или определенного горизонта осадочных горных пород, то из этих объектов (обнажении, горных выработок, керна буровых скважин) отбирается некоторое количество образцов, у которых измеряются соответствующие Физические характеристики. При этом оказывается, что измеренные значения у разных образцов различны.

Эти различия не связаны с погрешностями измерений, а есть результат вариаций физических свойств изученных образцов, т.е. следствие неоднородности объекта исследования. Дело в том, что формирование горных пород (и соответственно их физических свойств)

происходит под воздействием большого числа факторов внутренних и внешних. Например, при образовании массивов магматических пород состав и структура будут определяться такими главными факторами:

- 1.Изменением глубины кристаллизации расплава.
- 2.Неоднородностью распределения давления и температуры в пределах магматического тела.
- 3.Фракционной и гравитационной дифференциацией.
- 4.Перемешиванием расплава.
- 5.Взаимодействием магмы с вмещающими породами различного состава.

Каждый из перечисленных факторов в свою очередь является сложной функцией от координат и времени. Результатом будет неоднородность состава, размера зерен, структуры и текстуры в пределах массива и как следствие, неоднородность физических свойств. Многообразие действующих факторов, их неопределенность во времени и пространстве позволяют рассматривать их как случайные события, а физические свойства — как случайные величины, к которым может быть применен аппарат математической статистики.

При образовании осадочных (например, обломочных) пород главными факторами являются:

1. Вещественный состав пород источника сноса, характер и степень их выветривания

2. Удаленность бассейна осадконакопления, глубина его, гидродинамические характеристики.

3. Химический состав и степень минерализации вод, окислительно-восстановительный потенциал, РН и т.д.

В процессе Формирования породы эти факторы изменяются в связи с изменениями источников сноса, глубин, гидродинамических и гидрохимических условий, что приводит к изменениям состава обломков, размеров и степени отсортированности зерен, количества и типа цемента и т.д. Возникает первичная неоднородность физических свойств.

На первичную неоднородность может накладываться вторичная, связанная с процессами преобразования: выветриванием, трещиноватостью, метаморфизмом, привносом и выносом вещества и т.д.

Учитывая, что студентам будет читаться специальный курс "Теоретические основы обработки результатов геофизических измерений", ниже приводятся только самые элементарные сведения по статистической обработке результатов изучения физических свойств горных пород, необходимые для понимания последующих разделов.

Предположим, что мы имеем М измерений некоторого физического параметра X, среди которых присутствуют максимальное X_{max} и минимальное X_{min} значения. Разобьем весь диапазон измеренных значений на n интервалов с шириной каждого ΔX :

$$\Delta X = (X_{max} - X_{min})/n, \quad (1.1)$$

Количество интервалов n связано с объемом выборки N и обычно определяется формулой Старджеса:

$$n = 3.3 * \lg N + 1$$

где n округляется до целого числа.

Подсчитаем N_i - число измерений, параметр X которых попадает в i-й интервал ($i=1, 2, \dots, n$). Строится график зависимости N_i или $(N_i/N) * 100\%$ от X. В каждом интервале рассчитанное значение изображается в виде отрезка горизонтальной линии (гистограмма). На рисунке 1.1 приведен пример гистограммы для $N=40$, $n=5$.

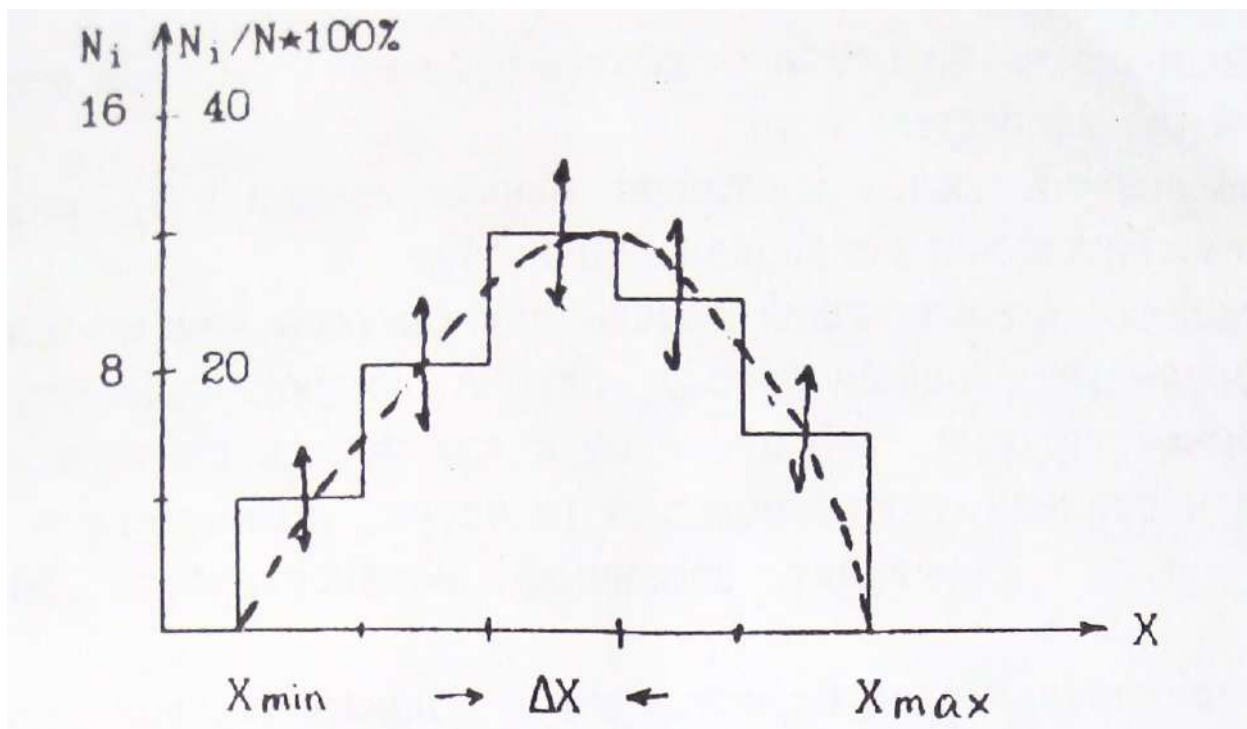


Рис.1.1. Гистограмма распределения параметра X

Гистограмма содержит в себе все статистические характеристики объекта исследования. В частности, величина $(N_i/N) \cdot 100\%$ представляет вероятность (в %) для данного объекта существования значения параметра X в пределах 1-го интервала. При построении реальных гистограмм не следует абсолютизировать полученный результат. Дело в том, что мы всегда имеем дело с ограниченными выборками и каждое значение N_i получено с погрешностью, вероятное значение которой приближенно оценивается как $\pm\sqrt{N_i}$ (на рис. показано стрелками).

При неограниченном возрастании объема выборки ($N \rightarrow \infty$), число интервалов (n) также стремится к бесконечности, а ширина интервала (ΔX) к нулю и мы получаем непрерывную кривую распределения, КОТОРУЮ часто называют вариационной кривой. Приближенно вариационную кривую можно получить путем визуального сглаживания гистограммы таким образом, чтобы площади между осью абсцисс и гистограммой и осью абсцисс и вариационной кривой были равны (изображено пунктирной линией).

Опыт Изучения физических свойств показывает, что часто распределения их подчиняется двум законам: нормальному и логнормальному — ПРИ нормальном законе кривая распределения $P(X)$ описывается выражением:

$$F(X) = \frac{\exp\left[-\frac{(X_K - MX)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad (1.2)$$

где MX —мода параметра или значение его в максимуме распределения (для нормального закона совпадает со средним значением параметра:

$$MX = \bar{X} = \frac{\sum X_k}{N} \quad k=(1,2...N).$$

σ —среднеквадратичное отклонение (σ^2 —называют стандартом).

Нормальному закону подчиняется обычно распределение плотности, пористости, скорости продольных волн. На рис.1.2 приведен пример нормального распределения с двумя различными значениями стандарта.

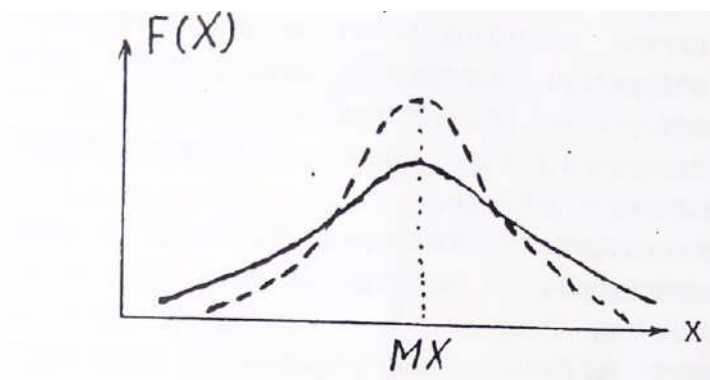


Рис.1.2. Нормальное распределение параметра X

Кривая характеризуется симметрией относительно моды и полностью определяется двумя величинами MX и σ . Логнормальный закон соответствует случаю, когда нормальному закону подчиняется логарифм параметра ($\log X$). Этому закону обычно подчиняется распределение магнитной восприимчивости, удельного электрического сопротивления, нефтенасыщенности. Для практического построения гистограмм или вариационных кривых в предположении существования лог-нормального закона измеренным значениям X_k вычисляются значения $\log X_k$, которые обрабатываются способом, описанным выше.

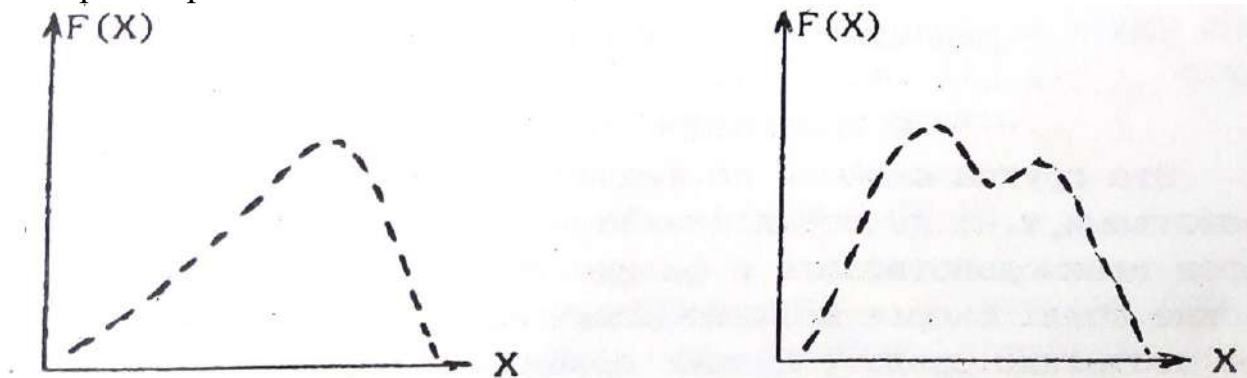


Рис.1.3.Примеры реальных кривых распределения

Реальные кривые распределения часто отличаются от теоретических. Они могут быть асимметричными и даже иметь два и более максимумов (рис. 1.3).

В первом случае появляются новые характеристики распределения (одна или более), например параметр асимметрии. В любом случае выборки считаются статистически одинаковыми, если все (!) статистические параметры их одинаковы. Асимметрия обычно связана со вторичными процессами изменения физических свойств в результате выветривания, регионального или локального метаморфизма и т.д.

Второй случай свидетельствует о неоднородности выборки; в одну группу объединены различные по каким—либо характеристикам породы (возраст, условия образования, минеральный состав, структура, степень изменения и т.д.). Необходимы дополнительные исследования для разделения выборки.

Важным следствием из изложенного является то, что все петрофизические зависимости не функциональные, а статистические, то есть выполняются в среднем с определенной вероятностью отклонения от среднего. Пример такой зависимости приведен на рис.1.4.

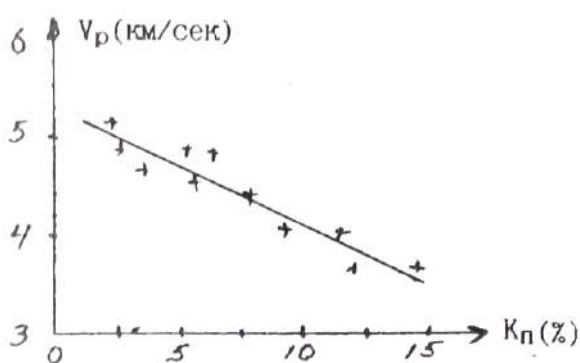


Рис.1.4. Зависимость скорости продольных волн (V_p) от коэффициента пористости (K_n)(+ - экспериментальные значения)

2.КОЛЛЕКТОРСКИЕ СВОЙСТВА

Эта группа свойств не является в строгом смысле физическими свойствами, т.к. непосредственно не определяет способности горных

пород взаимодействовать с физическими полями или создавать физические поля. Скорее коллекторские свойства характеризуют физическое состояние среды. В тоже время коллекторские свойства влияют на другие Физические свойства (плотностные, электрические. Упругие) и определяют корреляционные связи между ними. С другой стороны,

коллекторские свойства, такие как пористость, проницаемость. водо-, нефте- и газонасщенность. это важнейшие характеристики решенных месторождений углеводородов и подземных вод, определяющие запасы и условия эксплуатации этих месторождений сведения о коллекторских свойствах могут быть получены через плотностные, электрические и упругие свойства. Поэтому коллекторские свойства рассматриваются во всех учебниках и курсах петрофизики.

2. 1. ПОРИСТОСТЬ

Пористостью называется совокупность пространства в горной породе, не занятого твердой фазой. Оно заполнено газами, жидкостями (вода, нефть) или их смесями. Количественно пористость выражают через коэффициенты пористости K : отношение объема пор ($V_{\text{пор}}$) к объему горной породы ($V_{\text{г.п.}}$) в процентах. Общий объем горной породы равен сумме объемов пор и твердой фазы ($V_{\text{г.п.}} = V_{\text{пор}} + V_{\text{т.ф.}}$). При всем этом выделяют:

а) Коэффициент общей пористости ($K_{\text{п}}$) — отношение объема всех пор ($V_{\text{пор}}$) к объему породы:

$$K_{\text{п}} = (V_{\text{пор}}/V_{\text{г.п.}}) * 100\%, (2.1)$$

б) Коэффициент открытой пористости ($K_{\text{п.о}}$) .- отношение объема открытых пор ($V_{\text{о.пор}}$) к объему породы:

$$K_{\text{п.о.}} = (V_{\text{о.пор}}/V_{\text{г.п.}}) * 100\%. (2.2)$$

Открытыми порами называются поры, сообщающиеся между собой.

в) Коэффициент динамической пористости ($K_{\text{п.д}}$) - отношение

объема динамических пор ($V_{\text{д.пор}}$) к объему породы.

$$K_{\text{п.д}} = (V_{\text{д.пор}}/V_{\text{г.п.}}) * 100\%. (2. 3)$$

динамическими порами называются поры, по которым происходит движение жидкостей или газов при наличии градиента-давления. Часть открытых пор может быть представлена тупиковыми порами или водой, прочно связанной с поверхностью твердой фазы, и не участвует в переносе жидкостей или газов. Очевидно, что $K_p > K_{п.о}$ $K_{п.д}$.

2.1.1. Классификация пор.

1) По происхождению поры подразделяются на первичные и вторичные. Первичные возникают при образовании породы и представлены структурными порами — промежутками между частицами обломочных „о-род (грубообломочных, песчанистых, алевроитовых, глинистых), межкристаллическими промежутками магматических и метаморфических пород и т. д. При уплотнении цементации, перекристаллизации, метаморфизме форма и размеры первичных пор могут меняться. Вторичные поры образуются при последующих воздействиях на породы процессов выветривания, выщелачивания, кристаллизации, тектонических нагрузок и т.д.

2) По форме поры могут быть близкими к **ромбоздальным** (рыхлые отсортированные обломочные осадочные породы), близкими к **тетраэдрическим** (те же, но уплотненные породы), **щелевидным** (порода состоит из пластинчатых минералов: слюды, глины), в виде **канальцев** переменного сечения (плохо отсортированные обломочные породы), **трещеновидные** (магматические, метаморфические, плотные осадочные породы, испытавшие воздействие сильных тектонических нагрузок), **каверновидные** (карбонатные породы, подвергшиеся процессам растворения и выщелачивания), **пузырчатые** (магматические породы), **ячеистые** (известковые и кремнистые туфы), **каналовидные** (лёссы).

3) По размерам выделяют а) **сверхкапиллярные** - эффективный (средний) диаметр сечения пор $d_{э.ф.}$ более 0,1 мм. (грубообломочные породы типа галечников и гравия, крупно— и среднезернистые пески, оолитовые известняки, выщелоченные карбонаты). В сверхкапиллярных порах доля воды, связанной с поверхностью твердой фазы, не велика, вода в основном свободная и перемещается по законам гидродинамики. б) Капиллярные - эффективный диаметр пор $d_{э.ф.}$ $1 \cdot 10^{-4}$ - $1 \cdot 10^{-1}$ мм. (мелкозернистые, менее отсортированные, сцементированные пороли: мелкозернистые пески и песчаники, некоторые карбонатные породы)-

В **Капиллярных** порах более высокое содержание связанной воды И возможен ее подъем в силу поверхностного натяжения. в) **Субкапиллярные** - $d_{з.ф.} < 1 \cdot 10^{-4}$ мм. (глины, микрокристаллические известняки, туфы). Практически вся вода перового пространства связана на поверхности твердой фазы, перемещения воды почти нет.

2.1.2. ПОРИСТОСТЬ ОБЛОМОЧНЫХ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

Основными факторами определяющими пористость обломочных пород являются: 1) форма и размер обломков, 2) степень отсортированности 3) степень уплотнения и цементации.

1) Влияние Формы и размера частиц иллюстрируется таблицей, в которой приведены значения K_p (%) для искусственных пород:

Таблица 1

Размер частиц (мм.)	Кварц окатанный	Кварц остроуг.	Ортоклаз остроуг.	Слюда
2-1	33	38	45	80
0.5-0.25	33	41	49	72
0.1-0.06	39	45	52	68

Отмечается малое влияние размера частиц и существенно большее формы (пористость возрастает в 2-2.5 раза при переходе от изометричных зерен к пластинчатым).

2) Степень отсортированности характеризует распределение обломков по размерам и количественно выражается через коэффициент отсортированности G_f :

$$G_f = \frac{d_{cp} - \sum V_i \delta d_i}{d_{cp}}, \quad (2.4)$$

где V_i — объемное содержание частиц диаметра d_i в породе,

δd_i — отклонение от среднего диаметра 1-й группы, '

d_{cp} — средний диаметр частиц.

Коэффициент отсортированности меняется от 1 (хорошо отсортированная порода, все частицы одного размера) до 0 (плохо отсортированная порода, размеры частиц равномерно распределены от 0 до d_{max}).

присутствие в породе частиц разного размера приводит к тому, что мелкие частицы заполняют промежутки между крупными и уменьшение коэффициента G_f (ухудшение отсортированности) ведет к уменьшению коэффициента пористости.

На рис.2.1 приведен пример такой зависимости.

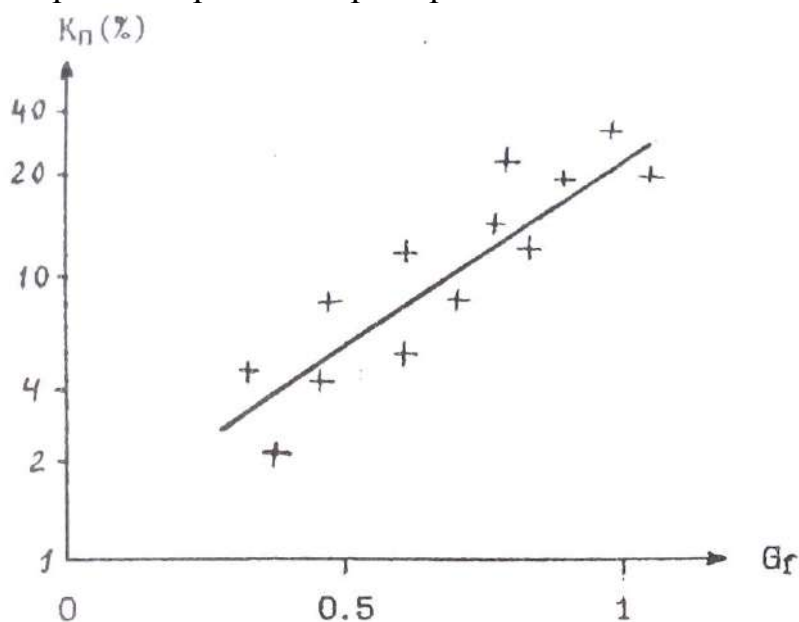


Рис.2.1. Зависимость коэффициента пористости от коэффициента отсортированности песчаников и алевролитов Туймазинской площади

Изменение отсортированности может приводить к изменению пористости на порядок. В связи с этим интересно рассмотреть изменение пористости песчано—глинистых образований в зависимости от состава (рис.2,2). . '

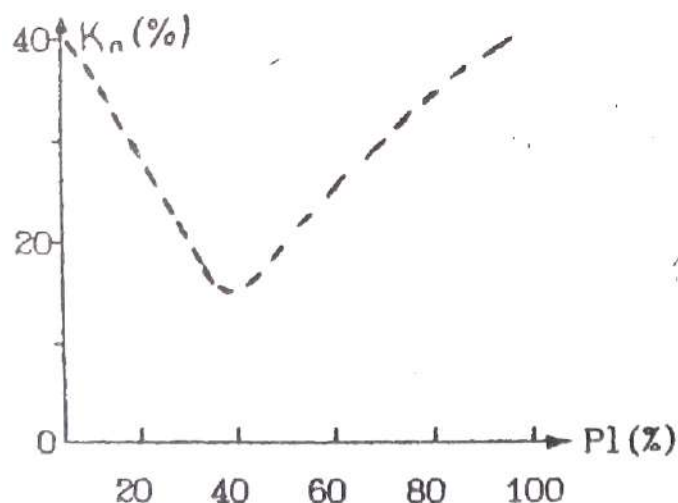


Рис.2.2. Зависимость коэффициента пористости от глинистости (P_l) песчано—глинистых отложений (теоретическая зависимость)

Положим, что песчаная и глинистая фракции представлены однородными по размерам частицами каждая (песчаная крупными, глинистая мелкими). Коэффициенты пористости каждой фракции около 40%. При увеличении глинистости (P_l) в породе будет происходить уменьшение пористости в результате частичного заполнения глинистыми частицами промежутков между крупным песчинками. При достижении 40% глинистости все эти промежутки (поры) будут заполнены глинистым материалом (минимальная отсортированность), а K_p равен $0.4 \cdot 0.4 = 0.16$ (16%). При дальнейшем увеличении глинистости отсортированность и коэффициент пористости будут возрастать.

3) Под действием нагрузки вышележащих пород первичные рыхлые осадки уплотняются, что приводит к уменьшению их пористости. В начале уплотнение связано с перемещением отдельных частиц и более компактным их взаимным расположением. Затем происходит частичное разрушение и сшивание обломков (ухудшение отсортированности). Этот процесс идет при нагрузках, превышающих несколько тысяч кг/см². Наиболее сильно уплотняются глины, коэффициент пористости которых под нагрузкой может меняться от 50% до 5%. В результате для многих районов, сложенных обломочными породами, наблюдается корреляционная связь K_p и глубины залегания породы:

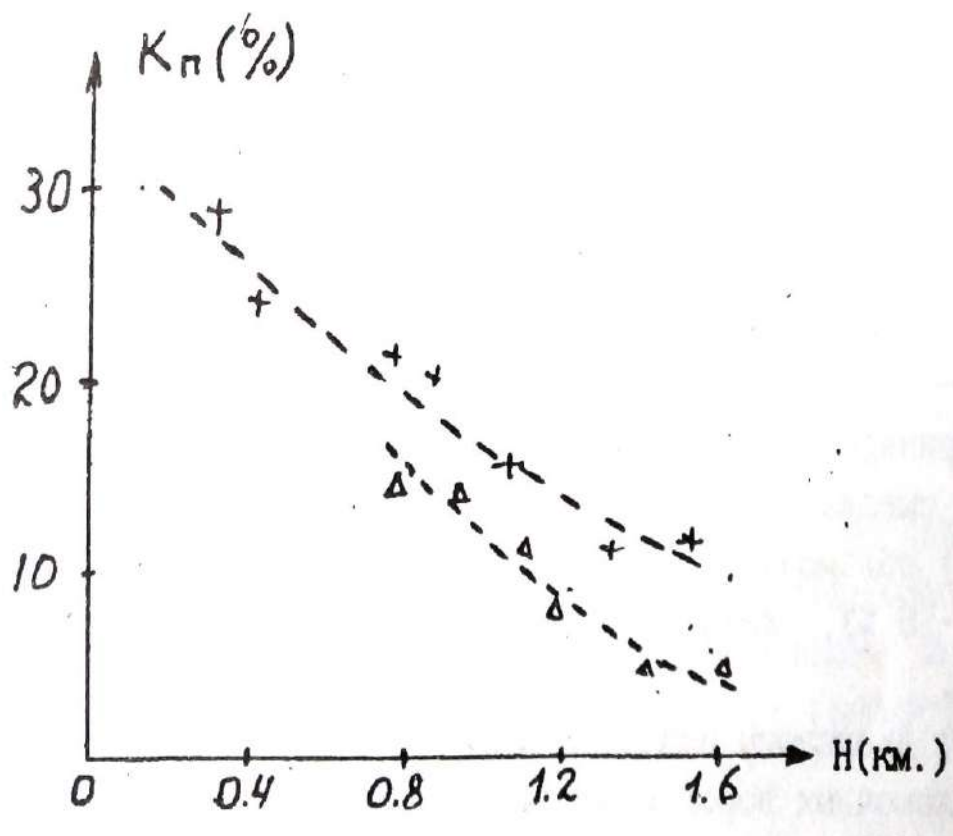


Рис.2,3. Зависимость K_p от глубины залегания H ;
 + - глины, Δ - алевролиты

$$K_p(H) = K_p(0) * \exp(-\beta H), (2.5)$$

где $K_p(0)$ — коэффициент пористости вблизи поверхности,
 β - константа, зависящая от типа отложений ($\beta=0.05$).

Уравнения типа (2.5) позволяют прогнозировать изменения пористости с глубиной, что очень важно при интерпретации результатов геофизических съемок, т.к. величина пористости определяет ряд других физических свойств: плотность, удельное электрическое сопротивление, скорость упругих волн.

Процесс цементации заключается в выпадении вторичных минералов (карбонаты, опал, глинистые минералы и т.д.) в поровом пространстве из поровых вод. В результате пористость уменьшается вплоть до нескольких процентов.

В заключение приведем данные по пористости некоторых типов обломочных пород.

Таблица 2

Порода	$K_p(\%)$	
	Пределы	Наиболее вероятные

Пески	5-55	20-35
Песчаники	0.5-40	5-30
Лессы	40-55	40-55
Алевролиты	1-40	3-25
Глины	1-75	20-50
Аргиллиты	1-30	1.5-15

Приведенные в таблице данные позволяют сделать следующие основные выводы:

1) обломочные породы обычно характеризуются средней ($K_p=10-15\%$), повышенной ($K_p=15-20\%$) и высокой ($K_p>20\%$) пористостью.

2) диапазоны значений коэффициентов пористости различных типов обломочных пород в значительной степени перекрываются. Следует подчеркнуть, что данные таб.2 обобщают сведения о пористости пород всей страны в целом. В конкретных районах, у конкретных пластов диапазон колебания K_p может быть существенно уже. Например,

пласты – коллекторы AB_{2-5} одного из нефтяных районов Тюменской области имеют $K_p=20-30\%$

2.1.3. ПОРИСТОСТЬ КАРБОНАТНЫХ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

первичные карбонатные осадки (известковые и доломитовые илы) имеют высокую пористость ($K_p=60-80\%$). По мере их уплотнения пористость резко уменьшается ($K_p=0.5—15\%$). В дальнейшем появляется вторичная пористость, обусловленная перекристаллизацией, трещиноватостью и выщелачиванием карбонатных пород. Характерная особенность карбонатных пород - неравномерность распределения пористости в пространстве. Поэтому, при изучение карбонатных коллекторов необходимо отбирать - большое количество образцов с различных интервалов по глубине и площади. Значения пористости основных типов карбонатных пород приведены в таблице 3.

Таблица 3

Порода	$K_p(\%)$	
	пределы	Наиболее вероятные
Известковый ил	65-85	-

Известняки	0.5-48	1.5-15
Известковый туф	20-30	-
Мел	10-55	40-50
Доломиты	0.1-37	3-20

2. 1.4 ПОРИСТОСТЬ ГИДРОХИМИЧЕСКИХ ОСАДОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД.

В отличие от двух предыдущих групп пород, гидрохимические

осадки характеризуются пониженными и низкими значениями коэффициентов пористости. Так у ангидритов $K_p=0.2—15\%$ у гипсов 1-25 %,

У каменной соли 0-5 %.

2.1.5 ПОРИСТОСТЬ МАГМАТИЧЕСКИХ И МЕТАМОРФИЧЕСКИХ ГОРНЫХ ПОРОД

Для этой категории пород характерна низкая пористость. Исключение составляют кайнотипные эффузивы, которые в силу особенности образования (быстрое остывание, не полный отход летучих компонент), могут иметь повышенную и высокую пористость. Таблица 4 иллюстрирует значения коэффициента общей пористости магматических и метаморфических пород.

Таблица 4

Порода	Кп(%)
	Пределы
Граниты	0.3-4
Габбро	0.3-3
Пироксенит	0.2-2
Базальт	0.5-40
Диабаз	0.2-3
Порфирит	0.4-6
Гнейс	0.2-6

Сланец хлорит.	0.2-1
Амфиболит	0.1-6

данные относятся к невыветрелым породам. В процессе выветривания пористость возрастает (образование вторичной пористости) и может достигать 20 - 40 %.

Другая особенность данной группы пород состоит в существенном преобладании закрытой пористости над открытой.

2.1.6 ПОРИСТОСТЬ ГИДРОТЕРМАЛЬНО ИЗМЕНЕННЫХ ПОРОД

К гидротермально измененным породам приурочены месторождения рудных полезных ископаемых. Многочисленные исследования показали, что зоны развития этих пород характеризуются повышенными значениями пористости по сравнению с неизмененными породами. Вероятно это связано с тем, что гидротермальные растворы могут перемещаться в средах с повышенной пористостью и проницаемостью. Таким образом, зоны повышенной пористости являются своеобразным индикатором

гидротермальных процессов и, косвенно, признаком оруденения.

На рисунке 2.4 приведен пример распределения пористости в районе медноколчеданного оруденения.

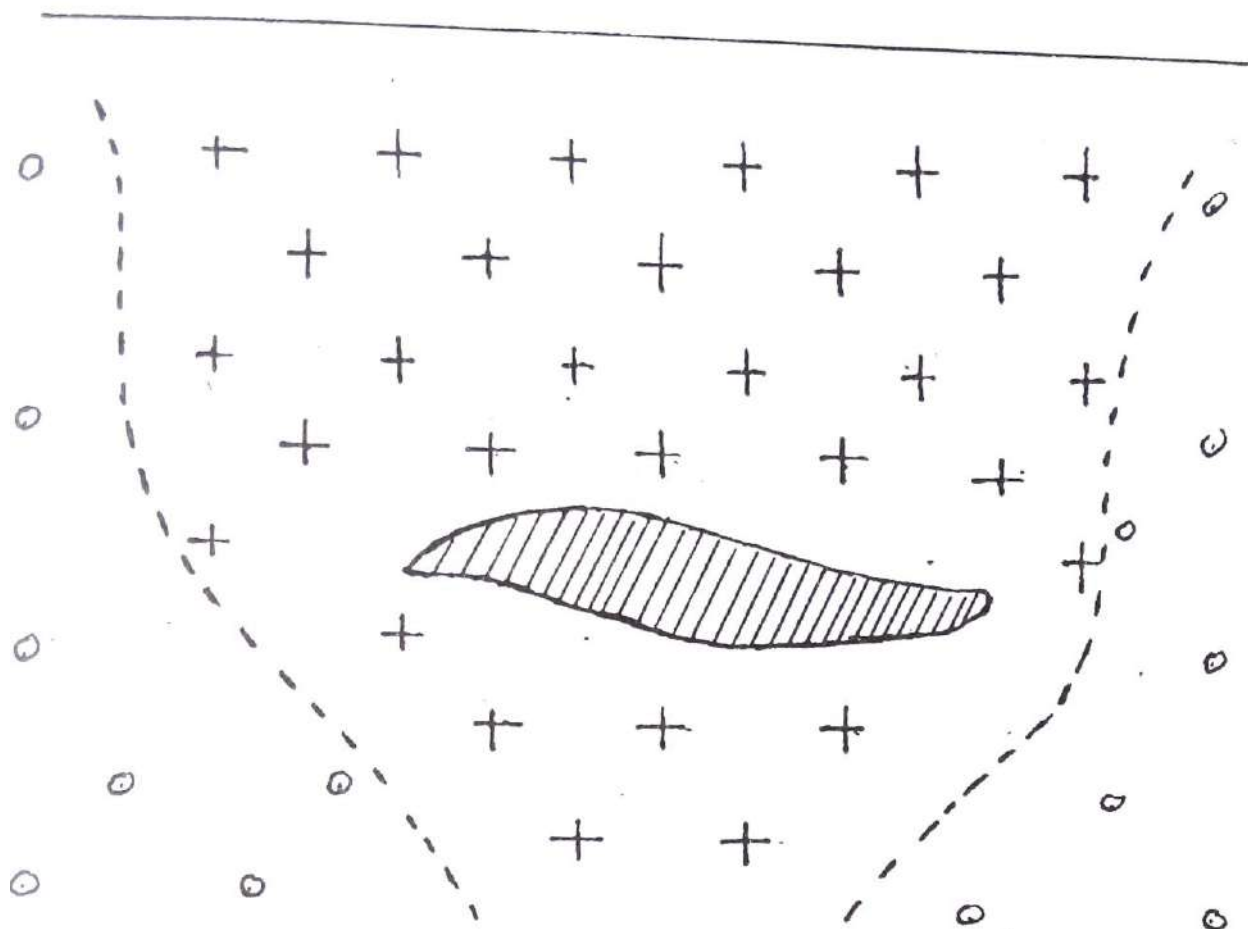


Рис.2.4. Распределение коэффициента открытой пористости на месторождении Аabei-Саз (Башкирия)

-  -рудное тело
-  -Кп.о=0.5-3 %
-  -Кп.о<0.2%

2.2. ВЛАЖНОСТЬ. ВЛАГОЕМКОСТЬ

Влажность определяется, как количество воды в горной породе, а **влагоемкость**, как способность горной породы удерживать воду. Вода в горных породах может присутствовать в различных видах:

а) **Прочно связанная вода** - слои воды толщиной в несколько молекул. непосредственно примыкающий к стенке порового канала. Эта вода силами Ван-дер—Ваальса прочно связана с твердой фазой породы, Не может перемешаться, обладает аномальными физическими свойствами

(плотность до 2 г/см³, температура замерзания до -78 С°, повышенная вязкость, плохая растворимость солей).

б) **Рыхло связанная вода** - непосредственно примыкает к слою прочно связанной воды, менее прочно связана с твердой фазой. В частности, образуется в углах пор в силу поверхностного натяжения (стыковая вода). Толщина слоя рыхло связанной воды составляет десятки и более молекул, она имеет повышенную плотность и пониженную температуру замерзания.

в) **Свободная вода** - обычная вода, которая свободно перемещается в поровом пространстве по законам гидродинамики.

Выделяют несколько типов влагоемкости:

а) **Машинальная гигроскопическая влагоемкость** ($W_{\text{мг}}$) - максимальное количество парообразной влаги (в процентах к весу абсолютно сухой породы), которое способна поглотить порода из воздуха влажностью 94%. Эта влагоемкость включает в себя прочно связанную и часть рыхло связанной воды.

б) **Капиллярная влагоемкость** — полное количество воды, которое присутствует в породе в силу явления капиллярного подъема.

в) **Полная влагоемкость** - максимальное количество связанной и свободной воды, которое может присутствовать в горной породе.

Соотношение между связанной и свободной водой при полном заполнении порового пространства определяется сечением поровых каналов и составом твердой фазы породы. Относительное количество свободной воды уменьшается с уменьшением сечения пор и увеличением содержания глинистых минералов. В случае чистых глин в порах присутствует только связанная вода, а в грубообломочных породах (галечники, крупнозернистые пески) почти вся вода представлена свободной.

Двойной электрический слой.

Поверхность твердой фазы порового пространства адсорбирует ионы одного знака из поровых растворов. Эти ионы удерживаются на ней силами Ван—дер—Ваальса, создавая слой не компенсированных зарядов (слой потенциал-определяющих ионов). В результате электростатического взаимодействия из порового раствора к нему будут притягиваться ионы противоположного знака (слой противоионов), что в совокупности создает двойной электрический слой. Противоионы образуют сложную пространственную структуру. На расстоянии порядка размера молекулы противоионы прочно удерживаются силами электростатического взаимодействия и не могут перемещаться, образуя плотную часть двойного слоя. Дальше от поверхности твердой

фазы их концентрация убывает и они не столь сильно связаны с потенциал-определяющим слоем. Эта область называется диффузионной частью двойного слоя и может перемещаться при движении жидкости в поровом пространстве примерная структура двойного слоя приведена на рис. 2.5.

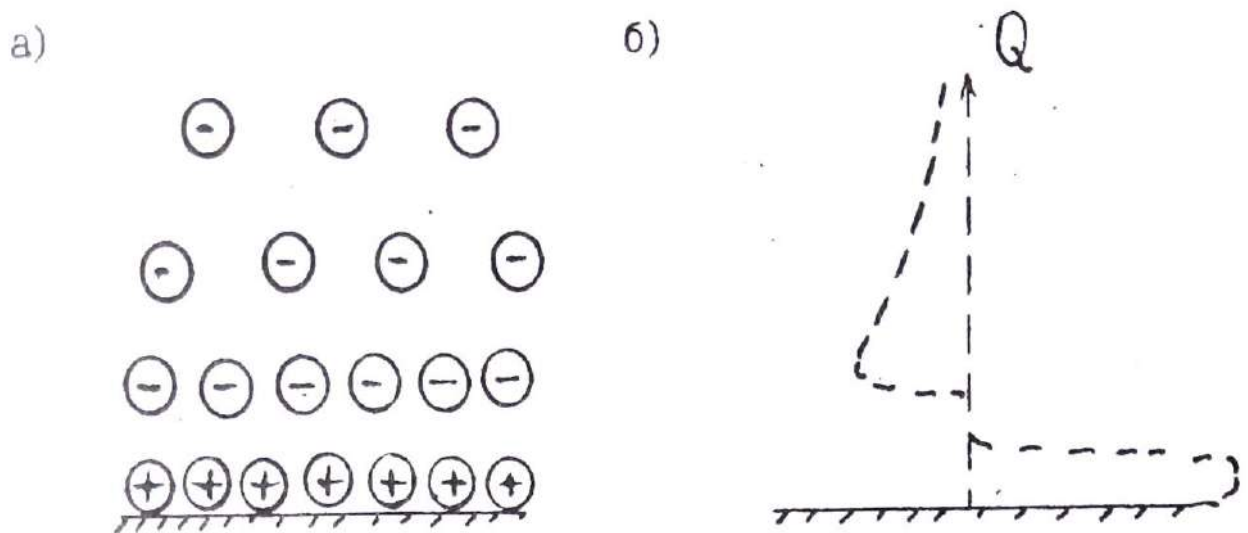


Рис.2.5. Строение двойного электрического слоя (а) и распределение заряда Q в пределах двойного слоя (б)

Область, занятая двойным слоем, примерно соответствует или несколько больше слоя прочно и рыхло связанной воды.

2. 3. ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Проницаемостью называется способность горной породы пропускать жидкости, газы или их смеси при наличии градиента давления. Выделяют физическую или абсолютную и фазовую проницаемости.

2.3. 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Это способность горных пород пропускать **однородные** жидкости или газы. Представим себе трубку, в которую помещен образец цилиндрической формы (Рис.2.б). На верхней грани образца давление P_1 на нижней P_2 . Градиент давления равен $\frac{\Delta P}{L}$, где $\Delta = P_1 - P_2$, L -длина образца. Через нижнюю границу будет вытекать жидкость. раскол которой

равен Q (см³/сек). Обозначим площадь поперечного сечения образца через S и введем удельный расход $V=Q/S$ (расход через единицу площади поперечного сечения). Соотношение между этими величинами описывается законом Дарси: V прямо пропорционален градиенту давления и обратно пропорционален вязкости (μ).

$$V = K_{\text{пр}} \frac{\frac{P_1 - P_2}{L}}{\mu} \quad (2,6)$$

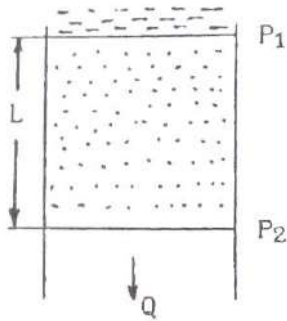


Рис.2.6. К определению коэффициента проницаемости

Коэффициент пропорциональности в этом уравнении (кпд) называется коэффициентом проницаемости, он является количественно характеристикой физической проницаемости. Единицей $K_{\text{пр}}$ в системе СИ служит мг. Существует вне системная единица - Дарси, которая соответствует проницаемости породы, у которой удельный расход воды равен 1 см³/сек при градиенте давления 1 атм/см. $1 \text{ м}^2 \approx 1 * 10^{12} \text{ Д}$ или $1 \text{ Д} \approx 1 * 10^{-12} \text{ м}^2 = 1 \text{ мкм}^2$.

Дарси крупная единица, обычно для характеристики проницаемости горных пород используют тысячную долю Дарси – 1мД, $1 \text{ мД} = 1 \text{ фм}^2$

2.3.2. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЗИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОРИСТОСТИ И СТРУКТУРОЙ ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Для простейшей модели строения порового пространства в виде трубчатых капилляров (рис.2.7) выведено простое соотношение -

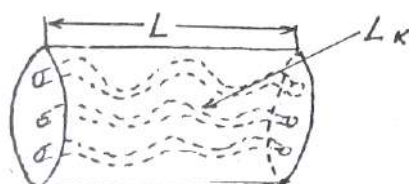


Рис.2.7. К пояснению формулы Козени—Кармана

формула Козени-Кармана

$$K_{\text{пр}} = \frac{K_{\text{пд}}^3}{S_{\text{ф}}^2 \cdot T^2 \cdot f}, \quad (2.7)$$

Где $K_{\text{пд}}$ – коэффициент динамической пористости.

$S_{\text{ф}}$ – удельная поверхность порового пространства (площадь поверхности пор в единице объема горной породы).

$T = L_{\text{к}}/L$ – удельная извилистость поровых каналов (отношение средней длины порового канала $L_{\text{к}}$ в пределах образца, к длине образца L).

f – некоторый параметр, зависящий от формы сечения порового канала (лежит в пределах от 2 до 3).

(Предупреждение. В литературе в формулах типа 2.7 часто используют обозначение $K_{\text{п}}$ или термин пористость вместо динамической пористости необходимо представлять, что движение флюидов возможно только по динамическим порам.)

Из формулы 2.7 следует сильная зависимость коэффициента проницаемости от коэффициента пористости (третья степень) и структуры порового пространства, которая для данной модели определяется величинами T и $S_{\text{ф}}$. На рис. 2.8 приведены примеры зависимости $K_{\text{пр}}$ от $K_{\text{пд}}$ (экспериментальные данные)

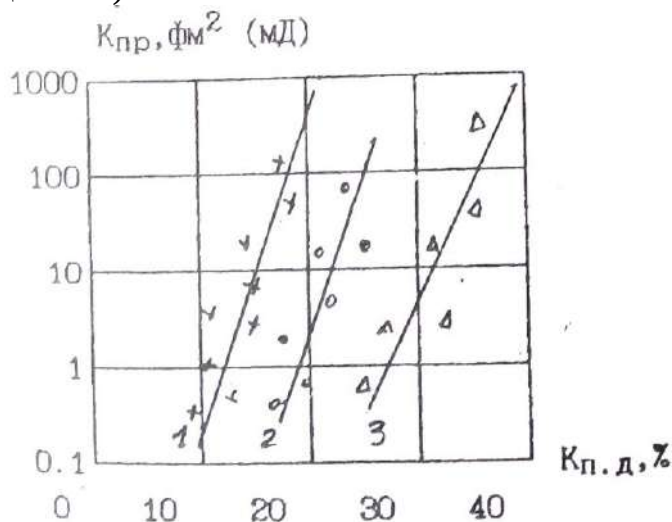


Рис.2.8. Зависимость коэффициента проницаемости от коэффициента динамической пористости 1 - песчаник, нижний вилькок, 2 – песчаник слабо сцементированный, 3 - песчаник тонкозернистый

Линейный вид зависимостей в полулогарифмическом масштабе и угол наклона подтверждают зависимость $K_{\text{пр}}$ от третьей степени $K_{\text{пд}}$. Смещение линий в горизонтальном направлении обусловлено влиянием структуры порового пространства. Величина удельной по-

нием поровых каналов, и возрастает с уменьшением сечения. У обломочных пород сечение каналов связано с размером зерен. Например в случае отсортированной породы с изометричными обломками со средним диаметром d :

$$S_{\phi} \approx 3.6/d \quad (2.8)$$

Таким образом, уменьшение размера зерен приводит к уменьшению проницаемости. Это объясняет непроницаемость глин (тонкодисперсные породы), хотя коэффициент пористости у них составляет десятки процентов. Рис. 2.9 иллюстрирует подобную зависимость.

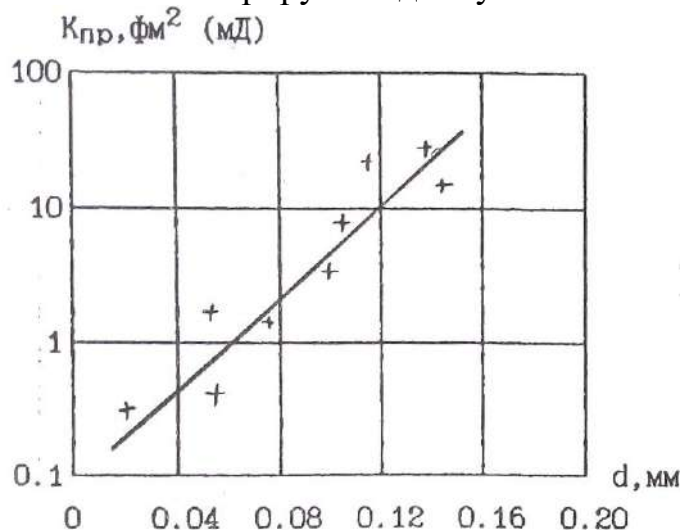


Рис. 2.9, Зависимость коэффициента проницаемости от среднего диаметра и зерен песчано—алевритово—глинистых пород

В случае трещинной пористости проницаемость определяется приближенным выражением:

$$K_{пр} \approx 8.45 b^2 \quad (2.9)$$

где b — средний размер поперечного сечения трещин (раскрытость трещин) в мкм,

$K_{пт}$ - коэффициент трещиной пористости в %.

По величине коэффициента проницаемости все породы подразделяются на три группы:

1. Проницаемые — грубообломочные породы (галечники, гравии), хорошо отсортированные, слабо сцементированные песчано—алевритовые породы, кавернозные и трещиноватые карбонатные породы, трещиноватые магматические породы, Это породы с высоким коэффициентом пористости (20-40%). сверхкапиллярными и капиллярными порами, существенным преобладанием свободной воды в поровом пространстве, Коэффициент проницаемости их лежит в пределах $10 - 10^6$ фм² (мД).

2. Полупроницаемые — менее отсортированные песчано-алевритово-глинистые породы, мелкотрещинные меловидные карбонатные породы. поровое пространство представлено субкапиллярными порами, преобладает связанная вода. $K_{пр}$ в пределах 0,1-10 фм² (мД).

3. Практически непроницаемые - глины, аргиллиты, сильно сцементированные песчаники и алевролиты, неветрелые кристаллические карбонатные и магматические породы. $K_{пр} < 0,1$ фм² (мД).

2. 3. 3. ФАЗОВАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Это способность горной породы, насыщенной неоднородной жидкостью или смесью жидкостей и газов, пропускать ту или иную фазу при наличии градиента давления. Для обычных в горных породах фаз (вода, нефть, газ) количественно фазовая проницаемость характеризуется коэффициентами Фазовой проницаемости для воды ($K_{пр.в}$), нефти ($K_{пр.н}$) и газа ($K_{пр.г}$), которые являются коэффициентами пропорциональности в аналогах уравнения Дарси:

$$V_B = K_{пр.в} \frac{\Delta P}{\mu_n} \quad V_H = K_{пр.н} \frac{\Delta P}{\mu_n} \quad V_G = K_{пр.г} \frac{\Delta P}{\mu_n}, \quad (2.10)$$

где V_B , V_H , V_G - удельные расходы воды, нефти и газа соответственно.

Часто используют коэффициенты **относительной** фазовой проницаемости, которые определяют как отношение коэффициента фазовой проницаемости к коэффициенту абсолютной проницаемости в процентах. Например, коэффициент относительной Фазовой проницаемости воды ($\bar{K}_{пр.в}$) запишется:
 $\bar{K}_{пр.в} = \left(\frac{K_{пр.в}}{K_{пр}} \right) 100 \%$.

Фазовая проницаемость отличается рядом особенностей, которые мы проиллюстрируем примером двухфазной смеси вода-нефть (Рис.2.10). На рис. Представлены зависимости коэффициентов относительной фазовой проницаемости ($\bar{K}_{пр.в}$, $\bar{K}_{пр.н}$) от соотношения фаз.

Последнее выражено через коэффициент вод насыщенности порового пространства (K_B) — отношение объема воды в поровом пространстве к объему пор. Полагаем, что все поровое пространство заполнено смесью вода—нефть, следовательно коэффициент нефтенасыщенности $K_H = 1 - K_B$. Отметим:

1) Графики зависимостей имеют в целом вогнутость вниз, т.е.

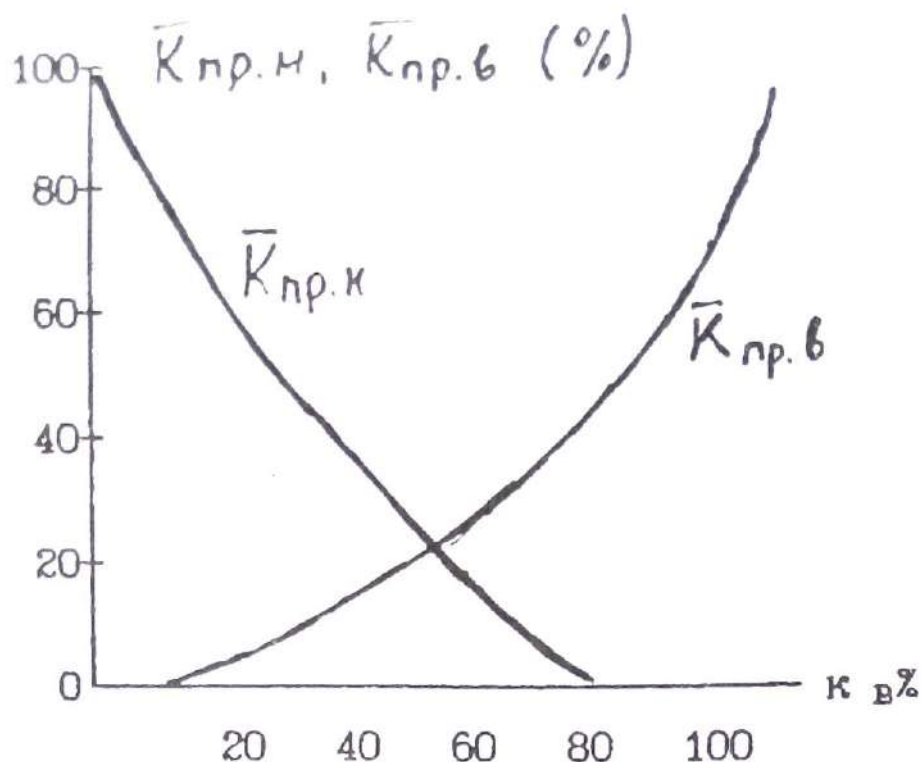


Рис.2.10. Зависимость коэффициентов относительной проницаемости по воде ($K_{пр.в}$) и нефти ($K_{пр.н}$) от соотношения фаз в смеси вода-нефть

сумма $K_{пр.в} + K_{пр.н} < 100$. Смеси фильтруются хуже, чем однородные жидкости.

2) При определенном соотношении фаз возможен расход какой-либо одной фазы (при $K_{в} < 20\%$ вода не фильтруется через породу, а при $K_{в} > 80\%$; не фильтруется нефть).

3. ПЛОТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА

Эта группа свойств определяет возможность применения ряда геофизических методов. Например, гравиразведки для изучения геологических структур, поисков и разведки полезных ископаемых, ядерно-геофизических методов (гамма—гамма-каротаж) для расчленения разрезов скважин.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Плотность - это масса единицы объема вещества. **Удельный вес** - вес единицы объема вещества. По определению плотность (δ):

$$\delta = \frac{m}{V}, (3.1)$$

Удельный вес (Δ):

$$\Delta = \frac{P}{V}, \quad (3.2)$$

где m , P , V - соответственно масса, вес и объем вещества. Так как $P=mg$ (g - ускорение силы тяжести), то плотность это константа а удельный вес зависит от силы тяжести. В системе СИ единицей плотности является кг/м^3 удельного веса - Н/м^3 . В системе СГС единица массы — грамм ($г$), внесистемная единица веса граммсила ($Г$) единицы объема - см^3 . Плотности в системе СГС (г/см^3) и удельный вес во внесистемных единицах (Г/см^3) численно совпадают на поверхности Земли с точностью до 0.2-0.4% (изменения удельного веса связаны с изменениями ускорения силы тяжести по поверхности Земли).

Понятия плотность и удельный вес, строго говоря, применимы для однородных сред. Для неоднородных сред вводятся усредненные характеристики — объемная плотность (δ) и объемный вес (d), которые определяются также по Формулам (3.1 и 3.2). Следует иметь в виду, что при определении объемных параметров размер изучаемого объекта должен быть много больше размеров неоднородностей. Соотношение между единицами в различных системах:

$$1\text{Г/см}^3 = 1000\text{ кг/м}^3, \quad 1\text{Г/см} = 9810\text{ Н/м}^3.$$

Используют так же понятие **минеральная плотность** (δ_m) — масса единицы объема твердой фазы минерала или горной породы. Следует отметить, что наряду с системой СИ в литературе при описании плотностных свойств широко используется и система СГС, которую мы будем использовать при дальнейшем изложении материала. Кроме того общепринятым является использование терминов плотность и удельный вес вместо объемная плотность и объемный вес.

3. 2 ПЛОТНОСТЬ МИНЕРАЛОВ

Плотность минералов определяется химическим составом, строением электронных оболочек атомов, составляющих различные минералы. а также условиями их образования. Эти факторы определяют соотношение в минералах атомов с различными атомными массами, характер кристаллической связи, конституцию кристаллов. Большая часть породообразующих минералов имеет ионную или ковалентную

форму кристаллической связи, состоят из атомов с низкими средними атомными массами и имеют плотность порядка $2.2 - 3.5 \text{ г/см}^3$, Среди рудных минералов преобладает ионно-металлическая и ковалентно-металлическая форма связи, часто присутствуют элементы с высокими атомными массами, ЧТО обуславливает повышение плотности до $3.5 - 7.5 \text{ г/см}^3$.

Средняя атомная масса основных породообразующим минералов (кварц, полевые шпаты, плагиоклазы, карбонаты) почти постоянна и несколько повышается в пироксенах и железистых оливинах. В связи с этим главным фактором определяющим плотность этих минералов является плотность упаковки атомов в кристаллической решетке. Например каркасные структуры силикатов (кварц, полевые шпаты, плагиоклазы) обуславливают низкую плотность. У цепочечных силикатов (пироксены) плотность выше. Еще выше плотность минералов с островной структурой (оливины). Для породообразующих минералов характерны явления **изоморфизма** и **полиморфизма**. Изоморфизм это изменение состава без изменения структуры кристаллической решетки. Целые группы минералов магматических и метаморфических пород (плагиоклазы, амфиболы, пироксены, оливины, гранаты) образуют непрерывные изоморфные ряды. Например плагиоклазовый ряд начинается с альбита ($\text{NaAl}_2\text{Si}_3\text{O}_8$) с плотностью 2.61 г/см^3 и заканчивается анортитом ($\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$) с плотностью 2.76 г/см^3 . Соотношение между Na и Ca в ряду может быть любым, при этом образуется непрерывный ряд минералов (олигоклаз, андезин, лабрадор, битовнит) с промежуточными значениями плотности. Увеличение плотности от альбита к анортиту связано с более высокой атомной массой Ca (40) по сравнению с Na (23). В тоже время при замещении Na в альбите на K имеем минерал ортоклаз (KAlSi_3O_8) с меньшей плотностью (2.57), хотя атомная масса K (39) выше, чем Na. Это связано с большим ионным радиусом K, что обуславливает менее плотную пространственную упаковку атомов. Полиморфизм - это изменение структуры кристаллической решетки без изменения состава. Классическим примером полиморфизма являются минералы графит (плотность 2.2) и алмаз (плотность 3.52). Оба минерала имеют одинаковый состав (C), но графит имеет рыхлую слоистую структуру кристаллической решетки, а алмаз кубическую центрогранную. Полиморфизм особенно характерен для минералов метаморфических горных пород.

Плотность некоторых минералов приведена в таблице 5.

Таблица 5

Минерал	Состав	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$
Кварц	SiO_2	2.65
Альбит	$\text{Na}[\text{AlSi}_3\text{O}_8]$	2.61
Анортит	$\text{Ca}[\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_8]$	2.76
Ортоклаз	$\text{K}[\text{AlSi}_3\text{O}_8]$	2.57
Нефелин	$\text{Na}[\text{AlSiO}_4]$	2.62
Роговая обманка	$\text{NaCa}_2(\text{Mg,Fe})_4(\text{Fe,Al})^* (\text{OH,F})_2\text{Al}_2\text{Si}_6\text{O}_{22}$	3.25
Пироксены:		
Авгит	$\text{Ca}(\text{Mg,Fe,Al})[(\text{Si,Al})_2\text{O}_6]$	3.4
Геденбергит	$\text{CaFe}[\text{Si}_2\text{O}_6]$	3.55
Эгирин	$\text{NaFe}[\text{Si}_2\text{O}_6]$	3.53
Оливин	$(\text{Mg,Fe})_2\text{SiO}_4$	3.35
Мусковит	$\text{KAl}_2[\text{AlSi}_3\text{O}_{10}][\text{OH}]_2$	2.85
Биотит	$\text{K}(\text{Mg,Fe})_3[\text{Si}_3\text{AlO}_{10}][\text{OH,F}]_2$	3.05
Сerpентенит	$\text{Mg}_6[\text{Si}_4\text{O}_{10}][\text{OH}]_8$	2.55
Кальцит	CaCO_3	2.715
Магнезит	MgCO_3	2.96
Доломит	$\text{CaMg}[\text{CO}_3]_2$	2.87
Барит	BaSO_4	4.5
Гипс	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	2.3
Ангидрит	CaSO_4	2.96
Магнетит	Fe_3O_4	5.11
Ильменит	FeTiO_3	4.79
Хромит	FeCr_2O_4	4.2
Пирит	FeS_2	5.1
Халькопирит	CuFeS_2	4.2
Сфалерит	ZnS	3.95
Галенит	PbS	7.57
Циркон	ZrSiO_4	4.68

Приведены средние значения плотности наиболее чистых разновидностей минералов. Можно сделать следующие выводы:

1) Плотности основных породообразующих минералов ниже плотности рудных.

2) Темноцветные породообразующие минералы (пироксены, оливины, роговые обманки) имеют более высокую плотность по сравнению со светлыми минералами (кварц, полевые шпаты, плагиоклазы)

3.3 ПЛОТНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

Общее выражение для плотности горной породы можно записать в виде:

$$\delta = \frac{m_T + m_{ж} + m_{г}}{V_T + V_{ж} + V_{г}}, (3.3)$$

где m_T — масса твердой фазы, $m_{ж}$ — масса жидкой фазы. $m_{г}$ - масса газовой фазы породы, $V_T, V_{ж}, V_{г}$ — объемы твердой, жидкой и газовой фаз. Сумма объемов жидкой и газовой фаз равна объему порового пространства. Масса твердой фазы равна сумме масс слагающих породу минералов, а массы жидкой и газовой фаз сосредоточены в поровом пространстве. Тогда выражение (3.3) можно преобразовать к ВИДУ:

$$\delta = (1 - K_{п}) \sum \delta_i V_i + \sum K_{п} K_{жк} \delta_{жк} + \delta_{г} \delta_{г} \quad (3.4)$$

где $K_{п}$ коэффициент пористости, δ_i и V_i - минеральная плотность и объемное содержание в твердой фазе i —го минерала, $\delta_{жк}$ плотность k —й жидкости. $K_{жк}$ —объемное содержание k —й жидкости в поровом пространстве, $\delta_{г}$ - плотность газа, $K_{г}$ - объемное содержание газа в поровом пространстве. Из 3.4 следует, что плотность горной породы зависит от минерального состава. заполнения порового пространства. Факторов может быть различной.

3.3.1 МАГМАТИЧЕСКИЕ ПОРОДЫ

Общим для магматических пород является их образование путем остывания магматического расплава. Классификация этих пород основана на двух основных признаках: а) условия образования, б) состав. По условиям образования выделяют; 1) **интрузивные** -породы, образовавшиеся при медленном остывании расплава на значительной глубине при низком теплообмене с вмещающими породами. При этом

первичный расплав теряет большую часть летучих компонентов (жидкая и газовая фазы). Формируются низкопористые полнокристаллические породы (см. Таб №4). 2) **Эффузивные** – породы, образовавшиеся при быстром остывании расплава в приповерхностных условиях (на поверхности, под водой, на малых глубинах). Расплав не успевает терять значительную часть летучих. Формируются пористые породы со стекловатой или частично кристаллической структурой. Среди эффузивов выделяют **кайнотипные** – сравнительно молодые породы в значительной степени сохранившие свой первичный облик и **палеотипные** – древние породы, подвергшиеся значительным изменениям (широко известно зеленокаменное изменение эффузивов) минерального состава и структуры. В частности типичными является уменьшение пористости с образованием миндалекаменных структур.

Состав определяется содержанием SiO_2 и номером плагиоклазов (соотношение Ca и Na). Нормальный (щелочноземельный) ряд магматических пород представлен всеми разновидностями от кислых (содержание SiO_2 около 70%), до ультраосновных (содержание SiO_2 около 40%). Щелочной ряд представлен ограниченным набором пород типа сионитов с составом, соответствующим средним -основным породам.

Таблица 6

Порода	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	Порода	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$
Гранит	2.57	Сиенит	2.62
фанерозоевский		Сиенит	2.66
Гранит	2.59	нефелиновый	
докембрийский		Липарит	2.35
Гранодиорит	2.69	Кварцевый	2.60
Диорит кварцевый	2.75	порфир	
Диорит	2.81	Андезит	2.49
Габбро	2.95	Андезит-й	2.73
Пироксенит	3.2	порфирит	
Перидотит	3.2	Базальт	2.54
		Диабаз	2.79

В таб. 6 приведены средние значения плотности основных типов магматических пород. По этим данным составлена диаграмма (рис. 3.1) зависимости средней плотности от состава магматических пород. Состав выражен через содержание SiO_2 . В нижней части диаграммы приведены названия интрузивных, кайнотипных эффузивных и палеотипных эффузивных пород соответствующего состава.

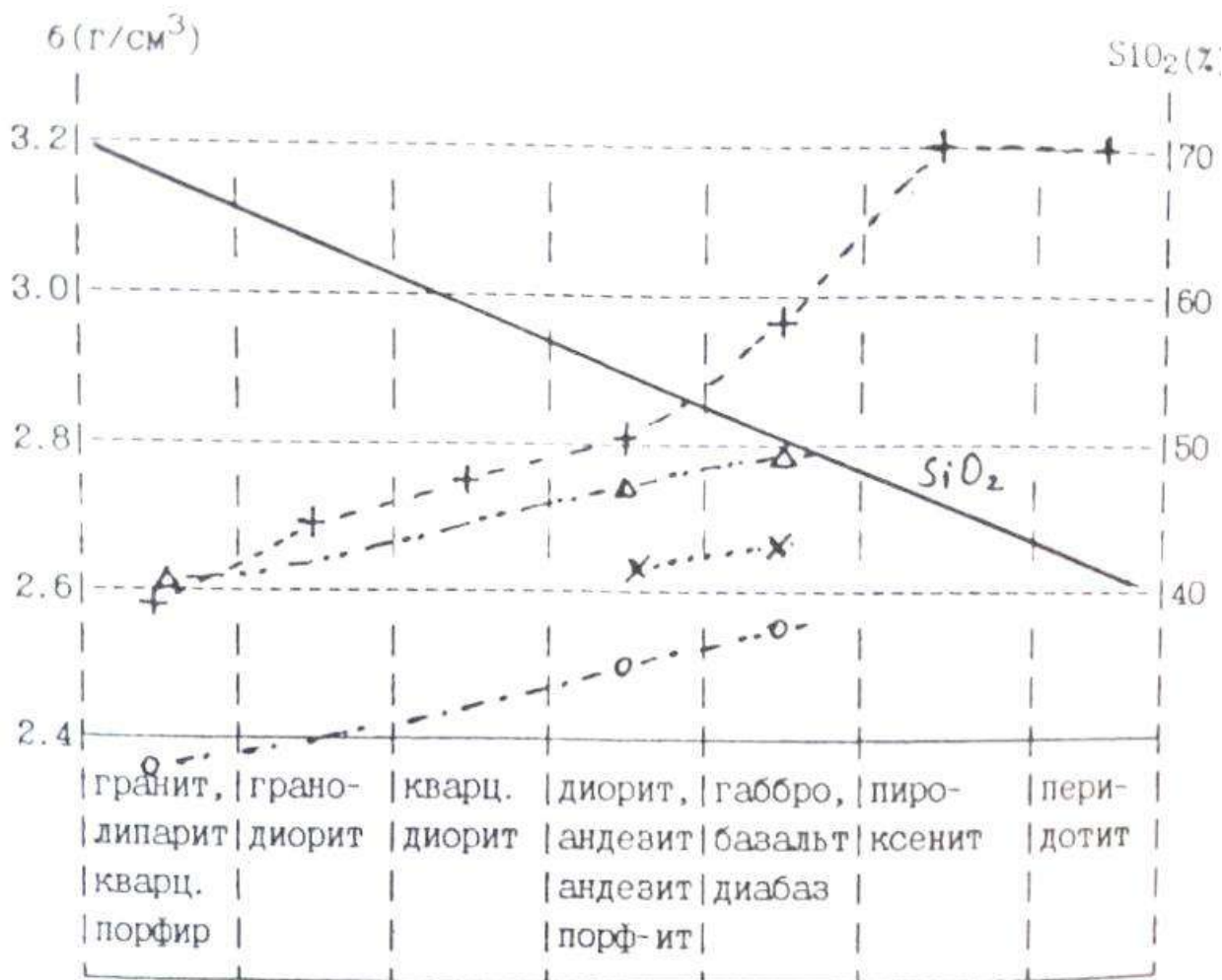


Рис.3.1. Зависимость средней меткости магматических пород от состава. (+ интрузивные породы щелочноземельного ряда, х интрузивные породы щелочного ряда, о кайнотипные эффузивы, Δ палеотипные эффузивы).

Сделаем основные вывод:

1. Из таблицы и диаграммы следует закономерное возрастание плотности по мере увеличения основности (уменьшения содержания SiO_2), что обусловлено возрастанием количества плотных темноцветных минералов.
2. Разница в средних плотностях между соседними группами по основности составляет около $\pm 0.1 \text{ г/см}^3$. т.е. является **значимой** (например, позволяет разделять эти породы по уровню гравитационного поля над ними).
3. Графики зависимости плотности от состава интрузивных и палеотинных эффузивных пород практически совпадают. Причина этого – близость составов и пористости. Исключение составляют породы основного

ионного состава. причины этого будут рассмотрены ниже.

4. Бросается в глаза существенно меньшие плотности кайнотипных зффузивов. Причина — высокая пористость.

Вероятные отклонения от средних значений в каждой группе интрузивных и палеотипных зффузивных пород составляют 0.1 г/см^3 , у кайнотипных зффузивов 0.15 г/см^3 . Эти отклонения связаны с влиянием двух основных факторов;

1. В каждой петрографической группе объединены по сути различные породы. Например. среди гранитов выделяют аляскитовые, мусковитовые, двуслюдяные, роговообманковые и т.д. Таким образом, в пределах группы возможны вариации состава породообразующих, минералов и, следовательно, плотности. Так, среди пород типа габбро есть и анортозиты (состоят на 90-95%. из плагиоклаза — лабрадора) с плотностью 2.69 г/см^3 , и оливинное габбро (плагиоклаз и до 20 % оливина) с плотностью 3.07 г/см^3 .

2. Любая порода, кроме породообразующих, содержит и акцессорные (второстепенные) минералы. В кислых породах это апатит ($\delta = 3.19$), циркон ($\delta = 4.7$), магнетит ($\delta = 5.1$), ильменит ($\delta = 4.79$). В породах основного состава это магнетит, титаномagnetит ($\delta = 4.72$), сульфиды ($\delta = 4.7 - 4.9$). В ультраосновных - магнетит, титаномagnetит. Количество акцессорных минералов может меняться от тысячных долей процента до нескольких процентов, что и приводит к вариациям плотности для ряда районов установлено увеличение содержания акцессорных минералов в рудоносных магматических комплексах, что может служить поисковым признаком.

Процессы автометаморфизма (серпентинизация, амфиболизация) оказывают существенное влияние на плотность магматических пород. При серпентинизации массивов ультраосновных пород пироксены и оливин преобразуются в серпентин — минерал, содержащий гидроксильную группу. с плотностью 2.55 г/см^3 . На рис. 3.2 представлен график зависимости плотности от степени серпентинизации. Нацело серпентинизированные породы имеют плотность, соответствуют кислым магматическим породам, это обстоятельство приходится учитывать при интерпретации данных гравиразведки. дальнейший процесс метаморфизма связан с карбонатизацией, при которой плотность возрастает.

Амфиболизация характерна для пород основного состава и проявляется в преобразовании пироксена в амфиболы и плагиоклазы с выделением хлорита, эпидота, серицита — минералов с меньшей плотностью.

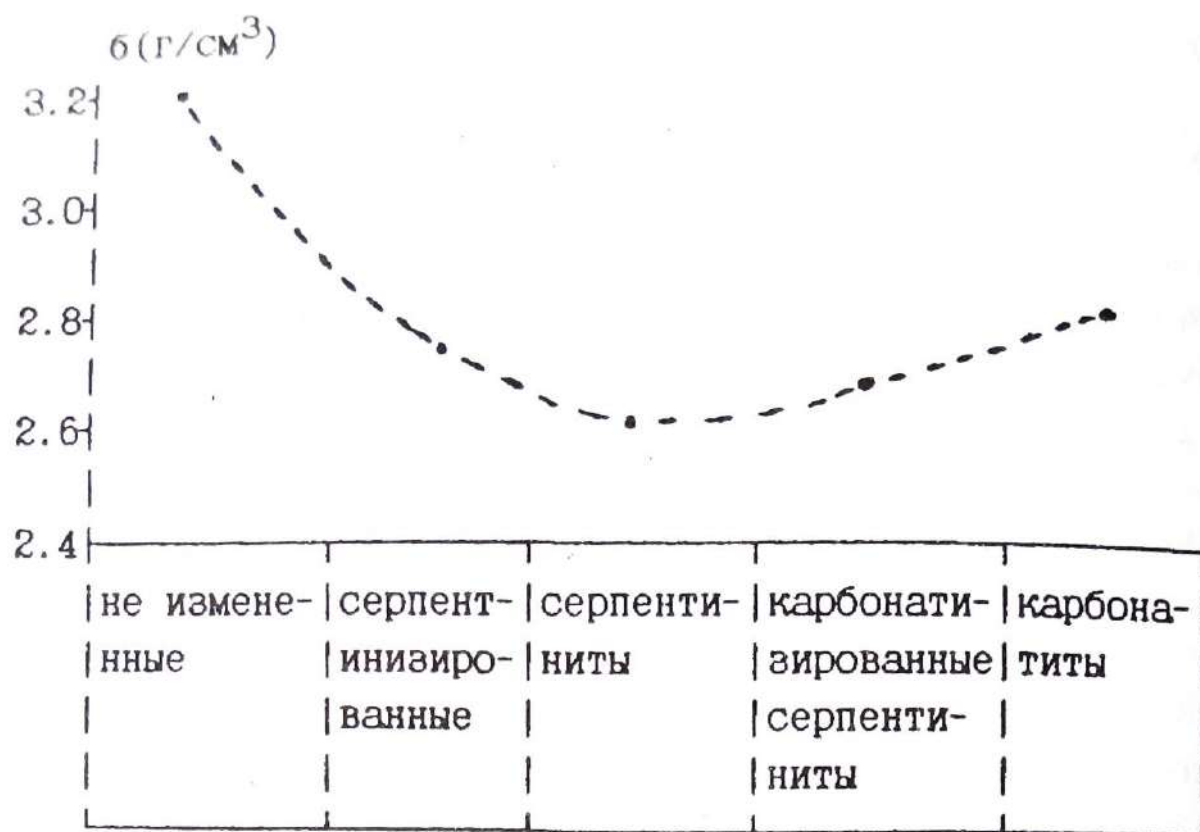


Рис 3.2. Изменение плотности ультраосновных пород в процессе серпентинизации и карбонатизации

Таким образом, амфиболизация сопровождается уменьшением плотности. Обратите внимание, что на рис. 3.1 плотность диабаз меньше плотности их интрузивного аналога — габбро. Диабаз это порода, претерпевшая метаморфические изменения, и её плотность соответствует амфиболизированному габбро. Процессы локального метаморфизма (метасоматоза) могут сопровождаться как уменьшением, так и увеличением плотности. В таблице 7 приведены данные по изменению плотности для типичных процессов.

Таблица 7

Порода	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$ измененных	Процесс	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$ не измененных
Гранодиорит	2.65	Серицитизация	2.55
Гранодиорит	2.67	Хлоритизация	2.61
Порфирит	2.76	Окварцевание	2.65
Диорит	2.8	Альбитизация	2.63
Гранит	2.6	Грейзенизация	2.77
Порфирит	2.7	Эпидотизация	2.85

Локальные изменения плотности используются как поисковый признак, так как процессы рудообразования сопровождаются локальным метасоматозом.

3.3.2. ОСАДОЧНЫЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

ОБЛОМОЧНЫЕ ОСАДОЧНЫЕ ГОРНЫЕ ПОРОДЫ

В таблице 8 приведены значения минеральной плотности (плотность твердой Фазы) основных типов обломочных пород.

Порода	$\delta_{\text{ср}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$\delta_{\text{min}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$\delta_{\text{max}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$
Песчаник	2.67	2.58	2.76
Алеврит	2.69	2.62	2.76
Аргилит	2.68	2.69	2.78
Глина	2.68	2.58	2.78

Отметим близкие значения $\delta_{\text{в}}$, из чего следует зависимость плотности в основном от пористости и характера заполнения порового пространства. Для водонасыщенных и газонасыщенных пород плотность ($\delta_{\text{в}}$, $\delta_{\text{г}}$) соответственно равна:

$$\delta_{\text{в}} = (1 - K_{\text{п}})\delta_{\text{т}} + K_{\text{п}} \delta_{\text{т}} \quad (3.5)$$

$$\delta_{\text{г}} = (1 - K_{\text{п}})\delta_{\text{т}} \quad (3.6)$$

где $K_{\text{п}}$ - коэффициент пористости, $\delta_{\text{т}}$ - плотность твердой фазы, плотность воды. Учитывая постоянство минеральной плотности, в Обоих случаях имеем линейную зависимость плотности от пористости. На рис. 3.3 приведены зависимости, рассчитанные для $\delta_{\text{т}}=2.68\text{г/см}^3$ и результаты изучения плотности реальных пород. Расчетные и экспериментальные данные достаточно близки. Изменение пористости на 1% приводит к изменению плотности на на 0.03 и 0.02 г/см³, соответственно для газонасыщенных и водонасыщенных пород. Эти цифры полезно запомнить поскольку они определяют требования к точности измерения плотности геофизическими методами (гамма—гамма каротаж, акустический каротаж) с целью оценки пористости коллекторов.

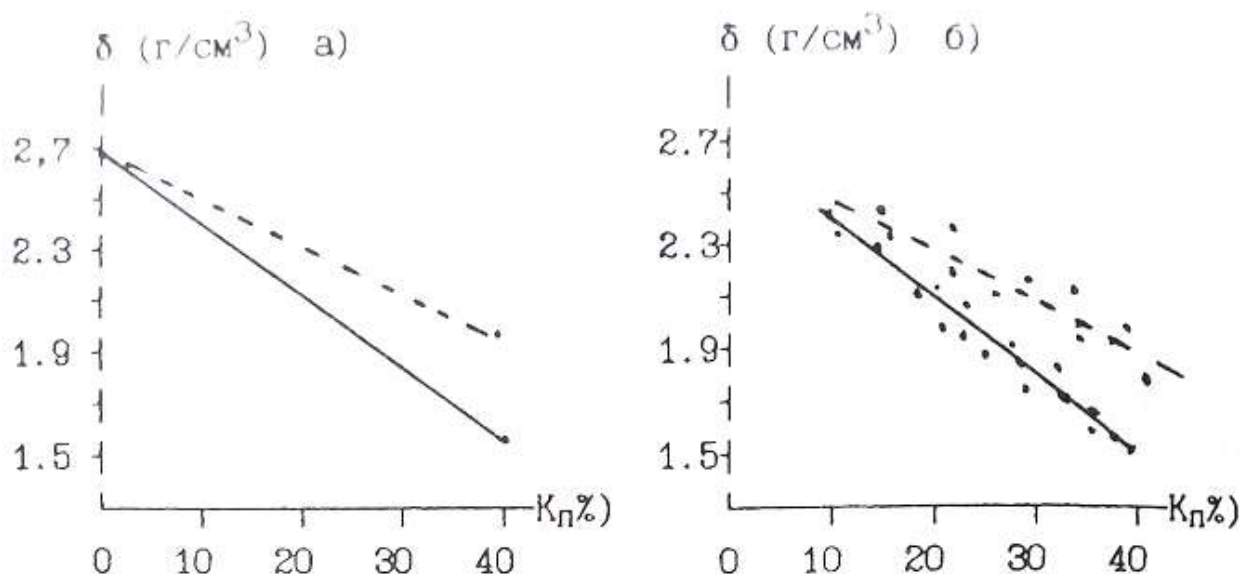


Рис. 3.3. Зависимость плотности обломочных осадочных пород от пористости, а) расчет, б) экспериментальные данные для песчано-глинистых отложений. - водонасыщенные - газонасыщенные

Как отмечалось ранее, в результате уплотнения под нагрузкой вышележащих слоев происходит закономерное уменьшение пористости обломочных пород. Если в выражении 3.5 и 3.6 подставить значения пористости из 2.5, то получим зависимость плотности от глубины залегания:

$$\delta_r(H) = \delta_T(1 - K_p(0) * \exp(-0.45 H)) \quad (3.7)$$

$$\delta_B(H) = \delta_T + K_p(0) * (1 - \delta_T) * \exp(-0.45 H) \quad (3.8)$$

где $K_p(0)$ - пористость на поверхности, H — глубина в км.

Таблица 9

Порода	$\delta \left(\frac{г}{см^3} \right)$ пределы	$\delta \left(\frac{г}{см^3} \right)$ наиб. вероят.
Глины	1.20-2.40	-
Аргилиты	1.70-2.90	2.30-2.40
Пески	1.30-2.00	1.50-1.70
Песчаники	2.00-2.90	2.50-2.65
Алевриты	1.80-2.80	2.30-2.50
Конгломераты	2.10-3.00	-

В таблице 9 приведены значения плотности обломочных осадочных пород.
Основные выводы:

- 1) Плотность обломочных осадочных горных пород (вероятные значения) ниже плотности магматических пород.
- 2) Плотность меняется в широких пределах. что связано с широким диапазоном возможных значений пористости.
- 3) Интервалы плотности основных типов обломочных пород в значительной степени перекрываются.

КАРБОНАТНЫЕ ОСАДОЧНЫЕ ПОРОДЫ

В таб.10 приведены значения минеральной плотности карбонатных пород.

Таблица 10

Порода	$\delta_{\text{ср}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$\delta_{\text{min}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$\delta_{\text{max}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$
Мел	2.69	2.56	2.80
Известняк	2.72	2.62	2.80
Доломит	2.80	2.76	2.88
Мергель	2.70	2.58	2.80

Отмечаются значимые различия средних плотностей. Поэтому плотность карбонатных пород будет определяться минеральным составом, пористостью и характером заполнения порового пространства. Представления о плотности этих пород иллюстрируются таб. 11.

Таблица. 11

Порода	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$ пределы	$\delta \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$ наиб. вероят.
Известняки	1.80-2.90	2.60-2.70
Доломиты	1.90-3.00	2.60-2.80
Мергели	1.50-2.80	2.20-2.40

Для этой группы пород остаются справедливыми пункты 2 и 3 выводов, которые получены для обломочных пород. Дополнительно отметим более высокую плотность известняков и доломитов, которая близка к плотности кислых и средних магматических пород.

ГИДРОХИМИЧЕСКИЕ ОСАДОЧНЫЕ ПОРОДЫ ,

Для этих пород характерна низкая пористость, и их плотность в основном определяется минеральным составом. Плотность гипсов лежит в пределах $2.10 — 2.50 \text{ г/см}^3$, ангидритов $2.50—2.90 \text{ г/см}^3$, каменной соли $2.15 — 2.30 \text{ г/см}^3$. Приведем пример соотношения плотностей осадочных комплексов с вытекающими из этого особенностями геофизических полей. Среди структур, вмещающих углеводородное сырье, существуют так называемые диапировые структуры или структуры протыкания. Они образуются в результате выжимания ("Всплывания") соляных куполов сквозь толщ обломочных осадочных пород. Соотношение плотностей приведено на рис. 3.4 а).

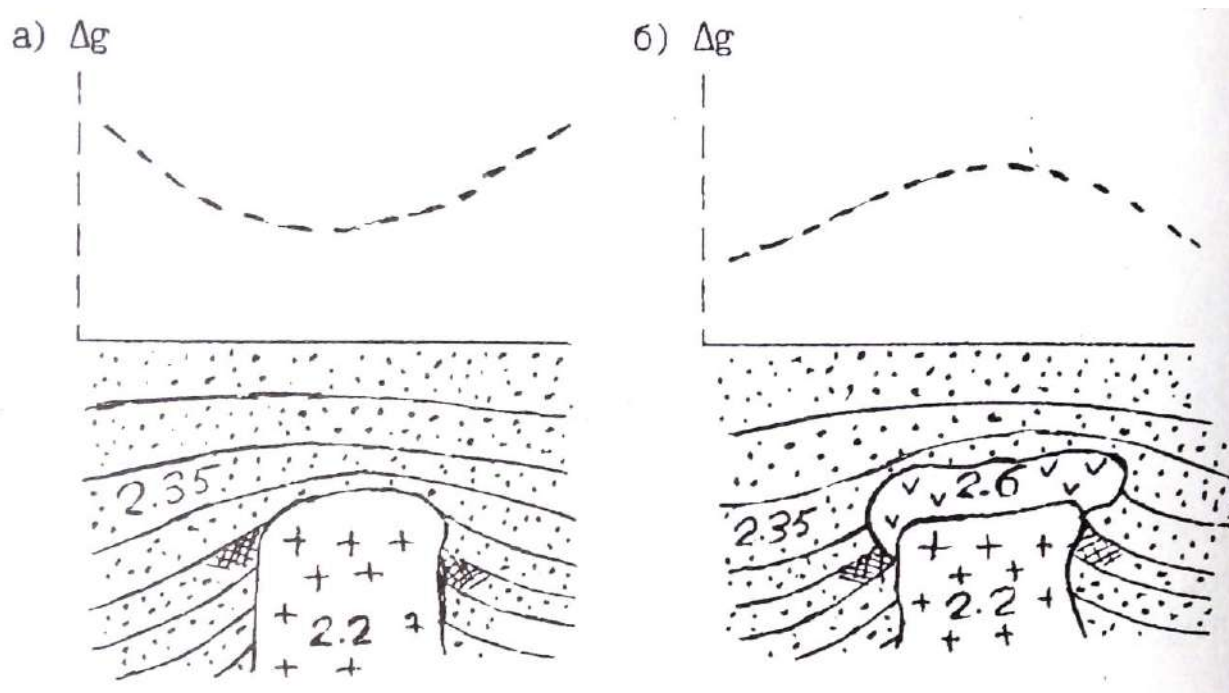


Рис. 3.4. Характер распределения плотности и ускорение силы тяжести над соляно-купольными структурами (• - песчано-глинистые отложения, + - каменная соль, √ — ангидрит, - - - - приращение ускорения силы тяжести, // - нефтеносность)

Плотность каменной соли (2.20 г/см^3) меньше плотности песчано-глинистых отложений (2.35 г/см^3). Это обуславливает недостаток масс соляного купола над структурой наблюдается Уменьшение силы тяжести (Кривая Δg , рис.3.4. а)). Однако, возможно и более сложное строение соляных куполов (рис.3.4. б)). В верхней части купола образуется покрывка сложенная ангидритами ("каменная шляпа") с плотностью 2.60 г/см^3 .

Избыток масс покрывки может превосходить действие недостатка масс соляного купола, и над структурой наблюдается увеличение силы тяжести. Возможно ситуация баланса этих двух факторов, и над структурой существенного изменения гравитационного поля не будет.

3.3.3. МЕТАМОРФИЧЕСКИЕ ПОРОДЫ

Метаморфические породы образуются в результате регионального (охватывающего значительные площади и объемы пород) преобразования магматических и осадочных пород под действием высокой температуры и давления. В основу классификации метаморфических пород положены условия (фация) метаморфизма, структурно-текстурные особенности и состав породы. В порядке возрастания термодинамических условий выделяют следующие фации: зеленых сланцев, эпидот-амфиболитовую, амфиболитовую, гранулитовую, эклогитовую. В начальный этап регионального метаморфизма происходит уплотнение первичных осадочных пород в результате уменьшения пористости под действием давления (катагенеза). В фацию зеленых сланцев наблюдается некоторое разуплотнение исходных магматических и подвергнутых катагенезу осадочных пород в результате образования минералов, содержащих кристаллизационную и конституционную воду. Дальнейший метаморфизм сопровождается увеличением плотности за счет полиморфных преобразований минералов. Образуются новые минералы с уплотненными кристаллическими решетками. данные о плотности метаморфических пород Приведены в таблице 12. При общем закономерном возрастании плотности с увеличением степени метаморфизма, в пределах каждой отмечаются существенные колебания плотности, что отражает влияние минерального состава пород. Интересно отметить, что при так называемом ультраметаморфизме (протекает в условиях относительно пониженного давления и высоких температур, сопровождается полной перекристаллизацией и частичным расплавлением пород) отмечаются существенное уменьшение плотности. Так амфиболиты (3.0 г/см^3) преобразуются в метасоматические граниты (2.6 г/см^3). Процесс гранитизации сопровождается кремний-калиевым метасоматозом с преобразованием плотных минералов (амфиболы, гранаты, биотит) в менее плотные (кварц, микроклин).

Таблица 12

Фация	Порода	$\delta_{\text{ср}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$\delta_{\text{min}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$\delta_{\text{max}} \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$
Зеленых сланцев	Филит	2.45	2.40	2.70
	Сланец:			
	Кварцево- серицитовый	2.57	2.50	2.64
	Кремнистый	2.60	2.58	2.62
	Хлоритовый	2.76	2.72	2.80
	Слюдистый	2.65	2.60	2.75
Эпидот- амфиболитовая	Сланец кристаллический:			
	Биотитовый	2.63	2.62	2.63
	Роговообманковый	2.77	2.75	2.80
	Кварцит	2.64	2.62	2.65
	Мрамор	2.70	2.68	2.72
Амфиболитовая	Гнейс:			
	Биотитовый	2.63	2.60	2.68
	Амфиболовый	2.78	2.75	2.82
	Амфиболит:			
	Полевошпатовый	2.87	2.80	2.95
	Гранатовый	3.10	3.00	3.20
Гранулитовая	Гранулит	2.72	2.60	2.85
	гиперстеновый Сланец	3.05	2.90	3.25
Эклогитовая	Эклогит	-	3.20	3.40

3.3.4. ВЛИЯНИЕ ВЫВЕТРИВАНИЯ НА ПЛОТНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД.

Процессы гипергенеза в результате химического и механического выветривания приводят к существенному изменению состава и состояния пород. Образуется вторичная пористость в результате растрескивания и выщелачивания, которая достигает 20-30%.

Образующиеся коры выветривания глинисто-сланцевого и хлоритогидросланцевого состава с гидроокислами железа, обломками кварца, микроклина, биотита имеют пониженную плотность порядка 2.1-2.5 г/см³.

Вопросы для самопроверки:

1. *Какие причины создают неоднородность физических свойств горных пород?*
2. *Как строятся гистограммы распределения физических свойств горных пород?*
3. *Типы пористости.*
4. *Какие факторы определяют пористость обломочных пород?*
5. *Назовите группы пород с низкой и повышенной пористостью.*
6. *Как изменяется пористость с глубиной?*
7. *Что такое влажность и влагоемкость?*
8. *В каком виде присутствует вода в горных породах?*
9. *Какими особенностями обладает связанная вода?*
10. *Что такое проницаемость?*
11. *Отличие физической проницаемости от фазовой?*
12. *Как классифицируются породы по проницаемости?*
13. *Как образуется двойной электрический слой?*
14. *Каким параметром характеризуется нефтенасыщенность?*
15. *Что такое плотность и минеральная плотность?*
16. *От чего зависит плотность минералов?*
17. *Назовите основные факторы, определяющие плотность магматических (интрузивных и эффузивных) и осадочных (обломочных, карбонатных и гидрохимических) пород.*
18. *Рассчитайте плотность водонасыщенного и газонасыщенного песчаника с коэффициентом пористости 25%.*

Литература:

1. В.М. Добрынин, В.Ю. Вендельштейн, Д.А. Кожевников. Петрофизика: Учебник для вузов. -М: Недра, 1991.
2. В.Н. Кобранова. Петрофизика: Учебник для вузов -М: Недра, 1986.

Оглавление

Введение.....	3
1. Статистическая природа физических свойств.....	4
2. Коллекторские свойства.....	8
2. 1. Пористость.....	9
2.1.1. Классификация пор.....	10
2.1.2. Пористость обломочных осадочных пород.....	11
2.1.3. Пористость карбонатных осадочных пород.....	14
2.1.4. Пористость гидрохимических осадочных пород.....	15
2.1.5. Пористость магматических и метаморфических пород.....	15
2.1.6. Пористость гидротермально измененных пород.....	16
2.2. Влажность, влагоемкость.....	17
2. 3. Проницаемость	19
2.3.1. Физическая проницаемость	19
2.3.2. Связь коэффициента проницаемости с коэффициентом пористости и структурой порового пространства.....	20
2.3.3. Фазовая проницаемость	23
3. Плотностные свойства	24
3.1. Основные понятия и определения	24
3.2. Плотность минералов	25
3.3. Плотность горных пород	28
3.3.1. Магматические породы	28
3.3.2. Осадочные породы	33
3.3.3. Метаморфические породы	37
3.3.4. Влияние выветривания на плотность пород	38
Вопросы для самопроверки	39
Литература	39

Игорь Иванович Бреднев

ПЕТРОФИЗИКА

Часть 1. Коллекторские и плотностные свойства горных пород

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Петрофизика»
для студентов профилизации «Геофизические методы поисков и разведки
МПИ» (РФ) направления 650200 «Технологии геологической разведки»

Конспект лекций

Корректурa кафедры геофизики

Подписано в печать 09.09.2004г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60х84 1/16. Печать на ризографе.
Печ.л. 2,8. Уч-изд. л. 2,39. Тираж 100 экз. Заказ №130.

Издательство УГГГА
620144. г. Екатеринбург. УЛ- Куйбышева 30
Уральская государственная горно-геологическая академия
Лаборатория множительной техники

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Виноградов В.Б.

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Екатеринбург

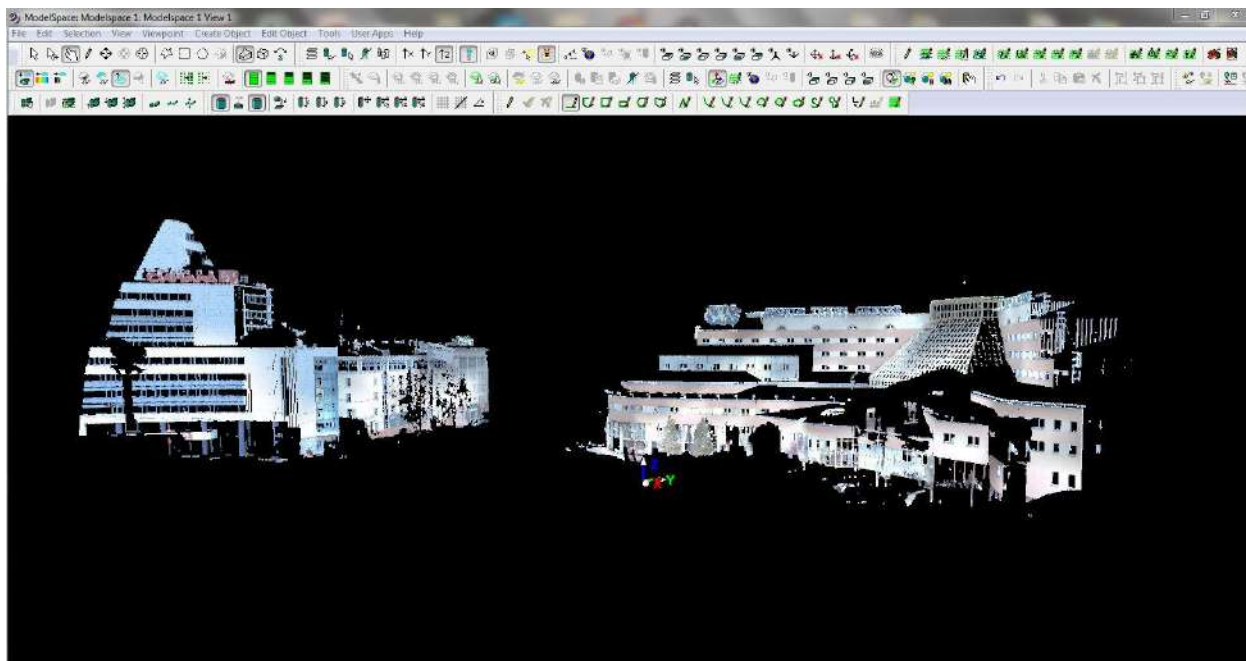
2020

Введение.

Цели, задачи и объекты дисциплины. Ознакомиться с методами геометрии, применяемыми в геофизической практике. Ознакомиться с алгоритмами, программами и математическими пакетами, используемыми при построении карт и разрезов.

Термин «Геометризация» в нашей отрасли имеет крайне широкое толкование. В широком смысле применение методов геометрии в геологии и горном деле. Часто его толкуют как описание геологических поверхностей, поверхностей карьеров и иных горных выработок на основе инструментальных измерений, а также теорию и набор технологий подсчета запасов. Геометризация это непрерывный процесс, отражающий степень изученности объекта. По мере поступления новых данных расчеты проводятся заново. На основе геометрической модели при проведении разведки корректируется сеть скважин.





Основным отчетным материалом проведенных геофизических съемок является карта. В инструкциях по каждому геофизическому методу детально прописано, каким требованиям должна удовлетворять отчетная карта (сечение, раскраска, вид изолиний, масштаб и т.д.), как должна выглядеть отчетная карта, указано с помощью каких специализированных пакетов. Более сложная задача построения геологических поверхностей по геофизическим данным. По данным ГИС строят поверхности ВНК, ГНК, ГВК, кровли резервуара, подошвы резервуара, поверхности тектонических нарушений, поверхности несогласия. Нередко строят карты параметров: пористости, эффективной нефтенасыщенной мощности, плотности и др. Для рудных месторождений строят поверхности рудных тел, карты ЗМС и т.п.

Одна из задач количественной интерпретации – определение геометрии источников поля, особенно их верхней кромки. Для разработки месторождений строительных материалов – это главная задача.

Результат существенно зависит от знания пространственной изменчивости свойств, учета расположения точек на площади, по которым они определены. Если точка определения концентрируется в подобластях, то и средние значения, и дисперсии могут оказаться ошибочными.

Геометрия сети наблюдений. Сеть наблюдений обычно представляет множество более - менее регулярно расположенных на земной поверхности пунктов наблюдений. С одной стороны пункты относятся к поверхности, т.е. к двумерному множеству. Для описания движения автомобиля достаточно указать две координаты. Например, на шаре достаточно указать две координаты. С другой стороны при описании местоположения пунктов наблюдений обычно мы используем третью координату – высоту, так как рельеф меняет рисовку карты.

Сеть наблюдений принято представлять в виде множества многоугольников. Очень часто сеть пунктов наблюдений представляют в виде триангуляционной сети – множества треугольников. Шаг измерений, расстояние между профилями оказывают определяющее влияние на качество построенных карт. Этому влиянию необходимо давать количественную оценку.

Геометризация и анализ физических полей. Геометризация геологических объектов проводится в несколько этапов:

- измерение
- создание базы данных
- создание цифровой модели геологического объекта
- сопровождение модели.

В разведочной геофизике строят не только карты изолиний, но и карты векторов поля. В гравиразведке с 20-х годов 20 века по 70-е годы 20 века строили карты проекции вектора поля на горизонтальную плоскость V которые измеряли с помощью вариометров и градиентометров.

Особенность магниторазведки в том, что намагниченность горных пород – вектор и магнитная индукция – вектор. В магниторазведке измерения с феррозондовыми магнитометрами позволяли получить все три компоненты вектора индукции. Сотрудники НГУ по результатам работ с таким прибором построили карты во всех возможных вариантах, и даже карты аномальных склонений и наклонений.

По результатам микромагнитной съемки строят карты векторов. Анализ направлений векторов позволяет судить о преимущественном направлении трещин на территории съемки. Разработана методика построения роз-диаграмм направлений изодинам. Эта методика применяется сейчас в обработке площадных съемок.

Измерение векторов полей считается перспективным направлением в разведочной геофизике. Внедрение инерциальных магнитометров приведет в возобновлению построения карт векторов. Интерпретация таких карт проще, чем карт проекций, поскольку вектор поля направлен в к источнику поля. Векторная магнитометрия в скважинах нередкое явление.

Создание пространственной модели проводится в несколько этапов. Для получения результата необходима длительная кропотливая работа. Обязательно нужно оценивать надежность и точность используемой информации. На схеме показаны возможные виды работ и последовательность операций.

Обе перечисленные выше задачи относятся к категории задач восстановления функций по эмпирическим данным. Естественно необходимо оценить качество восстановления. Помимо близости значений в отдельных точках вводится критерий близости функций:

1. Расстояние между функциями в смысле среднеквадратического уклонения:

$$R(f_1, f_2) = \sqrt{\int (f_1(x) - f_2(x))^2 P(x) dx},$$

где $P(x)$ - неотрицательная функция, такая, что $\int P(x) dx = 1$.

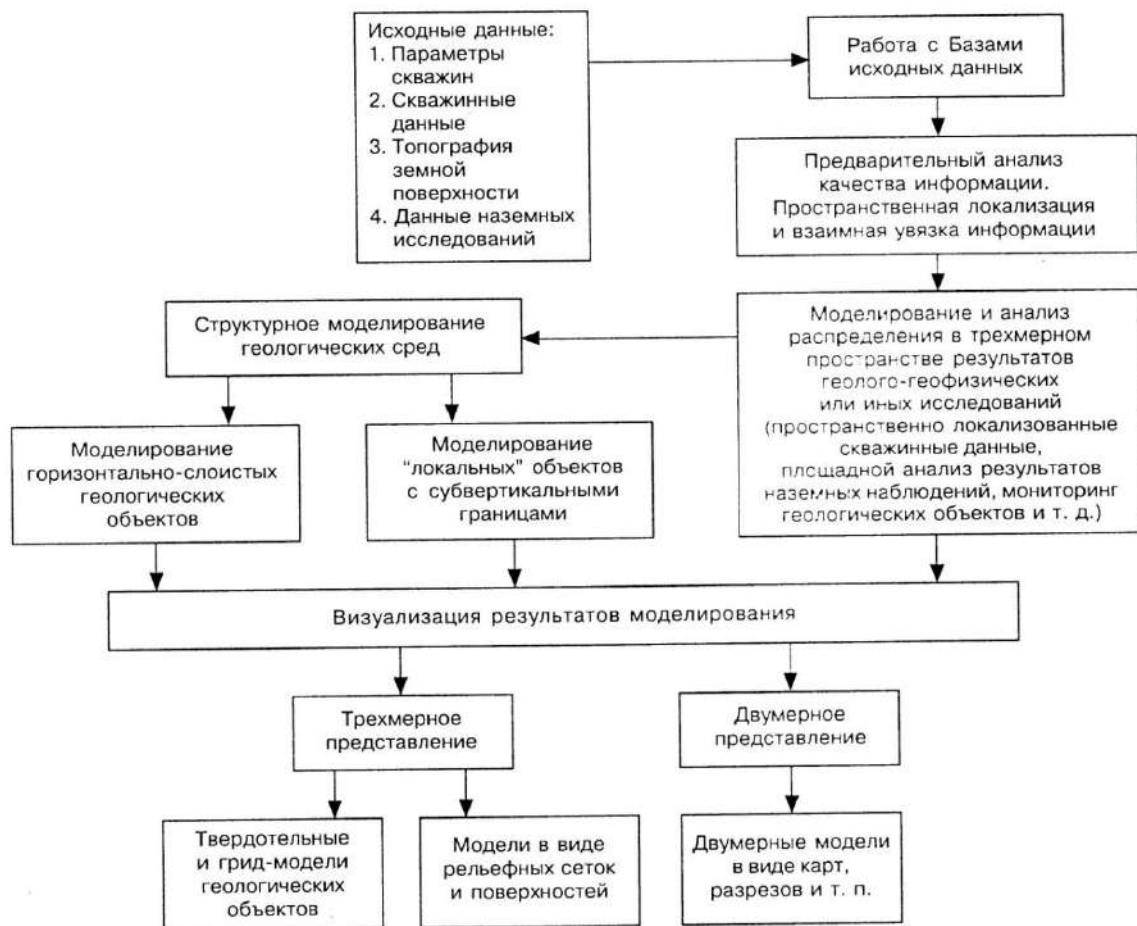
2. Расстояние в смысле равномерного уклонения:

$$R(f_1, f_2) = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| \leq \chi.$$

Вторая метрика сильнее, чем первая, т.е. если справедливо (2) то (1) выполняется.

Выбор меры близости определяется содержательной постановкой задачи.

После проведения полевых работ наступает этап обработки, стоимость которой непрерывно возрастает. Ниже представлена схема обработки информации:



ЛЕКЦИЯ 2 ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ НАБЛЮДЕНИЙ

Геометрия сети измерений оказывает существенное влияние на результаты работ. Как правило, стремятся к наблюдениям в узлах квадратной сети или иной правильной геометрической сети. Исходя из экономических соображений, как правило, сеть измерений прямоугольная. В процессе полевых работ на местности по разным причинам приходится отступать от проекта. Фактически сеть наблюдений квазирегулярная.

Маршрутные наблюдения проводятся вдоль некоторой линии, как правило, по пути легкого передвижения, вдоль дорог, с невысокими превышениями и т.д. Линия маршрута в этом случае, особенно при использовании навигатора, существенно отклоняется от прямой. В этом случае значения поля переносят на прямую линию профиля. Оценить ошибки восстановления поля очень трудно. Ценность таких наблюдений невысокая. Маршрутные измерения выполняют для оценки характера поля.

Сети наземных полевых измерений. Сеть пространственных наблюдений в скважинах и шахтах.

Определение координат пунктов геофизических измерений в настоящее время проводится с очень высокой точностью и трудностей не вызывает. Однако неизбежные отклонения от проекта изменяют геометрию сети измерений. Неравномерность сети оказывает значительное влияние на надежность выявления аномалий. При существенной неоднородности сети пунктов и случайных ошибках измерений появляется неустойчивость результатов интерполяции. Из-за особенностей алгоритма восстановления функции (интерполяции) на карте могут появиться ложные аномалии или сильно искажаться реальные аномалии. И, наоборот, из-за сильного сглаживания, на карте могут не появиться реальные аномалии.

ЛЕКЦИЯ 3 Построение карт

Геометрия сети наблюдений. Как правило, стремятся к наблюдениям в узлах квадратной сети или иной правильной геометрической сети. Исходя из экономических соображений, как правило, сеть измерений прямоугольная. В процессе полевых работ на местности по разным причинам приходится отступать от проекта. Фактически сеть наблюдений квазирегулярная.

Маршрутные наблюдения проводятся вдоль некоторой линии, как правило, по пути легкого передвижения, вдоль дорог, с невысокими превышениями и т.д. Линия маршрута в этом случае, особенно при использовании навигатора, существенно отклоняется от прямой линии. В этом случае значения поля переносят на прямую линию профиля. Оценить ошибки восстановления поля

очень трудно. Ценность таких наблюдений невысокая. Маршрутные измерения выполняют для оценки характера поля.

Сети наземных полевых измерений. Сеть пространственных наблюдений в скважинах и шахтах.

Определение координат пунктов геофизических измерений в настоящее время проводится с очень высокой точностью и трудностей не вызывает. Однако неизбежные отклонения от проекта изменяют геометрию сети измерений. Неравномерность сети оказывает значительное влияние на надежность выявления аномалий. При существенной неоднородности сети пунктов и случайных ошибках измерений появляется неустойчивость результатов интерполяции. Из-за особенностей алгоритма восстановления функции (интерполяции) на карте могут появиться ложные аномалии или сильно искажаться реальные аномалии. И, наоборот, из-за сильного сглаживания, на карте могут не появиться реальные аномалии.

Построение карт проводится по результатам измерений (геофизические поля) и наблюдений (геологические объекты). Карты могут быть представлены в виде изолиний или проекций векторов на горизонтальную или вертикальную плоскость (рис. 1). Чтобы правильно оценить надежность карты рассматривают расстояния между пунктами, плотность распределения пунктов на площади, характер распределения пунктов (регулярное, равномерное, случайное, групповое).

Гипотезу о равномерности пунктов измерений на территории проверяют с помощью критерия хи-квадрат:

$$\chi^2 = \sum_1^N \frac{(o_i - E)^2}{E}.$$

Гипотезу о случайном распределении точек проверяют с помощью критерия Пирсона:

$$\text{Pr} = \frac{e^{-\gamma} \gamma^r}{r!}.$$

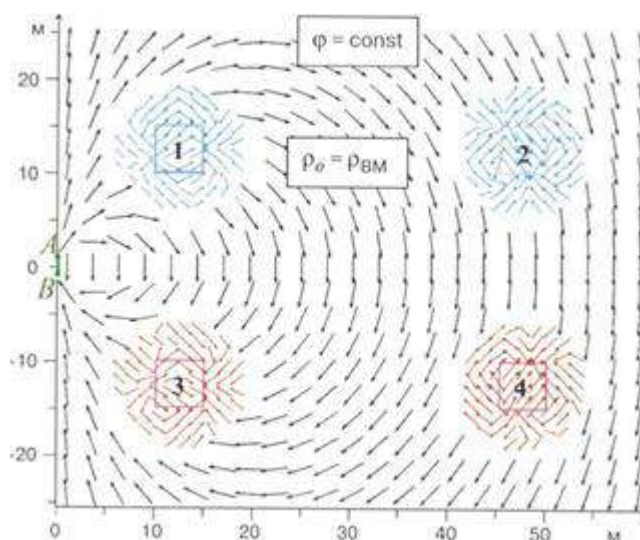


Рис. 1 Карта векторов

Метод ближайшего соседа предназначен для изучения характера распределения подобластей (точек), на которые разделена изучаемая территория. Математическое ожидание расстояния между N точками на территории площадью S равно:

$$D = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{N}}.$$

Обозначим среднее расстояние между соседними точками на территории d . Величина:

$$R = \frac{d}{D},$$

Является статистикой метода ближайшего соседа. Ее значение меняется от 0 до 2,15. $R=2,15$ соответствует расположению точек в вершинах шестиугольников (регулярному размещению точек). Критерием проверки о случайном расположении точек служит величина:

$$Z = \frac{(d - D)\sqrt{nN}}{0.26136\sqrt{S}},$$

где n – число измерений расстояний между точками. Величина Z распределена по нормальному закону.

Геофизические карты отражают распределение функций, которые мы считаем непрерывными и гладкими (имеющими в каждой точке поверхности измерения производную). Нередко приходится анализировать структурные карты геологических поверхностей (баженовская свита), которые построены по редкой сети скважин. Геологическая карта, несет отпечаток представлений автора о геологической истории территории.

До появления ЭВМ карты изолиний поля строили вручную. Качество карты зависело от квалификации техника, который ее строил. Эту карту редактировал и утверждал старший геофизик партии. В то время не было необходимости

преобразования измеренных значений в узлы регулярной сети. Построение осуществляли по нерегулярной сети. Карта отражала субъективное мнение автора. Т.е. разные авторы строили разные карты по одним и тем же измерениям.

С появлением ЭВМ задача построения карты решается, как правило, с помощью ЭВМ. Экономический эффект применения ЭВМ для построения карт велик, время на создание карт уменьшилось в сотни раз. Построение карт с помощью математических пакетов считают объективным, однако легко убедиться, что карты, построенные с помощью разных программ и математических пакетов, различаются. Алгоритм построения карты включает предположение автора алгоритма о закономерностях поведения поля. Интерполяция между пунктами наблюдений проводится, как правило, на основе полиномиального представления изучаемой функции и непрерывности производных изучаемой функции.

Как правило, ЭВМ сначала проводит интерполяцию измеренных значений поля в узлы квадратной сети (грид-файлы), а затем строит по этим значениям карту. В отличие от карт, построенных вручную, в математических пакетах предусмотрено вычисление погрешности построения изолиний. Специализированные пакеты основаны на алгоритмах, учитывающих свойства поля (гладкость, характер убывания с удалением от объекта и т. д.) и требования инструкции для соответствующего метода разведочной геофизики. В некоторых инструкциях указаны пакет и его версия, в которой необходимо строить карту поля. Их нельзя применять для построения других карт. Например, топографические карты изолиний содержат разрывы (отвесная скала), а производные геофизические поля непрерывны и бесконечное число их производных. Изображение аномалии на карте зависит от рельефа местности. Поэтому на картах нередко приводится упрощенное изображение топографической ситуации.

Инструкция предписывает, при построении графиков погрешность измерений на нем не может отображаться отрезком длиной более 1 мм. Это требование служит для того, чтобы при визуальном восприятии ошибки не казались аномалией. По той же причине на картах изолиний сечение не может быть меньше 2,5 погрешностей измерений. В этом случае на картах гарантировано не появятся аномалии (замкнутые изолинии), обусловленные ошибками измерений. Отчетная карта строится в масштабе съемки. На участках, где сеть измерений не обеспечивает надежной межпрофильной корреляции, изолинии поля не строят. При построении карт трансформаций также необходимо соблюдать требования инструкции. Оформление карт

магнитного поля масштабов 1:50000 и 1:25000 и карт силы тяжести масштабов 1:50000 и 1:20000 проводится по специальным инструкциям.

При построении карт от источников, подобранных в результате решения обратной задачи, расчет поля проводят в узлах регулярной сети. Если для тех же источников вычислить поле в пунктах измерений, вид карты будет иным. Сеть расчета для прямой задачи не может быть более густой, чем сеть наблюдений (рис. 1).

Для построения карты поля создают набор данных, содержащий плановые координаты и высоту пункта измерения, а также измеренное значение или его преобразование в этом пункте. Получаем матрицу $5 \times N$.

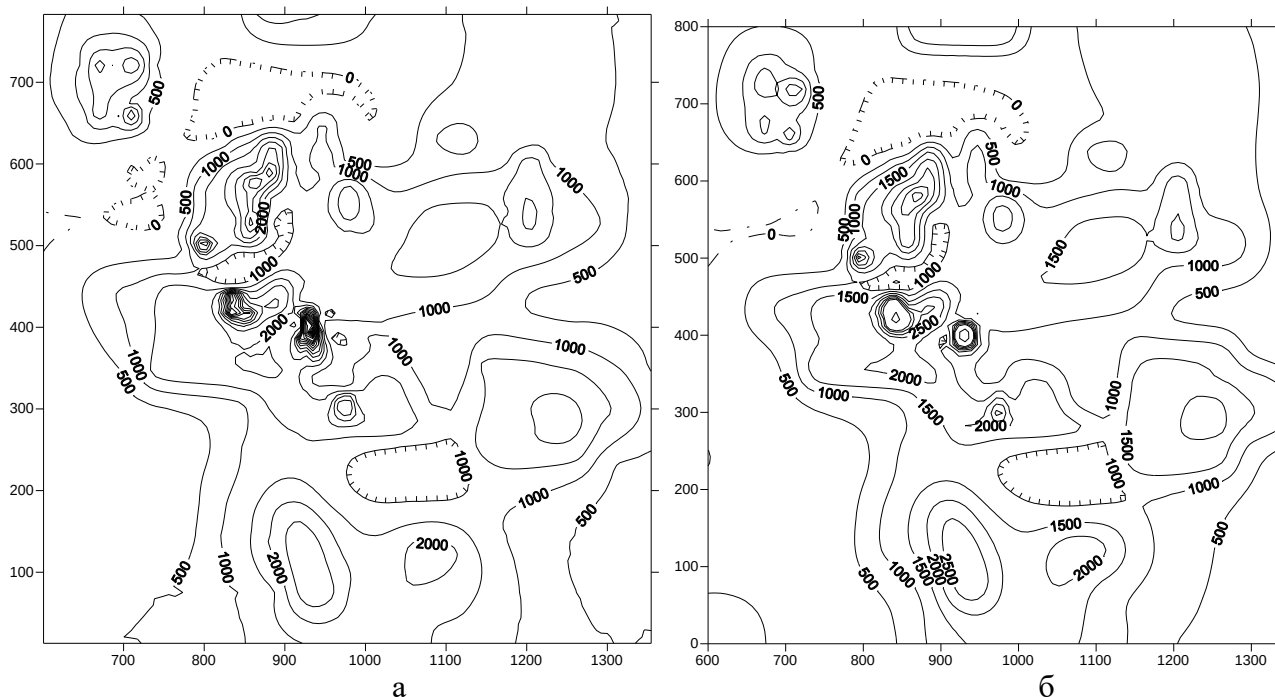


Рис. 1 Планы изодинам, построенные по результатам вычислений в точках измерения (а) и в узлах прямоугольной сети (б)

Пусть задана нерегулярная сеть измерений с координатами пунктов $\{x_i, y_i\}$ и измеренные значения в них. Определим набор из n точек соседних с точкой k . Расстояние от точки k до точки i равно:

$$d_{ik} = \sqrt{(x_{ik} - x_{ki})^2 + (y_{ik} - y_{ki})^2}.$$

Зная расстояния до набора соседних точек, найдем значение искомой функции в точке k :

$$T_k = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{T_i}{d_{ik}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_{ik}}}.$$

По этому правилу определим значения поля t в узлах регулярной сети.

Нет ничего практичнее хорошей теории. Было бы неплохо, если бы мы могли дать аналитическое описание измеренных полей, проще говоря, написать

формулу, описывающую измеренное поле. Это во многом бы облегчило дальнейшую обработку измеренных полей, например аналитическое продолжение поля.

На практике встречаются случаи, когда геофизические поля не меняются или меняются незначительно. Такие незначительные отклонения могут быть вызваны ошибками измерения или влиянием объектов небольших размеров, которые нас не интересуют. В этом случае поле с хорошим приближением можно описать выражением:

$$U(x, y) = \text{const}.$$

Нередко такую аппроксимацию принимают для региональных и фоновых полей.

Гораздо чаще для описания полей на отдельных площадях и участках применяют линейные функции. Для полей измеренных вдоль прямой линии:

$$U(x) = Ax + B.$$

Эту же функцию можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$U(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{\pi nx}{L}),$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L U(\xi) \cos \frac{\pi nx}{L} d\xi, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L U(\xi) \sin \frac{\pi nx}{L} d\xi.$$

Интерполяция. Через две точки можно провести только одну прямую. Через три точки можно провести параболу, а через четыре точки – кубическую параболу. Далее с увеличением числа пунктов измерения можно повышать степень интерполирующего полинома. График кривой пройдет через все точки. Однако полученная функция не будет отражать реальное поле. Аналитическое описание должно отражать физическое содержание задачи.

Поскольку измерения проведены в дискретных пунктах, на практике используют дискретное преобразование Фурье.

Для описания полей измеренных вдоль линии можно использовать рациональные дроби:

$$U(x) = \frac{Q}{Ax + B}, \quad U(x) = \frac{Q}{Ax^2 + Bx + C}, \quad U(x, y) = \frac{Q}{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}.$$

В задачах восстановления функции по значениям заданным на сетке используют экспоненциальные функции:

$$U(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + a_M e^{\alpha_M x},$$

где a_j, α_j искомые величины. Экспонента быстро увеличивается с ростом аргумента, поэтому ошибки измерения сильно влияют на результат.

При приближенном описании геофизических полей необходимо учитывать их специфичность. При удалении от источника электрический потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию, сила тяжести убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, магнитная индукция обратно пропорционально кубу расстояния. Функции приближенного описания гравитационного поля не пригодны для описания магнитного поля. При большой горизонтальной мощности объекта гравитационное поле постоянно, а магнитное поле меняется.

Для полей, измеренных на площади, и меняющихся вдоль одного какого либо направления применяют формулы:

$$U(x, y) = Ax + B, \quad U(x, y) = Ay + B, \quad U(x, y) = Ax + By + C.$$

Также часто для изолированных аномалий применяют полиномы невысоких степеней, как правило, не выше 4 степени. Например, уравнение второй степени

$$U(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D$$

описывает поверхности: эллипсоиды, двуполостные гиперболоиды, однополостные гиперболоиды, конусы второго порядка, эллиптические параболоиды, гиперболические параболоиды, эллиптические цилиндры (в том числе круговые), гиперболические цилиндры, параболы цилиндры. Других поверхностей быть не может. Форма изолиний соответствует линиям, получаемым в результате сечения этих поверхностей плоскостью.

Уравнение третьего порядка имеет вид:

$$U(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Hx + Wy + Q$$

или другие подобные выражения. Чаще всего они используются для описания региональных или фоновых полей. Первое уравнение описывает поверхности

На площади как правило присутствуют несколько аномалий разных размеров и интенсивности. Аномалии накладываются друг на друга, их значения известны только в дискретных пунктах наблюдения. Поле измерено на ограниченном участке. Для аналитического описания таких полей необходимо решить задачу:

- найти непрерывную на заданной площади вместе со своими производными функцию, значения которой в пунктах измерения совпадают с измеренными или отличаются от них на величину меньшую погрешности съемки.

Такую задачу называют аналитической аппроксимацией поля. Стандартное решение разложение в ряд по собственным функциям задачи.

Такое описание двумерной функции на прямоугольной площади с пунктами в узлах прямоугольной сети можно подобрать в виде двойных рядов Фурье. Статические гравитационные и магнитные поля удовлетворяют уравнению Лапласа. Решением уравнения Лапласа является потенциал $W(x, y, z) = e^{-iax - iby - cz}$,

где $c^2 = a^2 + b^2$. Линейная комбинация таких функций с произвольными коэффициентами также будет решением уравнения Лапласа. В том числе решением будет:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} S(a, b) e^{-cz - iax - iby} da db \quad (1),$$

где $S(a, b)e^{-cz}$ - преобразование Фурье функции $W(x, y, z)$ относительно переменных x и y . Обратное преобразование Фурье

$$S(a, b) = \iint_{P_0} e^{iax + iby} W(x, y) dx dy \quad (2).$$

Предположим, что после проведения процедуры интерполяции наблюдаемых данных получаем значения поля в узлах квадратной сети с шагом Δx . Тогда измеренная гармоническая функция $W(x, y)$ – функция с ограниченным спектром, так как она известна только в узлах квадратной сети со стороной Δx . Поэтому она может быть представлена в виде функции значения которой в узлах совпадают с данными измерений:

$$W(x, y) = \sum_k \sum_n W(k\Delta x, n\Delta x) \frac{\sin \pi(x / \Delta x - k)}{\pi(x / \Delta x - k)} \frac{\sin \pi(y / \Delta x - n)}{\pi(y / \Delta x - n)}.$$

Переход к прямоугольной сети тривиален. Обобщением может служить ряд:

$$U(I, J) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{2\pi n x_i}{L_x} \cos \frac{2\pi m y_j}{L_y} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nm} \cos \frac{2\pi n x}{L_x} \sin \frac{2\pi m y}{L_y} + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{2\pi n x_i}{L_x} \cos \frac{2\pi m y_j}{L_y} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{2\pi n x}{L_x} \sin \frac{2\pi m y}{L_y}.$$

При практических вычислениях ряд не может быть бесконечным, поэтому верхним пределом суммирования будет конечное число. После записи уравнений для всех точек измерения получим СЛАУ для определения коэффициентов ряда.

Общим недостатком всех выше перечисленных способов приближения является то, что они никак не соотносят подобранную функцию с источником поля. В.И. Ароновым предложено использовать в качестве приближающих функций поле материальной точки, Цирульский А.В. – для магнитного поля элементарным источником выбрал поле диполя. Однако и в этом случае переход от аппроксимирующей конструкции к реальным источникам очень затруднен. Е.Г. Булах предложил использовать поля горизонтальных цилиндров и уступов.

Трудности приближения полей одной функцией на участке в целом состоят в том, что значение функции в одной точке определяет поведение функции во всей области приближения. Эти недостатки вынудили обработчиков обратиться к локальному описанию. При таком описании участок делится на подобласти, на которых поле приближают простой функцией. На разных подобластях поле описывают разными функциями.

ЛЕКЦИЯ 4 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ И КАРТ

Нет ничего практичнее хорошей теории. Было бы неплохо, если бы мы могли дать аналитическое описание измеренных полей, проще говоря, написать формулу, описывающую измеренное поле. Это во многом бы облегчило дальнейшую обработку измеренных полей, например аналитическое продолжение поля.

На практике встречаются случаи, когда геофизические поля не меняются или меняются незначительно. Такие незначительные отклонения могут быть вызваны ошибками измерения или влиянием объектов небольших размеров, которые нас не интересуют. В этом случае поле с хорошим приближением можно описать выражением:

$$U(x, y) = \text{const}.$$

Нередко такую аппроксимацию принимают для региональных и фоновых полей.

Гораздо чаще для описания полей на отдельных площадях и участках применяют линейные функции. Для полей измеренных вдоль прямой линии:

$$U(x) = Ax + B.$$

Эту же функцию можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$U(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{\pi nx}{L}),$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L U(\xi) \cos \frac{\pi nx}{L} d\xi, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L U(\xi) \sin \frac{\pi nx}{L} d\xi.$$

Интерполяция. Через две точки можно провести только прямую. Через три точки можно провести параболу, а через четыре точки – кубическую параболу. Далее с увеличением числа пунктов измерения можно повышать степень интерполирующего полинома. График кривой пройдет через все точки. Однако полученная функция не будет отражать реальное поле. Аналитическое описание должно отражать физическое содержание задачи.

Поскольку измерения проведены в дискретных пунктах, на практике используют дискретное преобразование Фурье.

Для описания полей измеренных вдоль линии можно использовать рациональные дроби:

$$U(x) = \frac{Q}{Ax + B}, \quad U(x) = \frac{Q}{Ax^2 + Bx + C}, \quad U(x, y) = \frac{Q}{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}.$$

В задачах восстановления функции по значениям заданным на сетке используют экспоненциальные функции:

$$U(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + a_M e^{\alpha_M x},$$

где a_j, α_j искомые величины. Экспонента быстро увеличивается с ростом аргумента, поэтому ошибки измерения сильно влияют на результат.

При приближенном описании геофизических полей необходимо учитывать их специфичность. При удалении от источника электрический потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию, сила тяжести убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, магнитная индукция обратно пропорционально кубу расстояния. Функции приближенного описания гравитационного поля не пригодны для описания магнитного поля. При большой горизонтальной мощности объекта гравитационное поле постоянно, а магнитное поле меняется.

Для полей, измеренных на площади, и меняющихся вдоль одного какого либо направления применяют формулы:

$$U(x, y) = Ax + B, \quad U(x, y) = Ay + B, \quad U(x, y) = Ax + By + C.$$

Также часто для изолированных аномалий применяют полиномы невысоких степеней, как правило, не выше 4 степени. Например, уравнение второй степени

$$U(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D$$

описывает поверхности: эллипсоиды, двуполостные гиперболоиды, однополостные гиперболоиды, конусы второго порядка, эллиптические параболоиды, гиперболические параболоиды, эллиптические цилиндры (в том числе круговые), гиперболические цилиндры, параболические цилиндры. Других поверхностей быть не может. Форма изолиний соответствует линиям, получаемым в результате сечения этих поверхностей плоскостью.

Уравнение третьего порядка имеет вид:

$$U(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Hx + Wy + Q$$

или другие подобные выражения. Чаще всего они используются для описания региональных или фоновых полей. Первое уравнение описывает поверхности

На площади как правило присутствуют несколько аномалий разных размеров и интенсивности. Аномалии накладываются друг на друга, их значения известны только в дискретных пунктах наблюдения. Поле измерено на ограниченном участке. Для аналитического описания таких полей необходимо решить задачу: найти непрерывную вместе со своими производными на заданной площади функцию, значения которой в пунктах измерения совпадают с измеренными или отличаются от них на величину меньшую погрешности съемки. Такую задачу называют аналитической аппроксимацией поля. Стандартное решение разложение в ряд по собственным функциям задачи.

Такое описание двумерной функции на прямоугольной площади с пунктами в узлах прямоугольной сети можно подобрать в виде двойных рядов Фурье.

Статические гравитационные и магнитные поля удовлетворяют уравнению Лапласа. Решением уравнения Лапласа является потенциал $W(x, y, z) = e^{-iax-iby-cz}$, где $c^2 = a^2 + b^2$. Линейная комбинация таких функций с произвольными коэффициентами также будет решением уравнения Лапласа. В том числе решением будет:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} S(a, b) e^{-cz-iax-iby} da db \quad (1),$$

где $S(a, b)e^{-cz}$ - преобразование Фурье функции $W(x, y, z)$ относительно переменных x и y . Обратное преобразование Фурье

$$S(a, b) = \iint_{P_0} e^{iax+iby} W(x, y) dx dy \quad (2).$$

Предположим, что после проведения процедуры интерполяции наблюдаемых данных получаем значения поля в узлах квадратной сети с шагом Δx . Тогда измеренная гармоническая функция $W(x, y)$ – функция с ограниченным спектром, так как она известна только в узлах квадратной сети со стороной Δx . Поэтому она может быть представлена в виде функции значения которой в узлах совпадают с данными измерений:

$$W(x, y) = \sum_k \sum_n W(k\Delta x, n\Delta x) \frac{\sin \pi(x / \Delta x - k)}{\pi(x / \Delta x - k)} \frac{\sin \pi(y / \Delta x - n)}{\pi(y / \Delta x - n)}.$$

Переход к прямоугольной сети тривиален. Обобщением может служить ряд:

$$U(I, J) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{2\pi x_i}{L_x} \cos \frac{2\pi y_j}{L_y} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nm} \cos \frac{2\pi x}{L_x} \sin \frac{2\pi y}{L_y} + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{2\pi x_i}{L_x} \cos \frac{2\pi y_j}{L_y} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{2\pi x}{L_x} \sin \frac{2\pi y}{L_y}.$$

При практических вычислениях ряд не может быть бесконечным, поэтому верхним пределом суммирования будет конечное число. После записи уравнений для всех точек измерения получим СЛАУ для определения коэффициентов ряда.

Общим недостатком всех выше перечисленных способов приближения является то, что они никак не соотносят подобранную функцию с источником поля. В.И. Ароновым предложено использовать в качестве приближающих функций поле материальной точки, Цирульский А.В. - поле диполя. Однако и в этом случае переход от аппроксимирующей конструкции к реальным источникам очень затруднен. Е.Г. Булах предложил использовать поля горизонтальных цилиндров и уступов.

Трудности приближения полей одной функцией на участке в целом состоят в том, что значение функции в одной точке определяет поведение функции во всей области приближения. Эти недостатки вынудили обработчиков обратиться к локальному описанию. При таком описании участок делится на подобласти,

на которых поле приближают простой функцией. На разных подобластях поле описывают разными функциями.

Широкое применение в задачах восстановления функций нашли сплайны. Сплайны – это функции, склеенные из кусков некоторого заранее определенного набора функций. Самый распространенный пример сплайна – кусочно-линейный - ломанная. Параболический сплайн имеет на каждом звене описание в виде полинома второй степени $Ax^2 + Bx + Cy^2 + D$. На 3 узлах строится парабола, далее проводится гладкое продолжение. Недостатки параболического сплайна: осцилляции, не приближает вторую производную, неоднозначность построения.

Наиболее широкое применение в задачах приближения нашли кубические сплайны, тригонометрические сплайны, параметрические сплайны.

Определение. Интерполяционным кубическим сплайном $S(x)$ называют дважды непрерывно-дифференцируемые, которые удовлетворяют в узлах условиям интерполяции и на каждом отрезке совпадает с некоторым полиномом третьего порядка:

$$S(x) = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i.$$

Таким образом, кубический сплайн на n отрезках определена $4n$ параметрами. Для их определения используют $2n$ условия интерполяции, $n-1$ -склейка первой производной, $n-1$ – склейка второй производной. Два необходимо добавить: либо $S'(x_0) = 0$, $S'(x_N) = 0$, либо $S''(x_0) = 0$, $S''(x_N) = 0$. Введем обозначение $M_i = S''(x_i)$, длину расстояния между узлами $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Выражение второй производной примет вид:

$$M(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)}{h_i} + M_i \frac{(x_i - x)}{h_i}$$

Первая производная примет вид:

$$P'_i(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + C_i.$$

Отсюда интерполяционный полином примет вид:

$$P_i(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + C_i x + D_i.$$

Представим сумму двух последних слагаемых в виде:

$$C_i x + D_i = A_i (x_i - x) + B_i (x - x_{i-1}), \text{ что означает, что } C_i = A_i + B_i \text{ и } D_i = A_i x_i - B_i x_{i-1}$$

Интерполяционный полином примет вид:

$$P_i(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + A_i (x_i - x) + D_i (x - x_{i-1}).$$

$$\text{Тогда } P_i(x_{i-1}) = M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + A_i h_i = y_{i-1}. \Rightarrow A_i = \frac{y_{i-1}}{h_i} - M_{i-1} \frac{h_i}{6}.$$

$$P_i(x_i) = M_i \frac{h^2}{6} + B_i h = y_i, \Rightarrow B_i = \frac{y_i}{h} - M_i \frac{h_i}{6}$$

$$P'_i(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_i - M_{i-1})$$

$$P'_i(x_i) = M_i \frac{h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h}{6} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i-1}, \quad P'_i(x_i) = M_i \frac{h_{i-1}}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6} (M_{i+1} - M_i).$$

Получили СЛАУ вида

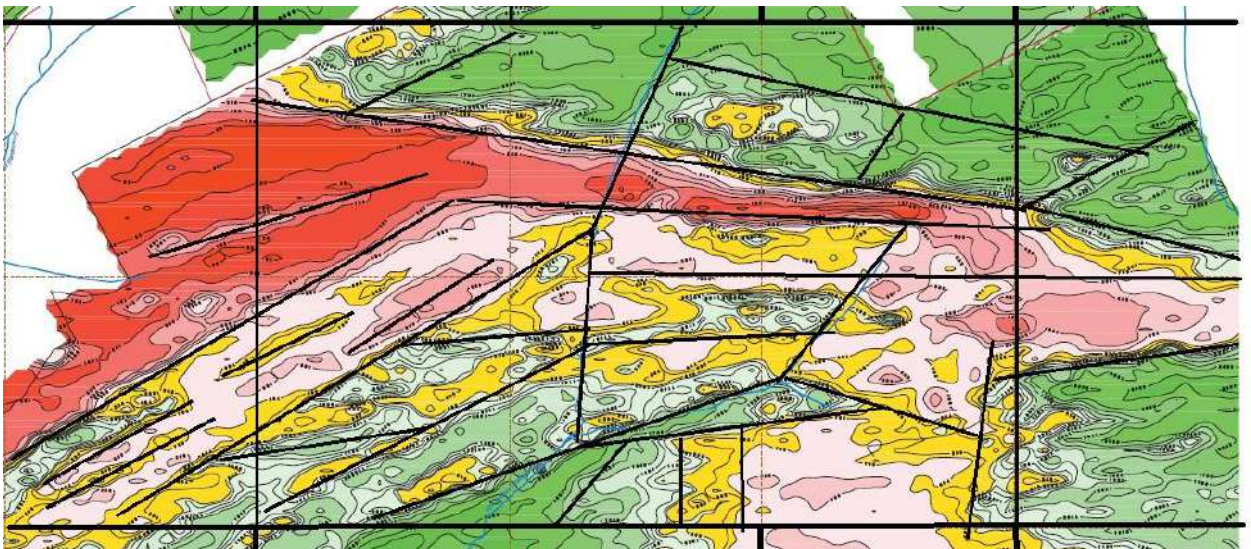
$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = -\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$$

Добавляем условия $M_0 = 0$ и $M_n = 0$ получаем трехдиагональную матрицу:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} \\ 0 & 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3 + h_4}{3} \end{array}.$$

Это матрица с диагональным преобладанием. Решение таких СЛАУ устойчиво.

Полученное аналитическое описание результатов измерений позволяет восстановить значение поля или положение поверхности в любой точке, с высокой точностью и малыми вычислительными затратами проводить обработку данных. Например, операции дифференцирования и интегрирования проводятся по правилам для аналитических функций. Для поверхностей сеть разбиения может быть треугольной, прямоугольной, квадратной.



ЛЕКЦИЯ 5 Построение разрезов

При изучении осадочных разрезов мы замечаем, что появление выше по разрезу некоторых пород зависит от характера предшествующего разреза. Процессы, в которых наблюдают влияние предшествующих событий на последующие, в математике называют цепями Маркова. В цепях Маркова вероятность перехода из одного состояния в другое зависит от предшествующего состояния. В цепях Маркова вероятности перехода считают постоянными. Если наблюдается зависимость только от предшествующего состояния, цепь Маркова называют цепью первого порядка. Возможно построение цепей более высокого порядка.

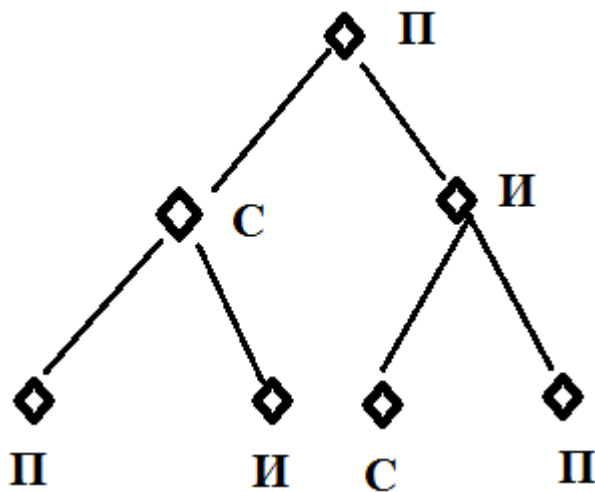
Вероятности перехода принято представлять в виде матриц:

Песчаник	0	0,5	0,5
Сланец	0	0,3	0,7
Известняк	0,5	0,5	0

При подсчете вероятностей берут несколько интервалов фиксированной длины.

В таблице указаны условные вероятности. Точнее в таблице статистические оценки этих вероятностей - частоты. Матрица переходных вероятностей полезный метод анализа и способ описания. Такие описания широко используются для моделирования литологической колонки.

Другой способ описания стратиграфической колонки – построение деревьев.



Вероятность появления литотипа через этап рассчитывается умножением вероятностей (частот) вдоль пути по дереву. Для учета мощности слоев в разрезе вводят скорости перехода.

При моделировании двухмерных разрезов с помощью цепей Маркова можно моделировать соответствующие геофизические поля.

При оценке запасов углеводородов необходимо описывать стратиграфические подразделения. Результаты исследования стратиграфических показывает, что изменчивость свойств горных пород в зависимости от глубины недостаточно точно для практических задач описывается случайными процессами. Необходимо эту изменчивость аппроксимировать суммой случайной и детерминированной составляющих. Характер этой изменчивости влечет такую же изменчивость геофизических параметров: физических свойств и полей.

Отображение структуры разреза вскрытого одной скважиной на разрез другой скважины сложнейшая задача. При этом, может вдоль скважины вскрыт весь разрез или часть разреза. Изначально эту задачу решали на основе корреляционного анализа кривых ГИС, в частности путем вычисления функций взаимной корреляции. Существенное влияние на решение задачи оказывает шаг измерений. Задача значительно усложняется тем, что отражение вещественного состава на свойства косвенное. Малое изменение вещественного состава часто вызывает значительное изменение свойств и наоборот. Сложное отражение в полях имеет мощность слоев и размер исследуемой площади..

Вайнберг предложил применять для анализа флиша марковские цепи. Другие специалисты применяют прослеживание реперов в разрезах скважин. Определяющую роль будет играть выбор опорного разреза (реперов). Для геофизических методов необходимо оценить информативность геофизических признаков. Волков А.М. рассмотрел информативность 14 методов исследования скважин. Он показал, что 2 признака практически полностью исчерпывают возможности каротажа.

Цепи Маркова.

ЛЕКЦИЯ 9 НЕФТЕГАЗОНОСНОСТЬ

При вычислении прогнозных ресурсов оценивают перспективы крупного региона. При вычислении оценки учитывают сходство с районами с установленной нефтегазоносностью, площадь территории, вещественный состав осадков, их вертикальную мощность, дислоцированность осадков. Одна из предлагаемых оценок:

$$\lg Q = 1.613 \lg W + 2.813,$$

где Q – общие ресурсы, W – средняя объемная скорость осадконакопления (тыс. км³/млн. лет).

Для подсчета запасов нефти в первом приближении необходимо вычислить:

$$Q = \iiint_V \alpha(x, y, z) m(x, y, z) \sigma(x, y, z) \eta(x, y, z) dV,$$

где переменные в порядке следования: коэффициент нефтенасыщенности, коэффициент открытой пористости, плотность нефти, коэффициент нефтеотдачи. Известно, что плотность нефти увеличивается при приближении к границе залежи, в том же направлении плотность газа уменьшается.

Для оценки прогнозных ресурсов используют уравнения регрессии:

$$\ln Q = \ln S + 0.1 \ln D + 0.61 \ln M - 0.5 \ln \tau + 2 \ln T - 0.5 \ln C + 2 \ln \vartheta + 2 \ln \theta,$$

где переменные в порядке следования в уравнении: прогнозные ресурсы, площадь нефтесбора, мощность резервуара, доля сапропелевой составляющей, температура пород, время погружения резервуара на глубину более 300 м, содержание органического вещества, коэффициент структурного экранирования, коэффициент литологического экранирования.

Другое уравнение:

$$\ln Q = \alpha_1 \ln KC + \alpha_2 \ln B + \alpha_3 \ln \Pi + \alpha_4 \ln S + \alpha_5 \ln \Gamma + \alpha_6 y + \alpha_7 \ln r + \alpha_8 \ln \frac{A+a}{A},$$

переменные в порядке следования в уравнении: КС катагенное преобразование РОВ, В - отношение растворенных в воде органических кислот к содержанию гидрокарбонат-иона, $\Pi = \frac{h-l}{h}$, где h – общая мощность пласта в пределах ловушки, l – суммарная мощность глинистых прослоев в пласте, S – сорбционные свойства пласта, Γ – нефтесборная площадь, y – мощность гидродинамически связанной толщи, r – частота возникновения условий для выделения углеводородов, A – амплитуда наиболее резкого регионального поднятия, a – амплитуда ловушки.

Набор признаков в уравнении регрессии для каждого района специфичен. Коэффициенты при признаках в уравнении регрессии для разных регионов разные.

Результат прогноза зависит от исполнителя работ и стадии геологоразведочной стадии.

При решении задач прогноза необходимо учитывать дисперсию признаков.

Основной результат геологоразведочных работ – промышленные запасы. Объем резервуара насыщенного нефтью вычисляют как произведение площади залежи на среднюю эффективную нефтенасыщенную мощность. Если результат умножить на пористость получим объем порового пространства. Если его умножить на коэффициент нефтенасыщенности получим объем нефти. Умножая плотности нефти на объем получим вес. Эту величину необходимо умножить на коэффициенты нефтеотдачи и коэффициент усадки – получим балансовые запасы. Для получения промышленных запасов необходимо балансовые запасы умножить на коэффициент извлечения.

Последовательность оценки запасов:

1. Определяют проницаемые интервалы в пласте. Строят карту эффективной мощности

2. Строят структурные карты кровли и подошвы пласта.
3. Определяют положение водно-нефтяного контакта.
4. Строят карту эффективной нефтенасыщенной мощности.
5. Находят объем нефтенасыщенных пород
6. Определение извлекаемых запасов.

В формуле подсчета запасов:

$$Q = Shm\eta\chi K_{но} K_{yc} .$$

используются средние постоянные значения параметров. Нередко изменчивость свойств не позволяет использовать это выражение для подсчета запасов, поскольку ошибки могут достигать десятков процентов.

ЛЕКЦИЯ 10 ПОДСЧЕТ ЗАПАСОВ РУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Рудное тело понятие не геологическое, а экономическое. Граница тела проводится, ограничивая объем, добыча в котором приносит прибыль или условно рентабельна (экономически выгодна для месторождения в целом или группы месторождений в целом). С развитием технологий добычи отвалы старых месторождений переходят в категорию месторождений. Полное представление о месторождении мы получаем по окончании разработки.

Обычно рудные тела разбивают на отдельные блоки – тела достаточно простой геометрической формы с некоторым постоянным содержанием полезного компонента – железа, окиси хрома и т. д. На рис. показано содержание серебра вдоль штольни на одном из месторождений. Видно, что содержание серебра меняется нелинейно, быстрее, чем линейная зависимость, дисперсия содержаний с увеличением содержаний увеличивается. При подсчете запасов такие зависимости сглаживают в скользящем окне. Формула расчета:

$$C(0) = \sum_1^T w_i C_i .$$

Выбор весов проводится на основе практического опыта, например, обратно пропорционально расстоянию от оцениваемой точки или линейной зависимостью.

Крайгинг – один из методов скользящего среднего. В нем обоснованно выбирают размер окна и весовые коэффициенты для узлов. Метод оценки пространственно распределенных величин и погрешности этой оценки. Успешно применялся для подсчета запасов серебра. Назовем переменную величину регионализированной, если она непрерывно меняется, но неизвестно ее аналитическое описание.

Пусть в нерегулярной сети измерений получены значения параметра. Значение в некоторой точке связано со значениями в соседних точках. Степень влияния зависит от направления и расстояния. Степень зависимости в каком либо направлении (по профилю) можно определить ковариацией $K(\Delta j)$. Для той же точки можно определить полудисперсию:

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_1^N (y_{i+1} - y_i)^2 .$$

Полудисперсия и ковариация связаны соотношением $\chi(\Delta j) = K(0) - K(\Delta j)$. С уменьшением расстояния до бесконечно малого определяются практически одними и теми же точками, т.е. при малых расстояниях они почти одинаковы, при увеличении расстояния полудисперсия асимптотически стремится к предельному значению $-K(0)$. Расстояние на котором эта величина достигается (почти) называют рангом. Ранг – расстояние на котором значения параметра можно считать независимыми. Если между точками расстояние больше ранга, в центре интервала находятся точки, значения параметра в которых никак не связано со значениями на концах. Оценку запасов проводить нельзя.

График полудисперсии методом наименьших квадратов аппроксимируют функциями

$$\chi(h) = 3\alpha \lg |h|, \quad \chi(h) = \alpha |h|.$$

Выбор правильной модели этой зависимости самый главный этап обработки. График этой зависимости называют вариограммой. Вариограммы рассчитывают как минимум по трем направлениям, чтобы убедиться в том, что распределение переменной изотропное. На практике чаще всего данные считают изотропными и стационарными.

Для точечного крайгинга необходимо построить уравнение скользящего среднего, а следовательно необходимо определить весовые коэффициенты в этом уравнении. Составляют СЛАУ для определения весовых коэффициентов.

Крайгинг позволяет получить более надежные оценки содержаний, чем полиномиальный тренд-анализ. Кроме того крайгинг позволяет дать оценку вероятной ошибки

При вычислении прогнозных ресурсов углеводородов оценивают перспективы крупного региона. При вычислении оценки учитывают сходство с районами с установленной нефтегазоносностью, площадь территории, вещественный состав осадков, их вертикальную мощность, дислоцированность осадков. Одна из предлагаемых оценок:

$$\lg Q = 1.613 \lg W + 2.813,$$

где Q – общие ресурсы, W – средняя объемная скорость осадконакопления (тыс. км³/млн. лет).

Для подсчета запасов нефти в первом приближении необходимо вычислить:

$$Q = \iiint_V \alpha(x, y, z) m(x, y, z) \sigma(x, y, z) \eta(x, y, z) dV,$$

где переменные в порядке следования: коэффициент нефтенасыщенности, коэффициент открытой пористости, плотность нефти, коэффициент нефтеотдачи. Известно, что плотность нефти увеличивается при приближении к границе залежи, в том же направлении плотность газа уменьшается.

Для оценки прогнозных ресурсов используют уравнения регрессии:

$$\ln Q = \ln S + 0.1 \ln D + 0.61 \ln M - 0.5 \ln \tau + 2 \ln T - 0.5 \ln C + 2 \ln \vartheta + 2 \ln \theta,$$

где переменные в порядке следования в уравнении: прогнозные ресурсы, площадь нефтесбора, мощность резервуара, доля сапропелевой составляющей, температура пород, время погружения резервуара на глубину более 300 м, содержание органического вещества, коэффициент структурного экранирования, коэффициент литологического экранирования.

Другое уравнение:

$$\ln Q = \alpha_1 \ln KC + \alpha_2 \ln B + \alpha_3 \ln \Pi + \alpha_4 \ln S + \alpha_5 \ln \Gamma + \alpha_6 y + \alpha_7 \ln r + \alpha_8 \ln \frac{A+a}{A},$$

переменные в порядке следования в уравнении: КС катагенное преобразование РОВ, В - отношение растворенных в воде органических кислот к содержанию гидрокарбонат-иона, $\Pi = \frac{h-l}{h}$, где h – общая мощность пласта в пределах ловушки, l – суммарная мощность глинистых прослоев в пласте, S – сорбционные свойства пласта, Γ – нефтесборная площадь, y – мощность гидродинамически связанной толщи, r – частота возникновения условий для выделения углеводородов, A – амплитуда наиболее резкого регионального поднятия, a – амплитуда ловушки.

Набор признаков в уравнении регрессии для каждого района специфичен. Коэффициенты при признаках в уравнении регрессии для разных регионов разные.

Результат прогноза зависит от исполнителя работ и стадии геологоразведочной стадии.

При решении задач прогноза необходимо учитывать дисперсию признаков.

Основной результат геологоразведочных работ – промышленные запасы. Объем резервуара насыщенного нефтью вычисляют как произведение площади залежи на среднюю эффективную нефтенасыщенную мощность. Если результат умножить на пористость получим объем порового пространства. Если его умножить на коэффициент нефтенасыщенности получим объем нефти. Умножая плотности нефти на объем получим вес. Эту величину необходимо умножить на коэффициенты нефтеотдачи и коэффициент усадки – получим балансовые запасы. Для получения промышленных запасов необходимо балансовые запасы умножить на коэффициент извлечения.

Последовательность оценки запасов:

1. Определяют проницаемые интервалы в пласте. Строят карту эффективной мощности
2. Строят структурные карты кровли и подошвы пласта.
3. Определяют положение водно-нефтяного контакта.
4. Строят карту эффективной нефтенасыщенной мощности.
5. Находят объем нефтенасыщенных пород
6. Определение извлекаемых запасов.

В формуле подсчета запасов:

$$Q = Shm\eta\chi K_{no} K_{yc} \cdot$$

используются средние постоянные значения параметров. Нередко изменчивость свойств не позволяет использовать это выражение для подсчета запасов, поскольку ошибки могут достигать десятков процентов.

Подсчет запасов золота

Подсчет запасов угля.

ЛЕКЦИЯ 13 ПРИНЦИПЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕДР И ЭТАПЫ АНАЛИЗА ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Практикой выработаны принципы изучения недр:

1 Принцип последовательных приближений. Изучение геологического строения осуществляется последовательно в разных масштабах от мелкого к крупному, т. е. от общего к частному. Этот принцип обеспечивает оптимальность финансовых затрат, временных затрат и информационной содержательности получаемых результатов. Принцип последовательных приближений означает, что изучение проводится в последовательности: провинции, зоны, районы, структуры, участки. Министерством природных ресурсов Российской Федерации установлены стадии геологоразведочных работ:

1 стадия. Региональное геологическое изучение недр и прогнозирование полезных ископаемых (масштаб работ 1:500000 и мельче).

2 стадия. Поисковые работы. Цель работ - выявление проявлений полезных ископаемых.

3 стадия. Оценочные работы. Цель работ – отбраковка проявлений полезных ископаемых, не представляющих промышленной ценности.

4. Разведка месторождения. Цель работ – изучение месторождения для составления ТЭО освоения месторождения.

5. Эксплуатационная разведка.

2 Принцип аналогии – один из самых главных и давно применяемых принципов. Он предполагает сравнение с эталонами, например со

стратотипами. Для оценки перспектив площади проводят сравнение с хорошо изученными территориями со сходным геологическим строением.

3 Принцип выборочной детализации – проведение работ на выделенных участках с большей детальностью. На таких участках в больших объемах проводится бурение, изучение образцов лабораторными методами.

4 Принцип равной достоверности. На всей площади степень изученности должна быть одинаковой.

5 Принцип полноты исследования. Территорию необходимо всесторонне изучать всеми доступными методами. Например, изучить изменчивость физических свойств, ее связь с изменчивостью вещественного состава пород.

6 Принцип разумных затрат – оптимизация времени и финансовых затрат.

В разных методах изучения недр эти принципы приобретают свои особенности. Например, В.Н. Страхов сформулировал принципы при изучении недр потенциальными геофизическими методами, которые, в основном, справедливы и для других геофизических методов поисков и разведки месторождений полезных ископаемых.

Предварительная схема анализа геофизических полей указана в проекте работ. Несмотря на то, что геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых все более приближаются к стандартным технологиям, выполняемым в соответствии с установленным стандартом и инструкциями, они в значительной степени имеют исследовательский характер. Поэтому после проведения съемки уточняют последовательность анализа физических полей и перечень процедур и алгоритмов обработки и истолкования.

Анализ геофизических полей проводится в следующей последовательности:

1. Изучение работ предшественников. Анализ региональной геологической обстановки и всех имеющихся региональных геофизических полей. Постановка задач геологического истолкования геофизических полей. Определение сотрудников, своих и привлеченных из других организаций, способов и средств (программных пакетов), необходимых для истолкования геофизических материалов. Решение прямых задач и имитационное моделирование.

2. Обработка и анализ результатов измерений физических свойств горных пород. Определение законов распределения и величин эффективных параметров. Выявление корреляционных связей и зависимостей между свойствами. Построение уравнений регрессии вида:

$$\chi = A\sigma + B, \rho = C\chi + D.$$

3. Выделение структурно-вещественных комплексов (СВК) – выделение групп горных пород, которые можно определить по выбранному комплексу геофизических методов.

4. Качественная интерпретация. Предварительное определение геометрических и физических параметров СВК, с небольшим объемом вычислений, без решения объемных обратных задач. Составление схем геофизических полей

5. Количественная интерпретация для каждого метода – решение обратных задач для каждого физического поля с применением методов регуляризации. Создание однометодных физико-геологических объемных моделей. Увязка результатов истолкования данных полевых и скважинных измерений.

6. Комплексная интерпретация – согласование решений обратных задач. Выявление корреляционных связей между разными полями, между полями и геологическими границами. Результативные материалы содержат все объекты, выделенные по разным полям.

7. Геологическое истолкование – наделение геологическим содержанием выделенных объектов, результаты геофизических работ формулируются в геологических терминах: гранит, дайка, песчаник, пласт, падение, простирание и т. д. Составление геолого-геофизических разрезов и трехмерных моделей.

8. Разработка рекомендаций для дальнейших исследований. Выделение перспективных участков для изучения в крупном масштабе, перечень рекомендуемых методов изучения, прогнозные ресурсы.

Существует несколько **методообразующих идей** на основе которых разрабатывают методы истолкования:

Идея аналитической аппроксимации – приближенное описание реальных объектов. При обработке интегрирование заменяют суммированием, производные конечно-разностными схемами, широко применяются итерационные вычислительные схемы. Геологическая среда сложная, поэтому ее описывают простыми математическими конструкциями. Метод подбора – аналитическая аппроксимация.

Идея алгебраизации – описание задачи численными параметрами, сведение поставленных задач к решению алгебраических задач. Описание геологических поверхностей уравнениями. Определение параметров свести к решению уравнений.

Идея критериальности – решение задач и достижение цели должно оцениваться критериями, сформулированными на этапе планирования геологоразведочных работ. ДОЛЖЕН БЫТЬ ЗАДАН КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕННЫХ РАБОТ.

Длительное время основным критерием был критерий наименьших квадратов. В последнее время рассматриваются другие критерии принятия решений:

1. В условиях неопределенности
 - а) критерий равнозначных состояний Лапласа основан на построенной функции потерь
 - б) максимина Вальда – поиск минимальных наибольших потерь (природа ведет себя как враг)
 - в) минимакса сожалений – потери в результате упущенных возможностей на основе построения функции сожаления
 - г) критерий пессимизма-оптимизма Гурвица
выбор либо все плохо либо все отлично
2. В условиях риска
 - а) критерий максимума ожидаемой полезности
 - б) Критерий Ходжи – Лемана строится функция полезности
 - в) критерий наиболее вероятного состояния
 - г) критерий минимума ожидаемых сожалений

Идея согласования множества решений – усреднение характеристик по множеству решений, не противоречащих известным данным. Комплексное геологическое истолкование данных нескольких методов Один из подходов – обезразмеривание полей разной природы, их нормирование и переход к анализу произведений и сумм относительных величин. Другой подход – вычисление производных и интегралов (псевдополей).

Идея распознавания образов – процедуры принятия решений, суть которых надделение полученного набора параметров геологическим содержанием.

Задачу распознавания образов по геофизическим данным можно сформулировать следующим образом:

1. С помощью имитационного моделирования создать физико-геологические модели возможных типов месторождений.
2. Разбить изучаемую площадь на участки, отличающиеся по геофизическим данным.
3. Выделение признаков, которые свидетельствуют о возможном рудном процессе
4. Отнесение участков к группе заслуживающих дальнейшего изучения и бесперспективных.
5. Геологическое истолкование с помощью процедур искусственного интеллекта, Окончательное решение принимается естественным интеллектом, основанным на квалификации, интеллекте, эрудиции и интуиции интерпретатора (информация мать интуиции).

Существует два подхода: с использованием эталона искомых объектов – образа геологического объекта в многомерном пространстве. Для создания надежного эталона необходимо иметь сведения о десятках месторождений, что крайне редко возможно. Безэталонная классификация – задача естественного расслоения многомерных данных. Выделенные классы могут не иметь геологического содержания.

Идея гарантированного подхода.

Опыт истолкования геолого-геофизических данных позволил выделить принципы анализа: выделение областей заведомо не содержащих источники и областей гарантировано содержащих искомые источники (геологические тела).

ЛЕКЦИЯ 11 ПРИНЦИПЫ АНАЛИЗА ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1.Целеноправленности – любые геологоразведочные работы проводятся для достижения цели поставленной в проекте работ, например, поиска мелких по запасам месторождений угля до глубины 500 м. Сеть измерений, алгоритмы обработки, граф истолкования геолого-геофизических данных – должны обеспечить достижение цели.

Цель работ определена геологическим заданием, она указана на обложке проекта работ: Проект на проведение геофизических работ масштаба 1:10000 в Коркинском районе Челябинской области в 2018 г. с целью поисков месторождений угля. Анализ геофизических данных направлен на достижение поставленной цели.

Для достижения цели необходимо поставить задачи каждому геофизическому методу комплекса геологоразведочных работ, решение которых приведет к успеху. Например, провести электроразведку, ВСП, РВП с целью выделения зон метасоматоза.

2. Системности – анализ проводится с учетом всех связей, всех геолого-геофизических данных, а не только того поля, которое изучают. Принцип системности основан на двух базовых положениях:

1 Всеобщей связи – система представляет собой набор элементов взаимодействующих друг с другом. Особенно ярко это проявляется на месторождениях высокомагнитных руд.

2 Иерархии – упорядоченности объектов, находящихся на территории, в некоторой последовательности, например, по перспективности для дальнейшего изучения и масштабу проводимых работ.

Построение системной модели геологической среды проводят по:

- противоречивым данным, поскольку геофизические поля обусловлены различными физическими свойствами,

- отрывочным данным, на различных участках в нашем распоряжении не все поля, на некоторых участках съемку провести невозможно (болото, обрыв, техногенные помехи),

- при отсутствии некоторых данных, (не было проведено измерение остаточной намагниченности)

- несогласованным данным, измерения чаще всего по разным сетям пунктов,

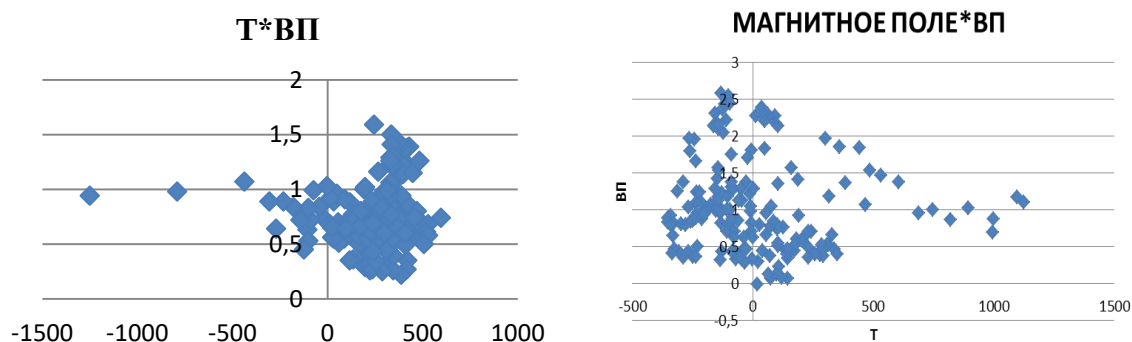
- неопределенности, свойства горных пород на площади меняются в некотором диапазоне,

- при невозможности формализации некоторых данных (окраска породы, цвет черты, текстура, структура породы, открытая пористость, закрытая пористость, и т. д.).

- геологическая среда представляет собой набор многокомпонентных сложно построенных объектов, связанных множеством взаимосвязей, причем некоторые взаимосвязи не всегда можно описать количественными соотношениями.

Выявление этих связей часть процесса истолкования. Геологическая среда не механический набор элементов, а единый объект, состоящий из взаимодействующих элементов, что приводит к новому качеству. Это свойство наиболее ярко проявляется в геофизических полях. Изменение одного элемента модели влечет изменение всей модели. При поисках золота при приближении к рудной зоне, часто устанавливают резкое увеличение дисперсии полей, противоположное изменение кажущегося сопротивления, поляризуемости, магнитного поля (рис. 11.1).

Использования корреляционных связей – при проведении комплексной интерпретации необходимо учитывать связи между физическими параметрами, которые отражают вещественный состав геологических объектов. На основе выявленной корреляционной связи плотности и скорости упругих волн в горных породах по данным сейсморазведки создают объемную плотностную модель, для которой решают обратную задачу гравиразведки.



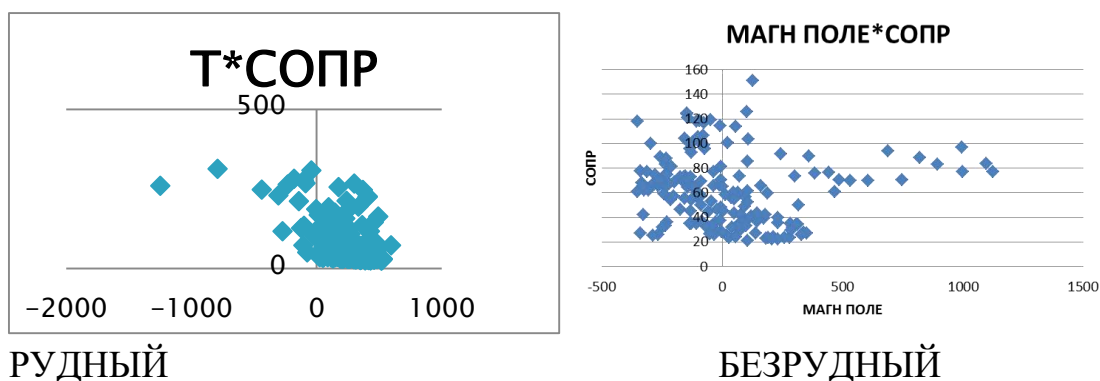


Рис.11.1 Поле корреляции рудных и безрудных участков

Многостадийности – одну и ту же территорию изучают в соответствии со стадиями геологоразведочных работ. Работы проводят в последовательности соответствующей стадиям геологического изучения и масштабам: региональной - 1:100000, 1:50000, поисковой - 1:10000 и так далее. Сначала изучают региональное поле, потом локальное. Изучение площади завершают детальными работами и измерениями на интерпретационных профилях с меньшим шагом наблюдений и повышенной точностью на перспективных участках. Геологические работы на одной площади направлены на решение разных геологических задач: геологическое картирование, поиски и т.д. Сначала изучают структуры, затем СВК, затем поиск МПИ, затем изучение отдельных рудных тел и залежей.

3. Определяющей роли интерпретационного процесса – весь процесс изучения построен под имеющиеся технологии истолкования. Прежде чем проводить полевые работы необходимо определить, какие процедуры обработки и в какой последовательности будут применены к результатам измерений и полученным данным. Процесс истолкования полезно изображать в виде сетевого графика (графа) или диаграммы Грамма. Процесс анализа результатов и перечень процедур обработки предусматривается проектом, их корректируют в ходе выполнения работ.

Предварительная схема анализа геофизических полей указана в проекте работ. На основе схемы составляется смета, т. е. выделяют деньги, в том числе на заработную плату. Несмотря на то, что геологоразведочные работы все более приближаются к стандартным технологиям, выполняемым в соответствии с установленным стандартом, они в значительной степени имеют исследовательский характер. Поэтому после проведения съемки определяют последовательность анализа физических полей и корректируют граф обработки (принципы 7 и 8).

4.Формализации – поставленные задачи необходимо перевести на язык математики. Это идеализация, следует помнить, что геологическая задача не

тождественна математической задаче. Геологические границы аппроксимируют и описывают линейными функциями, что конечно является приближением и идеализацией реальной геологической обстановки.

Геологические термины и понятия нельзя выразить в строгой математической форме, как впрочем биологические, исторические и другие. В ином случае осталась бы одна наука – математика. Название горной породы изначально допускает широкий диапазон изменения минерального состава, что находит отражение в физических свойствах и полях и приводит к необходимости описания среды усредненными характеристиками. Возможно и обратное – существенное изменение физических свойств с геологической точки зрения ничего не меняет. Например, небольшое изменение содержания магнетита в горной породе существенно меняет интенсивность магнитного поля.

В методе подбора стремятся к близости измеренного поля и теоретического. До появления ЭВМ степень близости (качество подбора) оценивалась интерпретатором. При компьютерной обработке необходимы математические оценки. Формальное выражение идеи подбора:

$$\sum_{i=1}^N (g_{i_i}^{ИЗМЕР} - g_i^{ТЕОР})^2 \rightarrow MIN$$

Выбор критерия минимизации не отражает геологическое содержание задачи. Его заимствуют из другой отрасли знаний – математики. Критериев близости функций, используемых в разведочной геофизике много: МНК, минимакса и другие.

Линеаризации – сведение нелинейных уравнений при небольшом изменении аргументов или параметров задачи к линейным уравнениям, использование самых простых линейных зависимостей, методика работы с которыми хорошо разработана:

$$\text{для плотности } \sigma = Av + B,$$

$$\text{положение плотностной границы } H = C\Delta g + D.$$

Часто используют разложение аналитических функций в ряд и выделение линейной части ряда:

$$\text{ряд Тейлора } f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \dots$$

Это разложение применяется при выводе формулы электрического потенциала диполя:

$$\text{бином Ньютона } (1 + x)^n = 1 + nx + \dots$$

Разложение применяется при выводе формулы расчета влияния небесных тел на величину силы тяжести и при выводе формулы влияния наклона оси чувствительности гравиметра. Пример: взаимосвязь плотности и магнитной

восприимчивости, глубины геологической границы свит с разной плотностью и интенсивности физического поля.

Регуляризации - применение методов преодоления некорректности (отсутствие решения в выбранном модельном классе, множественности решений, неустойчивости) обратных задач. Формальная запись регуляризующего алгоритма:

$$\sum_{i=1} (f_{ИЗМ} - f_{ТЕОР})^2 + \sum (P_{i0} - P_{ПОДБОРА})^2 \Rightarrow MIN ,$$

В этом выражении второе слагаемое обеспечивает не слишком большое отклонение от начальной модели геологического строения.

Параметризации – сведение поставленной геологической задачи к отысканию относительно небольшого числа параметров (десятки в 60-е годы XX века, 30000 – 40000 в современное время). Чем меньше параметров, тем устойчивее решение, т.е. уменьшение влияния изменения начального приближения на решение. Чем меньше параметров, тем грубее аппроксимация среды. **Уменьшение числа определяемых параметров основной путь снижения степени некорректности обратной задачи.**

Шар и круговой горизонтальный цилиндр определяются 3 параметрами, прямоугольный параллелепипед – 7 параметрами, усеченная 4-хугольная пирамида – 9.

Редукции математической задачи к СЛАУ – методы решения СЛАУ разных типов хорошо разработаны, чего нельзя сказать о системах нелинейных. Описание поля с помощью кубических сплайнов сводят к решению СЛАУ размерности $4N$, где N – число звеньев. Также подбирают региональный фон в виде линейной функции – по характерным не искаженным локальными аномалиями значениям поля. Задача аналитической аппроксимации сводится к решению СЛАУ. К решению СЛАУ сводят решение интегральных уравнений.

Упрощение задачи путем использования эквивалентных источников для решения частных задач – аналитическая аппроксимация. Под аналитической аппроксимацией подразумевают замену значений поля набором сингулярных источников, т. е. источниками, не имеющими объема (стержни, полосы, точки и т.п.). Определение мощности источников приводит к решению СЛАУ. Окончательное решение формулируют в геологических терминах. Сингулярные источники применяют для формального описания поля, в тех случаях, когда не ставят задачу определения геологического строения.

5. Модельности – на основе априорной информации формируют геологическую модель, геометрическую модель среды, модель поля, модель связи физических параметров:

$$\chi = A\sigma + B, \quad \rho = C\chi + D,$$

модель интерпретации. В геологии, моделирование – процесс уточнение усовершенствования ранее существующей модели на основе полученных новых данных (рис. 11.2). Модель отражает только существенные свойства прототипа. Лучшая модель кота – это кот, желательно тот же самый. Модель всегда отражает часть свойств объекта, другая часть свойств не рассматривается. Особенность геологоразведки в том, что цель и результат работ – создание модели.

Широкое использование **имитационного моделирования** – необходимо провести решение прямых задачи для большого числа геологических ситуаций, как рудных, так и безрудных, для разных масштабов оруденения и уровня эрозионного среза. Имитационное моделирование позволяет рассмотреть большое количество возможных ситуаций, в том числе таких которые ранее на рассматриваемом объекте не зафиксированы. Имитационное моделирование позволяет оценить несколько конкурирующих гипотез о геологическом строении территории.

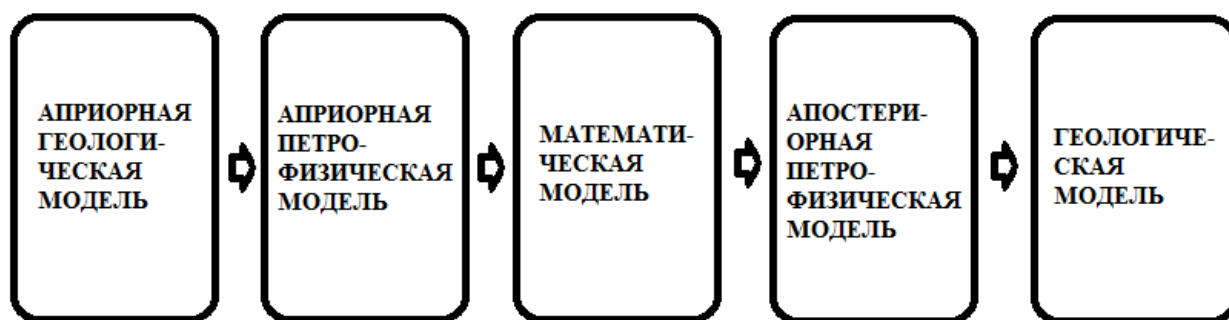


Рис.11.2 Схема создания геолого-геофизической модели

6. Принцип обратной связи – в процессе анализа по мере накопления новых знаний в результате проведенных работ или обнаружения новых данных необходимо корректировать исходные модельные представления или менять цель работ и задачи отдельных методов ГРР. На рис. 11.3 представлена модель месторождения, в которой направление падения рудного тела после проведения гравirazведки изменено на противоположное. Падение рудного тела не совпадает с падением границ вмещающих комплексов.

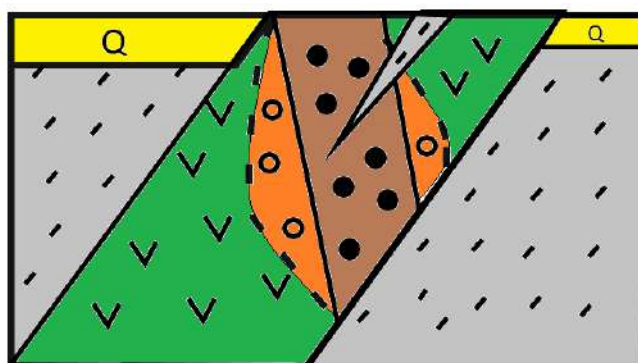


Рис. 11.3 Модель месторождения

7. Адекватности используемого инструментария – методы истолкования не должны противоречить реальной ситуации. Например, при изучении горных районов нельзя использовать идеализацию плоской поверхности наблюдений. Всегда необходимо учитывать конечность области, на которой измерено поле (при использовании интегральных методов учитывают только конечную область), поскольку наши континуальные теории решения обратных задач предполагают измерения на бесконечной площади. Измерения проводятся неточно с некоторой погрешностью. Поэтому проводить подбор поля проводят с погрешностью не меньшей чем утроенная погрешность съемки. При значительных размерах территории ($L > 200$ км) необходимо учитывать сферичность нашей планеты. В континуальных теории принято, что поле известно в каждой точке. При полевых работах измерения проводятся в узлах дискретной сети пунктов.

8. Простоты и общности используемых средств – не следует использовать сложные процедуры там, где можно обойтись простыми средствами, особенно если это не приводит к приросту получаемой информации. Для описания связей физических параметров используют полиномы 1 или 2 степени, редко 3 степени. Для описания геологических поверхностей применяют полиномы невысоких степеней. Чаще всего в геофизике применяют для аппроксимации линейные функции, тригонометрические функции, логарифмические функции.

9. Использование искусственного интеллекта. Применение алгоритмов имитирующих разумные действия человека, направленные на распознавание образов. Искусственный интеллект это программы реализующие алгоритмы самообучения. Такие программы должны реагировать на изменение ситуации, отчасти моделирующие эволюцию. Например, алгоритм отжига (отсечение лишнего), алгоритм нейронных сетей, алгоритм муравья (задача коммивояжера), генетические алгоритмы, алгоритмы нечеткой логики, алгоритм систем с правилами, марковские цепи, умные агенты. Признак интеллекта логические операции, процедуры выбора из нескольких возможных вариантов, описывающие правила принятия решения. Особенно популярны алгоритмы интерпретации нейронных сетей при геофизических исследованиях скважин.

В ближайшем будущем технологии искусственного интеллекта будут доминировать во всех геофизических методах и на полевых работах, и при проведении геологического истолкования, и особенно при истолковании комплексных данных.

10. Изучения помех – без правильной оценки погрешности в измеренных данных истолкование проводить нельзя. Например, требование к сечению изолиний исключают появление аномалий, обусловленных инструментальной

погрешностью и методикой измерений. Необходимо оценивать географические и геологические помехи. Геологические помехи создают объекты, поле которых при выбранной сети измерений значимо не более чем в двух пунктах измерений. Существуют помехи связанные с поверхностью наблюдения и сферической формой нашей планеты, их величина может существенно исказить поле объекта.

В настоящее время распределение помех описывают нормальным законом распределения. Практика указывает на то, что распределение помех на площади неравномерное по величине и в пространстве.

11. Исключения известного – эффекты, обусловленные известными объектами, необходимо исключить из рассмотрения. Такая процедура носит название геологическое редуцирование. Из измеренного поля вычитают поле известных объектов, полученные в результате решения прямых задач, что подчеркивает значимость большого набора процедур решения прямых задач в интерпретационных пакетах. Это неизбежно уменьшит область неоднозначности и неустойчивость решения обратной задачи. Этот процесс самый эффективный способ уменьшения степени некорректности обратной задачи. Исключение регионального фона с помощью геологического редуцирования – самый точный способ его учета.

12. Геологической содержательности – результат работ должен соответствовать поставленной геологической цели. Результат истолкования необходимо представлять в геологических терминах (рис. 11.3). Например, выделение участков для дальнейшего детального изучения, признание территории бесперспективной, аномалия обусловлена дайкой порфиритов, аномалия обусловлена железными рудами (магнетитовыми).

13. Оптимизации – разработка критериев оценки эффективности проведенного анализа. Оптимум это согласование противоречивых требований. Рациональный комплекс геофизических методов должен отвечать требованиям:

- наименьшие затраты,
- получение полной информации об объекте поисков,
- наименьшее время выполнения работ.

Можно построить целевую функцию, минимум или максимум которой необходимо найти:

$$F = \alpha I + \beta Z + \gamma T.$$

Часто математические критерии не отражают геологическую суть задачи. Например, при использовании гарантированного подхода не ищут минимум целевой функции.

Следует помнить, что оптимизация приводит к абсурду, если не учитывать содержание задачи.

14. **Адаптации** – любая методика!!! анализа в конкретных условиях видоизменяется, приспособляется к геологической ситуации, сети измерений, рельефа, мощности рыхлых отложений. Например, для КМА используют пластовые элементарные тела, для кимберлитовых тел вертикальные эллиптические цилиндры, усеченные конусы и др.

Анализ геофизических полей проводится в следующей последовательности:

1. Изучение работ предшественников. Анализ региональной геологической обстановки и региональных геофизических полей. Постановка задач геологического истолкования геофизических полей. Определение сотрудников, своих и привлеченных из других организаций, способов и средств (программных пакетов), необходимых для истолкования геофизических материалов. Решение прямых задач и имитационное моделирование.

2. Обработка и анализ результатов измерений физических свойств. Определение законов распределения и величин эффективных параметров. Выявление корреляционных связей и зависимостей между свойствами.

$$\chi = A\sigma + B, \rho = C\chi + D.$$

Построение уравнений регрессии вида:

$$\chi = A\sigma + B, \delta f = \alpha H + \eta$$

3. Выделение структурно-вещественных комплексов (СВК) – выделение групп горных пород, которые можно определить по выбранному комплексу геофизических методов.

4. Качественная интерпретация. Предварительное определение геометрических и физических параметров СВК, с небольшим объемом вычислений, без решения объемных обратных задач. Составление схем геофизических полей.

5. Количественная интерпретация для каждого метода – решение обратных задач для каждого физического поля с применением методов регуляризации. Создание однометодных объемных моделей. Увязка результатов истолкования данных полевых и скважинных измерений. Создание комплексных объемных моделей.

6. Комплексная интерпретация – согласование решений обратных задач. Выявление корреляционных связей между разными полями, между полями и геологическими границами. Результативные материалы содержат все объекты, выделенные по разным полям.

7. Геологическое истолкование – наделение геологическим содержанием выделенных объектов. Составление геолого-геофизических разрезов и трехмерных моделей.

8. Разработка рекомендаций для дальнейших исследований. Выделение перспективных участков для изучения в крупном масштабе.

Распознавание образов.

Любой метод истолкования геолого-геофизических данных, по сути, комбинация идеи аналитической аппроксимации и идеи распознавания образов. Распознавание образов предполагает создание образов, образов месторождений, структурно-вещественных признаков, тектонических нарушений, зон метасоматоза. Образ определен значениями интенсивности полей, характеристиками полей и. т. п. т. е. набором признаков. Таким образом, первый этап распознавания - формирование набора признаков искомого объекта. Второй этап отнесение выявленного объекта к конкретному классу.

Один из алгоритмов классификации – ART1- **алгоритм адаптивного резонанса** предназначен для:

определение числа классов, максимально возможное число.

набор признаков класса, побитовый набор

отнесение объекта к классу.

1 Формирование группы векторов признаков для каждого класса. Вектор прототип относится к центру класса.

2 Вводится параметр внимательности ρ со значениями из интервала (0, 1).

3 β -параметр – параметр разрушения связей – небольшое положительное число.

4 Значимость вектора – количество элементов вектора не равных 0

5 E-вектор признаков

Пример:

Алгоритм нейронные сети. Основы конструирования искусственных нейронных сетей. Искусственные нейронные сети чрезвычайно разнообразны по своим конфигурациям, но основу каждой НС составляют относительно простые, в большинстве случаев - однотипные, элементы (ячейки), имитирующие работу нейронов головного мозга. Далее под нейроном будет подразумеваться искусственный нейрон, т. е. ячейка НС. Каждый нейрон характеризуется своим текущим состоянием по аналогии с нервными клетками головного мозга, которые могут быть возбуждены или заторможены. Он обладает группой синапсов - односторонних входных связей, а также имеет аксон - выходную связь данного нейрона, с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на синапсы следующих нейронов. Каждый синапс характеризуется величиной синаптической связи или ее весом W_i , который по физическому смыслу эквивалентен электрической проводимости.

Текущее состояние нейрона определяется как взвешенная сумма его входов:

$$S = \sum X_i W_i. \quad (2.1)$$

Выход нейрона есть функция его состояния: $Y = f(S)$, где f - активационная функция.

Все НС работают по принципу параллельной обработки сигналов, который реализуется путем объединения большого числа нейронов в так называемые слои и соединения нейронов различных слоев, а также, в некоторых конфигурациях, и нейронов одного слоя между собой, причем обработка взаимодействия всех нейронов ведется послойно.

Теоретически число слоев и число нейронов в каждом слое может быть произвольным, однако фактически оно ограничено ресурсами компьютера или специализированной микросхемы, на которых обычно реализуется НС. На рис. 11.4 приведен пример трехслойной сети (трехслойного персептрона).

Вопрос о необходимых и достаточных свойствах сети для решения того или иного рода задач представляет собой целое направление нейрокомпьютерной науки. Так как проблема синтеза НС сильно зависит от решаемой задачи, дать общие рекомендации затруднительно. В большинстве случаев оптимальный вариант получается на основе интуитивного подбора.

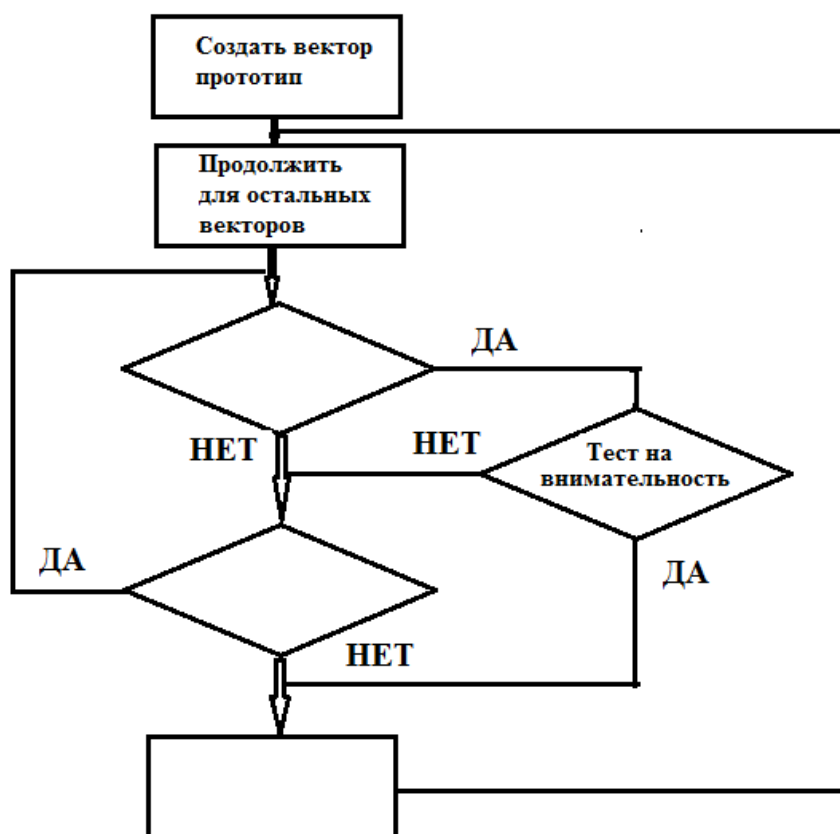


Рис. 11.4 Схема трехслойного персептрона.

ЛЕКЦИЯ 15 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Метод исследований: математическое моделирование. Составлена трехслойная модель, отражающая различные уровни эрозионного среза. Проведено исследование модели.

Модель среды состоит из 9 блоков с размером сечения 400×400 м. Полный геологический разрез, представлен в центральном блоке рисунок 1, состоит из нижней свиты преимущественно андезитового состава мощностью 160 м с магнитной восприимчивостью 200010 ед. СИ, средней свиты сложенной кислыми вулканитами мощностью 160 м с магнитной восприимчивостью 0 ед. СИ, и верхний слой сложенный осадочными породами мощностью до 40 м с магнитной восприимчивостью -1000 ед. СИ. На территории распространены дайки и штоки андезитов и дацитов, достигающие в поперечнике первых сотен метров. На участке широко проявлены процессы пропилитизации, окварцевания, аргиллизации, сульфидизации, карбанитизации и гематитизации.

Все остальные блоки составлялись в соответствии с эрозионным процессом, с уменьшением мощности верхнего слоя в 2 раза, допустимая минимальная мощность 20 м. Исходя из этих условий, были рассчитаны параметры геологической модели (табл. 1) по данным которой был составлен рисунок 1.

Таблица 1 – Параметры геологической модели.

№ Блока	№ Слоя	Глубина до верхней кромки, м	Глубина до верхней кромки, м	Магнитная восприимчивость среды ед. СИ
1	1	0	40	-1000
	2	40	200	0
	3	200	360	2000
2	1	0	20	-1000
	2	20	180	0
	3	180	320	2000
3	1	0	160	0
	2	160	320	2000
4	1	0	80	0
	2	80	160	2000
5	1	0	40	0
	2	40	200	2000
6	1	0	20	0
	2	20	180	2000
7	1	0	160	2000
8	1	0	80	2000
9	1	0	40	2000

Анализ результатов. Диапазон измерений поля модели совпадает с диапазоном измеренного поля. Наименьшее значение поля соответствуют полному геологическому разрезу. На плане изодинам можно заметить, что в южной части поле плавно возрастает с запада на восток, это отражает изменение глубины залегания положительно намагниченного пласта, и в действительности в составленной мной геологической модели (рис. 1) происходит эрозионный срез в направлении с востока на запад, то есть положительная магнитная толща опускается в этом направлении. Причем на западе эту толщу на поверхности перекрывает небольшой слой осадочных пород, имеющий отрицательную магнитную восприимчивость, это так же отмечается на плане изодинам. Рассмотрев северную часть плана можно увидеть обратную картину, поле уменьшается с запада на восток, но с более высоким градиентом, нежели на юге, что является следствием уменьшения мощности намагниченного пласта. Сравнивая западную и восточную части плана изодинам, которые имеют большие значения поля, можно сделать вывод, что западная часть залегает ближе к поверхности, нежели восточная, так как максимальное значение поля в западной части на 100 нТл больше чем в восточной. Это подтверждается и заданной геологической моделью (рисунок 1), на ней блок 6 расположенный на западе имеет менее мощный, на 20 м меньше, верхний немагнитный слой, чем блок 5 расположенный на востоке.

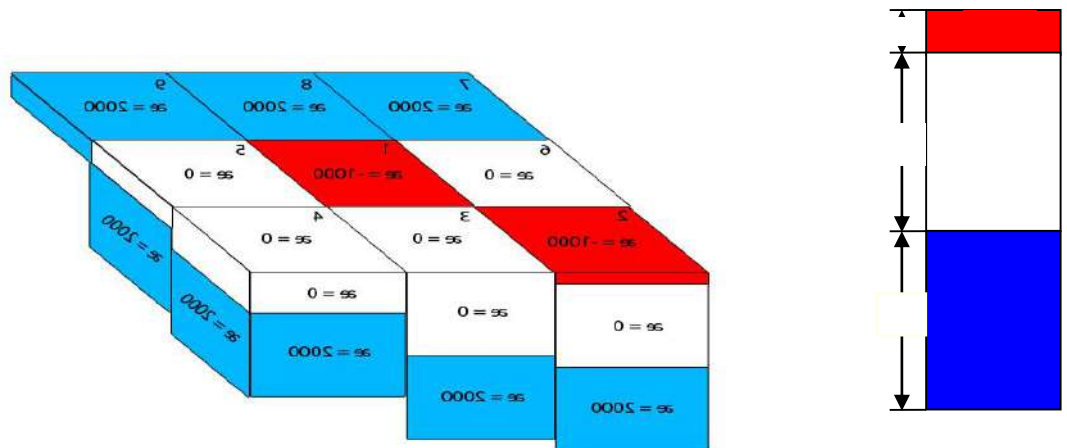
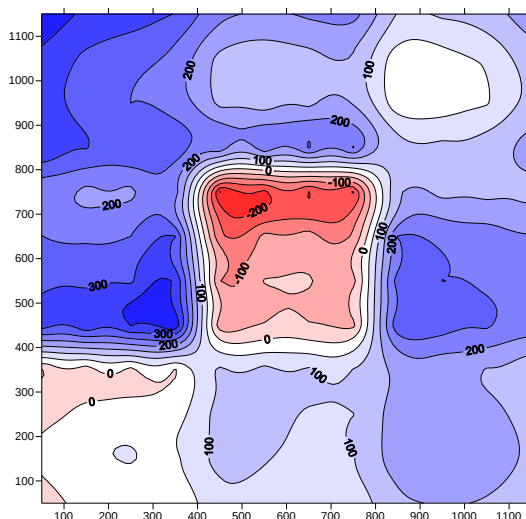
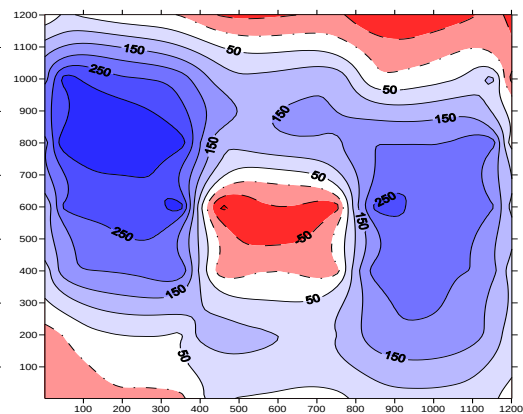
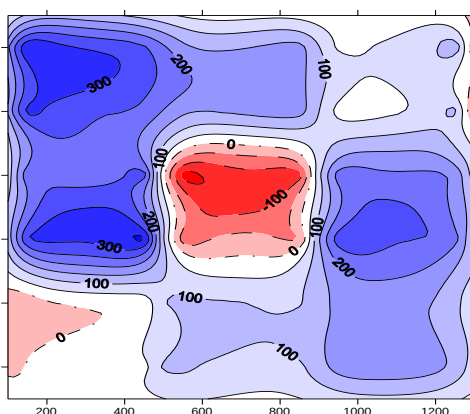
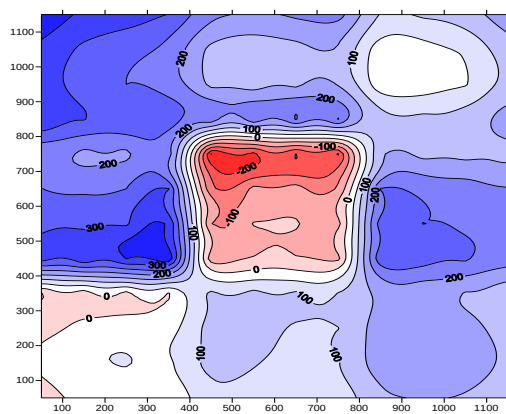
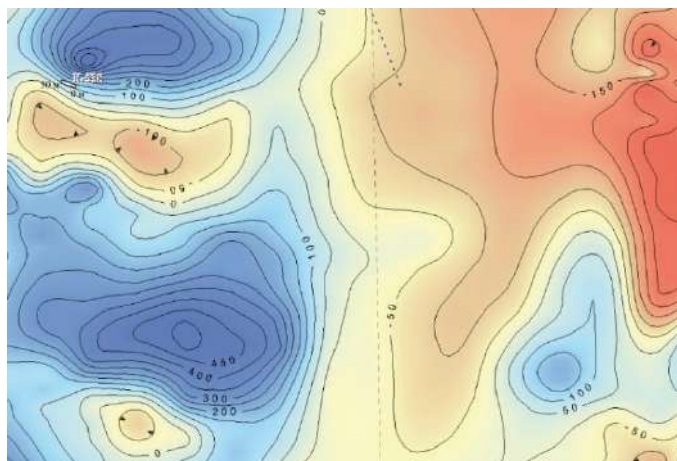
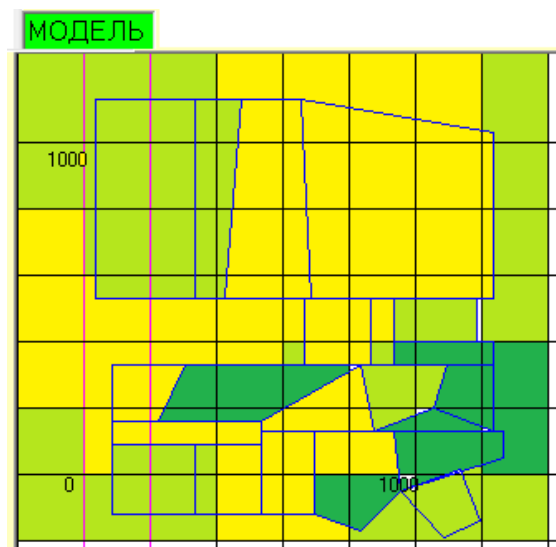
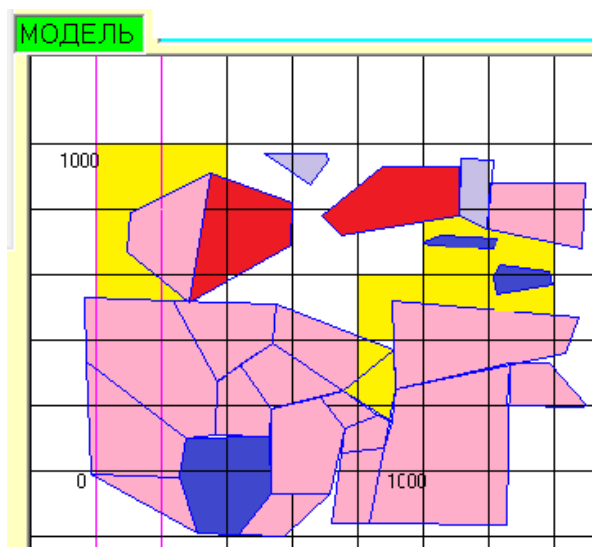


Рисунок 1 – Модель среды

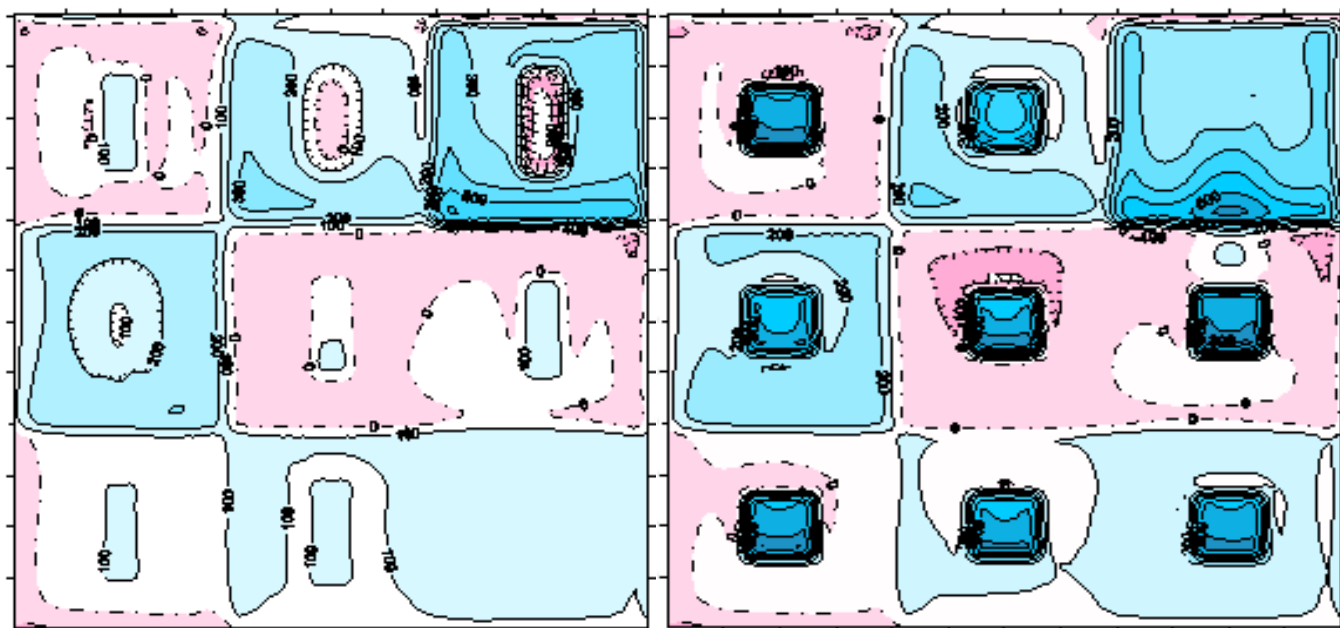
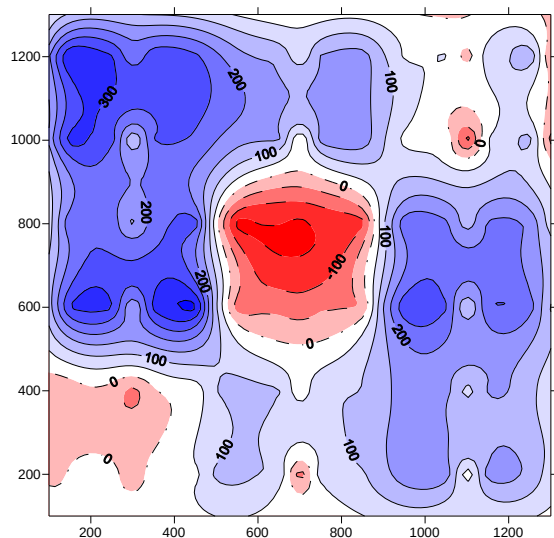
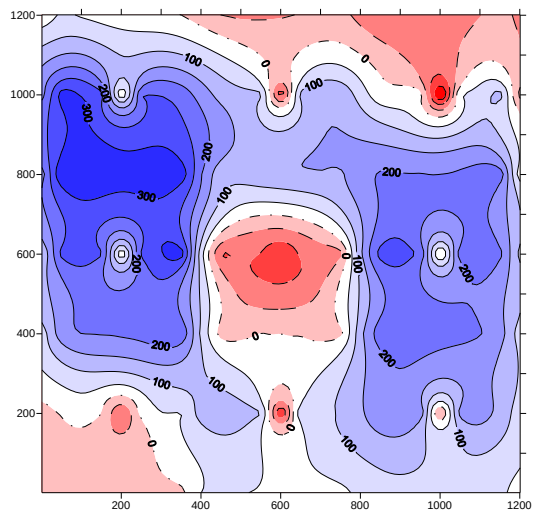


Штоки андезитов обуславливают положительные аномалии магнитного поля интенсивностью до 300 нТл.
Штоки дацитов обуславливают аномалии до -200 нТл.
Метосамитические изменения вблизи

интрузивных тел вызывают изменение интенсивности магнитных аномалий.
Выводы:



ВЛИЯНИЕ СЕТИ НАБЛЮДЕНИЙ



25 МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Ряды Фурье.

$$T_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos \frac{2\pi i x_i}{\Delta x} \cos \frac{2\pi j y_j}{\Delta y} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \cos \frac{2\pi i x_i}{\Delta x} \sin \frac{2\pi j y_j}{\Delta y} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \sin \frac{2\pi i x_i}{\Delta x} \cos \frac{2\pi j y_j}{\Delta y} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \sin \frac{2\pi i x_i}{\Delta x} \sin \frac{2\pi j y_j}{\Delta y} +$$

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T_{ij} \cos \frac{2\pi i x_i}{\Delta x} \cos \frac{2\pi j y_j}{\Delta y}$$

Решением уравнения Лапласа является потенциал $W(x, y, z) = e^{-iax-iby-cz}$, где $c^2 = a^2 + b^2$. Это решение может быть получено методом разделения переменных. Линейная комбинация таких функций с произвольными коэффициентами также будет решением уравнения Лапласа. В том числе решением будет:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} S(a, b) e^{-cz-iax-iby} da db \quad (1),$$

где $S(a, b)e^{-cz}$ - преобразование Фурье функции $W(x, y, z)$ относительно переменных x и y . Обратное преобразование Фурье

$$S(a, b) = \iint_{P_0} e^{iax+iby} W(x, y) dx dy \quad (2).$$

Измерения поля проводят в пунктах равномерно расположенных на изучаемой площади. После проведения процедуры интерполяции наблюдаемых данных получаем значения поля в узлах квадратной сети. Тогда гармоническая функция $W(x, y)$ – функция с ограниченным спектром, так как она известна только в узлах квадратной сети со стороной Δx . Поэтому она может быть представлена в виде функции значения которой в узлах совпадают с данными измерений:

$$W(x, y) = \sum_k \sum_n W(k\Delta x, n\Delta x) \frac{\sin \pi(x/\Delta x - k)}{\pi(x/\Delta x - k)} \frac{\sin \pi(y/\Delta x - n)}{\pi(y/\Delta x - n)}.$$

Преобразование Фурье функции $S(a, b)$ в квадрате $-\pi/\Delta x < a < \pi/\Delta x$, $-\pi/\Delta x < b < \pi/\Delta x$ можно записать:

$$S(a, b) = \Delta x^2 \sum_k \sum_n W(k\Delta x, n\Delta x) e^{k\Delta x ia + n\Delta x ib},$$

а вне квадрата она равна нулю.

Без ограничения общности рассуждений можно считать сторону квадрата равной единице. Тогда после подстановки получим:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} \sum_k \sum_n W(k, n) e^{kai + nbi - cz - iax - iby} da db = \sum_k \sum_n W(k, n) \iint_{P_1} e^{-iz + (k-x)ai + (n-y)bi} da db,$$

где P_1 квадрат $-\pi < a, b < \pi$.

Принимаем $x = y = 0$, тогда

$$W(0,0,z) = \sum_k \sum_n W(k,n) \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} e^{-cz+kai+nbi} dadb.$$

Обозначим:

$$C(k,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-cz+kai+nbi} dadb,$$

получим:

$$W(0,0,z) = \sum_k \sum_n W(k,n) C(k,n).$$

Учитывая симметрию задачи область интегрирования можно уменьшить вчетверо, достаточно взять область $(0-\pi, 0-\pi)$.

$$C(k,n) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{-cz} (e^{ika+nbi} + e^{-kai+nbi} + e^{kai-nbi} + e^{-kai-nbi}) dadb = \frac{1}{\pi^2} \iint e^{-cz} \cos ka \cos nb dadb$$

Область интегрирования, учитывая симметрию относительно биссектрисы, квадрата можно уменьшить вдвое:

$$\begin{aligned} C(k,n) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \cos k a da \int_0^a e^{-cz} \cos n b db + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \cos n b db \int_0^b e^{-cz} \cos k a da = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} da \int_0^a e^{-cz} (\cos ka \cos nb + \cos na \cos kb) db. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $b = au$, получим:

$$\begin{aligned} C(k,n) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} a da \int_0^1 e^{-az\sqrt{1+u^2}} (\cos ka \cos nua + \cos na \cos rua) du = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 du \int_0^{\pi} e^{-az\sqrt{1+u^2}} (\cos ka \cos nau + \cos na \cos kua) ada. \end{aligned}$$

Коэффициенты преобразования для продолжения поля можно найти численным интегрированием с помощью математических пакетов MATLAB, MathCad, Mathematica. Придавая z разные значения кратные расстоянию Δx , получим коэффициенты для вычисления поля в верхнем пространстве или в нижнем пространстве. Вычисленные коэффициенты можно использовать для продолжения гравитационного и магнитного полей. Изменение коэффициентов с удалением от начала координат характеризует корректность задачи, для продолжения в нижнее полупространство они очень медленно убывают по абсолютной величине.

Вертикальная производная потенциального поля (1) равна:

$$W_z = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} S(a,b) e^{-cz-iax-iby} cdadb.$$

Повторяя те же рассуждения, получим выражения коэффициентов для вычисления вертикальной производной поля по измеренным значениям поля на горизонтальной плоскости в узлах квадратной сети:

$$C_0(k,n) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} \pi \left(\left(\frac{1}{\pi^2 (k+nu)^2} \right) \cos \pi(k+nu) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2 (k+nu)^2} \right) \frac{\sin \pi(k+nu)}{\pi(k+nu)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\pi^2 (n+ku)^2} \right) \cos \pi(n+ku) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2 (n+ku)^2} \right) \frac{\sin \pi(n+ku)}{\pi(n+ku)} \right) du$$

Величины этих коэффициентов вновь можно вычислить численным интегрированием. Например, $C_0(0,0) = 2,40493$. Окончательные значения коэффициентов зависят от расстояния между узлами сети наблюдения. Поэтому для конкретной сети наблюдения коэффициенты необходимо разделить на Δx , $C(k,n) = C_0(k,n) / \Delta x$. С помощью свертки полученных коэффициентов с гравитационным полем можно по наблюденному полю силы тяжести вычислить псевдомагнитное поле.

Чтобы вычислить вторую вертикальную производную наблюденного поля для расчета коэффициентов $C_{zz}(k,n)$ дифференцируем решение уравнения Лапласа дважды по z :

$$V_{zz} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{P_1} S(a,b) e^{-cz - iax - iby} c^2 da db,$$

$$C_{zz}(k,n) = \iint_{P_0} e^{-cz + ika + inb} c^2 da db, \quad -\pi < a < \pi, \quad -\pi < b < \pi.$$

Для поверхности наблюдений $z = 0$:

$$C_{zz}(k,n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a^2 \cos k a da \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n b db + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k a da \frac{1}{\pi} \int_0^\pi b^2 \cos n b db.$$

$$C_{zz}(0,0) = \frac{2\pi^2}{3}, \quad C_{zz}(k,0) = (-1)^k \frac{2}{k^2}, \quad k, n \neq 0 \quad C_{zz}(k,n) = 0.$$

2 АКФ

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x - \tau) dx, \quad B_H = B(\tau) / B(0), \quad R(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{i=1}^{n-|m|} (Z_i - \bar{Z})(Z_{i+m} - \bar{Z}).$$

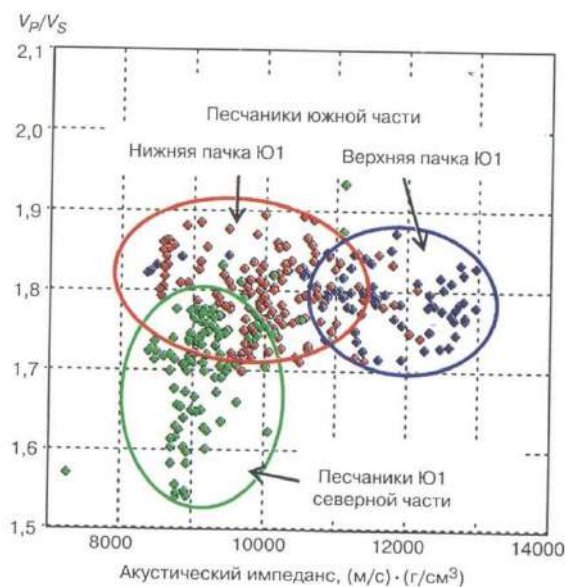


Рис. 1. Упругие свойства песчаных пород в северной и южной частях площади

3 Спектры

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

$$S(k) = \Delta x \sum_0^{N-1} f_j e^{-ij2\pi k / N}, \quad f_j = \frac{1}{N\Delta x} \sum_0^{k=N-1} S(k) e^{ij2\pi k / N}.$$

4 Вейвлет-анализ

Для обработки экспериментальных данных в последние 20 лет в гравиразведке, магниторазведке, электроразведке, сейморазведке и других отраслях геофизики применяют вейвлет-анализ. Вейвлет-анализ применяют для изучения нестационарных процессов. В отличие от Фурье-анализа вейвлет-анализ обеспечивает привязку источника в пространстве. При проведении вейвлет-анализа использует три параметра: масштаб, положение и направление. Исходные данные сравниваются со стандартными сигналами – вейвлетами $\Psi(x)$. Вейвлетом (в дословном переводе "маленькая волна", в отечественной литературе используется также термин всплеск) называют осциллирующую функцию, отличную от 0 на небольшом промежутке, удовлетворяющую условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 0.$$

Выделяют семейства все подобные вейвлеты которого получают умножением на масштабный множитель. Для вейвлетов определяют непрерывное, дискретное и быстрое вейвлет преобразования (НВП, ДВП, БВП).

Вейвлет-преобразование определяется выражением:

$$(W_{\psi} f)(\sigma, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \psi\left(\frac{x-\tau}{\sigma}\right) dx,$$

где σ – параметр масштаба, τ – параметр сдвига. Обратное вейвлет-преобразование:

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi} f)(\sigma, \tau) \psi_{\sigma, \tau}(x) \frac{1}{\sigma^2} d\sigma d\tau, \text{ где } C_{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|}{\omega^2} d\omega.$$

Основная идея вейвлет-анализа заключается в представлении дискретной функции $f(x)$, заданной на отрезке R оси абсцисс, в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(x),$$

следующего ряда: где в качестве базисной системы функций $\{\psi_i(x) : i = 1, 2, \dots, N\}$ используются перемещаемые по оси координат x и масштабируемые (сжатые или растянутые по оси x) однотипные функции с компактным носителем. Вейвлет-коэффициенты определяются скалярным произведением сигнала на вейвлет-функцию заданного типа

$c(s, n) = \int_R f(x) s^{-1/2} \psi\left(\frac{x-n}{s}\right) dx$, где s – масштаб, n – сдвиг. Метод нахождения вейвлет-коэффициентов на основе описанного интеграла свертки

называется непрерывным вейвлет-преобразованием (НВП). НВП позволяет решать задачу преобразования наблюдаемого гравитационного поля в масштабно-сдвиговую область с целью единого представления его частотных и пространственных характеристик. Можно выделить три основных элемента в этих исследованиях: анализ наблюдаемого гравитационного поля; представление данных об изучаемом объеме геологической среды; решение систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении обратной задачи гравиметрии.

По существу эти стандартные сигналы отличны от нуля на небольшом интервале и имеют нулевое интегральное среднее. Вейвлетами, например, являются производные функции Гаусса:

$$g(x) = e^{(-t^2/2)}.$$

Для анализа гравитационных и магнитных полей применяется вейвлет:

$$mhat(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}.$$

Система функций не является полной и ортогональной, поэтому восстановление сигнала по его спектру не всегда возможно. Алгоритм вейвлет-анализа основан на свертке поля силы тяжести с вейвлет-функцией в скользящем окне разного размера при различных сдвигах. Сдвиг по оси абсцисс берут кратным шагу наблюдений поля. Вейвлет масштабируют в соответствии с условиями задачи. Свертка производится перемножением спектров поля и вейвлета.

Вейвлет-анализ в отличие от Фурье-анализа предназначен для изучения нестационарных процессов. Другим отличием вейвлет-анализа является привязка в пространстве.

Построение вейвлет-спектров на основе НВП позволяет:

1. Локализовать в пространстве особенности поля, обусловленные геологическими объектами разного ранга (в т.ч. и визуально не выявляющимися).
2. Оценить энергетический вклад каждой частотной компоненты поля при сохранении привязки выделенных компонент к реальным пространственным координатам.
3. На основе взаимосвязи между масштабом вейвлета и глубиной залегания сингулярного источника определять эффективные параметры возмущающих объектов.

17. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

Под распознаванием образов (анализом многомерных данных) подразумевают создание по совокупности геолого-геофизических признаков образа изучаемых объектов и выявление этих объектов на исследуемых территориях. Синонимы термина образ:

- кластер, группа элементов, характеризующихся общим свойством,
- таксон, систематизированная группа любой категории.

В качестве образа может быть рудный район, рудный узел, рудное поле, месторождение, рудное тело, нефтяная залежь, месторождение нефти.

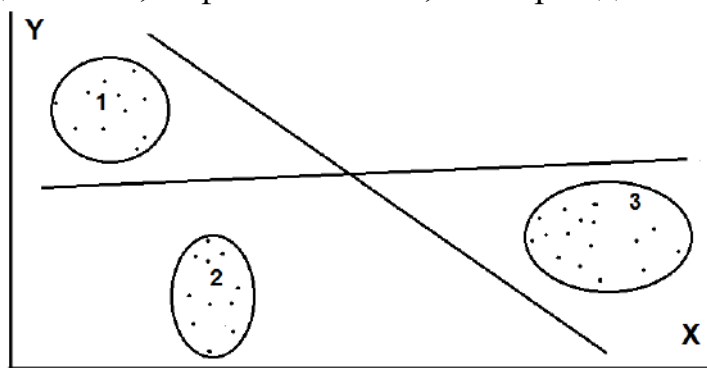


Рис. 1 Выделение областей в признаковом пространстве

Выделяют две задачи распознавания:

1. Совокупность элементов разбивают на небольшое число классов
2. Определение естественного расслоения исходных данных.

Во втором случае решения может не существовать

Для решения задачи распознавания используются:

Эвристический подход – разбиение на классы на основе интуиции исполнителя.

Оптимальный подход – разбиение на классы на основе заданного критерия разбиения.

Статистический подход - разбиение на классы на основе вероятностного подхода, использования понятия случайной величины.

При распознавании по эталонам с обучением, выбор эталонов определяет результат распознавания. Как правило, число эталонов по исследуемому району невелико, поэтому их дополняют эталонами по аналогичным объектам из других регионов.

Обычной формой представления данных при решении задач распознавания служит прямоугольная таблица, строки которой соответствуют объектам, а столбцы – признакам.

Наиболее простой подход использование интегрального показателя. Разбиение возможно по нескольким показателям.

Определение набора признаков может проводиться на основе группы эталонных объектов, либо без них исходя из теоретических представлений и опыта работ на других объектах.

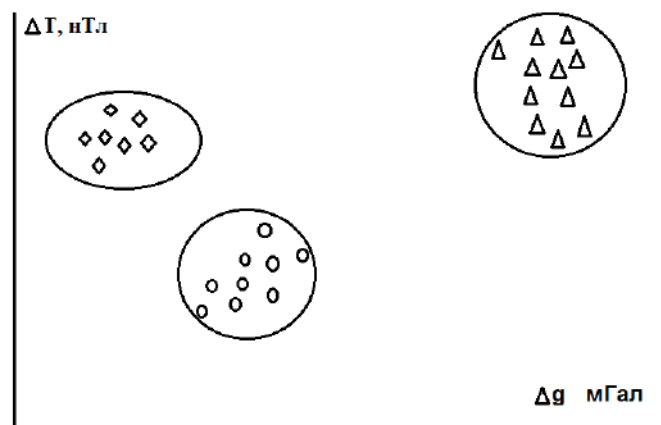


Рис. 2 Выделение классов

Наиболее простой пример – разделение горных пород на группы по величине физического параметра. Например, деление на коллекторы и неколлекторы по величине пористости. В этом случае строят полигоны частот, и разделение проводят так, чтобы возможность совершить ошибки первого рода и второго рода были одинаковы. При построении полигонов частот соблюдают следующие правила, сформулированные на основе многолетней практики:

1. Число интервалов группирования не меньше 6.
2. Число интервалов группирования не больше 12.
3. Частота в каждом интервале не может быть меньше 5.
4. Гистограммы построенные по практическим данным нередко имеют полимодальную форму.

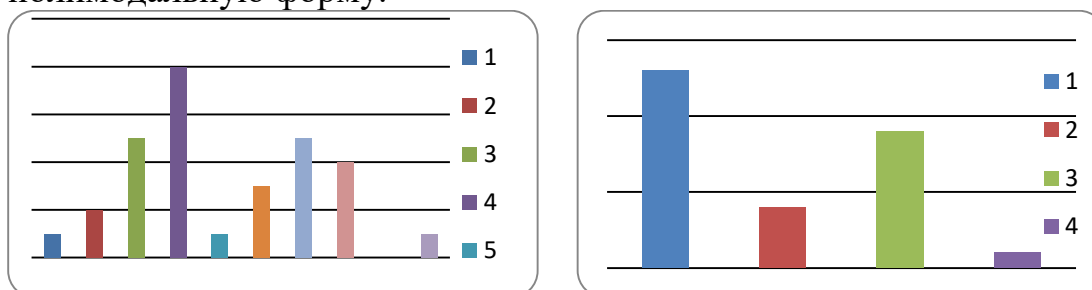


Рис. Гистограммы измеренных полей

Иногда, чтобы скрыть степень неопределенности используют интегральную кривую для одной группы пород и дополнение интегральной кривой для другой группы пород.

Важнейший элемент такого подхода – определение набора признаков. Выбор ограничивается имеющимися данными, в очень редких случаях проводятся дополнительные исследования. В качестве геологических признаков выбирают, например, наличие мантийного корня, наличие интрузивных пород кислого состава, вечной мерзлоты, зон метасоматоза, зон деструкции, геологических структур, тектонических нарушений и их пересечений, карбонатизация, различные рудоконтролирующие факторы и другие. В качестве геофизических признаков могут использоваться: интенсивность регионального поля, интенсивность локальной аномалии, вертикальный градиент поля силы тяжести, энтропия, горизонтальный градиент поля, форма аномалии, сочетание

аномалий разных полей, аномалия трубчатого типа. Эффективная плотность, эффективная намагниченность.

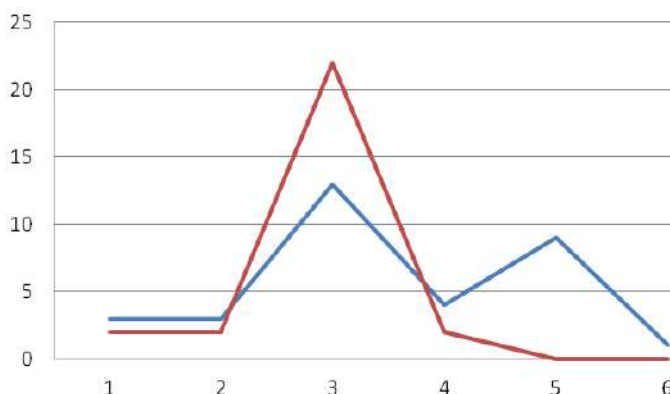


Рис. 3

Из выше приведенных примеров следует, что признаки существенно различаются между собой. Для некоторых из них можно указать численное значение (интенсивность аномалии – 5 мГал, величина градиента поля 2 мГал/км). Для других можно создать шкалу и расположить их в определенной последовательности, а затем указать место объекта в этой последовательности. Таким переменным можно поставить в соответствие число натурального ряда. Такие переменные называют категоризированными или порядковыми или ранговыми.

Для многих геологических данных нельзя сделать ни того ни другого, эти признаки качественные. Им нельзя поставить в соответствие число. Такие дихотомические переменные принимают только два значения: есть – нет, плюс – минус.

Признаки, используемые при поисках алмазов:

1. Наличие мантийного корня.
2. Пересечение более трех разломов.
3. Пониженное региональное поле
4. Повышенное гравитационное поле
5. Положительная магнитная аномалия.
6. Отрицательная гравитационная аномалия.

Необходимо учитывать взаимосвязь между признаками, чтобы один и тот же фактор не учитывался дважды. Для анализа связи двух признаков составляют таблицу:

	$\Delta T +$	$\Delta T -$	Маргинальные частоты (сумма)
G -	77	6	107
G +	75	32	83
Маргинальные частоты (сумма)	152	38	190

$$\chi^2 = N \sum_i \sum_j \frac{f_{i,j}^2}{f_i f_j} - N$$

$$\chi^2 = (77 \cdot 32 - 75 \cdot 6)^2 / 190 = 0,08$$

Для анализа связанности признаков в многомерном случае составляют матрицы сопряженности (инцидентий):

	a	b	c	d	e	Сумма
A	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	M_1
Б	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	M_2
В						M_3
Г						M_4
Сумма	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	N

Критерии связанности

$$P = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}, \quad T = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(K_{\Sigma} - M_{\Sigma})(M_{\Sigma} - 1)}}, \quad C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(\min(K_{\Sigma}, M_{\Sigma}) - 1)}}$$

Распознавание может осуществляться по расстоянию между классами в многомерном пространстве, поэтому необходимо определить характеристику определяющую меру близости между классами и объектами. Эту характеристику принято именовать расстоянием:

Расстояние Мехаланобиса

Евклидово расстояние

Взвешенное евклидово расстояние

Расстояние по Хеммингу, отражает расстояние между объектами определяемыми дихотомическими признаками:

$$R = \sum_i (X_i - X_j)$$

$$x = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

либо на основе построенного решающего правила

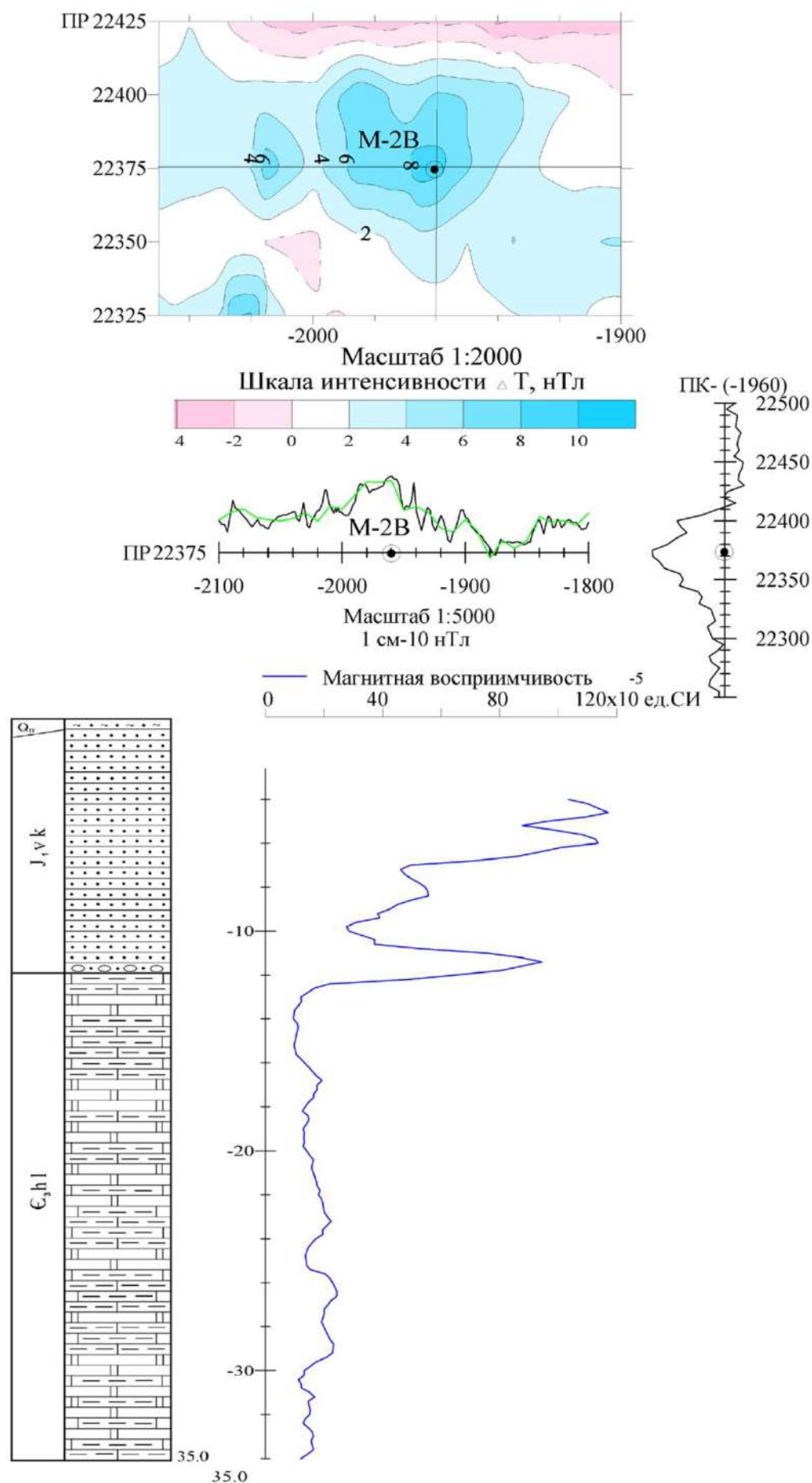


Рис. Выделение кимберлитовых трубок

Методообразующая идея: любой метод истолкования геоданных основывается на комбинации идеи аналитической аппроксимации и идеи использования распознавания образов.

Эффективное истолкование математическими методами невозможно в силу недоопределенности имеющейся информации, неустойчивости и неединственности решений обратных задач гравиразведки и магниторазведки. Поэтому компьютерные технологии включают в себя процедуры, основанные на распознавании образов. Близкие задачи к распознаванию задачи классификации: районирование полей по морфологии (типам), создание типовых модельных полей.

Распознавание образов применяют при решении задач геологического картирования (число классов большое), нефтяной геофизики (число классов 2), рудной геофизики (число классов 2). При эвристическом подходе к задаче распознавания набор признаков проводит исследователь, интуитивно исходя из своего опыта. Далее создают уравнение вида

$$f = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 \dots$$

где k_i и x_i вес признака и значение признака (число, ранг, при дихотомии 0 или 1)

Коэффициенты k_i в таком уравнении подбираются экспериментальным путем последовательным включением в регрессионную модель новых признаков с одновременной проверкой целесообразности их включения.

1. Вычисляется матрица парных коэффициентов корреляции всех признаков.
2. Выбирается наиболее значимая переменная
3. Проводится дисперсионный анализ.
4. Вычисляется матрица коэффициентов корреляции для оставшихся признаков.
5. Выбирается следующий признак.

Включение признаков проводится до исчерпания всех признаков, либо до превышения табличного значения критерия Фишера.

Полученное значение критерия определяет принадлежность объекта (точки, участка) к тому или иному классу. Эффективность решающего правила определяется на известных объектах.

Если признаки характеризуются числом, то процесс деления на классы можно организовать следующим образом. Мету сходства между признаками можно характеризовать матрицей парных коэффициентом корреляции.

	А	Б	В	Г	Д
А	1	0,33	0,25	0,55	0,10

Б	0,33	1	0,63	0,07	0,14
В	0,25	0,63	1	0,21	0,72
Г	0,55	0,07	0,21	1	0,22
Д	0,10	0,14	0,72	0,22	1

Далее объединяем элементы Д и В и для новых элементов вычисляем матрицу парных коэффициентов корреляции.

Иерархические (древовидные) кластер-процедуры широко используются в многомерном анализе. В таких процедурах либо начальное разбиение на классы в процессе деления приводит в конечном счете к множеству одноэлементных классов, либо одноэлементные классы объединяются до создания одного класса. Разбиение проводится на основе принятого правила определения расстояния между элементами. Вычислительные процедуры очень громоздкие.

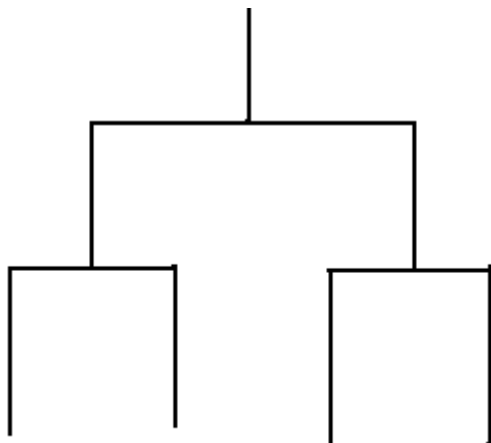
Пример. На первом этапе каждое измерение рассматривается как отдельный кластер. Далее определяются расстояния между всеми элементами. Затем два ближайших элемента объединяются в единый кластер.

	1	2	3	4
А	5	8	6	9
Б	6	9	5	7

Матрица расстояний

0	4,3	1,41	4,2
4,3	0	4,4	2,1
1,41	4,4	0	2,1
4,2	2,1	2,1	0

Объединяем 3 и 4 элементы



Дендограмма

В многомерный анализ включают процедуру анализа равенства средних векторов нескольких наборов данных. Метод главных компонент.

Факторный анализ.

Если признак принимает только два значения, то для его описания можно использовать биномиальное распределение. Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения

Для 95% надежности $t=1,96$. Для оценки связи между признаками определяется точным критерием Фишера

Мерой степени сходства между признаками

Коэффициенты связанности Юла

Рассмотрим частоты двух дихотомических признаков FLT и NPM1

	FLT+	FLT-	Маргинальные частоты
NPM1+	4	5	9
NPM1-	4	41	45
	8	46	54

Точный критерий Фишера=7,51

Мера сходства $\Phi=0,37$. Коэффициенты связанности $Q=0,76$ $Y=0,48$

Признаки слабо связаны

Признаки

	NPM1+	NPM1-	
KIT+	1	7	8
KIT-	2	34	36
	3	41	44

Значение точного критерия Фишера=0.50 Мера сходства $\Phi=0.1$

Коэффициенты связанности

Обобщенная схема иерархической оценки перспективных площадей, выделяемых на прогнозно-геофизических картах

- Анализ результирующих прогнозно-геофизических карт, построенных методом аналогий с использованием различных эталонов («натурных», «модельных», «ситуативных»);
- Пространственное сопряжение перспективных площадей с элементами структурно-тектонического строения, выявленными по комплексу данных;
- Непротиворечивость прогнозных построений общей геологической модели перспективной территории;
- Пространственная совмещенность прогнозируемых объектов разных иерархических уровней (рангов);

- Использование минерагенической информации в качестве «внешнего» критерия оценки результатов геофизического прогноза

- Детализация общей геологической модели перспективной территории в виде содержательных текстовых и картографических описаний (качественных признаков)

Многоуровневый прогноз на основе последовательной пространственной совмещенности аномальных геологических объектов соседних иерархических уровней (конгруэнтности)

ВНИМАНИЕ! Усреднение вероятностей правомерно лишь при сравнительно одинаковой информативности используемых геофизических критериев прогноза. В противном случае результаты интерпретации с использованием формальной оценки перспективности могут оказаться ошибочными (переоцененная перспективность одних площадей и недооцененная перспективность других).

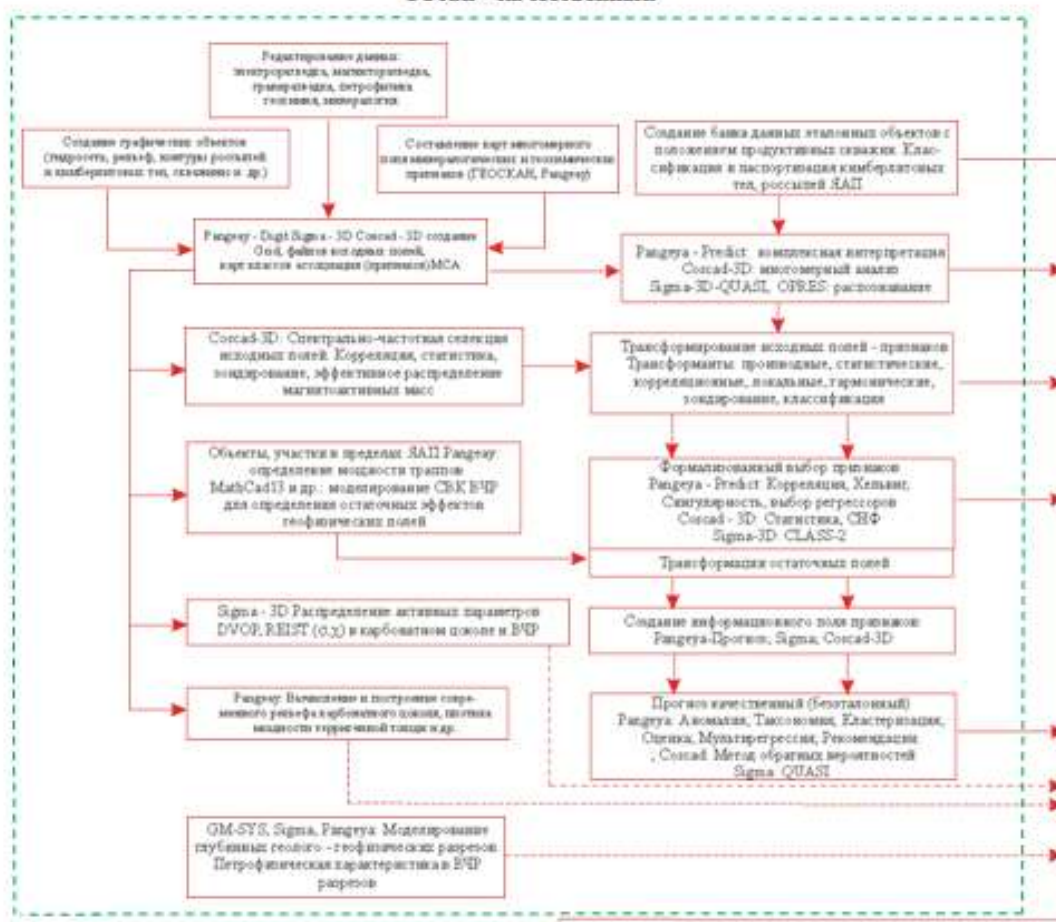
Результаты формализованной камеральной оценки перспективных площадей пространственно сопрягаются с имеющимися в наличии слоями минерагенической информации и позволяют обоснованно выбирать *интерпретационные* профили в качестве прообразов реальных заверочных профилей

При оценке перспективных площадей настоятельно рекомендуется использовать статистические алгоритмы с возможностью учета *различной* информационной содержательности геоданных. Использование вероятностных моделей соответствует нечетким представлениям об искомых объектах прогноза в реальных геологических условиях

Для сокращения многозначности при сопоставлении результатов прогнозного районирования перспективных территорий, обусловленной несоответствием применяемых моделей реальным геологическим объектам, предлагается *синтез* автоматизированных методов безэталонной и эталонной классификации

Блок-схема многомерной интерпретации геолого-геофизических данных для ЯАП

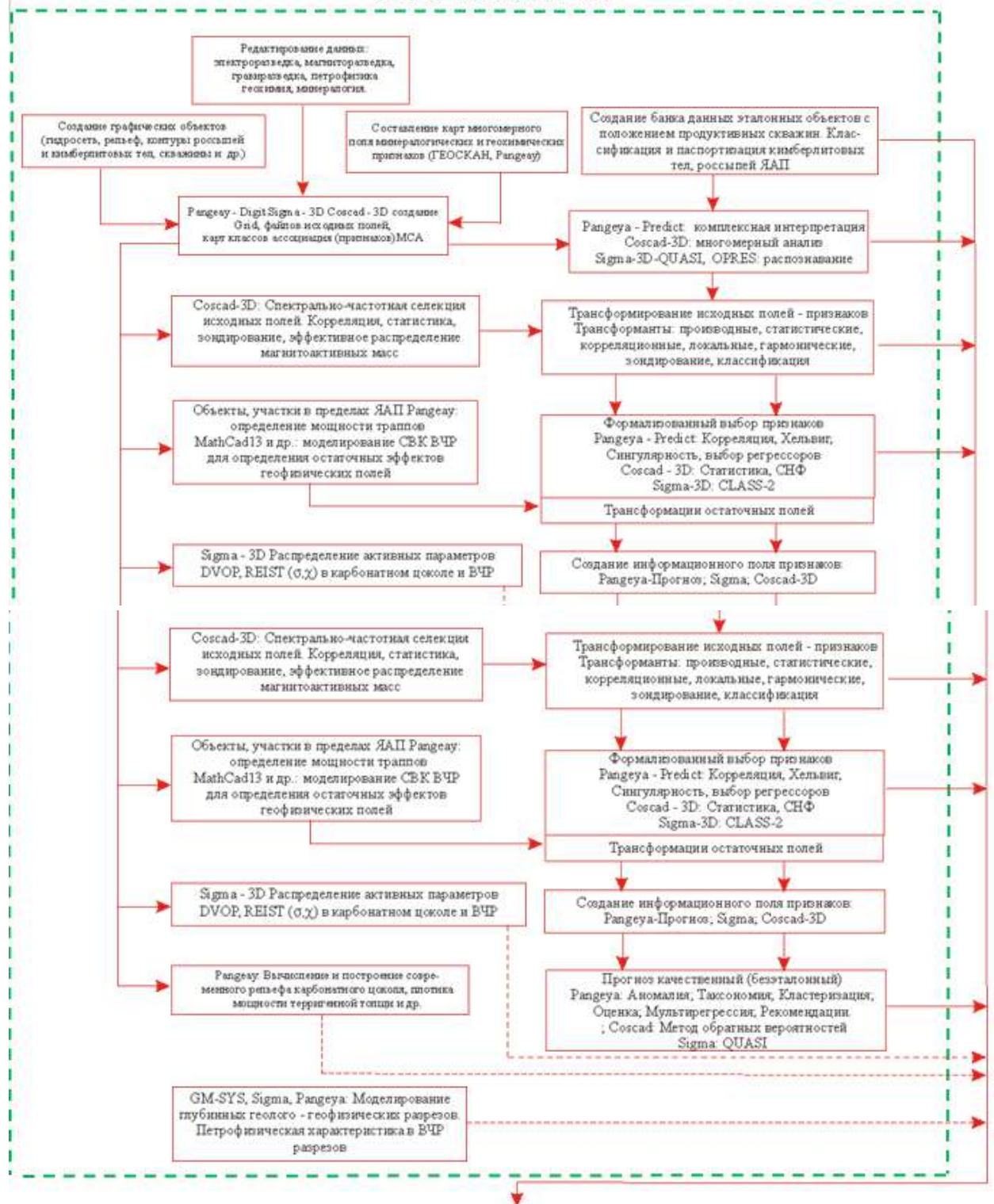
I Этап - качественный



Результаты I этапа

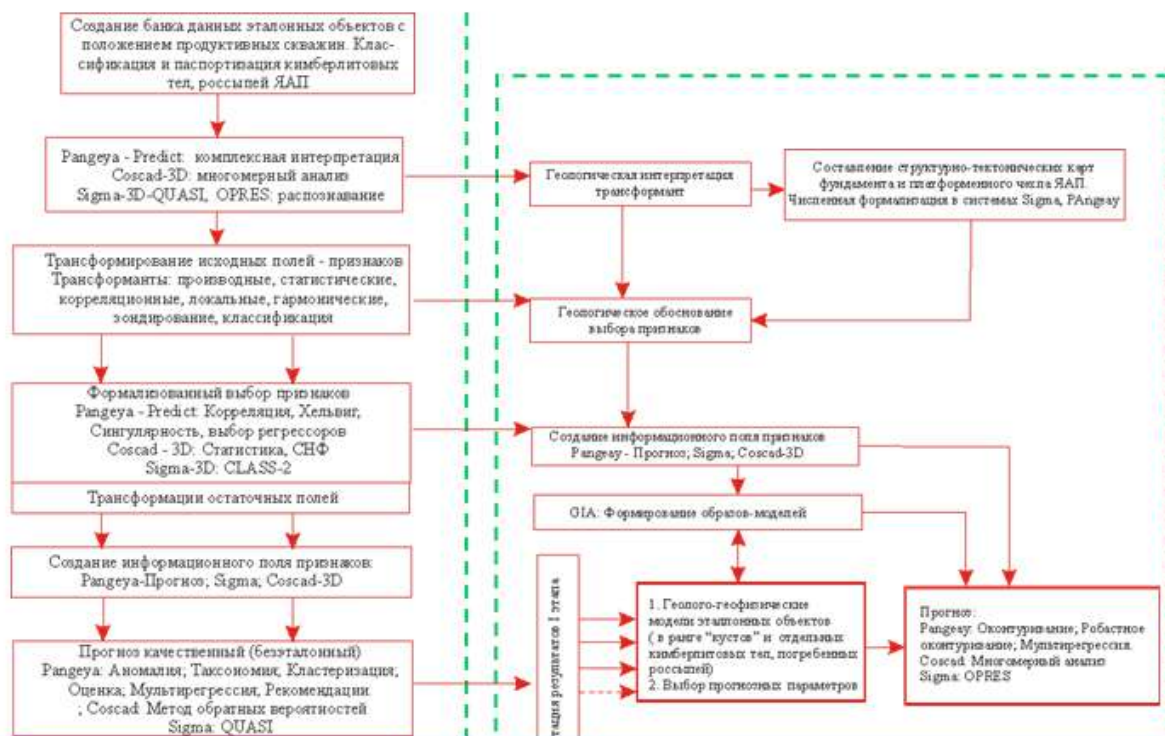
1. Трансформации остаточных полей
2. Карта таксонов
3. Карта кластеров
4. Карта безэталонной классификации
5. Карта распределения статистических параметров
6. Карта перспективности участков

I Этап - качественный



Блок-схема многомерной интерпретации геолого-геофизических данных для ЯАП

II Этап - интерпретация



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Виноградов В.Б.

**ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ**

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Екатеринбург
2020

В пособии описаны практические работы по дисциплине «Геометризация и анализ физических полей». Учебным планом предусмотрено проведение занятий по 3 разделам курса:

- аналитическое описание геологических поверхностей и физических полей,
- подсчет ресурсов,
- анализ физических полей.

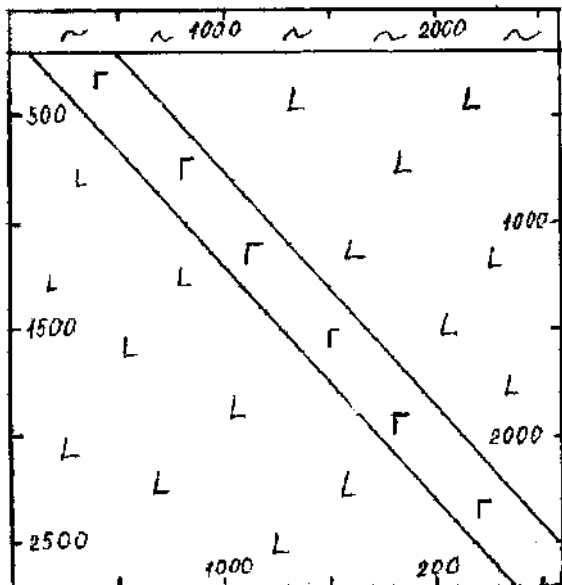
Половина из них проводится в компьютерном классе кафедры геофизики с применением математических пакетов для расчетов.

Цель работы: Составить аналитическое описание геометрии геологического разреза.

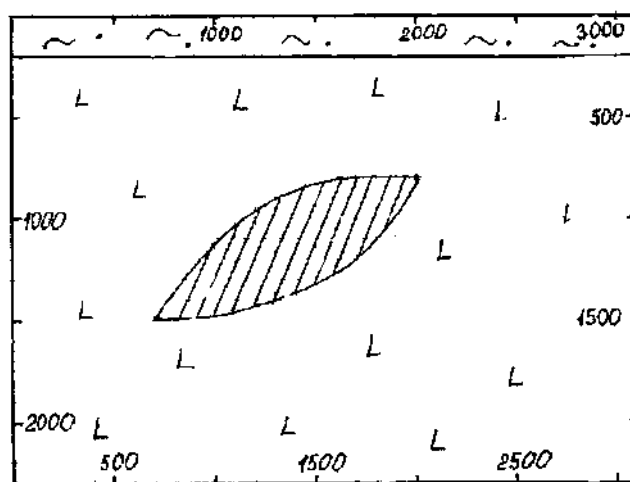
1) Для представленного разреза (см. рис. 1а) составить линейные уравнения $z=ax+b$, описывающие поверхности дайки порфиритов.

2) Для локального геологического объекта (батолита, лакколита и т.д.) составить уравнения полиномов второго порядка $z=ax^2+bx+c$, описывающие его нижнюю и верхнюю поверхности.

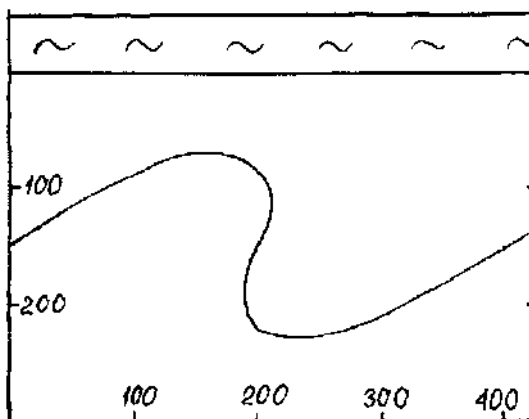
3) Составить параметрические уравнения $x=t+asint$, $z=bsint$, описывающее поверхность складки (рис. 1в).



а



б



в

Рис. 1 Примеры поверхностей, предлагаемых в качестве задания

Результаты работы представить в виде разреза, уравнений и неравенств для параметров уравнений.

Рис. 2 Образец оформления работы

Практическое занятие № 2 Описание геологической поверхности кубическими сплайнами (4 часа)

Для заданных результатов измерений построить кубические сплайн-функции 1, 2, и 3 порядка.

Таблица 1 Варианты работ

Вариант	X	Y	Вариант	X	Y	Вариант	X	Y	Вариант	X	Y
1	1	4,2	3	0	2,2	5	1	2,4	7	0	3,2
	2	4,2		1	2,3		2	2,7		1	4,3
	3	5,2		2	3,0		3	2,5		2	3,0
	4	4,0		3	3,0		4	0,4		3	1,0
	5	5,3		4	2,0		5	3,5		4	2,2
2	0	5,0	4	0	5,5	6	0	4,0	8	0	7,5
	1	4,5		1	1,0		1	4,9		1	3,0
	2	4,7		2	0,5		2	4,7		2	4,5
	3	1,7		3	1,0		3	5,7		3	2,0
	4	2,3		4	0,5		4	3,3		4	0,9
9	1	6,3	10	1	7,2	11	1	3,3	12	1	2,5
	2	6,8		2	5,5		2	5,6		2	3,3
	3	7,1		3	3,2		3	6,7		3	2,8
	4	7,1		4	3,0		4	6,8		4	3,1
	5	6,5		5	3,5		5	6,7		5	2,3

Для своего варианта составьте СЛАУ для определения коэффициентов кубического сплайна. СЛАУ представьте в виде двух матриц $A(16,16)$ и $B(16,1)$. Матричное уравнение решите с помощью пакета MathCad (процедура $\text{lsolve}(A,B)$). Оцените погрешность решения вычислив число обусловленности матрицы $\text{cond}(A)$ с помощью того же пакета. Расчет интерполирующих функций провести с шагом 0,25. Построить графики. Составить отчет

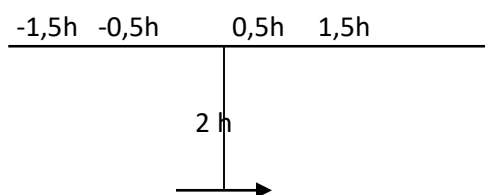
Практическое занятие № 3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ (4 часа)

	h	Dx	1 мВ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	1	-20	0	20	45	80	115	160	200	219	175
2	1	2	35	60	72	100	125	170	210	210	210	160
3	2	4	-4	-2	0	5	10	15	25	25	30	37
4	1	1	15	30	41	40	27	15	5	0	-2	-3
5	1	2	-2	-6	-10	-13	-14	-4	6	18	20	18
6	1	4	-6	-10	-12	-14	-6	0	10	18	19	18
7	2	1	4.25	4.5	4.7	4.9	5.25	5.3	5.2	4.6	3.8	3
8	1	2	3	3	3	4.1	0	-3	-5	-12	-18	-20
9	0.5	4	10	20	42	39	25	-5	-40	-70	-80	-110
10	0.2	1	-170	-175	-170	-150	-125	-110	-95	-70	-30	-5
11	0.4	2	25	21	15	8	0	-8	-15	-17	-12	-8
12	2	4	0	2	13	5	7	10	0	0	1	1
13	2	1	10	20	30	42	55	70	90	105	107	103
14	1	2	0	2	4	6	10	20	20	12	-1	4
15	2	4	175	150	115	50	20	22	20	30	25	40
16	0.5	1	-2	-10	-20	-27	-40	-60	-80	-80	-30	5
17	0.4	2	-100	-180	-200	-350	-400	-600	-900	-600	-250	-100
18	0.5	4	30	130	120	60	0	-40	-120	-200	-130	-85
19	2	5	118	40	-45	-120	-170	-130	-80	40	120	110
20	0.5	2	100	102	101	0	-150	-400	-350	-100	-85	-40

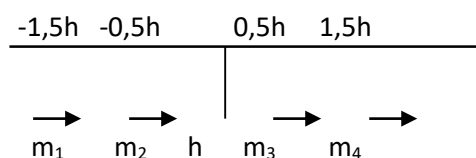
Пример выполнения работы.

«Аналитические модели поля»

Исходная модель:



Проверяемая модель:



Расчетные формулы:

$$Z_e = 100M \frac{2h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$Z_z = -300M \frac{hx}{(h^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Рассчитанная матрица:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0.1768 & 0.0179 & 0.003 \\ -0.1768 & 0 & 0.1768 & 0.0179 \\ -0.0179 & -0.1768 & 0 & 0.1768 \\ 0.003 & 0.0179 & -0.1768 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0.0307 \\ 0.0269 \\ -0.0269 \\ 0.0307 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 6.048 \times 10^{-3} \\ 0.158 \\ 0.158 \\ 6.048 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$m_1/M = 6,048 \cdot 10^{-3}$$

$$m_2/M = 0,158$$

$$m_3/M = 0,158$$

$$m_4/M = 6,048 \cdot 10^{-3}$$

Рассчитываем число обусловленности:

$$\text{cond1}(A) = 4.386$$

$$\text{cond2}(A) = 2.619$$

$$\text{conde}(A) = 6.001$$

$$\text{condi}(A) = 4.386$$

По значению $\text{conde}(A) = 6.001 < 10$ можно сделать вывод, что решение устойчиво, качество аппроксимации высокое.

Практическое занятие № 4 ПОДСЧЕТ РЕСУРСОВ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Каждый студент получает план изоаномал силы тяжести (рис. 1). Необходимо оценить запасы месторождения.

1 Разбить аномальную зону на прямоугольники, в пределах которых силу тяжести можно принять постоянной величине (среднему по площади).

2 Определить среднее значение силы тяжести в каждом прямоугольнике.

3 Принять избыточную плотность 1,4 г/см³ и вычислить ресурсы предполагаемого месторождения меди:

$$Z_g = 100M \frac{2h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$M = 1400 * \frac{4,80}{1,4} 6,28 * (6,67 * 10^{-11})^{-1} * 10^{-5} \sum \Delta S * \Delta g \text{ (кг)}$$

$$M = M_1 * 10^{-9} \text{ млн. т руды}$$

$$M = M * C_{cu}$$

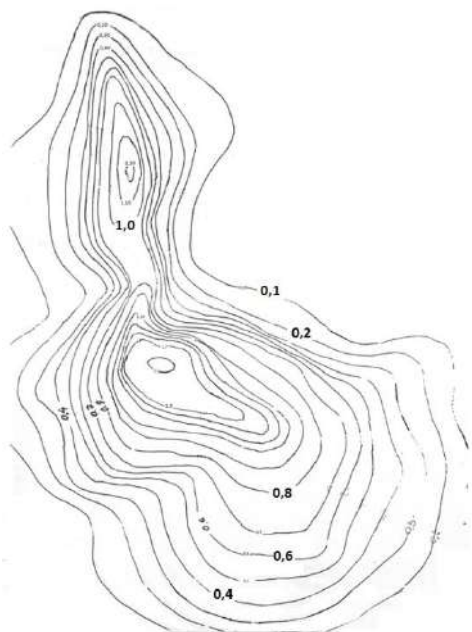
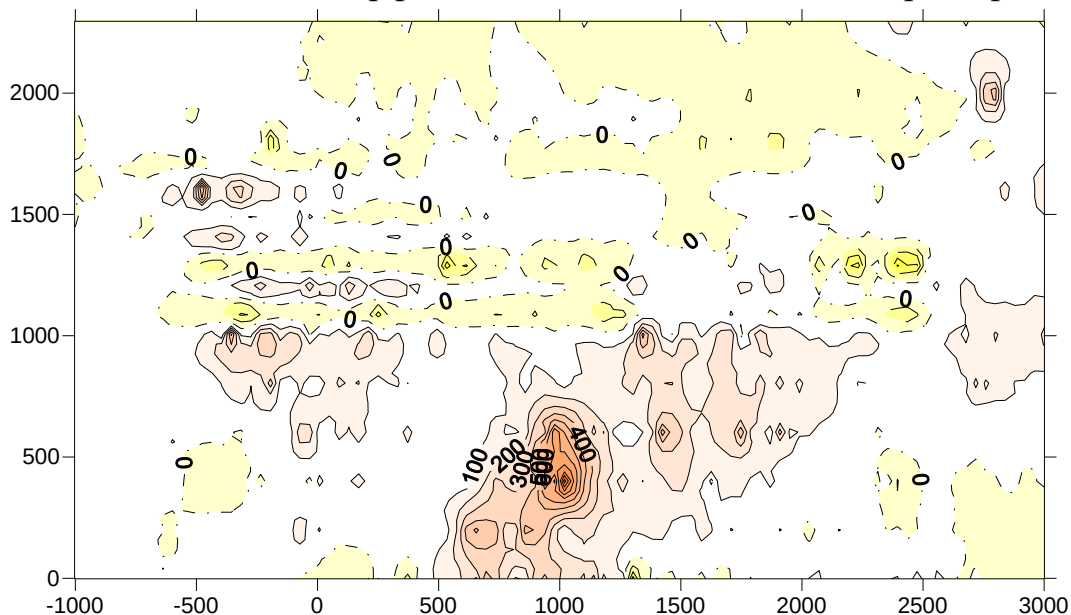


Рис. 1 План изоаномал медноколчеданного месторождения. Избыточная плотность 1,4 г/см³

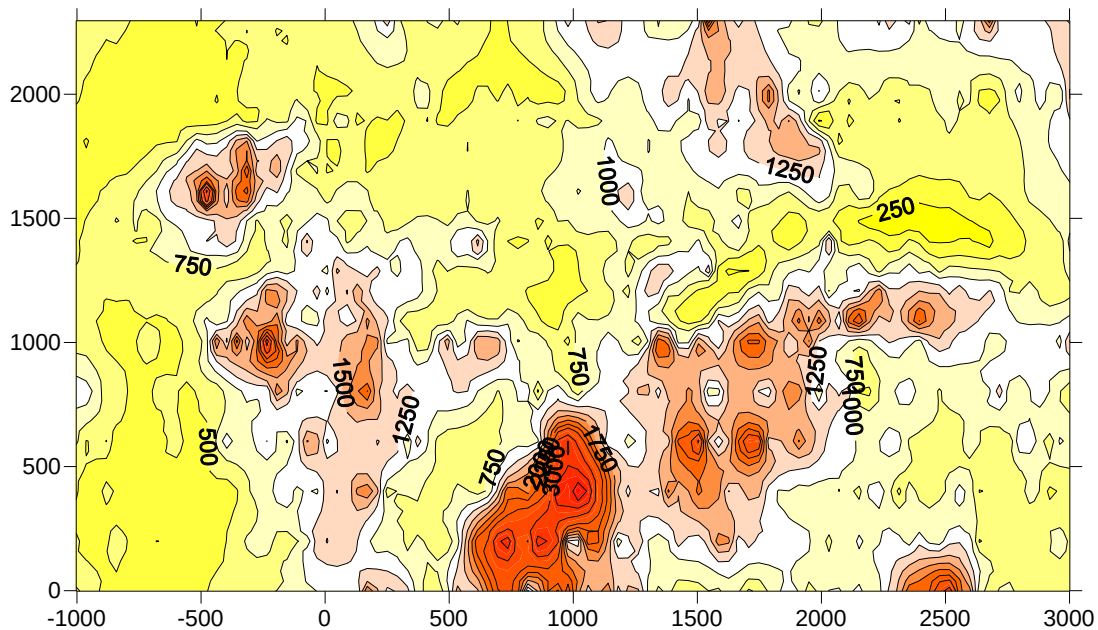
Разломы линейные геологические тела, размеры которых по простиранию во много раз больше чем в крест простиранию. Их выделение на картах полей качественно проводят выделением линеаментов. Для надежного выделения разломов используют несколько геофизических полей.

Разломы выделяют по признакам:

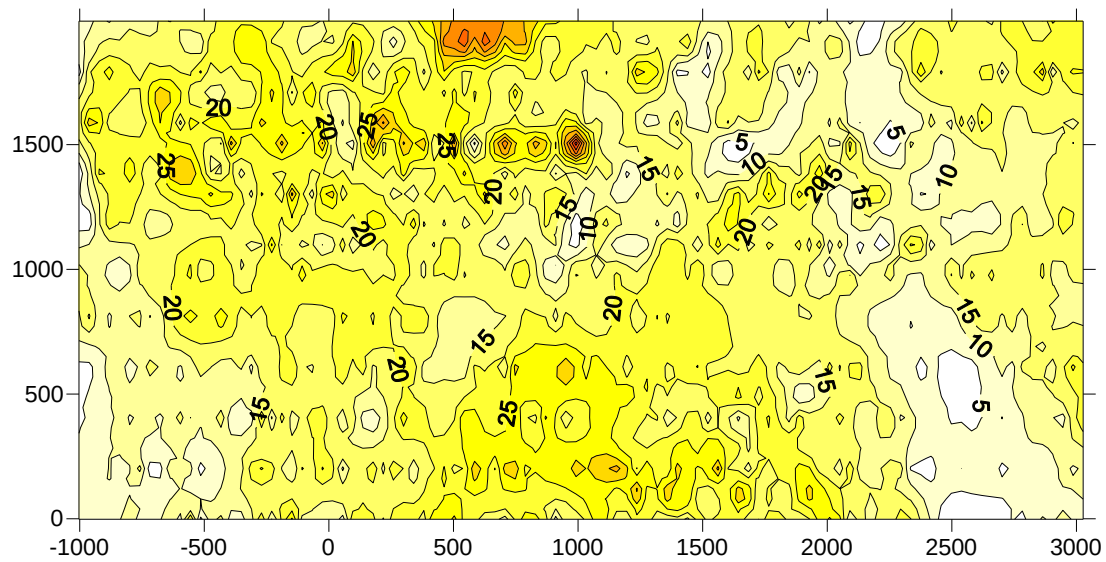
1. Линейные цепочки аномалий.
2. Аномалии типа ступени.
3. Смещение изолиний вдоль некоторой линии.
4. Изменение морфологии аномалий вдоль некоторой прямой.



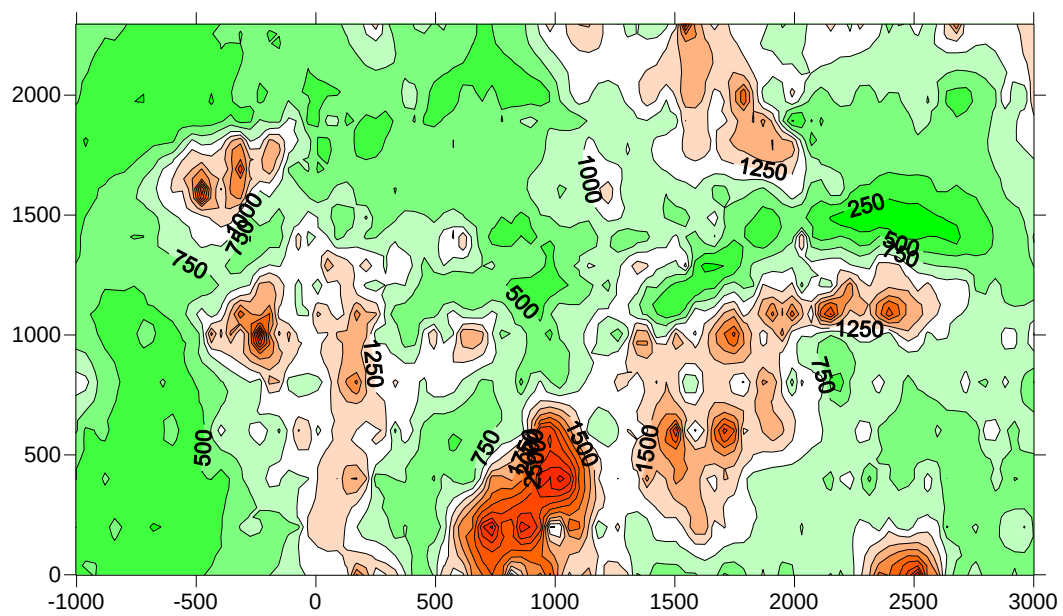
RO2-RO1



Кажущееся сопротивление



МАГНИТНОЕ ПОЛЕ



RO2

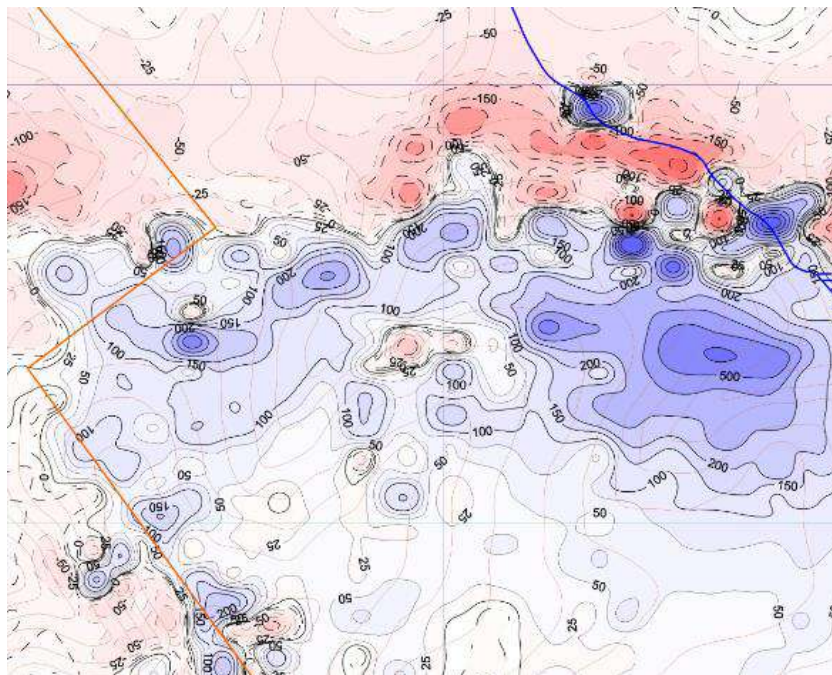
Рис. 1 Пример задания

Практическое занятие № 6 Качеств интерпретация

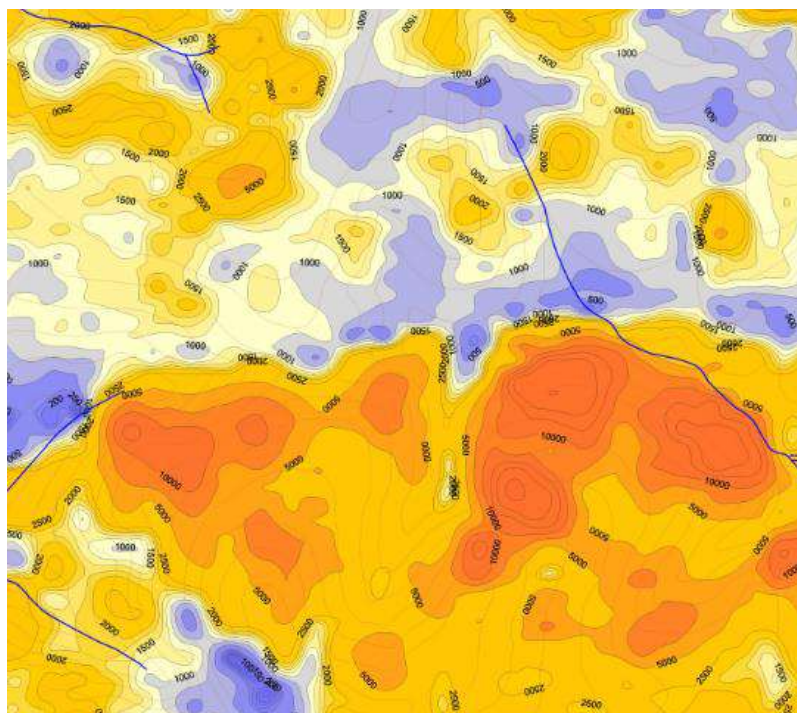
Принципы качественной интерпретации:

Форма аномалии в плане отражает форму тела. Простираение аномалии совпадает с простираением объекта.

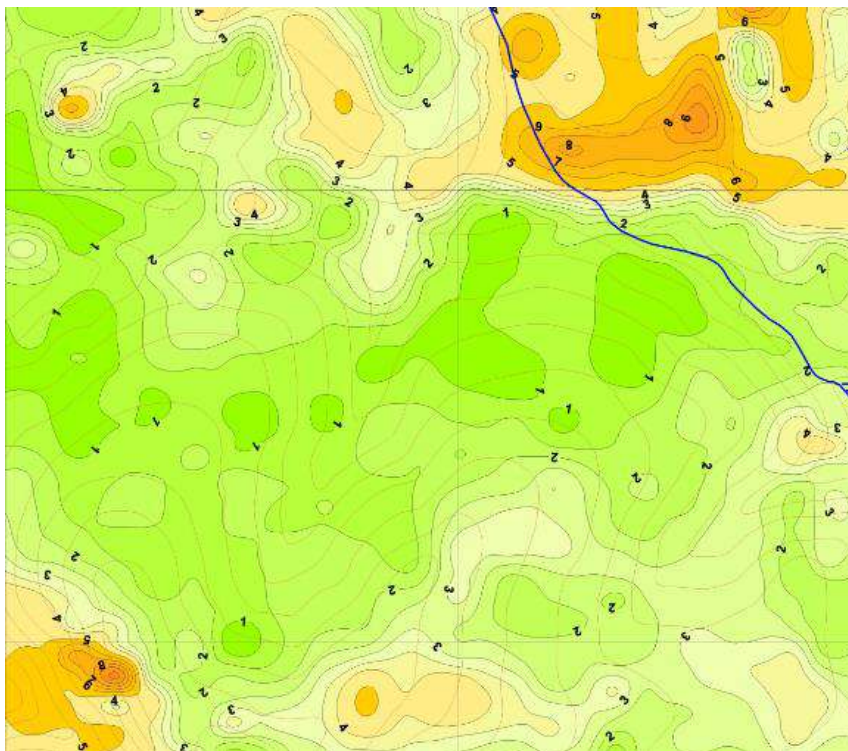
ВАРИАНТ 1



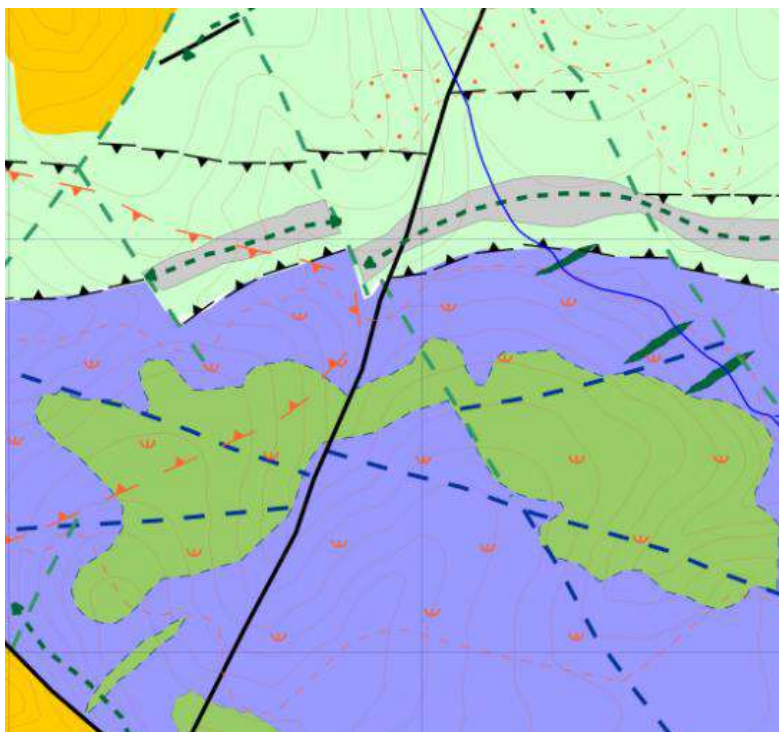
T



КАЖ. СОПР.



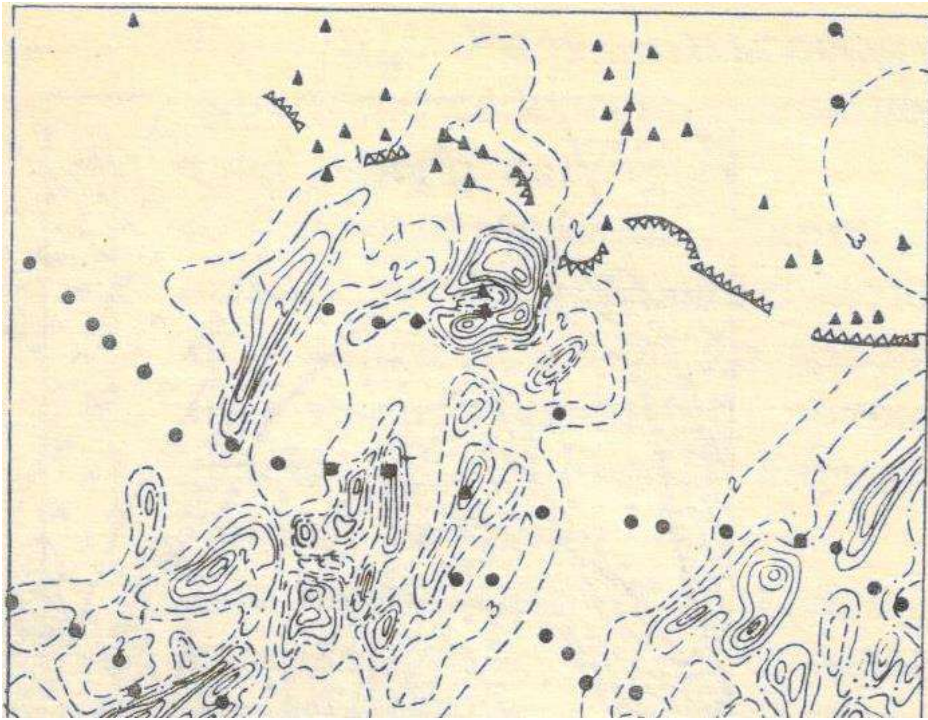
ФАЗОВЫЙ УГОЛ (ВП)



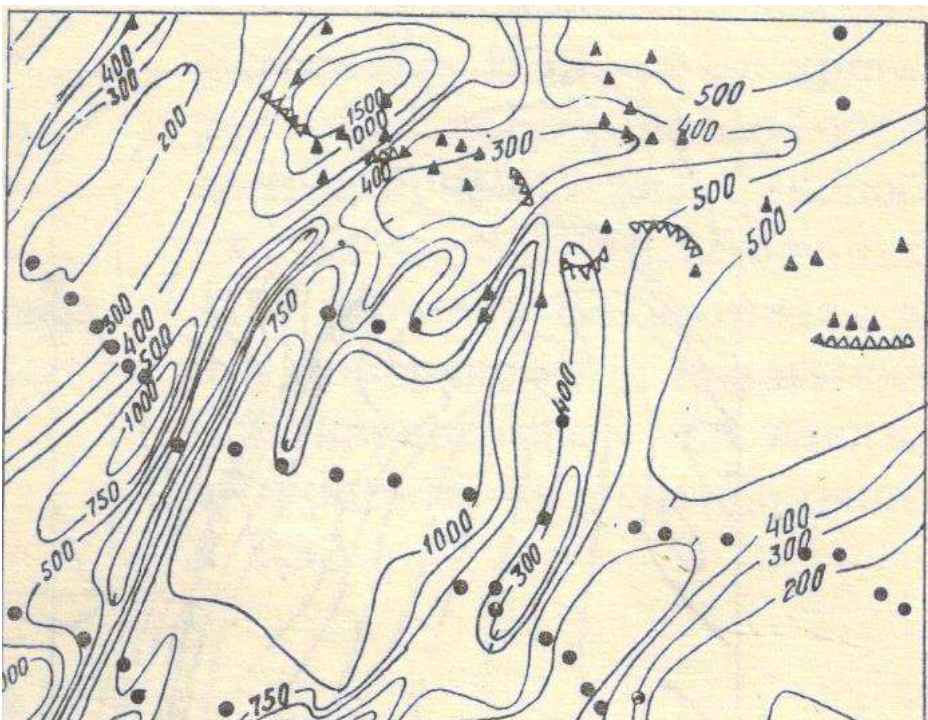
ВАРИАНТ 2

ВЫДЕЛИТЕ ОБЛАСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОРФИРИТОВ АНДЕЗИТОВ
СОСТАВА,
ИЗВЕСТНЯКОВ, ПЕСЧАНИКОВ, ТЕКТОНИЧЕСКИЕ НАРУШЕНИЯ.

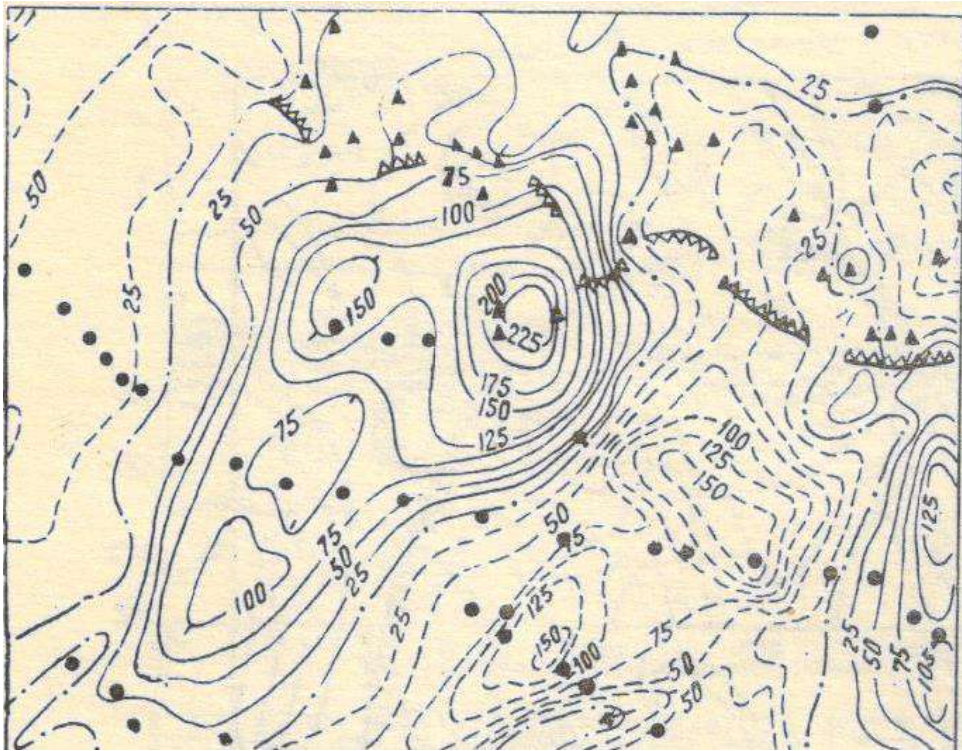
НА КАРТАХ ПОКАЗАНЫ СКВАЖИНЫ И ВЫХОДЫ КОРЕННЫХ ПОРОДАХ



ПЛАН ИЗОДИНАМ



ПЛАН ИЗООМ



ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Практическое занятие № 6 КОРРЕЛЯЦИЯ СОДЕРЖАНИЙ ЖЕЛЕЗА И МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТЬЮ

Оцените тесноту линейной взаимосвязи содержания железа в железных рудах Гусевогорского месторождения и их магнитной восприимчивостью.

Коэффициент корреляции, определяемый по выборочным данным, называется **выборочным коэффициентом корреляции**. Он вычисляется по формуле:

$$r = r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Таблица 1

При оценке тесноты связи можно использовать следующую условную таблицу:

Теснота связи	Величина коэффициента корреляции при наличии	
	прямой связи (+)	обратной связи (-)
Связь отсутствует	$r = 0$	$r = 0$
Связь слабая	$0 < r \leq 0,3$	$- 0,3 \leq r < 0$
Связь умеренная	$0,3 < r \leq 0,7$	$- 0,7 \leq r < - 0,3$
Связь сильная	$0,7 < r < 1$	$- 1 < r < - 0,7$
Полная функциональная	$r = 1$	$r = - 1$

Постройте 3 поля корреляции содержаний железа и магнитной восприимчивости. Определите, с какой величиной теснее связана магнитная восприимчивость. Для последней вычислите коэффициент корреляции и в соответствии с таблицей, приведенной выше, сделайте вывод. В отчете приведите графики и результат расчета. Сформулируйте вывод по выполненной работе.

Таблица 2. Содержание железа в руде по скважинам и их магнитная восприимчивость

№ скв	Значения КАРЬЕР- 2	Хим. анализ Fe общ.	Хим. анализ Fe маг.	Fe sil	Магнитная восприимчивость
ВАРИАНТ 1					
258	5254	18,2	12,03	6,17	0,007361
245	5249	18,26	12,09	6,17	0,007438
223	5358	15,53	8,96	6,57	0,005791
198	5274	15,58	10,12	5,46	0,007054
165	5261	16,81	10,55	6,26	0,007253
118	5389	12,75	6,53	6,22	0,005334

102	5387	14,9	8,11	6,79	0,005364
44	5495	12,16	5,2	6,96	0,003813
30	5515	11,84	4,76	7,08	0,003533
13	5653	9,23	3,06	6,17	0,001651
108	5426	12,82	6,31	6,51	0,004797
133	5386	14,45	7,77	6,68	0,005378
251	5197	17,32	11,39	5,93	0,008248
241	5174	17,22	12,27	4,95	0,008612
221	5189	16,89	12,12	4,77	0,008374
211	5225	15,88	8,93	6,95	0,007810
117	5167	19,22	14,05	5,17	0,008723
106	5210	17,35	12,4	4,95	0,008044
96	5210	16,8	10,34	6,46	0,008044
86	5243	15,77	9,86	5,91	0,007531
298	5181	15,91	11,23	4,68	0,008501
271	5159	17,46	11,96	5,5	0,008850
206	5277	17,02	10,88	6,14	0,007008
176	5771	5,06	1,92	3,14	0,000114
151	5240	16,46	9,84	6,62	0,007577

ВАРИАНТ 2

142	5247	15,99	9,83	6,16	0,007469
175	5285	17,48	10,15	7,33	0,006886
222	5424	13,62	7,06	6,56	0,004826
235	5201	16,38	10,13	6,25	0,008185
68	5211	17,49	12,38	5,11	0,008028
78	5214	17,86	12,33	5,53	0,007981
93	5297	14,21	8,76	5,45	0,006704
128	5618	9,28	4,44	4,84	0,002120
154	5248	15,24	8,41	6,83	0,007453
124	5785	5,21	1,42	3,79	-6,3551E-05
87	5336	14,13	7,7	6,43	0,006118
74	5302	16,83	10,24	6,59	0,006629
47	5305	17,95	10,96	6,99	0,006583
34	5417	14,67	8,8	5,87	0,004927
117	5402	14,71	8,39	6,32	0,005145
138	5261	14,84	8,49	6,35	0,007253
147	5264	15,85	9,82	6,03	0,007207
157	5281	16,45	10,27	6,18	0,006947
149	5253	16,56	10,86	5,7	0,007376
136	5278	16,12	10,58	5,54	0,006993

100	5341	15,28	9,54	5,74	0,006043
84	5291	15,92	10,78	5,14	0,006795
94	5456	13,19	7,23	5,96	0,004366
105	5341	14,96	8,38	6,58	0,006043
ВАРИАНТ 3					
85	5237	17,8	12,61	5,19	0,007623
269	5277	15,16	8,26	6,9	0,007008
262	5321	15,5	8,71	6,79	0,006342
212	5303	17	9,76	7,24	0,006613
189	5308	18,46	11,97	6,49	0,006538
162	5248	17,6	11,78	5,82	0,007453
152	5269	17,86	12,44	5,42	0,007131
139	5301	16,22	9,82	6,4	0,006644
168	5190	19,48	14,17	5,31	0,008358
198	5222	17,83	10,83	7	0,00785703
208	5321	16,61	9,79	6,82	0,006342793
223	5265	18,18	11,44	6,74	0,007192336
258	5272	18,23	12,38	5,85	0,007085156
263	5357	14,65	8,03	6,62	0,005806037
278	5248	17,23	11,49	5,74	0,00745382
100	5316	17,98	9,73	8,25	0,006417917
120	5299	17,55	9,65	7,9	0,0066744
132	5361	17,04	9,16	7,88	0,005746843
142	5448	15,31	8,34	6,97	0,004480867
147	5256	17,56	10,83	6,73	0,007330558
161	5335	16,88	9,9	6,98	0,006133194
174	5291	16,99	10,09	6,9	0,006795669
181	5529	14,02	7,09	6,93	0,003338015
165	5233	17,63	10,89	6,74	0,007685952
153	5276	17,22	9,64	7,58	0,007024038
ВАРИАНТ 4					
143	5273	18,16	11,92	6,24	0,007069868
104	5267	17,07	10,26	6,81	0,007161684
116	5307	18,34	11,57	6,77	0,006553498
126	5471	14,55	6,51	8,04	0,004152913
141	5358	16,68	9,51	7,17	0,00579123
281	5549	10,18	4,27	5,91	0,003060965
267	5527	9,78	3,78	6	0,00336583
253	5381	11,95	6,33	5,62	0,00545219
206	5265	17,95	10,98	6,97	0,007192336
170	5331	14,77	9,27	5,5	0,006192967

167	5316	14,51	8,61	5,9	0,006417917
154	5293	14,74	9,13	5,61	0,006765317
155	5311	14,81	9,88	4,93	0,006493183
163	5338	13,57	8,36	5,21	0,006088423
174	5307	14,94	9,24	5,7	0,006553498
197	5293	16,7	10,34	6,36	0,006765317
207	5292	17,66	12,03	5,63	0,00678049
238	5379	14,74	8,92	5,82	0,005481557
243	5462	12,54	7,16	5,38	0,004280914
252	5316	14,08	8,63	5,45	0,006417917
271	5529	10,81	5,04	5,77	0,003338015
323	5413	13,85	7,85	6	0,004985275
293	5514	13,81	7,92	5,89	0,003547121
272	5569	7,22	3,25	3,97	0,002785905
251	5432	13,08	7,62	5,46	0,004710647

ВАРИАНТ 5

188	5289	16,75	10,61	6,14	0,006826043
172	5313	14,25	8,82	5,43	0,00646306
164	5279	14,98	8,57	6,41	0,00697826
259	5616	5,9	2,27	3,63	0,002147226
264	5282	13,95	8,01	5,94	0,006932534
301	5497	11,25	5,32	5,93	0,003785487
318	5415	12,66	6,880	5,78	0,004956276
24	5497	11,51	5,18	6,33	0,003785487
36	5495	11,41	5,58	5,83	0,003813627
48	5520	12,22	5,42	6,8	0,003463342
61	5561	10,74	4,29	6,45	0,002895692
84	5559	10,13	4,12	6,01	0,002923188
85	5609	12,02	4,86	7,16	0,00224167
132	5487	12,73	5,87	6,86	0,003926393
181	5557	12,94	6,67	6,27	0,002950703
71	5556	11,43	5,77	5,66	0,002964469
62	5567	11,91	5,78	6,13	0,002813322
59	5553	10,65	5,16	5,49	0,003005794
47	5528	11,13	5,6	5,53	0,00335192
26	5522	10,35	4,89	5,46	0,003435456
35	5536	11,24	5,62	5,62	0,003240819
7	5646	8,52	2,97	5,55	0,001745119
123	5262	14,69	10,15	4,54	0,007238357
113	5229	15,86	11,72	4,14	0,007748079

ВАРИАНТ 6

99	5216	14,25	8,69	5,56	0,00795065
66	5226	16,7	12	4,7	0,007794737
49	5327	14,95	10,21	4,74	0,00625283
104	5230	16,13	11,26	4,87	0,007732539
115	5228	14,13	9,65	4,48	0,007763626
96	5222	15,53	11,18	4,35	0,00785703
45	5293	15,57	10,95	4,62	0,006765317
260	5207	14,33	8,07	6,26	0,008091483
245	5684	8,23	2,28	5,95	0,001241876
239	5441	15,6	9,88	5,72	0,00458123
226	5504	10,75	4,94	5,81	0,003687158
206	5550	11,87	5,81	6,06	0,003047165
205	5695	9,17	3,63	5,54	0,001097454
195	5730	7,61	1,66	5,95	0,000641618
187	5724	7,42	1,71	5,71	0,000719365
179	5604	12,68	6,03	6,65	0,002309275
171	5650	13,21	8,48	4,73	0,001691827
163	5499	10,97	5,02	5,95	0,003757368
142	5718	6,54	1,16	5,38	0,000797276
139	5757	5,68	0,82	4,86	0,00029376
59	5617	12,75	4,37	8,38	0,002133754
69	5680	11,97	3,98	7,99	0,001294532
79	5519	14,17	6,32	7,85	0,003477292
120	5238	16,43	12,04	4,39	0,007608427
202	5246	17,27	11,2	6,07	0,007484694
229	5295	16,75	11,22	5,53	0,006734989
ВАРИАНТ 7					
302	5210	17,19	11,82	5,37	0,008044485
341	5242	17,67	12,3	5,37	0,007546513
393	5281	16,18	11,11	5,07	0,006947771
423	5177	18,41	11,81	6,6	0,008564465
405	5252	17,25	11,03	6,22	0,007392142
380a	5183	18,07	12,44	5,63	0,008469431
360	5258	16,35	11,07	5,28	0,007299801
350a	5322	16,55	9,57	6,98	0,006327785
320a	5261	17,59	11,72	5,87	0,007253709
231a	5349	16,8	9,66	7,14	0,005924692
151	5445	14,7	6,84	7,86	0,004523848
31	5378	15,08	7,11	7,97	0,005496248
379	5179	16,92	12,53	4,39	0,008532762
354	5256	17,1	11,02	6,08	0,007330558
344	5370	15,72	9,86	5,86	0,005613977

329	5275	16,35	10,6	5,75	0,007039309
279	5258	16,28	11,54	4,74	0,007299801
248	5229	17,75	12,29	5,46	0,007748079
222	5285	15,51	10,61	4,9	0,006886861
127	5185	16,84	12,53	4,31	0,008437801
97	5329	13,88	8,4	5,48	0,006222887
67	5615	12,65	4,18	8,47	0,002160704
37	5318	15,44	9,26	6,18	0,00638785
7	5575	12,23	3,97	8,26	0,002703772
410	5185	18,23	12,92	5,31	0,008437801

ВАРИАНТ 8

400	5145	18,66	13,12	5,54	0,009075059
358	5268	15,98	10,22	5,76	0,007146367
348	5327	17,4	11,59	5,81	0,00625283
328	5274	16,59	10,65	5,94	0,007054585
254	5278	16,24	10,68	5,56	0,006993514
206	5237	16,13	9,7	6,43	0,00762392
166	5427	14,96	8,46	6,5	0,004782731
163	5478	16,16	9,64	6,52	0,004053648
146	5510	12,41	5,41	7	0,003603075
433	5173	17,44	12,26	5,18	0,008627944
444	5211	17,1	11,96	5,14	0,00802883
454	5198	18,02	12,18	5,84	0,008232804
475	5178	15,43	9,77	5,66	0,008548611
506	5317	16,49	9,93	6,56	0,006402881
497	5235	16,18	10,48	5,7	0,007654924
443	5216	16,6	11,09	5,51	0,00795065
485	5135	16,69	12,38	4,31	0,009235924
436	5232	16,57	11,07	5,5	0,007701475
448	5263	17,98	12,22	5,76	0,007223011
529	5280	15,69	10,39	5,3	0,006963012
528	5241	15,58	10,47	5,11	0,007561983
522	5341	15,29	10,28	5,01	0,006043702
514	5223	18,04	12,59	5,45	0,007841448
250	5230	15,15	11,38	3,77	0,007732539

ВАРИАНТ 9

219	5367	12,61	8	4,61	0,005658216
214	5325	13,98	9,54	4,44	0,006282795
159	5343	13,13	8,61	4,52	0,006013916
144	5399	14,21	9,67	4,54	0,005188869
338	5286	15,1	10,25	4,85	0,006871648

348	5244	14,66	8,68	5,98	0,007515592
277	5219	18,6	12,45	6,15	0,007903813
297	5378	14,64	6,96	7,68	0,005496248
339	5255	13,74	8,93	4,81	0,007345945
218	5466	11,81	7,31	4,5	0,004223973
205	5741	7,32	4,16	3,16	0,000499503
195	5401	14,14	9,62	4,52	0,00515972
175	5387	12,86	8,44	4,42	0,005364221
148	5379	18,05	13,81	4,24	0,005481557
138	5391	11,81	7,37	4,44	0,005305684
12	5123	15,99	11,9	4,09	0,009429792
32	5120	20,62	16,66	3,96	0,009478401
25	5115	17,03	13,75	3,28	0,009559542
19	5139	18,43	15,19	3,24	0,009171503
18	5162	19,64	15,57	4,07	0,008803018
24	5127	19,85	16,28	3,57	0,009365068
243	5444	11,89	7,7	4,19	0,004538186
226	5370	12,11	8,93	3,18	0,005613977
155	5179	14,65	11	3,65	0,008532762
85	5379	15,24	10,21	5,03	0,005481557
ВАРИАНТ 10					
74	5313	14,26	9,62	4,64	0,00646
18	5267	14,60	10,68	3,92	0,00716
65	5266	14,60	10,57	4,03	0,00717
82	5307	13,75	9,30	4,45	0,00655
87	5359	13,16	8,97	4,19	0,00577
89	5400	13,21	9,05	4,16	0,005174292
95	5323	15,28	10,98	4,3	0,006312782
99	5310	15,52	11,12	4,4	0,006508253
101	5269	14,78	10,93	3,85	0,007131055
110	5266	14,7	10,78	3,92	0,007177007
130	5217	15,26	11,71	3,55	0,007935031
132	5229	15,58	11,77	3,81	0,007748079
281	5337	14,15	9,48	4,67	0,006103341
284	5294	13,93	9,55	4,38	0,00675015
285	5438	11,10	6,82	4,28	0,004624321
289	5282	14,90	10,59	4,31	0,006932534
303	5361	13,52	9,44	4,08	0,005746843
304	5347	13,05	8,83	4,22	0,005954411
307	5301	13,14	9,39	3,75	0,00664414
309	5368	12,22	8,31	3,91	0,005643465
310	5348	12,89	9,08	3,81	0,005939549

319	5338	14,66	10,82	3,84	0,006088423
322	5327	14,07	10,35	3,72	0,00625283
325	5332	13,11	8,98	4,13	0,006178015
328	5409	11,15	7,26	3,89	0,005043337
ВАРИАНТ 11					
329	5365	13,15	9,07	4,08	0,005687736
340	5431	12,35	8,41	3,94	0,004725053
344	5400	14,16	10,14	4,02	0,005174292
347	5463	10,98	7,22	3,76	0,004266671
348	5476	12,32	8,42	3,9	0,004081983
353	5411	10,94	7,26	3,68	0,005014295
364	5365	13,20	9,11	4,09	0,005687736
369	5360	12,86	9,80	3,06	0,005761633
381	5430	10,13	6,67	3,46	0,004739465
383	5269	16,69	12,52	4,17	0,007131055
391	5256	15,20	11,12	4,08	0,007330558
27	5311	14,77	10,73	4,04	0,006493183
51	5476	10,53	6,38	4,15	0,004081983
75	5341	13,72	10,23	3,49	0,006043702
140	5500	8,32	3,91	4,41	0,003743316
170	5321	14,00	10,23	3,77	0,006342793
190	5526	8,82	5,35	3,47	0,003379745
203	5412	11,49	7,73	3,76	0,004999783
240	5332	14,21	10,16	4,05	0,006178015
253	5245	14,89	11,31	3,58	0,00750014
234	5397	15,29	8,93	6,36	0,005218041
243	5385	14,49	7,97	6,52	0,005393522
265	5415	14,95	9,51	5,44	0,004956276
266	5355	14,31	9,36	4,95	0,005835668
276	5257	17,46	11,87	5,59	0,007315176
286	5357	16,01	10	6,01	0,005806037
ВАРИАНТ 12					
287	5358	15,38	9,55	5,83	0,00579123
306	5224	20,34	14,08	6,26	0,007825872
285	5287	16,52	11,68	4,84	0,00685644
268	5458	14,91	8,71	6,2	0,004337939
264	5326	15,79	11,16	4,63	0,006267809
255	5427	14,67	8,38	6,29	0,004782731
232	5333	16,01	9,95	6,06	0,006163069
212	5360	16,24	9,72	6,52	0,005761633
73	5338	14,21	9,68	4,53	0,006088423

76	5304	14,58	10,15	4,43	0,006598793
83	5314	14,42	9,62	4,8	0,006448006
123	5419	13,05	8,69	4,36	0,004898342
153	5743	7,41	3,32	4,09	0,000473722
166	5322	15,05	9,8	5,25	0,006327785
239	5584	9,91	5,51	4,4	0,002580903
229	5537	11,6	6,58	5,02	0,003226954
207	5539	11,3	6,29	5,01	0,00319924
199	5482	11,38	6,47	4,91	0,003997038
190	5554	11,18	5,92	5,26	0,002992014
137	5689	9,35	4,52	4,83	0,00117616
107	5505	9,64	4,53	5,11	0,003673131
106	5586	11,17	6,68	4,49	0,002553653
121	5684	7,39	2,78	4,61	0,001241876
151	5663	10,31	5,57	4,74	0,001519149
272	5206	18,94	14,99	3,95	0,008107161
252	5262	15,91	11,59	4,32	0,007238357
212	5239	15,5	11,79	3,71	0,00759294
192	5205	16,72	13,12	3,6	0,008122846
182	5167	16,11	12,31	3,8	0,008723346
211	5228	15,77	11,8	3,97	0,007763626
220	5244	16,08	11,76	4,32	0,007515592
190	5200	15,62	11,75	3,87	0,008201357
245	5233	17	12,55	4,45	0,007685952
235	5276	15,85	11,62	4,23	0,007024038
Вариант 13					
224	5254	16,56	12,9	3,66	0,007361338
205	5166	17,4	14,2	3,2	0,008739268
185	5202	16,35	12,37	3,98	0,008169935
203	5222	16,45	11,44	5,01	0,00785703
233	5196	16,22	12,5	3,72	0,008264276
156	5176	15,86	12,15	3,71	0,008580325
172	5203	16,49	12,44	4,05	0,008154232
154	5213	16,61	13,15	3,46	0,00799754
37	5255	14,51	10,34	4,17	0,007345945
36	5225	15,94	12,16	3,78	0,007810301
16	5268	15,1	10,43	4,67	0,007146367
300	5360	14,9	9,97	4,93	0,005761633
125	5656	9,06	4,48	4,58	0,001612031
73	5274	14,64	10,65	3,99	0,007054585
55	5487	10,74	6,59	4,15	0,003926393
79	5337	14,67	10,82	3,85	0,006103341

91	5277	16,21	12,2	4,01	0,007008773
164	5430	12,34	7,88	4,46	0,004739465
18	5267	14,60	10,68	3,92	0,007161684
89	5400	13,21	9,05	4,16	0,005174292
99	5310	15,52	11,12	4,4	0,006508253
130	5217	15,26	11,71	3,55	0,007935031
110	5266	14,7	10,78	3,92	0,007177007
87	5359	13,16	8,97	4,19	0,005776429
101	5269	14,78	10,93	3,85	0,007131055
132	5229	15,58	11,77	3,81	0,007748079
95	5323	15,28	10,98	4,3	0,006312782
ВАРИАНТ 14					
289	5282	14,90	10,59	4,31	0,006932
303	5361	13,52	9,44	4,08	0,005746
307	5301	13,14	9,39	3,75	0,00664
348	5476	12,32	8,42	3,9	0,00408
386	5254	13,45	9,70	3,75	0,007361
369	5360	12,86	9,80	3,06	0,005761
347	5463	10,98	7,22	3,76	0,004266
391	5256	15,20	11,12	4,08	0,007330
344	5400	14,16	10,14	4,02	0,005174
329	5365	13,15	9,07	4,08	0,005687
322	5327	14,07	10,35	3,72	0,00625
265	5356	12,33	8,21	4,12	0,00582
228	5364	14,95	10,53	4,42	0,005702
208	5293	13,43	9,47	3,96	0,006765
188	5451	12,39	7,63	4,76	0,004437
178	5386	13,51	9,19	4,32	0,005378
179	5330	14,57	10,49	4,08	0,006207
204	5342	12,57	8,58	3,99	0,006028
239	5258	13,55	9,46	4,09	0,007299
254	5223	15,13	11,05	4,08	0,007841
279	5563	7,86	4,79	3,07	0,002868
100	5272	16,58	12,59	3,99	0,007085
64	5404	13,72	9,46	4,26	0,005116
41	5481	12,44	7,89	4,55	0,004011
28	5494	10,67	6,43	4,24	0,003827
12	5405	11,97	7,67	4,3	0,005101
7	5402	12,68	8,27	4,41	0,005145

Практическое занятие № 7 ВЫДЕЛЕНИЕ ЗОН МЕТАСОМАТОЗА

ПРЕДСТАВЛЕНЫ КАРТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, КАЖУЩЕГОСЯ
СОПРОТИВЛЕНИЯ, КАЖУЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ И МАСШТАБА
1:10000

1 РАССМОТРИТЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

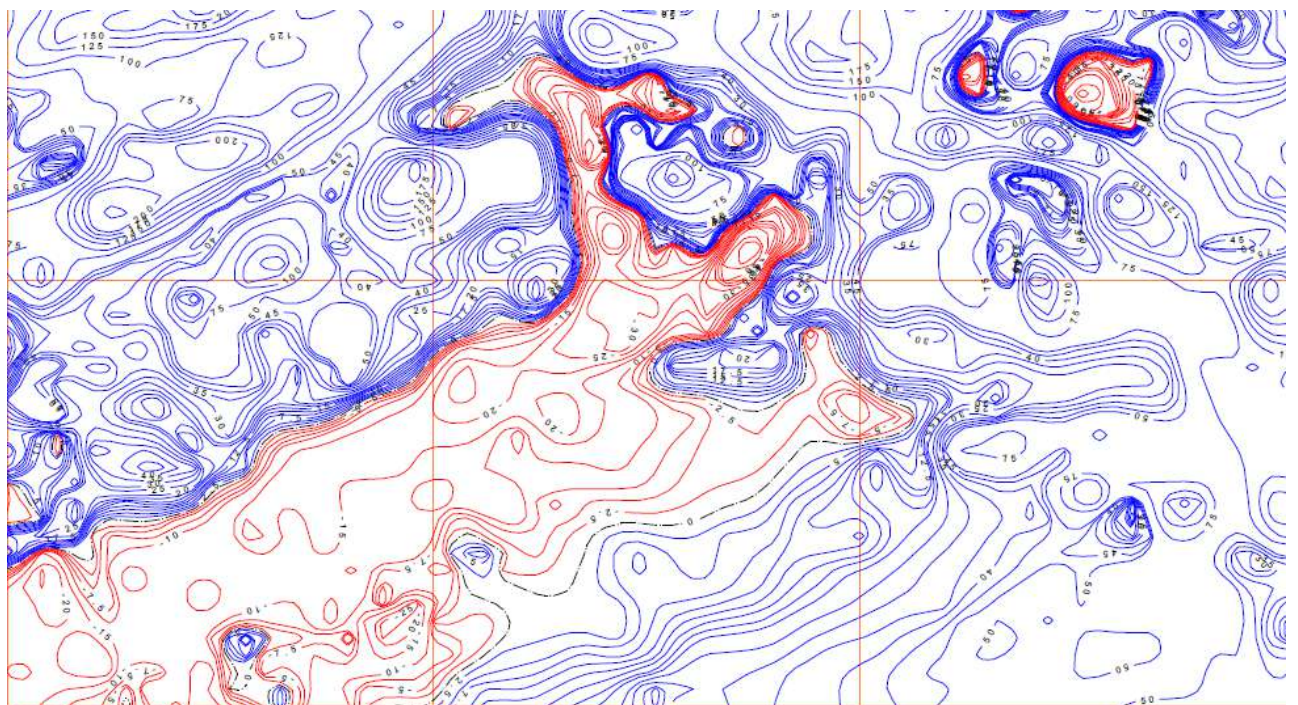
2 СФОРМУЛИРУЙТЕ ПРИЗНАКИ СТРУКТУРНО-ВЕЩЕСТВЕННЫХ
КОМПЛЕКСОВ И СОЗДАЙТЕ ПРИЗНАКОВОЕ ПРОСТРАНСТВО
(ДИАПАЗОН ИЗМЕНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ)

3 ВЫПОЛНИТЕ ПРОЦЕДУРУ ЕСТЕСТВЕННОГО РАССЛОЕНИЯ
ДАННЫХ (РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ)

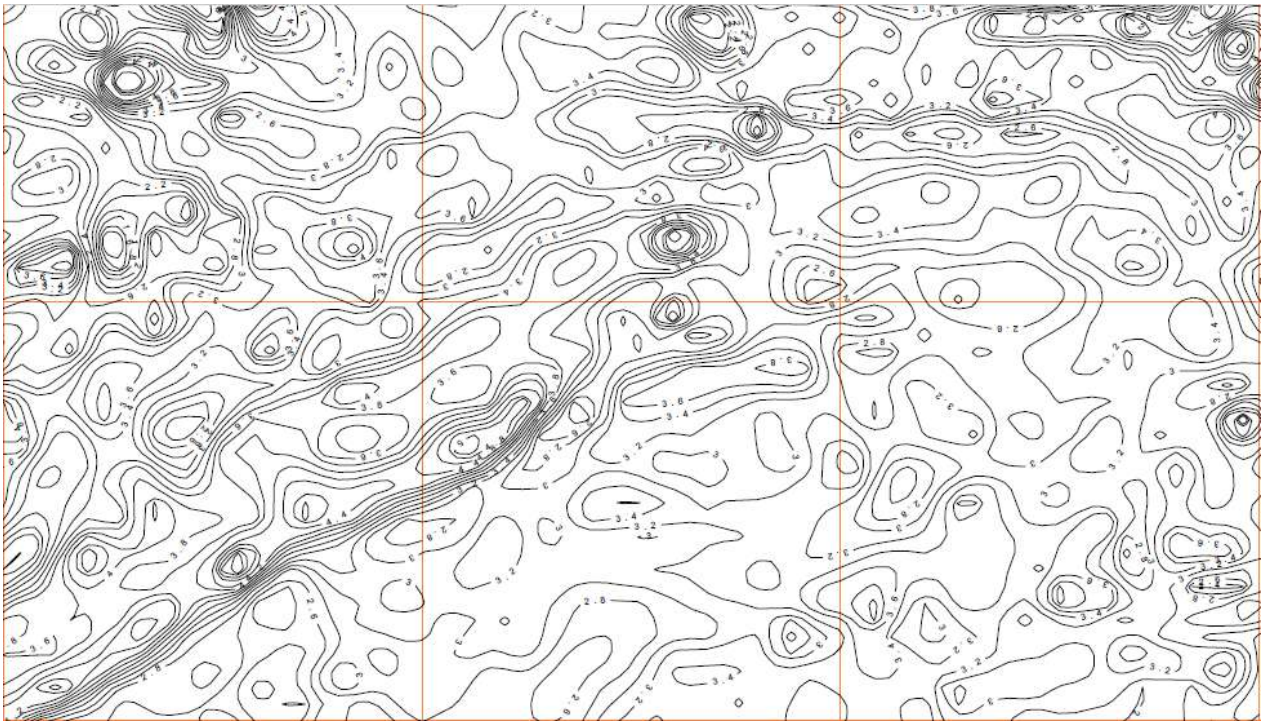
4 ВЫДЕЛИТЕ ЗОНУ МЕТАСОМАТИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ. УКАЖИТЕ
МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ТРЕХ СКВАЖИН ГЛУБИНОЙ 100 М

4 НАПИШИТЕ ОТЧЕТ

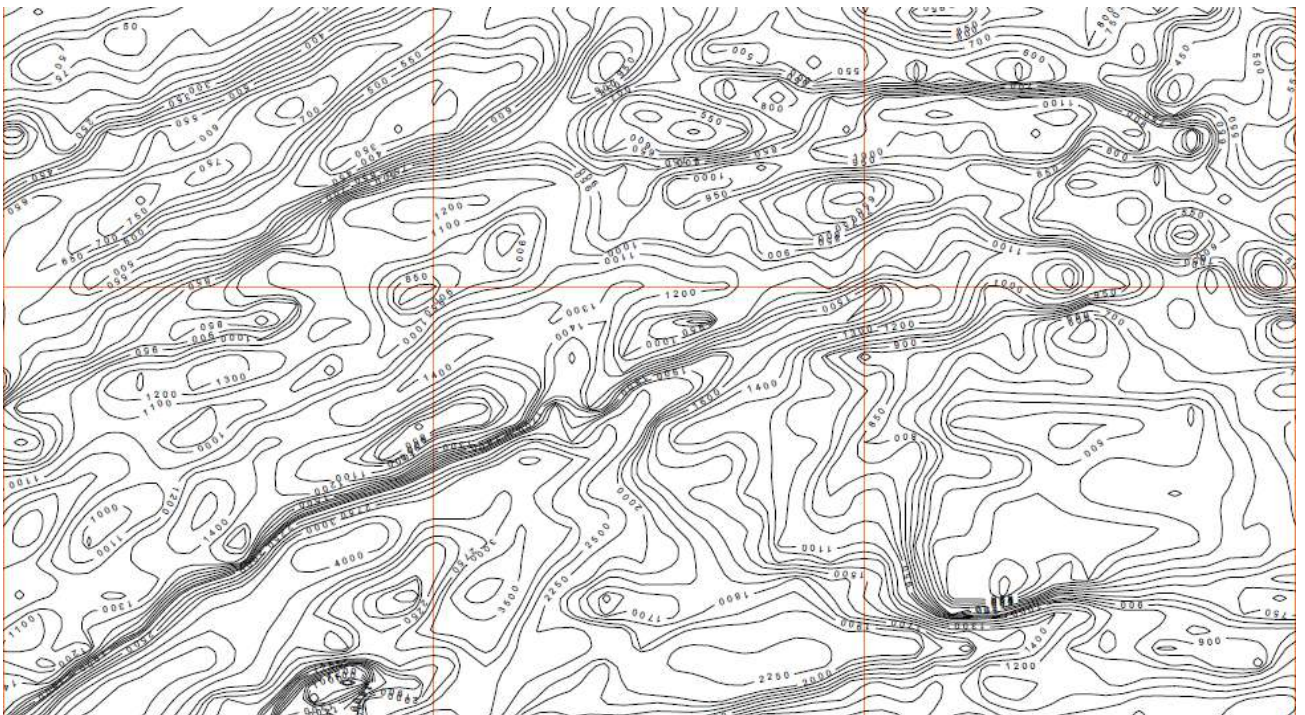
1 вариант



МАГНИТНОЕ ПОЛЕ



ВП F1



КАЖУЩЕЕСЯ СОПРОТИВЛЕНИЕ

2 вариант

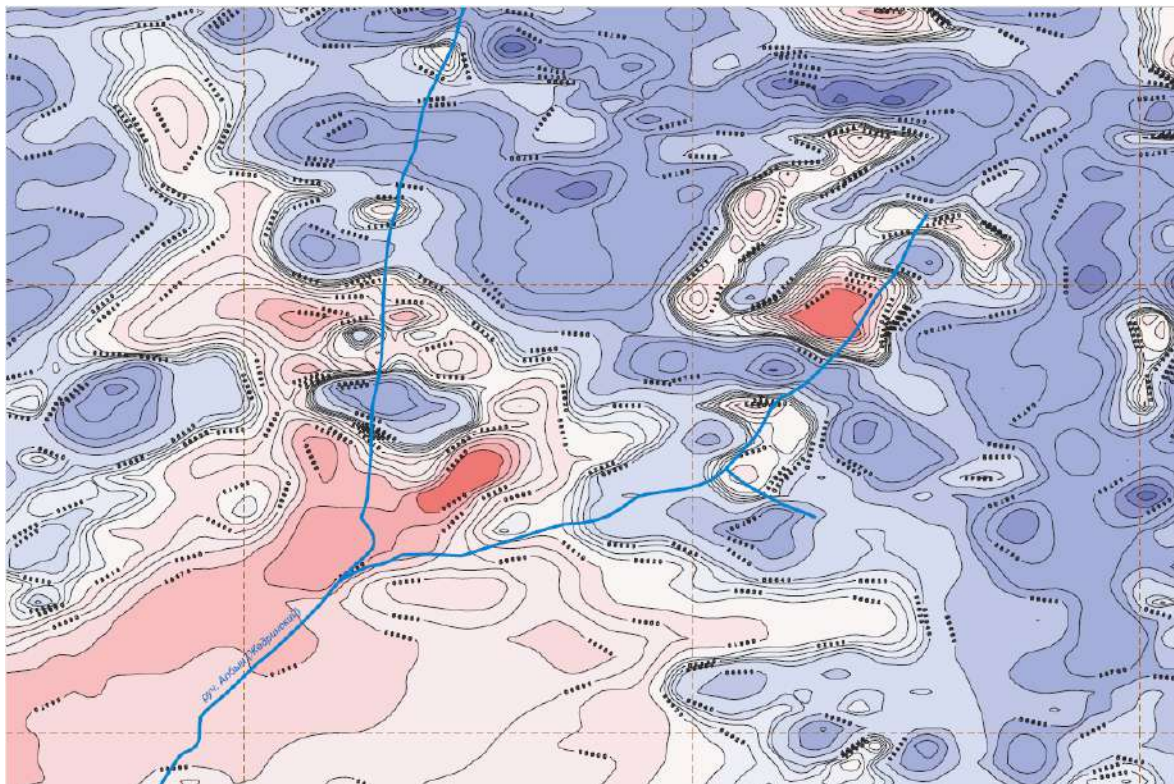
ПРЕДСТАВЛЕНЫ КАРТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, КАЖУЩЕГОСЯ
СОПРОТИВЛЕНИЯ, КАЖУЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ И ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА
МАСШТАБА :10000

1 РАССМОТРИТЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

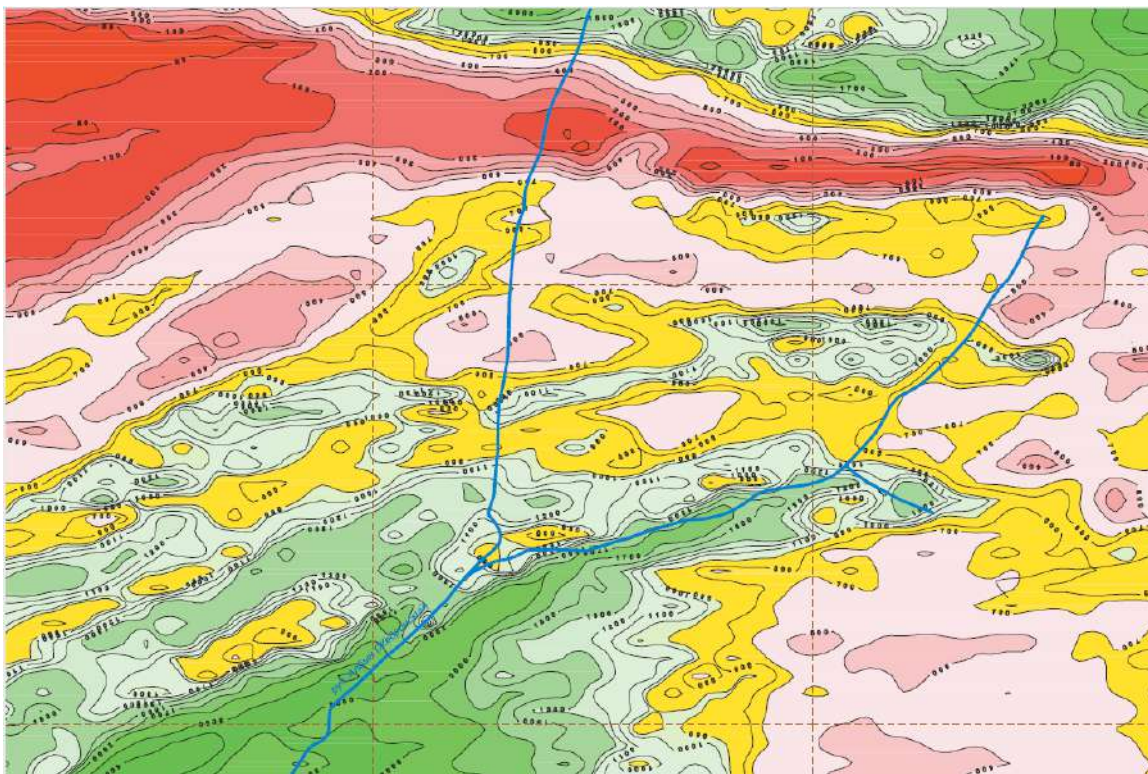
2 ОПРЕДЕЛИТЕ КАК ИСПОЛЬЗОВАНЫ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ
ГЕОЛОГИЧЕСКОГО КАРТИРОВАНИЯ

3 ДОПОЛНИТЕ ВЫПОЛНЕННОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ПОЛЕЙ ЭЛЕМЕНТАМИ, НЕ
НАШЕДШИМИ ОТРАЖЕНИЯ НА ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ КАРТЕ

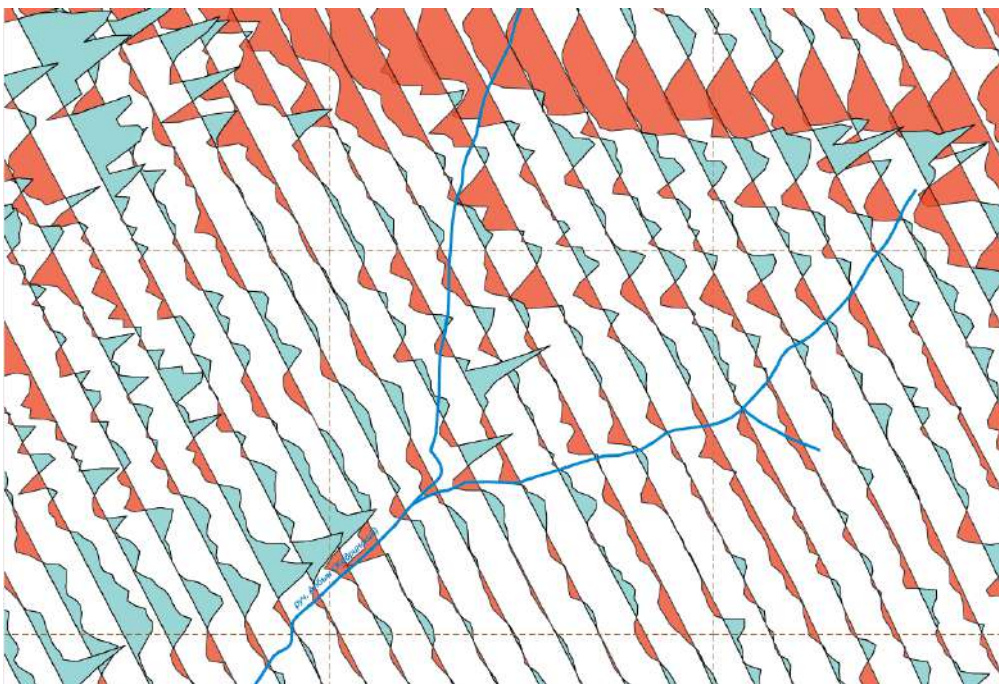
4 НАПИШИТЕ ОТЧЕТ



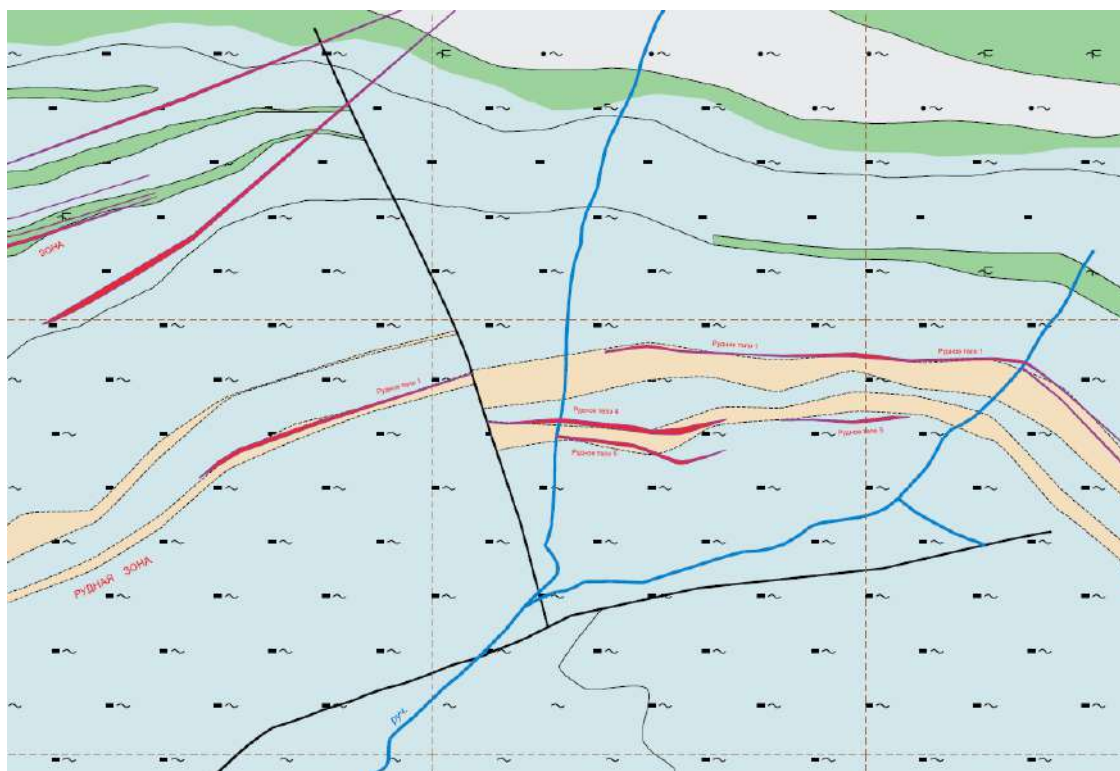
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ



КАЖУЩЕЕСЯ СОПРОТИВЛЕНИЕ



ГРАФИКИ КАЖУЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ



Условные обозначения



- низкие слабодифференцированные поля кажущегося сопротивления (500 - 1000 Ом*м), низкие спокойные поля магнитного поля (50нТл - 100 нТл), отмечающиеся поляризуемостью (1%- 3%) соответствующие метапесчаникам, металевогранитам с прослоями филлитизированных сланцев



- низкие, линейные поля кажущегося сопротивления (40 - 400 Ом*м), низкие дифференцированные поля магнитного поля (50нТл - 200 нТл), отмечающиеся дифференцированной поляризуемостью (1% - 4%) соответствующие графитистым (углеродсодержащим) сланцам с прослоями серых филлитизированных алевроитовых и карбонат-кремнистых сланцев, филлитовых сланцев верхней подсвиты



- дифференцированные поля кажущегося сопротивления (400 - 1000 Ом*м), низкие знакопеременные дифференцированные поля магнитного поля (-20нТл - 300 нТл), отмечающиеся слабодифференцированной поляризуемостью (2,5% - 3,5%) соответствующие участкам переслаивания графитистых (углеродсодержащих) сланцев и серых алевроитовых филлитизированных сланцев с карбонат-глинистыми (карбонат-слюдисто-кварцевыми) углеродистыми и карбонат-кремнистыми сланцами средней подсвиты



- высокие слабодифференцированные поля кажущегося сопротивления (1500 - 5000 Ом*м), низкие знакопеременные поля магнитного поля (-70нТл - 30 нТл), отмечающиеся высокой слабодифференцированной поляризуемостью (3% - 4%) соответствующие графитистым сланцам с прослоями двуслюдяных сланцев (альбит-слюдисто-кварцевых) нижней подсвиты



- высокие поля кажущегося сопротивления (2000 - 10000 Ом*м), линейные интенсивные аномалии магнитного поля (500 нТл - 600 нТл), низкие линейные поля кажущейся поляризуемости (0,5% - 1,0%) соответствующие альбит-актинолит-эпидотовым, альбит-хлорит-актинолит-эпидотовым сланцам



- золоторудные тела по данным поисково-оценочных работ 2007-2008 гг.



1. Золоторудные кварц-альбитовые метасоматиты
2. Золотоносные жилы
месторождения и их названия



- тектонические нарушения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В.И. Аронов Методы математической обработки геологических данных на ЭВМ.
- 2 В.Н. Страхов – геофизик и математик.
- 3 Справочник по математическим методам в геологии.
- 4 Никитин А.А. Теоретические основы обработки геологической информации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

- Лабораторная работа № 1 Описание поверхностей геологических объектов
- Лабораторная работа № 2 Описание геологической поверхности кубическими сплайнами
- Лабораторная работа № 3 Аналитическая аппроксимация естественного электрического поля
- Лабораторная работа № 4 Подсчет ресурсов по геофизическим данным
- Лабораторная работа № 5 Выделение разломов по комплексу геофизических методов
- Лабораторная работа № 6 Корреляция содержания железа и магнитной восприимчивости
- Лабораторная работа № 7 Анализ геофизических полей

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому
комитету
С.А. Упоров



МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

по дисциплине

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Сковородников И. Г., Кузин А. В.

Екатеринбург

2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
1. Назначение первичных преобразователей, их характеристики и классификация.....	5
Контрольные вопросы.....	11
2. Преобразователи параметрического типа.....	12
2.1. Резистивные преобразователи.....	12
2.1.1. Контактные преобразователи.....	12
2.1.2. Реостатные преобразователи.....	13
2.1.3. Тензометрические преобразователи.....	16
2.1.4. Электролитические преобразователи.....	19
2.1.5. Терморезистивные преобразователи.....	21
2.1.6. Магниторезистивные преобразователи.....	23
2.1.7. Фотоэлектрические преобразователи.....	25
2.2. Индуктивные преобразователи.....	26
2.2.1. Индуктивные преобразователи с изменяемым воздушным зазором.....	27
2.2.2. Магнитоупругие преобразователи.....	29
2.2.3. Магнитомодуляционные преобразователи.....	30
2.3. Емкостные преобразователи.....	34
Контрольные вопросы.....	35
3. Преобразователи генераторного типа	36

3.1. Преобразователи индукционной э.д.с.....	36
3.1.1. Преобразователи индукционной э.д.с. со взаимным перемещением магнита и катушки индуктивности.....	36
3.1.2. Преобразователи индукционной э.д.с. со стационарным размещением магнита и катушки индуктивности.....	38
3.2. Преобразователи гальваномагнитной э.д.с.....	41
3.2.1. Преобразователи Холла.....	41
3.2.2. Преобразователи Виганда.....	42
3.3. Преобразователи пьезоэ.д.с.....	44
3.4. Преобразователи термоэ.д.с.....	45
3.5. Преобразователи фотоэ.д.с.....	46
Контрольные вопросы.....	49
4. Радиационные преобразователи.....	49
4.1. Газоразрядные детекторы.....	50
4.2. Сцинтилляционные детекторы.....	53
4.3. Полупроводниковые детекторы.....	56
Контрольные вопросы.....	56
Литература.....	57

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель данного пособия – познакомить студентов с применением различных электрических датчиков в геофизической аппаратуре, облегчить им усвоение соответствующих разделов курса «Геофизическая аппаратура» и выполнение курсового проектирования по нему.

Необходимость издания пособия обусловлена тем, что в опубликованных работах по первичным преобразователям рассматриваются датчики общетехнического применения, в то время, как датчики разнообразной геофизической аппаратуры имеют ряд особенностей, связанных со спецификой условий их эксплуатации.

В пособии рассмотрены физические основы и устройство датчиков всех типов, входные и выходные параметры, указаны их достоинства и недостатки и приведены примеры применения в конкретной геофизической аппаратуре.

В качестве примеров в ряде случаев использованы оригинальные разработки автора.

В конце каждой главы приведен перечень контрольных вопросов для самостоятельной проверки усвоения материала студентами.

1. НАЗНАЧЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ

Первичные преобразователи в геофизической аппаратуре (ГА) являются теми элементами, которые вырабатывают сигнал информации об измеряемой величине. По этой причине первичные преобразователи ГА называются также измерительными преобразователями. Другими синонимами термина «первичный преобразователь» являются «датчик», «детектор», «чувствительный

элемент», «сенсор», «трансмиситтер» [4,15,23]. Правда, в специальной литературе существуют различные толкования термина «датчик», наиболее распространенного из перечисленных терминов. Так, например, в монографии К. Бриндли [4], датчик рассматривается как пассивный преобразователь, т.е. преобразователь получающий энергию для своей работы от измеряемой величины. В других источниках [1,16] под датчиком понимается конструктивно законченное устройство, которое, кроме первичного преобразователя, может содержать и другие элементы (усилитель сигнала, источник питания и т.п.) и которое устанавливается на удалении от наблюдателя. В данном пособии, как и в большей части специальной литературы, термин «датчик» будет использоваться как синоним первичного или измерительного преобразователя.

Важнейшими характеристиками датчиков служат: чувствительность, точность (достоверность) информации об измеряемой величине, надежность и долговечность, стабильность работы при изменении внешних условий, быстродействие, вид зависимости выходного сигнала от измеряемой величины (линейная, нелинейная, реверсивная, нереверсивная и т.п.).

Поясним некоторые из перечисленных характеристик.

Чувствительность преобразователя, которую также называют **коэффициентом передачи**, представляет собой отношение изменения выходного сигнала y , к изменению входного сигнала x . Различают три вида коэффициентов передачи: статический, относительный и дифференциальный.

Статический коэффициент передачи используется для определения свойств преобразователей с линейной характеристикой: $K_{ст}=y/x$.

Дифференциальный коэффициент передачи применяется для датчиков с нелинейной характеристикой: $K_{диф}=\lim \Delta y/\Delta x \approx dy/dx$. Значение этого коэффициента непостоянно и зависит от величины входного сигнала x .

Относительный коэффициент передачи равен отношению относительного изменения сигнала на выходе датчика к относительному изменению сигнала на его вход $K_{отн}=(\Delta y/y)/(\Delta x/\Delta x)$. Этот коэффициент является величиной

безразмерной и удобен для сравнения свойств преобразователей, различных по принципу действия и конструкции.

У некоторых измерительных преобразователей вследствие трения покоя, шумов измерительной схемы, гистерезиса и др. причин изменение выходного сигнала появляется только тогда, когда измеряемая величина достигает определенного уровня. Этот уровень называется порогом **чувствительности** x_n .

Во время работы первичного преобразователя на него, кроме измеряемой величины, воздействуют и другие сигналы – помехи, например, изменения температуры, внешнего давления, вибрации, изменения напряжения питания и пр. Результаты воздействия помех проявляются в виде погрешностей измерений: абсолютных, относительных, приведенных.

Абсолютная погрешность – это разность между измеренным y и действительным (расчетным) значениями выходной величины y_0 : $\Delta y = y_{\text{изм}} - y_0$.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности к действительному значению выходной величины в процентах: $\delta = (\Delta y / y_0) \cdot 100$.

Приведённая погрешность – это отношение абсолютной погрешности к наибольшему действительному значению выходной величины: $\varepsilon = \Delta y / y_{\text{max}}$. Для измерительных приборов приведенная погрешность определяет их класс точности.

В зависимости от режима, для которого определяется абсолютная или относительная погрешность, различаются **статические** и **динамические** погрешности (ошибки). Приведенная погрешность определяется только для установившегося (статического) режима [10].

Характер зависимости выходного сигнала от измеряемой величины $y = f(x)$ в установившемся режиме называется **статической** характеристикой преобразователя.

Наиболее удобными в работе и потому наиболее распространенными являются датчики, имеющие линейную характеристику. Если характеристика

датчика нелинейна, то для формирования выходного сигнала могут применяться системы линеаризации. В некоторых случаях, например, если измеряемая величина изменяется нелинейным образом, удобнее использовать преобразователи с нелинейной статической характеристикой.

В зависимости от того, как на выходную величину влияет изменение знака измеряемой величины, статические характеристики бывают: **нереверсивными** (когда знак выходного сигнала остается постоянным во всем диапазоне измерений) и **реверсивными** (когда выходной сигнал изменяет свой знак вслед за измеряемой величиной).

Следует упомянуть еще одну из характеристик измерительных преобразователей – **гистерезис**, который проявляется в несовпадении значений выходного сигнала при одном и том же значении измеряемой величины в зависимости от уменьшения или увеличения последней в момент измерения.

Надежность преобразователя – это способность работать в течение определенного периода времени при заданных условиях эксплуатации.

Надежность преобразователей, так же, как надежность, сложных электронных или механических устройств вообще, характеризуется вероятностью безотказной работы, средним временем безотказной работы и интенсивностью отказов – отношением числа отказавших устройств в определяемый промежуток времени к числу работоспособных в начале этого промежутка.

График зависимости интенсивности отказов от времени эксплуатации имеет характерную корытообразную форму. Первый участок графика ($0 - t_1$) называется "временем приработки", в этот период интенсивность отказов велика из-за того, что здесь проявляются дефекты сборки, выходят из строя некондиционные детали и т. п. Второй участок $t_1 - t_2$ называется "периодом условной долговечности», здесь отказы могут быть связаны, в основном, со случайными причинами. Третий участок $t_2 - \infty$ называется "периодом старе-

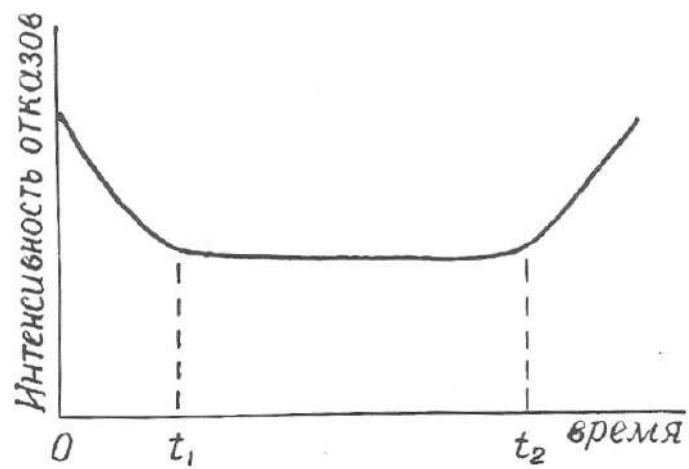


Рис. 1.1. Зависимость и интенсивности отказов от времени эксплуатации преобразователя

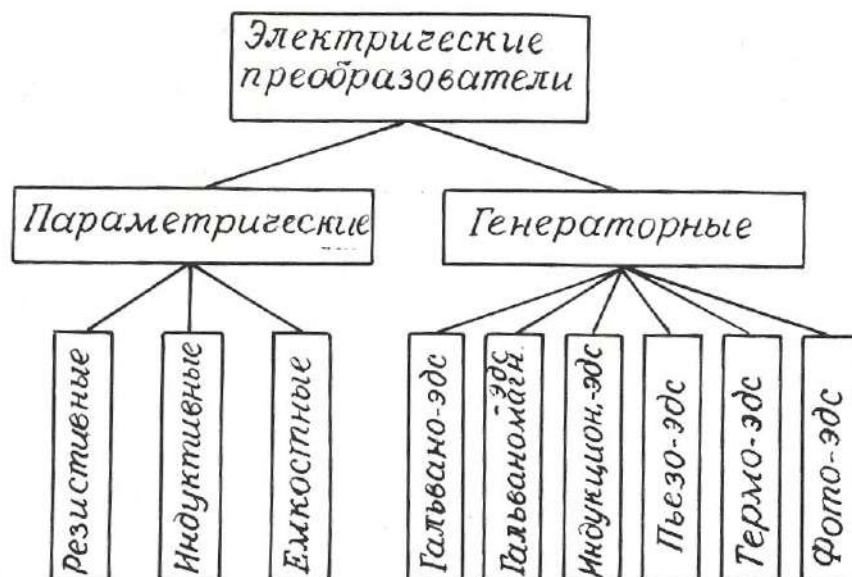


Рис. 1.2. Классификация электрических преобразователей

ния», здесь интенсивность отказов растет из-за того, что детали преобразователя вырабатывают свой ресурс (рис. 1.1).

Пути повышения надежности преобразователей – это упрощение их устройства, использование элементов с большой вероятностью безотказной работы, «разгруженный» режим эксплуатации.

подавляющее большинство датчиков геофизической аппаратуры преобразуют измеряемую величину в электрический сигнал, хотя имеются датчики, например, в гравиразведочных приборах, выходная величина которых не является электрической.

Электрические преобразователи, применяемые в геофизической аппаратуре, крайне разнообразны по принципу действия и конструкции.

Основными признаками, позволяющими классифицировать датчики, являются: назначение, принцип действия, вид входного и выходного сигналов, наличие или отсутствие источников питания.

По назначению электрические датчики делятся на преобразователи неэлектрических величин в электрические и преобразователи одних электрических величин в другие. Соответственно входные величины измерительных преобразователей могут иметь как электрическую, так и неэлектрическую природу. Это могут быть характеристики различных физических полей (например, магнитная индукция, температура, сила тяжести, э.д.с. естественных электрических полей), разнообразные свойства горных пород, руд и растворов (плотность, электрическое сопротивление, магнитная восприимчивость, радиоактивность), геометрические и технические параметры буровых скважин (их диаметр, углы искривления), скорость перемещения, механические усилия и т. д.

Выходными величинами электрических датчиков могут, быть: э.д.с., сила тока, частота тока, импульсы тока или комбинации импульсов различной длительности и амплитуды, а также сопротивление, емкость или индуктивность электрической цепи.

По принципу действия электрические преобразователи делятся на **параметрические**, изменяющие пассивные элементы электрической цепи (сопротивление, емкость, индуктивность), и **генераторные**, вырабатывающие э.д.с. различной физической природы. В свою очередь, среди параметрических датчиков выделяются: резистивные, емкостные и индуктивные, а среди генераторных: датчики гальванической, гальваномагнитной, индукционной, фото-, пьезо- и термоэ.д.с. (рис. 1.2).

Особняком стоят радиационные преобразователи (детекторы радио-активных излучений), которые имеют сложную структуру.

Каждый из видов датчиков, изображенных на рис. 1.1, имеет свои разновидности, отличающиеся по конструктивному исполнению.

По наличию или отсутствию специальных источников питания датчики подразделяются на **пассивные**, получающие энергию от измеряемой величины, и **активные**, питающиеся от внешнего источника.

В следующих разделах пособия будут рассмотрены физические свойства, особенности конструкции, достоинства и недостатки, а также примеры применения в конкретных образцах геофизической аппаратуры всех видов датчиков, представленных на рис. 1.2.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение измерительного преобразователя.
2. Какие синонимы существуют у термина «измерительный преобразователь»?
3. Что такое чувствительность преобразователя?
4. Назовите виды коэффициентов передачи датчика.
5. Назовите виды погрешностей преобразователей, укажите, какие причины их вызывают.
6. Что такое статическая характеристика преобразователя?
7. Что такое надежность преобразователя?
8. Поясните график зависимости интенсивности отказов от времени (рис. 1.1).

9. По каким признакам производят классификацию электрических преобразователей?
10. Назовите входные и выходные величины электрических преобразователей в геофизической аппаратуре.
11. На какие две большие группы делятся электрические преобразователи по принципу действия?
12. Поясните классификацию преобразователей, приведенную на рис. 1.2.

2. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

2.1. Резистивные преобразователи

В преобразователях этого вида изменения измеряемого параметра преобразуются в изменения **активного сопротивления** электрической цепи.

В соответствии с выражением $R = \rho \cdot l / S$ (2.1) изменения сопротивления R могут происходить за счет изменения геометрических размеров проводника (длины l и поперечного сечения S) или его удельного сопротивления ρ . К преобразователям с изменяемыми размерами относятся контактные, реостатные, потенциометрические, тензометрические, угольные и электролитические датчики. К преобразователям с изменяемым удельным сопротивлением – электролитические, терморезистивные и некоторые фотоэлектрические датчики.

2.1.1. Контактные преобразователи

Контактные преобразователи представляют собой простейшую разновидность преобразователей резистивного типа. В одном крайнем положении их сопротивление равно бесконечности, в другом близко к нулю.

Работой контактных преобразователей могут управлять механические (линейное или угловое перемещение) или различные физические параметры (температура, магнитное поле, электрический ток).

Контактные преобразователи составляют основу большинства реле, широко применяемых в системах автоматического управления [8,11]. В последнее время широкое распространение получили **герконы** – миниатюрные герметизированные контактные преобразователи, управляемые магнитным полем.

Достоинства контактных преобразователей составляют их простота и малая стоимость, универсальность (они могут работать в цепях как постоянного, так и переменного тока); недостатки – искрение и «дребезг» контактов, возможность ложных срабатываний контактов от тряски.

В геофизической аппаратуре контактные преобразователи используются в различных измерителях постоянных напряжений для преобразования этих напряжений в переменные, которые потом подвергаются усилению на электронных усилителях. Примером могут служить электроразведочные измерители ЭСК-1, АТ-72, самопишущие каротажные потенциометры ПАСК-8 и ПАСК-9. Контактные преобразователи используются также в схемах управления многочисленных скважинных приборов (в пластовом наклонном НП-3, расходомерах с раскрывающимся пакером и др.).

Герконы используются в скважинных расходомерах РСМ, РГД, ДГД и др. [21].

2.1.2. Реостатные преобразователи

Простейший реостатный преобразователь – это переменный резистор, подвижный контакт которого перемещается вследствие изменения измеряемой величины – линейного перемещения, давления, угла наклона, направления магнитного поля и т.п.

Реостатный преобразователь (рис. 2.1, а) может быть включен по потенцио-метрической схеме (рис. 2.1, б), в этом случае он должен быть отнесен к преобразователям генераторного типа.

Как правило, реостатные преобразователи выполняют в виде намотки из изолированной проволоки высокого сопротивления (из манганина, константана, вольфрама) на каркасе из изоляционного материала. Форма каркаса может быть различной: прямоугольной, кольцевой или более сложной конфигурации в зависимости от входного параметра и необходимой зависимости $R = f(x)$.

Проволочные реостатные преобразователи являются дискретными, т.к. непрерывному изменению входной величины x соответствует скачкообразное изменение сопротивления R определяемое переходом подвижного контакта с одного витка провода на другой. Это обуславливает и погрешность измерений, которая уменьшается с уменьшением диаметра проволоки и увеличением числа витков W . Статический коэффициент передачи реостатного датчика $K_{ст} = z \cdot W / l$, где z – сопротивление одного витка, l – длина намотки.

Обычная относительная погрешность датчиков $\delta = 0,2 - 0,5 \%$.

Преимущества реостатных датчиков: простота конструкции, малый вес и габариты, возможность включения в цепь как постоянного, так и переменного тока, возможность получения необходимой статической характеристики $R = f(x)$, недостатки: наличие подвижного механического контакта, что уменьшает надежность датчика, необходимость какого-то усилия для перемещения этого контакта, влияние температуры.

Благодаря своей простоте и универсальности реостатные преобразователи широко используются в геофизической аппаратуре для исследования скважин: в каверномерах (КФ, КМ, СКП-1 и др.), в инклинометрах (ИК-1, ИК-2, МИР-36, ИГ-36 и др.) [2,9,12], в датчиках натяжения кабеля, в некоторых уровнемерах. Так, например, в скважинном уровнемере конструкции УГИ [18,26], изменение уровня жидкости над прибором, точнее, гидростатическое давление столба жидкости над ним преобразуется в изменение уровня токопроводящей жидкост-

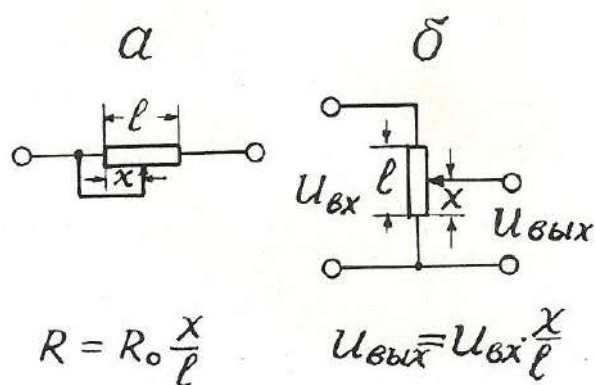


Рис. 2.1. Реостатный преобразователь (а) и его включение по потенциметрической схеме (б).

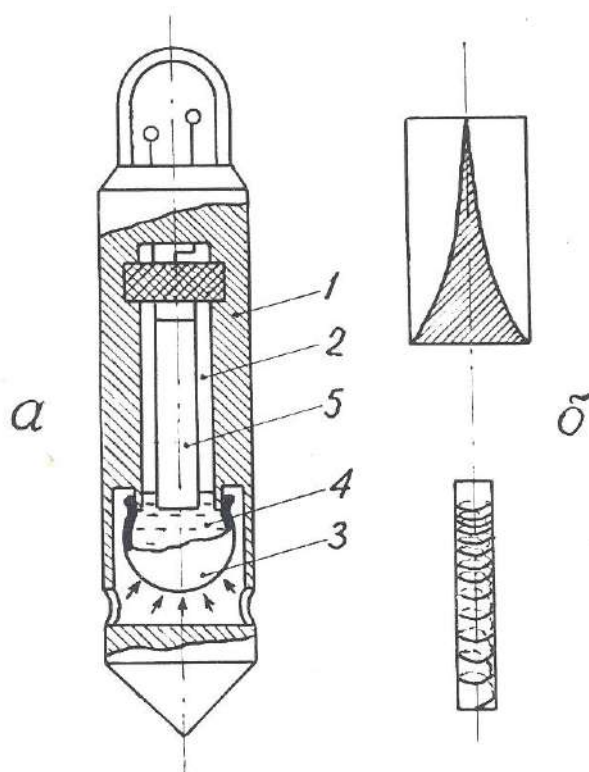


Рис. 1.2. Пример применения реостатного преобразователя в скважинном уровнемере с линейной входной характеристикой: а – конструкция уровнемера; б – варианты выполнения реостата; 1 – корпус уровнемера; 2 – измерительная камера; 3 – гибкий резервуар; 4 – токопроводящая жидкость; 5 – реостат.

ти в измерительной камере, отделенной от внешней среды гибкой оболочкой (рис. 2.2). Вдоль продольной оси камеры располагается реостатный преобразователь, подвижным контактом которого служит токопроводящая жидкость. Поскольку давление P в измерительной камере и ее объем V при постоянной температуре связаны соотношением $PV = \text{const}$ [7], то одинаковые приращения давления P (уровня жидкости) вызывают неодинаковые перемещения уровня токопроводящей жидкости в измерительной камере. Для получения линейной статической характеристики реостатный преобразователь в данном уровнемере выполнен в виде неравномерной намотки или высокоомной пленки переменной ширины таким образом, чтобы приращение сопротивления реостата было обратно пропорционально квадрату перемещения подвижного контакта, т.е. уровня токопроводящей жидкости.

2.1.3. Тензометрические преобразователи

Действие тензопреобразователей основано на изменении сопротивления проводников и полупроводников при их растяжении или сжатии [15].

Тензоэлементы (или тензорезисторы) состоят из тонкой проволоки или фольги, сложенной несколько раз в форме меандра и вклеенной между эластичными бумажными, пленочными или фетровыми подкладками. Толщина проволоки (или фольги) от 0,02 до 0,05 мм. Основные конструктивные формы тензоэлементов представлены на рис. 2.3.

Изменение электрического сопротивления тензоэлемента пропорционально относительной деформации детали в месте наклейки последнего. Относительный коэффициент передачи тензодатчика $K_{\text{отн}} = (\Delta R/R)/(\Delta l/l)$. Материал для тензоэлементов должен характеризоваться возможно большей тензочувствительностью и возможно меньшим температурным коэффициентом. Обычно используются сплавы: константан, манганин, нихром, а также чистые металлы: никель, висмут. Очень высокую тензочувствительность, в 60-80 раз

выше, чем у металлов, имеют полупроводники: германий, кремний и др. Полупроводниковые тензоэлементы получают выращиванием кристаллов полупроводника на мембране из диэлектрического металла (например, датчики «кремний на сапфире»).

Достоинства тензорезисторных преобразователей: простота конструкций, малые габариты, высокая точность, безинерционность; недостатки: невысокая чувствительность, зависимость сопротивления от температуры.

Низкая чувствительность тензорезисторных преобразователей требует применения усилителей выходного сигнала, а термозависимость – применения специальных мер для устранения влияния температуры.

Тензопреобразователи находят применение в датчиках силы натяжения каротажного кабеля с подвесным роликом ДНТ-033 ($\delta \leq 1,5\%$ при усилии до 500 Н) [2,17], в некоторых опробователях пластов в качестве измерителей пластового давления (например, в ОПД-7-10), в некоторых скважинных уровнемерах типа погружных манометров [2].

Автором тензорезисторный преобразователь применен в расходомере РГЖ-1, не содержащем вращающихся деталей [19]. Чувствительным элементом этого прибора служат две гибкие пластины, установленные вдоль измеряемого потока. Поскольку давление в движущемся флюиде понижается, пластины прогибаются навстречу друг другу тем больше, чем выше скорость потока (рис. 2.4). Прогиб пластин преобразуется в электрический сигнал с помощью наклеенных на них тензоэлементов. Для устранения влияния температуры на пластине наклеены 4 тензоэлемента (2 вдоль нее и 2 поперек), соединенные по мостовой схеме. В одну диагональ моста подается переменный ток питания (частота 1 кГц), к другой диагонали подключен усилитель. Чувствительность описанного расходомера составляет 0,05 л/с.

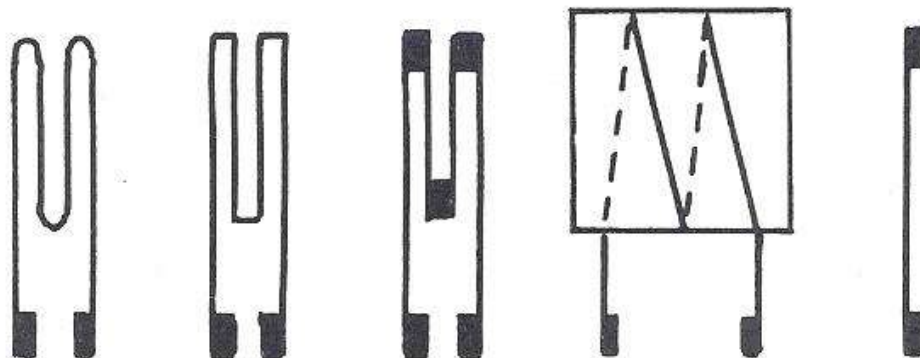


Рис. 2.3. Разновидности тензорезисторов

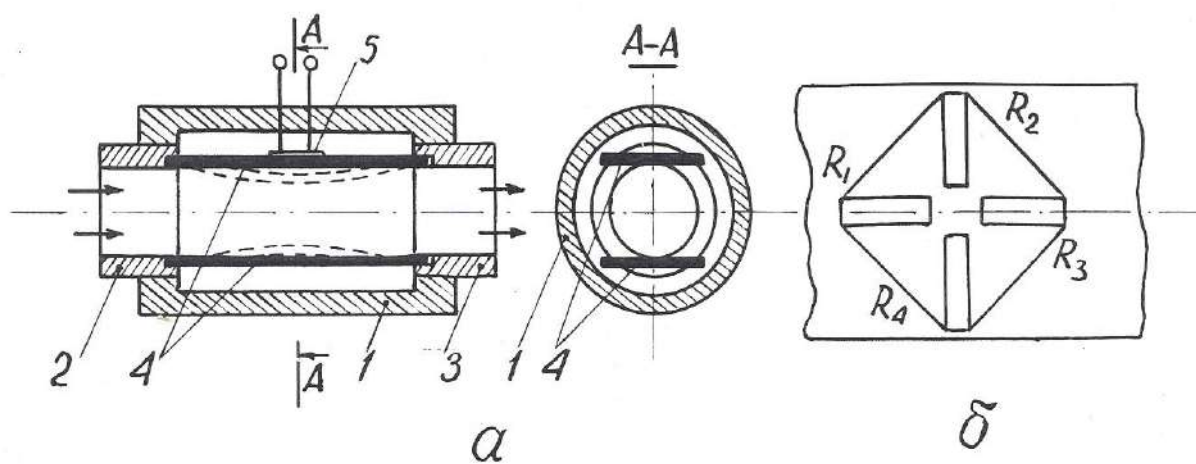


Рис. 2.4. Принцип действия расходомера РГЖ-1 (а) и размещение тензорезисторов на упругой пластине (б): 1 – корпус расходомера; 2 – входной канал; 3 – выходной канал; 4 – упругие пластины; 5 – тензометрический преобразователь прогиба пластины в электрический сигнал

2.1.4. Электролитические преобразователи

Преобразователи этого типа основаны на изменении электрического сопротивления между помещенными в электролит электродами в зависимости от расстояния между ними, площади соприкосновения с электролитом или проводимости последнего (2.1). Электролитические датчики используются для измерения угловых и линейных перемещений, а также для определения сопротивления электролита. Во избежание погрешностей, связанных с электролизом и электродной поляризацией, их включают, как правило, в цепь переменного тока.

Достоинства датчиков этого типа заключаются в простоте конструкции и способности пропускать большие токи; недостатки – в зависимости сопротивления электролита от температуры (при изменении последней на 1° электропроводность растворов изменяется на 1,5-2,5%).

В геофизической аппаратуре электролитические датчики используются в резистивиметрах всех видов: скважинных и переносных (например, в приборе ПР-1).

Еще один пример применения датчик этого типа устройство для определения направления и скорости потока подземных вод [20]. Это устройство содержит цилиндрическую измерительную камеру с перфорированными стенками, по окружности которой размещены радиальные электроды а в середине – центральный (рис. 2.5). Каждый из электродов подсоединен к своей жиле многожильного каротажного кабеля (например, кабеля КГ17-60-180ШМ. Внутри камеры располагается также магнитная стрелка с экраном из изоляционного материала на северном конце. Измерительная камера закрывается крышкой и заполняется электролитом через специальные отверстия в ней. Затем устройство опускают в скважину и устанавливают напротив исследуемого водоносного горизонта. По кабелю

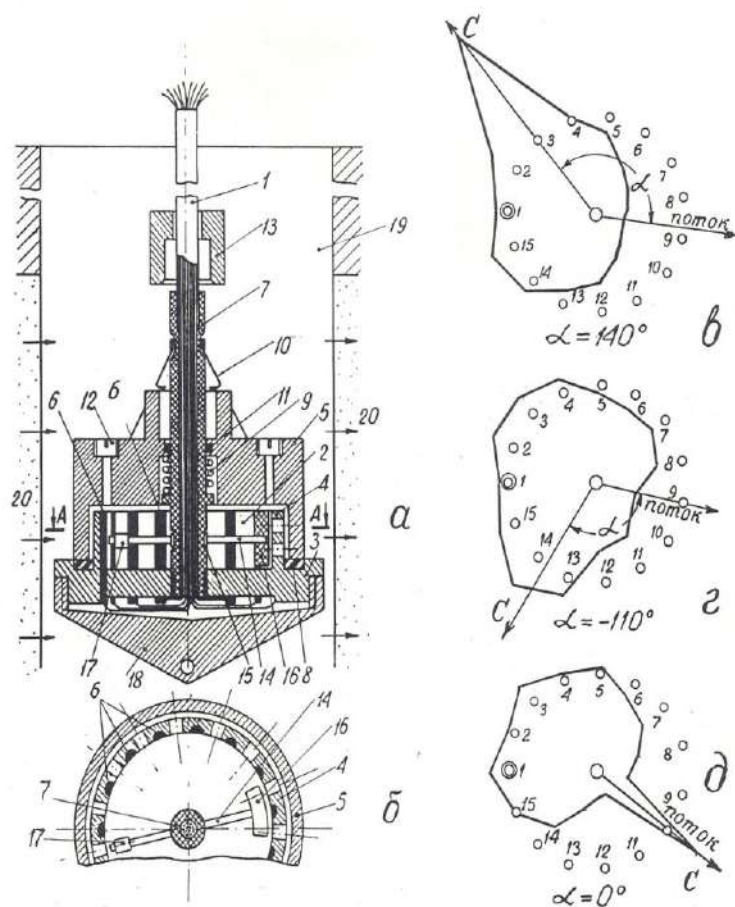


Рис. 2.5. Устройство для определения направления и скорости потока (а, б) и результаты измерений магнитного азимута потока (в-д): 1 – многожильный каротажный кабель; 2 – измерительная камера; 3 – изоляционный диск; 4 – перфорированные стенки камеры; 5 – крышка; 6 – радиальные электроды; 7 – центральный электрод; 8 – резиновая прокладка; 9 – сжатая спиральная пружина; 10 – пружинные защелки; 11 – резиновое кольцо; 12 – заливная пробка; 13 – сбивающий грузик; 14 – магнитная стрелка; 15 – скользящий подшипник; 16 – изоляционный экран; 17 – противовес; 18 – нижний наконечник.

опускают сбивающий грузик, который приводит в действие пружину, отбрасывающую крышку вверх по кабелю. Движением подземных вод электролит из измерительной камеры вымывается по направлению потока через перфорацию в стенках. Магнитная стрелка ориентируется по направлению магнитного меридиана, а экран на ее северном конце перекрывает один из радиальных электродов. На поверхности производят измерения электрического сопротивления между центральным и каждым из радиальных электродов. Минимальное сопротивление указывает направление потока подземных вод, а максимальное – направление на север. Скорость потока определяют по скорости вымывания электролита из измерительной камеры, повторяя измерения через определенные интервалы времени. При использовании 17-жильного кабеля устройство обеспечивает абсолютную погрешность в измерении направления потока, не превышающую $\pm 12^\circ$.

2.1.5. Терморезистивные преобразователи

Терморезистивные преобразователи основаны на свойстве металлов и полупроводников изменять свое сопротивление под действием температуры T .

Зависимость сопротивления металлов от температуры в общем случае нелинейна, однако, для ограниченных интервалов температур ее можно представить в виде линейной двучленной функции $R_T = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, где R_0 – сопротивление при начальной температуре T_0 , а α – температурный коэффициент сопротивления для интервала $T - T_0$.

Основным материалом для терморезисторов являются чистые металлы: платина, медь, никель, которые обладают в интервале от 0 до 100°C положительным $\alpha = 0,0030 - 0,0068$ (град. $^\circ\text{C}$) $^{-1}$.

Известны также объемные полупроводниковые терморезисторы (термисторы). Их сопротивление уменьшается с повышением температуры по экспоненте, в среднем для них $\alpha = 0,03 - 0,04$ (град. $^\circ\text{C}$) $^{-1}$, но значение α сильно

зависит от температуры. Чувствительность (статический коэффициент передачи) терморезисторов $K_{ст} = \Delta R / \Delta T = \alpha R_0$.

Достоинства терморезистивных преобразователей: простота конструкции, малые габариты, возможность установки в труднодоступных местах. Однако им присущи и важные недостатки. Во-первых, это постоянство α лишь в ограниченном диапазоне температур и, во-вторых, инерционность, приводящая к большим динамическим погрешностям. Как известно, термопреобразователь приобретает температуру среды по закону $\Delta T = \Delta T_0 \cdot e^{-t/\tau}$ где ΔT_0 - начальная разность температур, t – время, τ – постоянная времени преобразователя, зависящая от его конструкции и теплопроводности, а также тепловых свойств среды.

В геофизическом приборостроении преобразователи этого типа находят применение в скважинных термометрах электрических (СТС-2, ЭТМИ-55 и др.) и электронных (ТЭГ-36, ТЭГ-60 и др.).

Чувствительный элемент всех скважинных термометров представляет собой тонкую (0,02-0,03 мм) медную проволочку, сложенную в несколько раз и помещенную в тонкостенную медную трубку длиной около 30 см, омываемую скважинным флюидом [9].

Точно так же устроен чувствительный элемент скважинных расходомеров типа термоанемометров СТД-2, СТД-4 [2]. Этот термоэлемент включается в мостовую измерительную схему и нагревается до температуры, превышающей температуру исследуемого потока. Мостовая схема балансируется при размещении чувствительного элемента в неподвижной жидкости. Когда жидкость приходит в движение, она охлаждает нагретый термоэлемент, тем сильнее, чем выше скорость ее движения.

В газокаротажных станциях (АГКС-64, АГКС-4 и др. для определения суммарного газосодержания в газовоздушной смеси эта смесь подается на термочувствительный элемент в виде тонкой платиновой проволочки, нагретой до 850° С и включенной в сбалансированную мостовую схему. Если в

анализируемой смеси имеются углеводородные газы, то при 850°C они сгорают, выделяющееся тепло повышает температуру проволоочки, увеличивая ее сопротивление и нарушая баланс мостовой схемы [17].

Аналогичным образом действуют приборы для определения содержания СО в выхлопных газах автомобиля [6].

Известны также устройства для определения направления потока подземных вод [24], содержащие нагреватель и расположенные вокруг него термисторы. По измерениям температуры последних определяют, в каком направлении идет перенос тепла, т.е. происходит движение подземных вод.

2.1.6. Магниторезистивные преобразователи

Эти преобразователи основаны на свойстве некоторых материалов изменять свое электрическое сопротивление под действием магнитного поля (эффект Гаусса). Таким свойством обладает, например, сплав пермаллой (80% никеля, 20% железа). Степень изменения сопротивления магниторезистора зависит от магнитной индукции поля B и угла θ между ее направлением и направлением тока [6,16,22].

Магниторезисторы изготавливаются по тонкопленочной технологии в форме меандров (рис. 2.6).

Еще большим магнитоэлектрическим эффектом, чем сплавы металлов, обладают полупроводники (антимонид индия InSb и арсенид индия InAs).

Увеличение сопротивления магниторезисторов объясняется увеличением пути движения электронов и дырок под действием силы Лоренца.

Чувствительность магниторезистивных датчиков $K_{\text{диф}} = \Delta R / \Delta B$ зависит от величины магнитной индукции: $\Delta R = R_0 \cdot A (vB)^n$, где A – так называемый «коэффициент формы», v – подвижность электронов: n – постоянный коэффициент ($n=1-2$), зависящий от B .

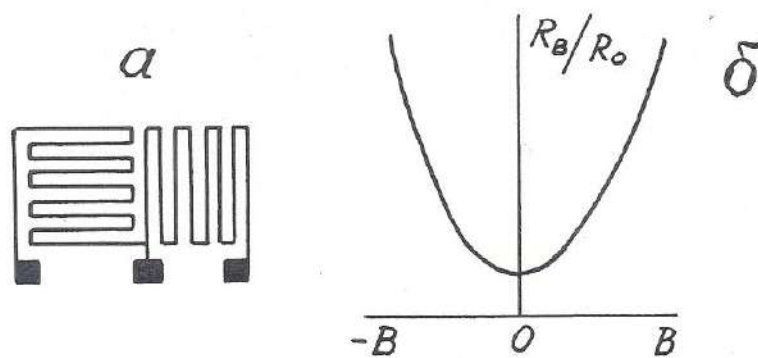


Рис. 2.6. Форма магниторезистора (а) и зависимость приращения его сопротивления от магнитной индукции (б)

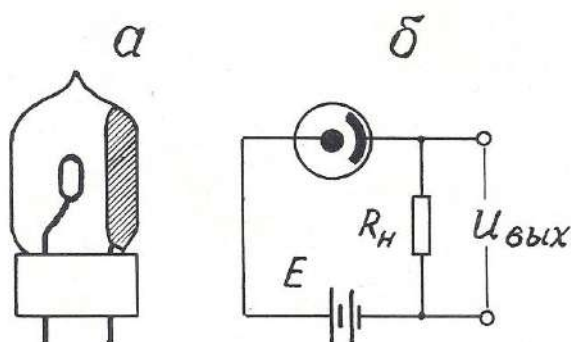


Рис. 2.7. Конструкция фотоэлемента с внешним эффектом (а) и включение его в измерительную схему (б)

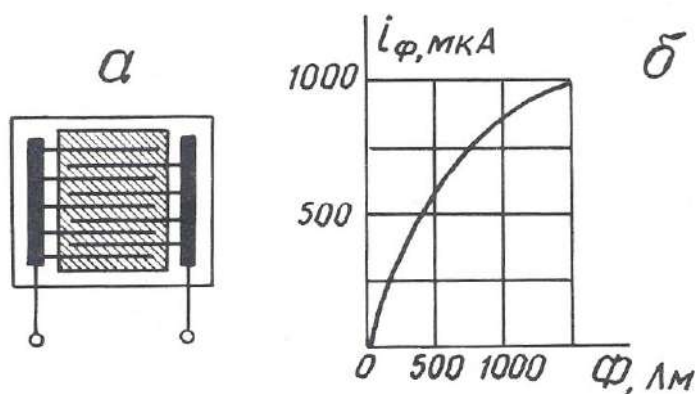


Рис. 2.8. Конструкция фотоэлемента с внутренним фотоэффектом (а) и зависимость фототока от светового потока (б)

При больших B значение $n=1$, поэтому при использовании магниторезисторов применяют магнитное смещение, помещая их в поле электромагнита с $B=0,3 - 0,5$ Тл.

Недостатки магниторезисторов: наличие температурного влияния и потребность в сильных магнитных полях.

Магниторезисторы в геофизике могут быть использованы в скважинных расходомерах и магнитных меткоуловителях каротажных станций.

2.1.7. Фотоэлектрические преобразователи

Фотоэлектрические преобразователи (фотоэлементы) основаны на явлении внешнего (электровакуумные и газонаполненные) или внутреннего (полупроводниковые) фотоэффекта.

Фотоэлемент с внешним фотоэффектом представляет собой электронную лампу с двумя электродами, один из которых (фотокатод) покрыт светочувствительным слоем (рис. 2.7). Возрастание фототока при увеличении приложенного напряжения происходит до величины тока насыщения, при котором все электроны, испускаемые фотокатодом под действием светового потока, достигают анода.

Фотоэлемент с внутренним фотоэффектом (фоторезистор) состоит из стеклянной пластины, на которой вытравлены входящие друг в друга гребневидные системы штрихов, заполненные электропроводным веществом (платина, золото). Пластина покрывается тонким слоем полупроводникового светочувствительного материала (рис. 2.8).

Чувствительность фотоэлементов $K_{\text{диф}} = \Delta R / \Delta \Phi$ непостоянна и нелинейно зависит от светового потока Φ . Кроме того, фотоэлементы обладают еще и спектральной избирательностью т.е. чувствительностью к световому излучению определенной длины волны.

Фотоэлементы могут быть использованы и в режиме источников тока, т.е. как генераторные преобразователи фотоэ.д.с.

Фотопреобразователи находят применение в приборах фотокаротажа, предназначенных для дифференциации разрезов скважин по цвету пород, в скважинных расходомерах (например, в ТСП-70Ф) в некоторых инклинометрах. Так, автором совместно с профессором. А.В.Давыдовым предложен датчик угла наклона буровой скважины для непрерывных измерений [27]. Этот датчик содержит измерительную камеру 1, частично заполненную жидкостью 2 с высоким коэффициентом поверхностного отражения, например, ртутью или сплавом Вуда, а над жидкостью соосно размещены источник света 3 и кольцевой фотопреобразователь 4 (рис. 2.9). При вертикальном положении датчика весь свет источника, отраженный от поверхности жидкости, попадает на фотопреобразователь, и сигнал на его выходе максимален. При отклонении датчика от вертикали поверхность жидкости наклоняется относительно оси камеры, и часть отраженного света уходит за пределы фотопреобразователя. Выходной сигнал уменьшается тем сильнее, чем больше зенитный угол скважины.

2.2. Индуктивные преобразователи

Принцип действия индуктивных преобразователей основан на изменении электрического сопротивления Z катушки индуктивности при изменении магнитного сопротивления ее сердечника. В свою очередь, магнитное сопротивление сердечника может быть изменено либо за счет изменения величины воздушного зазора в нем, либо за счёт изменения магнитных свойств материала, из которого он состоит.

2.2.1. Индуктивные преобразователи с изменяемым воздушным зазором

Входной величиной преобразователей этого типа обычно служат линейные или угловые перемещения. Чувствительность датчика $K_{\text{диф}} = \Delta z / \Delta x$.

Конструкции датчиков весьма разнообразны, некоторые из них, наиболее распространенные, представлены на рис. 2.10.

Независимо от конструкции датчика, его индуктивное сопротивление $z = j \omega L$, где ω – круговая частота тока в катушке; L – ее индуктивность. $L = W^2 / R_\mu$, где W – число витков в катушке; R_μ – магнитное сопротивление сердечника. $R_\mu = R_{\text{ж}} + R_{\text{в}}$, где $R_{\text{ж}}$ – магнитное сопротивление железа сердечника; $R_{\text{в}}$ – магнитное сопротивление воздушного зазора. $R_{\text{в}} \gg R_{\text{ж}}$. $R_{\text{в}} = \delta / (\mu_0 \cdot S)$, где δ – длина воздушного зазора; S – его площадь; μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость воздуха. Таким образом, $z = -j \omega W^2 \mu_0 S / \delta$, т.е. z обратно пропорционально δ и зависимость $z = f(\delta)$ нелинейна.

Линеаризовать эту зависимость удастся в конструкции так называемых «дифференциальных» индуктивных преобразователей (рис. 2.11). В этих преобразователях, используются, две катушки индуктивности, включенные в мостовую схему и расположенные таким образом, что, когда индуктивное сопротивление одной увеличивается, сопротивление другой падает.

Достоинства индуктивных: преобразователей: отсутствие открытых электрических контактов, большая мощность вырабатываемого сигнала; недостаток – наличие электромагнитного взаимодействия между катушкой и сердечником (или его подвижной частью), отсюда – так называемая «реакция преобразователя».

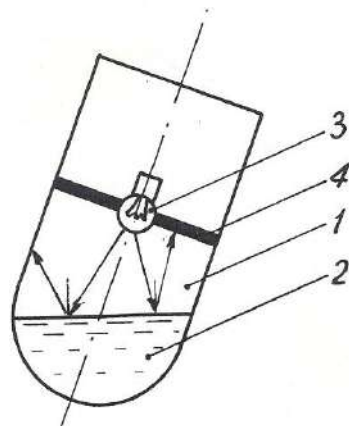


Рис. 2.9. Датчик угла наклона буровой скважины: 1 – измерительная камера; 2 – жидкость с высоким коэффициентом поверхностного отражения; 3 – источник света; 4 – кольцевой фотоприемник

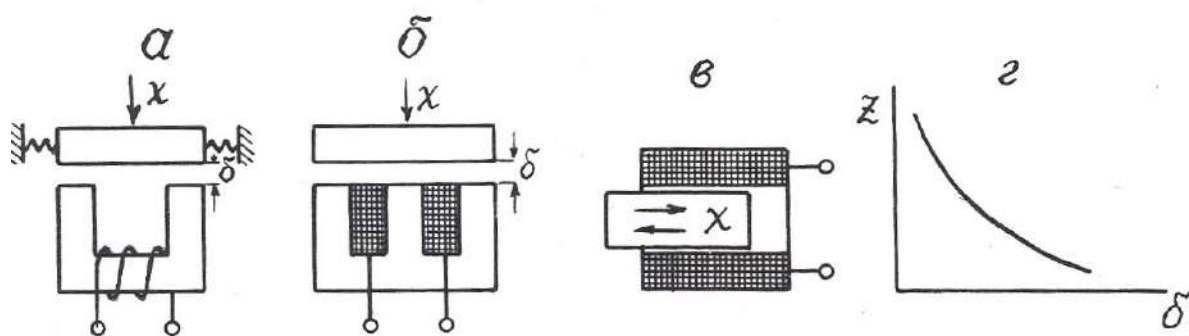


Рис. 2.10. Варианты выполнения индуктивных преобразователей с изменяемым воздушным зазором (а-в) и их статическая характеристика (г).

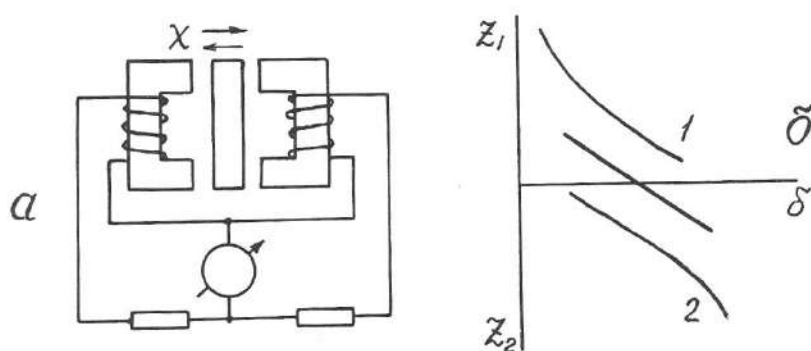


Рис. 2.11. Дифференциальный индуктивный преобразователь (а) и его статическая характеристика (б)

В геофизической аппаратуре индуктивные преобразователи находят применение в некоторых каверномерах и профилемерах (например, в профилемере ПМ-50) [2], в скважинных расходомерах ДАУ-3, РСИ-3 и ГЕО-В-600 (последний венгерского производства) [21], в индуктивных дефектомерах обсадных колонн.

2.2.2. Магнитоупругие преобразователи

Эти преобразователи основаны на взаимосвязи между магнитным и механическим состоянием ферромагнитных материалов.

Различают собственно **магнитоупругий эффект**, т.е. изменение магнитных свойств, в частности, магнитной проницаемости под воздействием механических деформаций, и обратное явление – **магнитострикционный эффект**, т.е. изменение формы и размеров ферромагнитных тел под воздействием внешнего магнитного поля.

В качестве материала для изготовления магнитоупругих датчиков используют сплавы: пермаллой, пермендюр, альсифер, ферриты, а также чистые металлы, например, никель. Конструкции преобразователей изображены на рис. 2.12.

Относительный коэффициент передачи магнитоупругого датчика $K_{отн}=(\Delta\mu/\mu)/(\Delta l/l)$ составляет около 200 и не остается постоянным при изменении размеров датчика (см. рис. 2.12, д).

Достоинства магнитоупругих датчиков: простота конструкции, прочность, удобство герметизации; недостатки: нелинейная статическая характеристика, наличие резонансной частоты.

Для стержневых датчиков (см. рис. 2.12, а, б) резонансная частота $f_0=V/2l$, где V – скорость упругих волн в материале сердечника, l – его длина; для кольцевого (см. рис. 2.12, в) – $f_0=V/2d$, где d – диаметр датчика.

Магнитоупругие преобразователи находят применение в аппаратуре акустического каротажа в качестве источников (магнито-стрикционные излучатели) упругих волн [12,17], в некоторых прихватоопределителях, а также в буровой технике – в измерителях нагрузки МКМ-2 буровых станков и в измерителях давления промывочной жидкости МИД-1, МИД-1А [5].

2.2.3. Магнитомодуляционные преобразователи

Эти преобразователи основаны на изменении магнитных свойств ферромагнитных материалов под действием магнитного поля.

Сердечники магнитомодуляционных преобразователей изготавливают в форме стержня с большим отношением длины l к диаметру d : $l/d > 100$. При этом условии коэффициент размагничивания сердечника $N=0$ и даже в слабом магнитном поле, направленном вдоль его оси, сердечник намагничивается до насыщения. При этом его относительная магнитная проницаемость падает до 1, хотя при ненасыщенном состоянии она очень велика – до 10000. Для того, чтобы намагнитить сердечник до насыщения, на него наносят обмотку возбуждения, по которой пропускают переменный ток.

В моменты как падения магнитной проницаемости (при возрастании намагничивающего поля до H_s), так и восстановления ее (при уменьшении намагничивающего поля ниже H_s) в обмотке индуцируются пики э.д.с. самоиндукции противоположных знаков. Частота этих пиков вдвое превышает частоту возбуждающего тока, как это можно видеть по рис.2.13.

При воздействии на датчик внешнего постоянного магнитного поля, направленного вдоль его оси, в один из полупериодов это поле складывается с магнитным полем катушки возбуждения, и сердечник доходит до насыщения быстрее, чем вне внешнего магнитного поля, в другой полупериод внешнее поле вычитается из поля катушки возбуждения, и сердечник не доходит до

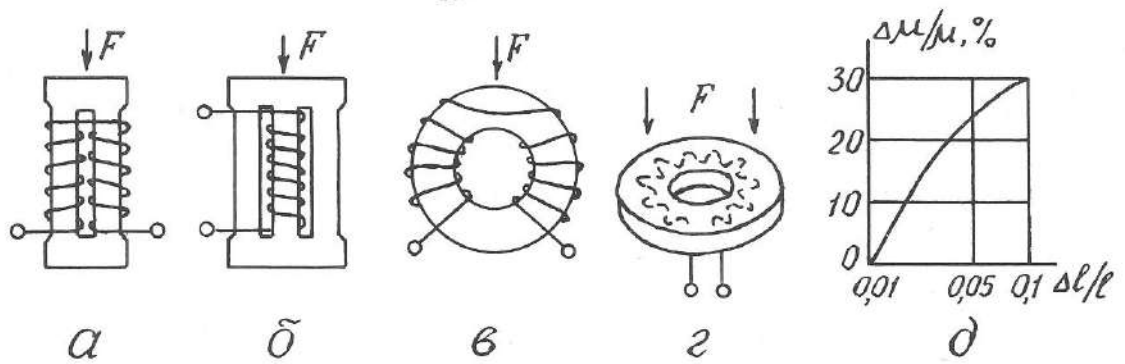


Рис. 2.12. Разновидности магнитоупругих преобразователей (а-г) и зависимость изменения магнитной проницаемости от изменения размеров преобразователя (д)

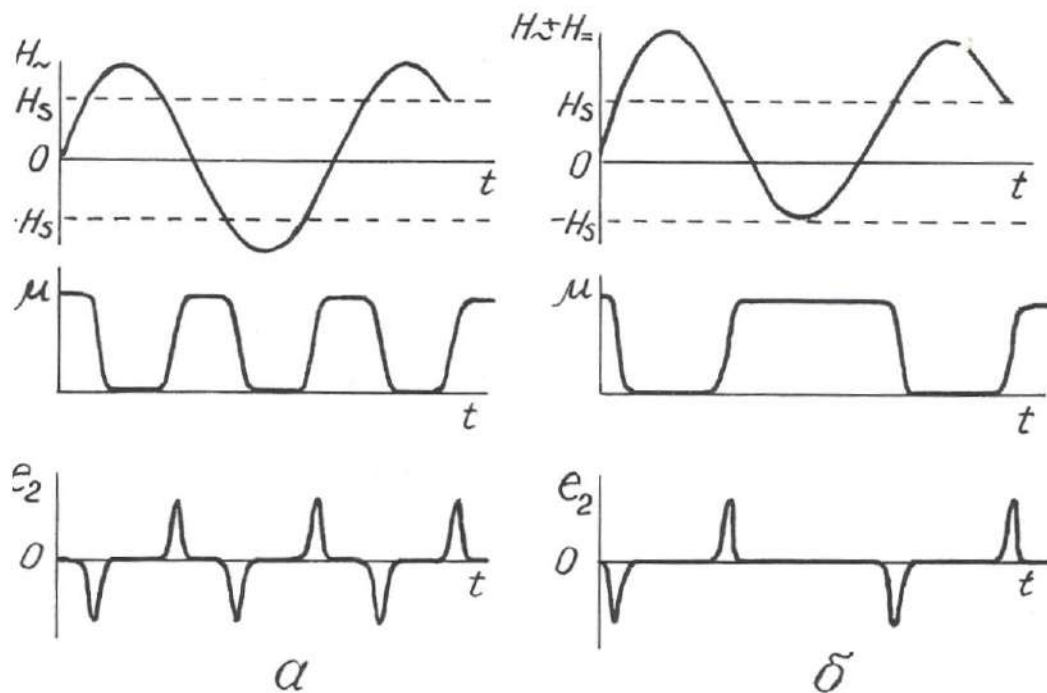


Рис. 2.13. Возникновение э.д.с. второй гармоники в магнитомодуляционном преобразователе в отсутствие (а) и при наличии (б) внешнего магнитного поля

магнитного насыщения, и нарушается симметрия перемангничивания сердечника.

Существуют 2-элементная и 1-элементная конструкции магнитомодуляционных датчиков (рис. 2.14). В 2-элементной имеются 2 параллельных сердечника, обмотки возбуждения на которых намотаны в противоположных направлениях и потому их магнитное поле имеет противоположное направление, а пики э.д.с. второй гармоники противоположны по знаку. По этой причине в сигнальной обмотке, охватывающей оба стержня, при отсутствии внешнего магнитного поля выходной сигнал равен 0. При наличии внешнего магнитного поля в один полупериод исчезает пара импульсов э.д.с. второй гармоники в одной обмотке, когда ее стержень не доходит до насыщения, в другой полупериод – не возникает такая же пара импульсов в другой обмотке возбуждения и потому на выходе сигнальной обмотки будет существовать э.д.с. второй гармоники, имеющая частоту, удвоенную по сравнению с током возбуждения. Амплитуда этой э.д.с. пропорциональна напряженности внешнего магнитного поля, а фаза определяется направлением последнего.

В одноэлементных датчиках э.д.с. второй гармоники выделяется не с помощью дополнительной сигнальной обмотки, а с помощью фильтров, настроенных на ее частоту.

Достоинства магнитомодуляционных датчиков: простота, надежность, отсутствие открытых электрических контактов, высокая чувствительность; недостаток – необходимость в сложной измерительной схеме, обеспечивающей питание датчика переменным током, а также выделение и усиление сигнала второй гармоники. Дополнительный недостаток 2-элементных датчиков – большое количество выводов.

Магнитомодуляционные преобразователи находят широкое применение в магнитометрической аппаратуре – 2-элементные в полевых (М-17) и аэромагнитометрах (АММ-13, АСГМ-46) [3], 1-элементные – в скважинных

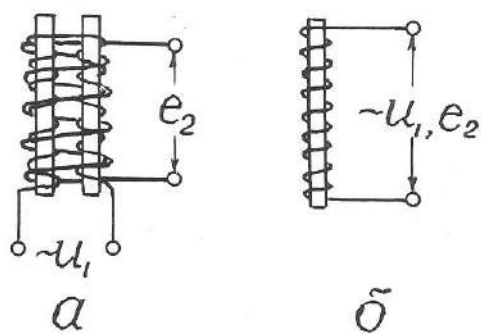


Рис. 2.14. Конструкция 2-элементного (а) и 1-элементного (б) магнитомодуляционного преобразователя

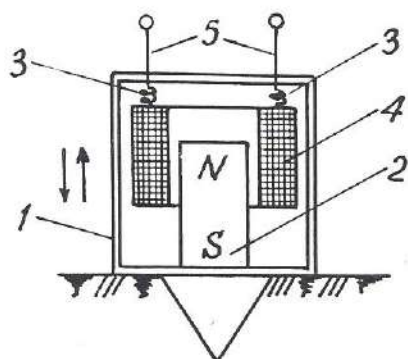


Рис. 3.1. Сейсмоприемник магнитоэлектрического типа: 1 – корпус; 2 – постоянный магнит; 3 – пружинки; 4 – катушка индуктивности; 5 – электрические выводы

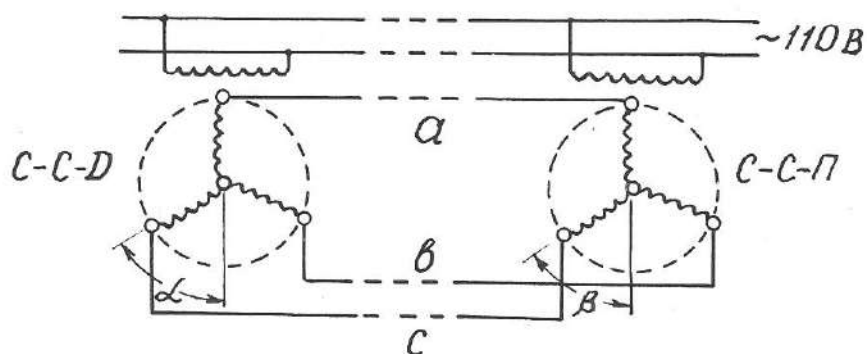


Рис. 3.2. Электрическая схема сельсинной передачи

магнитометрах ТСМ-3, ТСМК-40, ТСМК-30, КСМ-38 и др. [12,17]. Они используются также в скважинных расходомерах РЭС-2 и магнитных меткоуловителях каротажных станций.

2.3. Емкостные преобразователи

Преобразователи этого вида основаны на изменении емкости C конденсатора под действием измеряемой величины.

Как известно, $C = \epsilon S / \delta$ (2.2), где S – площадь обкладок конденсатора; δ – расстояние между ними; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками. Следовательно, изменять емкость можно путем воздействия измеряемой величины либо на геометрические размеры датчика, либо на его диэлектрическую проницаемость. При этом очевидно, что датчики с изменяемыми параметрами S и ϵ имеют линейную статическую характеристику, а датчики с изменяемой величиной δ – нелинейную. В последнем случае для линеаризации характеристики возможно применение дифференциальных емкостных преобразователей, аналогичных по конструкции дифференциальным индуктивным датчикам.

Входными величинами емкостных датчиков могут быть линейные и угловые перемещения, механические усилия, деформации, изменение состава вещества.

Достоинства емкостных датчиков: высокая чувствительность, безинерционность, стабильность; недостаток – малая выходная мощность.

Датчики этого вида используются в аппаратуре диэлектрического каротажа ДК-1. Чувствительный элемент этой аппаратуры представляет собой цилиндрический конденсатор больших размеров, емкость которого зависит от диэлектрической проницаемости окружающих горных пород [2].

В так называемых «аквамерах» – приборах для определения количества воды в смесях «вода-нефть», откачиваемых из буровых скважин, также

применяется емкостной датчик. Действие этого прибора основано на том, что у воды $\epsilon=81$, а у нефти $\epsilon=2,5$ отн.ед. (при температуре 18^0C)

В некоторых скважинных термометрах используются в качестве частото задающего элемента в схеме RC -генератора конденсаторы, емкость которых зависит от температуры.

Кроме того, известны скважинные емкостные измерители зенитного угла [25]. Их чувствительный элемент – конденсатор, одна обкладка которого представляет собой металлическую изолированную полусферу, установленную перпендикулярно оси прибора, а другая обкладка – залитую в эту сферу ртуть. При вертикальном расположении датчика емкость его максимальна, при наклоне – уменьшается.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные характеристики контактных преобразователей и приведите примеры их применения в геофизической аппаратуре (ГА).
2. Назовите основные характеристики реостатных преобразователей, приведите примеры их применения в ГА.
3. Назовите основные характеристики тензометрических преобразователей и приведите примеры их применения.
4. Назовите основные характеристики электролитических преобразователей и приведите примеры их применения в ГА.
5. Назовите основные характеристики терморезистивных преобразователей и приведите примеры их применения в ГА.
6. Назовите разновидности и основные характеристики фоторезистивных преобразователей, приведите примеры применения их в ГА.
7. Назовите разновидности индуктивных преобразователей.
8. Поясните принцип действия индуктивных преобразователей с изменяемым воздушным зазором, приведите примеры их применения в ГА.
9. Поясните принцип действия магнитоупругих преобразователей, приведите примеры их применения в ГА.

10. Поясните принцип действия магнитомодуляционных преобразователей, приведите примеры их применения.

11. Назовите основные характеристики емкостных преобразователей и приведите примеры их применения.

3. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ГЕНЕРАТОРНОГО ТИПА

Во всех генераторных преобразователях выходной величиной является э.д.с., появляющаяся в результате воздействия измеряемой величины.

3.1. Преобразователи индукционной э.д.с.

Эти преобразователи основаны на явлении электромагнитной индукции, возникающей при воздействии на проводник переменного магнитного поля.

Изменение магнитного поля, воздействующего на проводник или, точнее, на катушку индуктивности, достигается либо за счет перемещения катушки относительно постоянного магнита, либо за счет изменения магнитного поля при неизменном расположении магнита и катушки индуктивности.

3.1.1 Преобразователи индукционной э.д.с. со взаимным перемещением магнита и катушки индуктивности

Э.д.с., возникающая в катушке индуктивности, зависит от следующих факторов: $e = BVlW \sin \alpha$, где B – магнитная индукция; V – относительная скорость перемещения; α – угол между векторами V и B , l – длина витка и W – число витков в катушке.

Преобразователи этого вида широко используются в геофизической аппаратуре. Примером могут служить сейсмоприемники магнито-электрического типа (С210, СВ1-30 и др.), принцип действия которых

иллюстрируется рис. 3.1 [3]. С корпусом приемника 1 жестко скреплен постоянный магнит 2. Над магнитом на пружинках 3 подвешена катушка индуктивности 4 с электрическими выводами 5. При колебаниях поверхности, на которой установлен сейсмоприемник, происходят взаимные перемещения магнита 2 и катушки индуктивности 4, и в последней наводится э.д.с.

Другой пример использования датчиков этого вида – автосинная (или сельсинная) передача, которая применяется в каротажных станциях для синхронизации движения носителя записи (диаграммной или магнитной ленты) с перемещением зонда по скважине [12]. Принципиальная схема сельсинной передачи представлена на рис. 3.2. Передача содержит, по меньшей мере, две идентичных электрических машины, у которых статор имеет однофазную обмотку с явно выраженными полюсами, а ротор – трехфазную обмотку с неявно выраженными полюсами. Одна машина, называемая сельсином-датчиком (ССД), устанавливается на блок-балансе, через который в скважину опускается кабель со скважинным снарядами. При движении кабеля по скважине блок-баланс через зубчатую передачу приводит во вращение ротор сельсина-датчика. Другая машина, называемая сельсином-приемником (ССП), устанавливается в регистрирующем приборе каротажной станции и играет роль привода его лентопротяжного механизма. Обмотки роторов ССД и ССП включены навстречу друг другу, а обмотки статоров питаются переменным током промышленной частоты от одного и того же источника. Переменный ток создает в обмотках статоров пульсирующие магнитные потоки, которые индуцируют в роторных обмотках э.д.с., зависящие от угла поворота ротора относительно статора. Если эти углы у роторов ССД и ССП одинаковы ($\alpha = \beta$), то э.д.с., в их обмотках равны и взаимно компенсируют друг друга. Токи в каждой роторной цепи равны нулю. Если эти углы не равны ($\alpha \neq \beta$), баланс э.д.с. нарушается, и в роторных обмотках возникают токи, которые создают в них магнитные поля, стремящиеся повернуть роторы до положения $\alpha = \beta$. Поскольку ротор ССД механически связан с роликом блок-баланса, находящегося под

большой нагрузкой, то поворачивается все время ротор ССП, нагрузка на который меньше и который перемещает носитель записи синхронно с движением скважинного прибора. С одним и тем же ССД могут быть соединены несколько ССП, например, один в регистрирующем приборе, другой на панели лебедчика в блоке счетчика глубин.

Еще один пример применения датчиков этого вида – тахогенераторы – приборы для измерения скорости вращения [5]. В этих приборах ротор генератора вращается в поле постоянного магнита или электромагнита, а индуцируемая в нем э.д.с. выпрямляется и измеряется стрелочным или цифровым прибором. Такие тахогенераторы также используются в каротажных станциях для измерения скорости движения скважинного снаряда. Приводом ротора тахогенератора служит один из сельсинов-приемников автосинной передачи.

3.1.2. Преобразователи индукционной э.д.с. со стационарным размещением магнита и катушки индуктивности

В преобразователях этого вида изменение магнитного поля достигается за счет перемещения ферромагнитных масс в воздушном зазоре между магнитом и катушкой индуктивности. В общем случае э.д.с. индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ и числу витков в катушке:

$$e = -w d\Phi / dt.$$

На рис. 3.3 представлено несколько примеров применения преобразователей этого вида в геофизической аппаратуре.

В скважинном каппаметре Н. А. Иванова (рис. 3.3, а) датчик представляет собой катушку индуктивности с большим количеством витков, намотанную на постоянном стержневом магните. Когда такой датчик перемещается по стволу скважины мимо горных пород с повышенными магнитными свойствами, это вызывает изменение магнитного потока через катушку индуктивности, и в ней

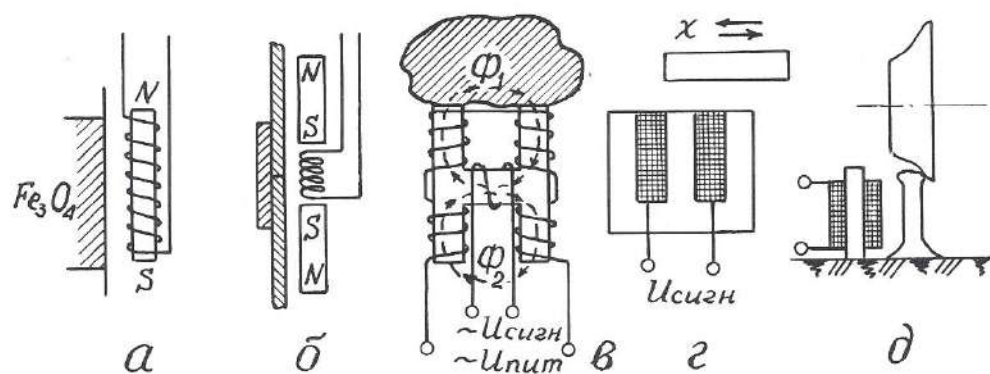


Рис. 3.3. Примеры применения преобразователей индукционной э.д.с.: а – скважинный каппаметр Н. А. Иванова; б – локатор муфт; в – лабораторный измеритель магнитной восприимчивости; г – счетчик количества; д – счетчик вагонеток

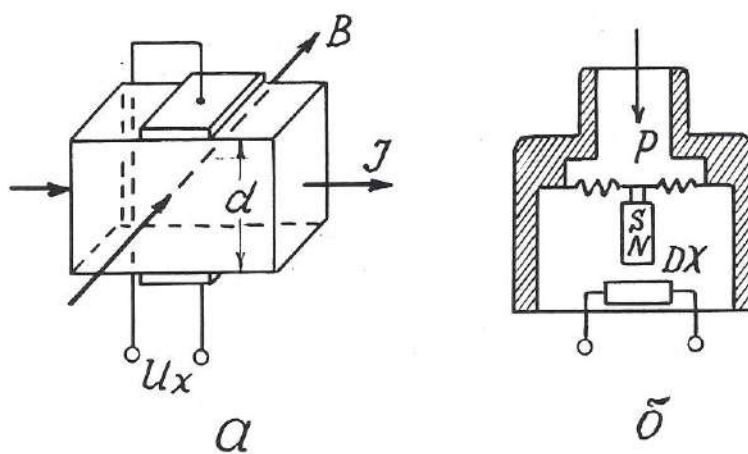


Рис. 3.4. Принцип действия преобразователя Холла (а) и его применение в манометре мембранного типа (б)

возникает э.д.с., пропорциональная магнитной восприимчивости горных пород. В наземном измерительном пульте эта э.д.с., усиливается, выпрямляется и выводится на регистрирующий прибор.

В 50-60 годах каппаметры Н. А. Иванова успешно применялись для исследования скважин на железорудных месторождениях Урала, но потом были заменены более совершенными приборами, поскольку описанный датчик имеет один явный недостаток – сигнал на его выходе зависит не только от магнитных свойств среды, но и от скорости перемещения датчика.

До настоящего времени при исследованиях обсаженных скважин применяются так называемые «локаторы муфт» – приборы, предназначенные для определения положения соединительных муфт обсадных колонн в скважинах [17].

Локатор муфт (рис. 3.3, б) содержит катушку индуктивности и два идентичных постоянных магнита, размещенных выше и ниже нее навстречу друг другу одноименными полюсами. Когда такой прибор перемещается по стальной трубе, имеющей постоянную толщину стенок, магнитные потоки верхнего и нижнего магнитов равны и в области расположения катушки индуктивности компенсируют друг друга. Когда же прибор проходит через соединительную муфту, то из-за увеличения толщины стали сначала усиливается магнитный поток одного (верхнего), а затем другого (нижнего) магнита. В результате в катушке возникает пара разнополярных импульсов э.д.с., которые и регистрируются на диаграммной ленте.

Еще один пример применения преобразователей данного вида – измерители магнитной восприимчивости образцов горных пород (прибор ИМВ-2) [3]. Датчик измерителя (рис. 3.3, в) представляет собой «Н» – образный сердечник с четырьмя обмотками возбуждения на концах сердечника и одной измерительной обмоткой на его «перекладине». Обмотки возбуждения подключены к источнику переменного тока и соединены таким обрезом, чтобы магнитные потоки, создаваемые ими в «перекладине» сердечника, были

направлены навстречу друг другу. Когда датчик находится в воздухе, эти потоки взаимно компенсируются, и сигнал в измерительной обмотке равен нулю. Когда к рабочей поверхности датчика прикладывается образец с повышенной магнитной восприимчивостью, магнитный поток, проходящий через него, увеличивается, и в измерительной обмотке наводится э.д.с., которая затем усиливается и измеряется.

Датчики данного вида находят также применение в технике как счетчики металлических предметов (рис. 3.3, г), счетчики вагонеток (рис. 3.3, д) и т.п. [5].

Общими достоинствами преобразователей индукционной э.д.с. является большая мощность выходного сигнала и отсутствие открытых электрических контактов, недостатком – наличие электромагнитного взаимодействия между магнитом и катушкой индуктивности.

3.2. Преобразователя гальваномагнитной э.д.с.

3.2.1. Преобразователи Холла

Преобразователи этого вида основаны на эффекте Холла, наблюдаемом в полупроводниках. Этот эффект проявляется в возникновении разности потенциалов U_x на обкладках датчика, по которому протекает ток I , при помещении его в магнитное поле, направленное перпендикулярно току. Принцип действия преобразователя Холла поясняется рис. 3.4.

$U_x = K_x \cdot IB/d$, где B – магнитная индукция; d – толщина датчика; K_x – коэффициент Холла, зависящий от характеристики материала и размеров датчика. Эффект Холла наблюдается в таких полупроводниковых материалах, как антимонид индия (InSb), арсенид индия (InAs), арсенид галлия (GaAs), арсенид-фосфат индия ($\text{InAs}_{0,8}\text{P}_{0,2}$) и др. Чистые полупроводники германий и кремний имеют очень высокое значение коэффициента Холла, но весьма чувствительны к режиму работы.

Датчики Холла используются для измерения перемещений, давления, числа оборотов и скорости вращения.

Достоинство датчиков: высокая чувствительность; недостатки: потребность во внешнем источнике питания, высокое выходное сопротивление и необходимость в высоком внутреннем сопротивлении источника питания, наличие четырех выводов.

В геофизической аппаратуре датчики Холла могут быть использованы для улавливания магнитных меток на каротажном кабеле (патент США № 4709208) или для измерения давления (рис. 3.4, б).

Отечественная приборостроительная промышленность выпускает микросхемы серии K1116 с датчиками Холла для магнитного управления электрическими цепями [16].

3.2.2. Преобразователи Виганда

Магнитобистабильный преобразователь Виганда состоит из специально обработанной проволоки из сплава викаллой (ванадий-10%, кобальт-52%, железо-38%) небольшого диаметра (около 0,3 мм), на которую нанесена обмотка индуктивности (рис. 3.5). При помещении датчика в магнитное поле в момент превышения напряженностью поля определенного порога направление намагниченности сердечника катушки спонтанно меняется, и в катушке возникает импульс напряжения длительностью около 20 мкс. При длине датчика 15 мм и числе витков $w=1300$ выходное напряжение достигает 2,5 В [6].

Достоинства датчиков Виганда: большой выходной сигнал, отсутствие внешнего питания, широкий температурный диапазон (от - 196 до + 175° С), искробезопасность.

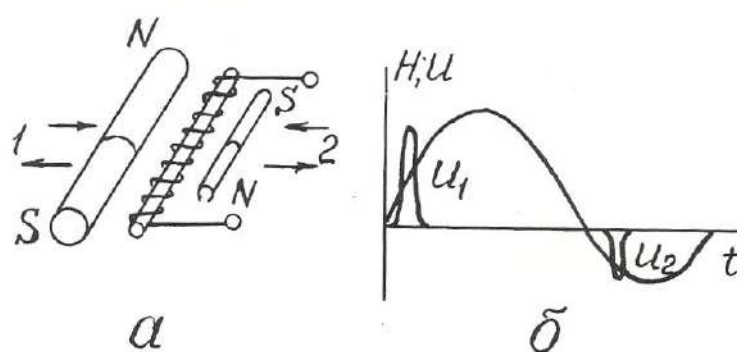


Рис. 3.5. Устройство преобразователя Виганда (а) и осциллограмма его выходного сигнала (б)

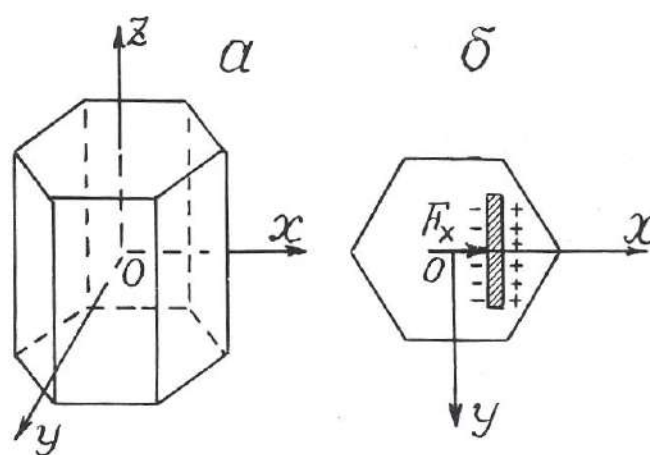


Рис. 3.6. Основные оси кристалла кварца (а) и возникновение пьезоэ.д.с. на кварцевой пластине (б)

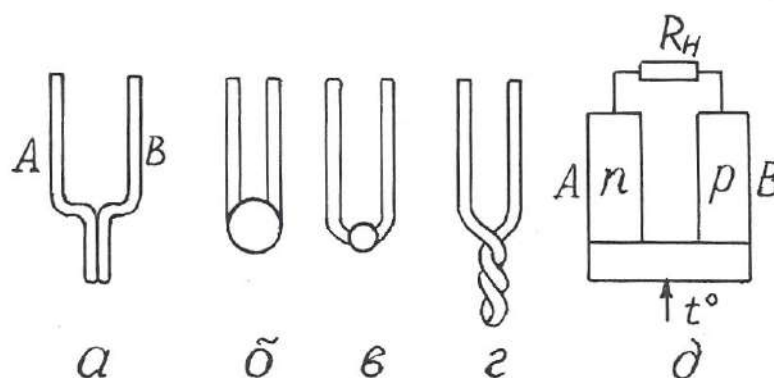


Рис. 3.7. Преобразователи термоэ.д.с. металлические (а-г) и полупроводниковые (д)

Ввиду того, что датчики Виганда были разработаны сравнительно недавно, в конце 80-х годов, они пока еще не используются в геофизической аппаратуре, хотя и могли бы найти применение, например, в магнитных меткоуловителях, устройствах блокировки, каротажных станций и других приборах.

3.3. Преобразователи пьезоэ.д.с.

Действие пьезопреобразователей основано на пьезоэлектрическом эффекте, который возникает в результате взаимосвязи между механическим и электрическим состоянием некоторых диэлектрических материалов, называемых **пьезоэлектриками**.

Различают **прямой пьезоэффект**, заключающийся в возникновении электрических зарядов на гранях кристаллов пьезоэлектриков под действием механических напряжений и исчезновении их после снятия нагрузки, и **обратный пьезоэффект**, проявляющийся в изменении формы и размеров пьезоэлектриков под действием электрического поля.

Способность к пьезоэффекту характеризуется пьезоэлектрической постоянной (пьезомодулем), величина которой определяется электрическим зарядом в Кл, возникающим под действием внешней силы в 1 Н: $K_{пз}=Q/F$.

Наиболее сильно пьезоэффект выражен у сегнетоэлектриков – веществ с аномально высокой диэлектрической проницаемостью. К ним относятся сегнетовая соль, кварц, турмалин, титанат бария и некоторые другие вещества.

Самая высокая пьезоэлектрическая постоянная у сегнетовой соли ($C_4H_4O_6KNa$): $K_{пз}=300 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н; у титана бария ($BaTiO_3$) $K_{пз}= 100 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н; у кварца $K_{пз}=2,1 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н.

Основные свойства пьезоэлектрических датчиков рассмотрим на примере кварца. Кристалл кварц имеет главную оптическую ось z , нейтральную или механическую ось y , и электрическую ось x (рис.3.6). Максимальный пьезоэффект наблюдается при воздействии механических нагрузок вдоль

электрической оси x , поэтому пластины для пьезопреобразователей вырезают из кристаллов кварца перпендикулярно оси x .

Возникновение пьезоэффекта объясняется тем, что под действием механических сил происходит смещение электрических зарядов – одна область кристалла заряжается положительно, другая – отрицательно.

Достоинства преобразователей этого вида: безынерционность, линейная статическая характеристика, высокая собственная частота, малые габариты; недостатки: утечка зарядов с течением времени, необходимость гидроизоляции.

Применяются пьезопреобразователи для измерения динамических нагрузок, деформаций, перемещений.

В геофизической аппаратуре пьезопреобразователи используются в качестве приемников упругих колебаний в скважинных приборах акустического каротажа (СПАК-2, СПАК-4, СПАК-6 и др.). Такой пьезоэлектрический сейсмоприемник изготавливается в виде полой сферы из пьезокерамики, внутренняя и внешняя поверхности которой имеют серебряное покрытие для облегчения снятия с них электрических зарядов. От промывочной жидкости в скважине сейсмоприемник отделен слоем резины [2,17].

В полевой геофизике существует сейсмoeлектрический метод разведки, который заключается в возбуждении с помощью взрыва пьезоэффекта на кристаллах естественных пьезоэлектриков в условиях их коренного залегания и в измерении этого эффекта с помощью системы электродов [3].

В быту пьезопреобразователи используются в качестве звукозаписывающих устройств, в электропроигрывателях, в зажигалках для газовых плит (прямой пьезоэффект), в звукоизлучателях электронных часов и ПЭВМ (обратный пьезоэффект) [22].

3.4. Преобразователи термоэ.д.с.

Преобразователи этого вида основаны на термоэлектрическом эффекте, заключающемся в том, что в цепи из двух разнородных проводников при

поддержании разных температур в точках их соединения возникает э.д.с., пропорциональная разнице этих температур (эффект Зеебека) [22].

Термоэлектрические преобразователи называют термопарами а проводники А и В, из которых они состоят – термоэлементами (рис. 3.7).

Один **чувствительный спай** термоэлементов подвергают воздействию измеряемой температуры, температуру другого, **опорного**, поддерживают постоянной.

Чувствительность термопреобразователей составляет от 5 до 60 мкВ/К.

Наибольшую чувствительность имеют термопары, составленные из двух полупроводников с различной (электронной и дырочной) природой проводимости.

Достоинства термопреобразователей: отсутствие источников питания, линейная статическая характеристика, большой диапазон измеряемых температур; недостаток: малая мощность сигнала отдельной термопары.

В геофизике используются металлические термопреобразователи в качестве термометров для исследования скважин на месторождениях парогидротерм, полупроводниковые – в качестве датчиков в полевой термо-разведке.

В технике термопары используются в системах автоматического регулирования температуры в различных металлургических процессах. В годы Великой Отечественной войны выпускались батареи полупроводниковых термопреобразователей, которые надевались на стекло керосиновой лампы и вырабатывали электроэнергию, достаточную для питания лампового приемника или рации.

3.5. Преобразователи фотоэ.д.с.

В этих преобразователях используются два полупроводника с разным характером проводимости (рис. 3.8, а). На их контакте происходит взаимная

диффузия электронов в *p*-полупроводник, дырок – в *n*-полупроводник. Дырки рекомбинируют с электронами, в результате на контакте полупроводников образуется тонкий запирающий слой – «*p-n*-переход». Такие преобразователи могут работать в режиме источника тока и фотодиода.

При отсутствии светового облучения через такой преобразователь проходит очень небольшой, так называемый «темновой ток», соответствующий обратному току диода. При световом облучении *p-n* -перехода кванты света образуют добавочные носители тока.

Под действием разности потенциалов потенциального барьера *p-n*-перехода электроны перемещаются в зону *n*-полупроводника, а дырки – в зону *p*-полупроводника, создавая фотоэ.д.с., на выводах прибора. На рис. 3.8, а электроны и дырки, прошедшие через *p-n*-переход в результате диффузии и создавшие потенциальный барьер *p-n*-перехода, условно обозначены как «+» и «-» без кружочков. Добавочные дырки и электроны, возникшие под действием облучения, показаны как «+» и «-» в кружочках. Стрелками показано направление действующих на них сил поля *p-n*-перехода.

На рис. 3.8, б показан разрез германиевого фотодиода, состоящего из пластины германия 1 с проводимостью *n*-типа, которая сплавлена с индием 2 (проводимость *p*-типа). Толщина слоя германия над индием настолько мала, что кванты света свободно проникают через него в зону *p-n*-перехода. Корпус 3 выполнен из оргстекла и залит компаундом 4.

Спектральные характеристики фотопреобразователей зависят от используемых в них материалов.

Интегральная чувствительность германиевых фотопреобразователей имеет наибольшее значение $K_{\text{диф}} = \Delta I / \Delta \Phi = 20 \text{ мА/лм. Э.д.с.}$ фотогенераторов не превышает 0,12-0,5 В.

Преобразователи фотоэ.д.с. изготавливаются из кремния, селена, сернистого таллия и сернистого серебра. Достоинством селеновых фотопреобра-

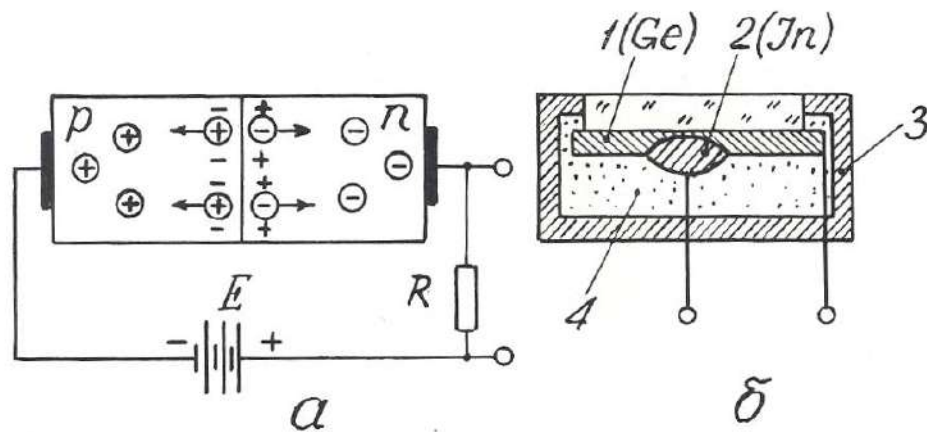


Рис. 3.8. Преобразователь фотоэ.д.с.: принцип действия (а) и конструкция (б)

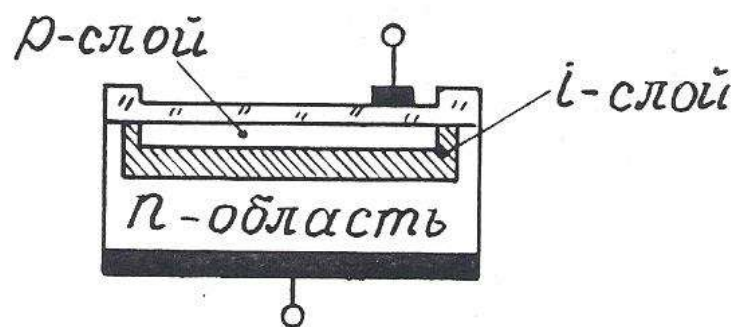


Рис. 3.9. Структура pin-диода

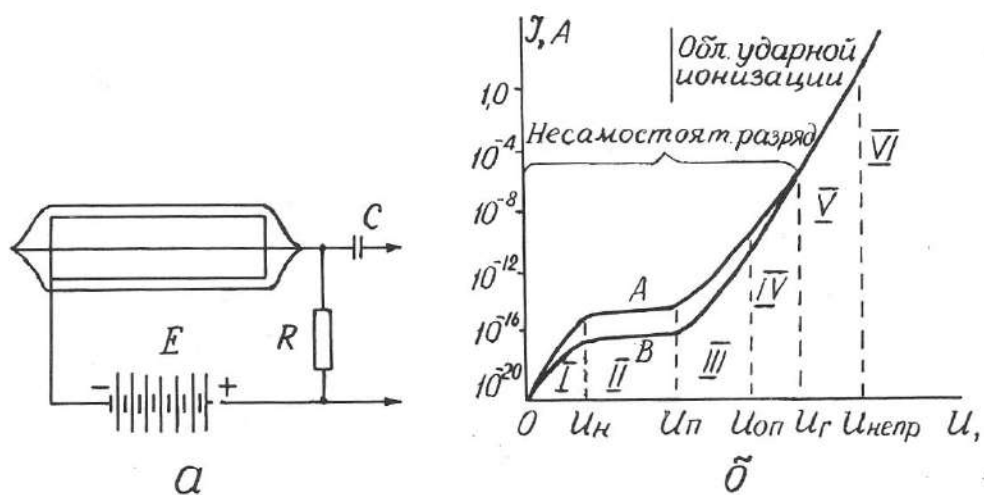


Рис. 4.1. Устройство газоразрядного счетчика (а) и его вольт-амперная характеристика (б):

A – β -частица; B – γ -квант

зователей является их спектральная чувствительность, близкая к чувствительности человеческого глаза.

Для увеличения количества дополнительных носителей, образующихся в p - n -переходе под действием светового облучения, между p и n -полупроводниками располагают дополнительный слой нелегированного высокоомного кремния (i -слой) – рис. 3.9. Такие фотоэлектрические приборы носят название pin -диодов. Область применения их в геофизической аппаратуре та же, что и фоторезистивных датчиков (см. раздел 2.1.7).

Контрольные вопросы

1. Назовите основные характеристики преобразователей индукционной э.д.с., их разновидности и приведите примеры их применения в технике и геофизической аппаратуре (ГА).
2. Поясните принцип действия датчика Холла и объясните его устройство (рис. 3.4, а).
3. Поясните принцип действия и устройство датчика Виганда (рис. 3.5).
4. Поясните принцип действия преобразователей пьезоэ.д.с. и приведите примеры их применения в ГА.
5. Поясните принцип действия преобразователей термоэ.д.с. и приведите примеры их применения в технике и ГА.
6. Поясните принцип действия преобразователей фотоэ.д.с. и приведите примеры их применения.

4. РАДИАЦИОННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

В настоящем пособии будут рассмотрены только те радиационные преобразователи, которые преобразуют энергию ядерного излучения в электрический сигнал. Эти преобразователи называются также детекторами радиоактивных излучений. Они бывают трех видов: газоразрядные, сцинтилляционные и полупроводниковые.

4.1. Газоразрядные детекторы

В газоразрядном детекторе происходит непосредственное преобразование энергии радиоактивного излучения в электрические импульсы.

Газоразрядный детектор представляет собой металлический цилиндр, по оси которого натянута тонкая металлическая нить. Цилиндр играет роль катода и подключается к «минусу» источника постоянного напряжения, нить (анод) – к «плюсу». И нить, и цилиндр могут быть помещены в стеклянный баллон (рис. 4.1, а). Полость детектора заполнена газом под низким давлением (примерно – $1,5 \cdot 10^4$ Па). При прохождении через детектор нейтроны и гамма-кванты взаимодействуют с атомами вещества его катода и газового наполнителя, вызывая ионизацию газа и, как следствие, прохождение кратковременного импульса тока, сила I которого зависит от напряжения U между электродами. При схеме включения детектора, изображенной на рис. 4.1, а, на нагрузочном сопротивлении R импульс тока создает отрицательный импульс напряжения, который через разделительный конденсатор C подается на усилительно-регистрирующую схему [13].

Зависимость $I=f(U)$ или вольт-амперная характеристика счетчика приведена на рис. 4.1, б. В ней выделяются шесть областей, отличающихся по механизму переноса ионов в электрическом поле счетчика. В области I при малых напряжениях на электродах ток возрастает пропорционально напряжению, т.к. с ростом напряжения уменьшается количество рекомбинирующих ионов и все большее их количество достигает электродов счетчика. Эта область (от 0 до U_n) называется **омической**. Начиная с некоторого значения U_n , ток достигает насыщения (все ионы долетают до анода и катода) и перестает возрастать. Величина ионизационного тока во II области (от U_n до U_n) определяется только количеством ионов, образующихся в единицу времени. Преобразователи, работающие в этой области, носят название **ионизационных камер**. При дальнейшем, свыше U_n росте напряжения, несмотря на постоянство

начальной ионизации, происходит рост тока в импульсе. Это связано с возникновением ударной ионизации, при которой электроны, образующиеся при первоначальном воздействии радиации, ускоряются электрическим полем счетчика настолько, что начинают ионизировать молекулы газового наполнителя. Отношение числа ионов, достигших анода счетчика, к числу первичных ионов, созданных регистрируемой частицей (или гамма-квантом), называется **коэффициентом газового усиления**. Величина его зависит от приложенного напряжения.

С возникновением ударной ионизации вначале ток возрастает пропорционально напряжению на электродах (область пропорциональности III от $U_{\text{п}}$ до $U_{\text{оп}}$), здесь отмечается относительно невысокий коэффициент газового усиления (до 10^4), а при дальнейшем увеличении U пропорциональность нарушается и от $U_{\text{оп}}$ до $U_{\text{г}}$ следует IV область – **ограниченной пропорциональности**. За ней идет область Гейгера (V), в которой амплитуда импульса не зависит от начальной ионизации. Коэффициент газового усиления достигает 10^8 - 10^9 и продолжает увеличиваться с ростом напряжения. За областью Гейгера следует область **непрерывного разряда** (VI), для возникновения которого не нужна первичная ионизация, достаточно к электродам счетчика приложить напряжение, превышающее $U_{\text{непр}}$.

Области V и VI – это области самостоятельного разряда, который не требует для своего поддержания внешних источников ионизации.

Газоразрядные детекторы, применяемые в геофизической аппаратуре, работают либо в пропорциональной области (пропорциональные счетчики), либо в области Гейгера (счетчики Гейгера-Мюллера).

Пропорциональные счетчики используются для измерения плотности потока тепловых нейтронов. Баллон счетчика заполняется трехфтористым бором (BF_3), обогащенным до 96 % изотопом В-10, имеющим большое сечение захвата тепловых нейтронов. При захвате нейтрона происходит реакция $\text{B}(n,\alpha)\text{Li}$, α – частица производит первичную ионизацию в объеме счетчика. Для

измерений нейтронов надтепловых энергий счетчик окружают сначала слоем водородсодержащего вещества, например, парафина, а затем тонким (около 0,5 мм) слоем кадмия. Кадмий поглощает тепловые нейтроны, а надтепловые в парафине замедляются до тепловых энергий и затем фиксируются счетчиком.

Счетчик Гейгера-Мюллера применяется для регистрации гамма-квантов. Он заполняется инертным газом (аргоном или гелием) с добавкой паров высокомолекулярных органических соединений (этилового спирта или этилового эфира) или галогенов (хлора, брома). Такая добавка способствует гашению непрерывного разряда, т.к. положительные ионы, образовавшиеся из молекул инертного газа, нейтрализуются при столкновениях с молекулами высокомолекулярного соединения или галогена и не вызывают вторичной электронной эмиссии с катода.

После регистрации каждой ионизирующей частицы газоразрядный счетчик не способен в течение некоторого «мертвого времени» τ_m (порядка 10^{-4} с) отмечать попадание следующей частицы или реагирует на нее образованием импульса пониженной амплитуды («время восстановления» – τ_v). Величина «мертвого времени» и «времени восстановления» определяет разрешающую способность и эффективность преобразователя.

Разрешающей способностью преобразователя называют максимальное количество ионизирующих частиц N_{max} , которые могут быть уверенно зафиксированы преобразователем $N_{max} = I/(\tau_m + \tau_v)$.

Под **эффективностью счетчика** понимают отношение числа частиц, зарегистрированных счетчиком, к общему числу частиц, прошедших через объем счетчика. Эффективность газоразрядных счетчиков зависит от их конструкции, размеров и материала катода и обычно не превышает нескольких процентов.

Основной рабочей характеристикой газоразрядного преобразователя является его **счетная характеристика** – зависимость числа импульсов на его выходе от напряжения на электродах при постоянной интенсивности

ионизирующего облучения (рис. 4.2). Участок *ав* в пределах которого выбирается рабочее напряжение счетчика $U_{\text{раб}}$, называется **плато**. Протяженность плато составляет от 200 до 300 В, а наклон – от 3 до 15 % на 100 В.

Достоинства газоразрядных детекторов: большая амплитуда сигнала, малая потребляемая мощность, широкий температурный диапазон; недостатки: потребность в источнике питания с высоким напряжением, ограниченный ресурс, для счетчиков Гейгера-Мюллера – независимость амплитуды выходного сигнала от энергии ионизирующего излучения.

Газоразрядные счетчики очень широко применялись во всех разновидностях геофизических радиометров: полевых, каротажных, автомобильных и самолетных [3,12]. В последнее время они в значительной мере вытеснены более эффективными сцинтилляционными детекторами.

4.2 Сцинтилляционные детекторы

Сцинтилляционный радиационный преобразователь (рис. 4.3) состоит из люминофора 1 (оптически прозрачного вещества, люминесцирующего под действием ядерного излучения), и фотоэлектронного умножителя 2 (ФЭУ).

В результате действия попавшей в сцинтиллятор элементарной частицы (или гамма-кванта) часть атомов сцинтиллятора переходит в возбужденное состояние. Обратный переход их в нормальное состояние сопровождается кратковременной (порядка 10^{-7} - 10^{-9} с) световой вспышкой. Фотоны света преобразуются в электрический сигнал с помощью ФЭУ, который представляет собой комбинацию фотоэлемента с электронным усилителем. Фотоны из сцинтиллятора 1 выбивают из фотокатода ФЭУ 3 электроны, которые под действием электрического поля устремляются к ближнему диноду 4, имеющему положительный потенциал. Вследствие вторичной электронной

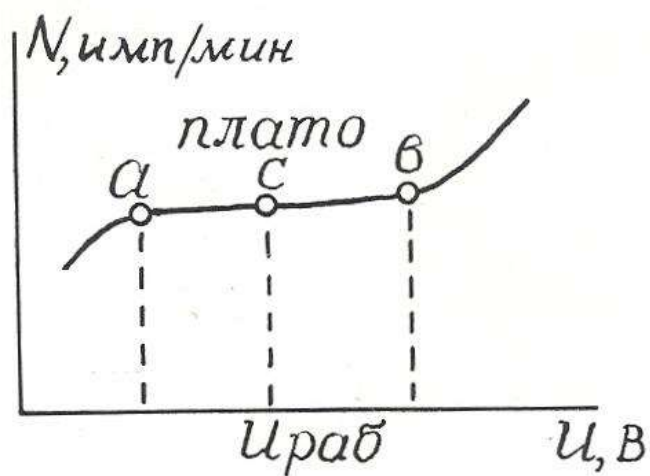


Рис. 4.2. Счетная характеристика газоразрядного счетчика Гейгера – Мюллера

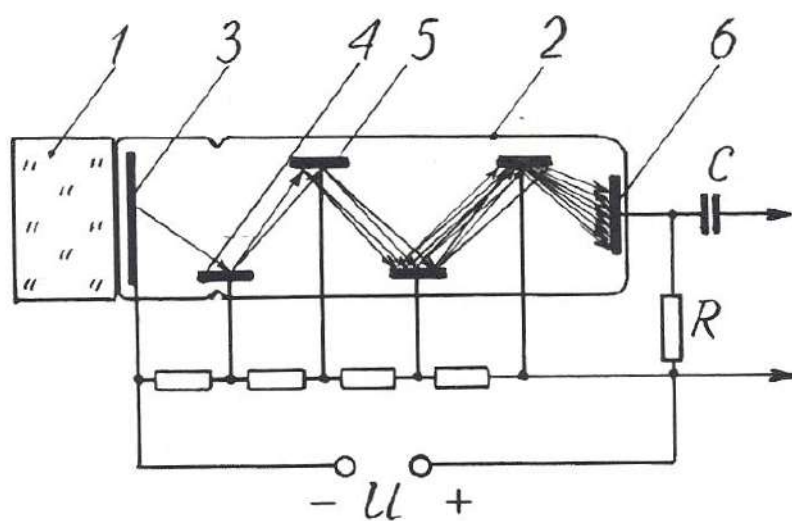


Рис. 4.3. Устройство сцинтилляционного преобразователя: 1 – кристалл-сцинтиллятор; 2 – фотоэлектронный умножитель (ФЭУ); 3 – фотокатод; 4 – первый динод; 5 – второй динод; 6 – анод (ФЭУ)

эмиссии каждый электрон "выбивает из динода вторичные электроны, которые притягиваются следующим динодом 5, имеющим более высокий потенциал, и также вызывают вторичную электронную эмиссию. Процесс развивается лавинообразно, в результате попадания каждой ионизирующей частицы в кристалл-сцинтиллятор соответствует прохождению импульса тока между анодом 6 и катодом 1 ФЭУ, причем амплитуда этого импульса пропорциональна энергии ионизирующей частицы.

Эффективность сцинтилляционных детекторов намного выше, чем у газоразрядных, и достигает 20 %.

В качестве сцинтилляторов для регистрации гамма-квантов в геофизической аппаратуре используют монокристаллы соединений NaI, CsI, KI, активированных таллием (Tl), а для регистрации нейтронов – кристаллы сернистого цинка ZnS с добавками серебра или меди. Примесь активатора (Tl, Ag, Cu) в люминофоре способствует созданию в решетках кристаллов-сцинтилляторов дополнительных центров люминесценции [13].

Счетная характеристика сцинтилляционных преобразователей имеет плато очень небольшой протяженности, вследствие чего эти преобразователи требуют питания высокостабилизированным напряжением.

Преимущества сцинтилляционных преобразователей перед газоразрядными: высокая эффективность, большая разрешающая способность, зависимость амплитуды выходного сигнала от энергии ионизирующего излучения, что позволяет изучать энергетический спектр последнего.

Эти преимущества обеспечивают широкое распространение детекторов этого вида в разнообразных радиометрах: полевых (СРП-68-02), скважинных (ДРСТ-3, Кура-2м и др.), самолетных (АСГМ-46 и др.).

К недостаткам сцинтилляционных детекторов можно отнести низкую термостойкость и термостабильность, что требует их термостатирования в скважинных радиометрах [9].

4.3. Полупроводниковые детекторы

Полупроводниковые детекторы (ППД) устроены и действуют совершенно аналогично преобразователям фотоэ.д.с., рассмотренным в разделе 3.5. Отличие заключается только в том, что в ППД образование свободных носителей в зоне p - n -перехода происходит за счет действия не фотонов света, а ионизирующего ядерного излучения.

Амплитуда импульса на выходе ППД пропорциональна числу носителей зарядов, образованных ионизирующей частицей, а следовательно, ее энергии, что дает возможность изучать энергетический спектр излучения.

Для создания i -слоя в ППД используют литий, обладающий высоким коэффициентом диффузии, который добавляют в торец полупроводника с p -проводимостью.

Преимущества полупроводниковых детекторов: экономичность питания, весьма малые размеры и хорошее амплитудное разрешение (в 20-30 раз лучше, чем у сцинтилляционных преобразователей).

Однако их распространение ограничено. Это связано, во-первых, со сравнительно небольшими размерами чувствительной части детектора, и во-вторых, с необходимостью охлаждения детектора до низких температур (от -100 до -196°), которое повышает их эффективность.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют преобразователи ядерных излучений в электрический сигнал?
2. Объясните устройство газоразрядного преобразователя.
3. Объясните вольт-амперную характеристику (рис. 4.1, б) газоразрядного детектора.
4. Чем отличаются счетчики Гейгера-Мюллера от пропорциональных счетчиков?
5. Объясните устройство и работу сцинтилляционного детектора.

6. Назовите преимущества сцинтилляционных детекторов перед газоразрядными.

7. Объясните устройство и работу полупроводникового детектора, укажите его достоинства и недостатки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиев Т. М., Тер-Хачатуров А. А.* Измерительная техника: Учебн. пособие для техн. вузов. – М.: Высшая школа, 1991. – 384 с.

2. *Аппаратура и оборудование для геофизических исследований нефтяных и газовых скважин:* Справочник /А. А.Молчанов, В. В. Лаптев, В. М. Моисеев, Р. С.Челохьян. – М.: Недра, 1987. – 263 с.

3. *Бондаренко В. М., Демура Г. В., Ларионов А. М.* Общий курс геофизических методов разведки: Учебн. пособие для техникумов. – П.: Недра, 1986. – 453 с.

4. *Бриндли К.* Измерительные преобразователи: Справочное пособие / Пер.с англ. – М.:Энергоатомиздат, 1991. – 144 с.

5. *Бухгольц В. П.* Датчики и реле автоматического контроля в горной промышленности. – М.: Недра, 1971. – 224 с.

6. *Виглеб Г.* Датчики / Пер. с нем. – М.: Мир, 1989. – 196 с.

7. *Енохович А. С.* Краткий справочник по физике. – М.: Высшая школа, 1976. – 288 с.

8. *Зачиевский Т., Мальзахер С., Квецинский А.* Промышленная электроника / Пер.с польского. – М.; Энергия, 1976. – 640 с.

9. *Зельцман П. А.* Конструирование аппаратуры для геофизических исследований скважин. – М.: Недра, 1968. – 180 с.

10. *Зимодро А. Ф., Скибинский Г. Л.* Основы автоматики. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 160 с.

11. *Квартин М. И.* Электромеханические и магнитные устройства автоматики и их расчет. – М.: Высшая школа, 1973. – 344 с.
12. *Кривко Н. Н., Шароварин В. Д., Широков В. Н.* Промышленно-геофизическая аппаратура и оборудование: Учебн. пособие для вузов. – М.: Недра, 1981. – 280 с.
13. *Ларионов В. В.* Радиометрия скважин. – М.: Недра, 1969. – 327 с.
14. *Левшина Е. С., Новицкий П. В.* Электрические измерения физических величин. Измерительные преобразователи. – Л.: Энергоатомиздат, 1983.
15. *Литвак В. И.* Тензореле. Расчет, конструирование, применение. – М.: Машиностроение, 1989. – 160 с.
16. *Логинов В. И.* Электрические измерения механических величин / Изд. 2-е, доп. – М.: Энергия, 1976. – 104 с.
17. *Померанц Л. И., Белоконь Д. В., Козяр В. Ф.* Аппаратура и оборудование геофизических методов исследования скважин: Учебн. пособие для техникумов. – М.: Недра, 1985. – 271 с.
18. *Сковородников И. Г., Калашиников В. Н.* Дистанционный уровнемер для испытательных скважин // Геофизическая аппаратура. Вып.89. – Недра, 1988. – С. 98-103.
19. *Сковородников И. Г., Макаров Л. В., Калашиников В. Н.* Газожидкостный расходомер РГЖ-Г: Техническое описание. – Свердловск: СГИ, 1988. – 15 с.
20. *Сковородников И. Г., Макаров Л. В., Калашиников В. Н.* Изучение скорости и направления движения подземных вод // Гидрогеология и инж. геология: Обзор / ВНИИ экон. минер. сырья и геологоразв. работ. – М., 1987. – 33 с.
21. *Сковородников И. Г., Макаров Л. В., Калашиников В. Н.* Скважинные тахометрические расходомеры / СГИ. – Свердловск, 1989. – 65 с. – Деп. в ВИНТИ, №7609-В89, 1989.
22. *Справочник по средствам автоматики* / Под ред. В. Э. Низэ, И.В.Антика. – М.: Энергоиздат, 1983. – 504 с.

23. *Электрические измерения неэлектрических величин* / А. М. Туричин, П. В. Новицкий, Е. С. Левшина и др.; Изд. 5-е, перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1975. – 676 с.
24. А. с. 491895. Зонд для измерения направления и скорости движения грунтовых вод /Б. Н. Халтурин, В. С. Лившиц // Бюл. изобр. – 1975, №42.
25. А. с. 1063990. Емкостной датчик зенитного угла / О. В.Фомин // Бюл. изобр. – 1983, № 48.
26. А. с. 1158750. Скважинный уровнемер (его варианты) / В. Н. Калашников, И. Г.Сковородников // Бюл. изобр. – 1985, № .20.
27. А. с. 1509518. Датчик угла наклона буровой скважины / А. В. Давыдов, И. Г. Сковородников // Бюл. изобр. – 1989, № 35.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому

комплексу

С.А. Упоров



МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ (КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

ЧАСТЬ 1

«МЕТРОЛОГИЯ»

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Автор: Глушкова Т.А., к.т.н.

Одобен на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 05.10. 2020

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

(название факультета)

Председатель

Бондарев В. И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 13.10. 2020

(Дата)

Екатеринбург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 Основные понятия.....	4
2 Нормативно-правовые основы метрологии.....	5
3 Свойства, физические величины. Измерение ФВ.....	7
4 Системы единиц физических величин. Система SI.....	9
5 Виды и методы измерений	13
6 Средства измерений. Метрологические характеристики СИ.....	14
7 Нормирование и классы точности средств измерений.....	17
8 Погрешности измерений	25
9 Правила округления и записи результата измерений.....	27
10 Метрологическое обеспечение, службы и организации.....	28
11 Формы государственного регулирования в области обеспечения единства измерений.....	30
12 Государственный метрологический надзор.....	31
13 Утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений...	33
14 Поверка средств измерений.....	34
15 Калибровка средств измерений.....	36
16 Метрологическая экспертиза.....	37
17 Анализ и оценка состояния измерений.....	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	35
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	36
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	37
ПРИЛОЖЕНИЕ А Сферы государственного регулирования обеспечения единства измерений.....	43
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Значения коэффициентов Стьюдента $t(P_d, n)$	44

ВВЕДЕНИЕ

Метрология – наука об измерениях. Измерения составляют основу познания человеком окружающего мира во всех исторических периодах. Важность измерений возрастает с развитием производительных сил. Огромную роль играют измерения в современном обществе. Наука, промышленность, экономика, образование, информатика, торговля, банковская система, таможенные операции, медицина, спорт и другие сферы деятельности человека немыслимы без измерений.

Стандартизация, оценка соответствия и метрология как важнейшие составляющие технического регулирования неразрывно связаны между собой. Активная деятельность общества, органов законодательной и исполнительной властей в этих направлениях является важнейшим условием становления рыночной экономики в Российской Федерации, увеличения Внутреннего Валового Продукта, расширения международных научных, технических и торговых связей, интеграции страны в мировую экономическую систему.

Важность метрологической деятельности, обеспечения единства измерений поддержана вниманием со стороны государства.

Правовую основу метрологии составляют:

- основной закон государства - Конституция Российской Федерации;
- Федеральный закон Российской Федерации «Об обеспечении единства измерений» № 102-ФЗ от 26.06.2008;
- федеральные законы отраслевого характера в части, касающейся единства измерений.

- Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ), представляющая собой комплекс нормативно-технических документов (ГОСТов, методических указаний и т.п.), устанавливающих единую номенклатуру стандартных взаимоувязанных правил и положений, требований и норм, относящихся к организации и методике оценивания и обеспечения точности измерений.

Дальнейшее развитие экономики России, расширение международной торговли и экономического сотрудничества, выражающиеся в увеличении количества и технического совершенства товаров, расширении спектра и повышении качества услуг, потребовали совершенствования правовой базы метрологии и приведения в соответствие метрологической деятельности с уровнем развития экономики страны.

Метрология (греч.) – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Различают три раздела метрологии:

- теоретическая (фундаментальная);
- законодательная;
- практическая (прикладная).

Теоретическая метрология – раздел метрологии, предметом которого является разработка фундаментальных основ метрологии.

Законодательная метрология – раздел метрологии, предметом которого является установление обязательных технических и юридических требований по применению единиц физических величин, эталонов, методов и средств измерений, направленных на обеспечение единства и необходимости точности измерений в интересах общества.

Практическая метрология – раздел метрологии, предметом которого являются вопросы практического применения разработок теоретической метрологии и положений законодательной метрологии.

Измерения играют огромную роль в науке, промышленности, экономике и коммуникациях. Практически отсутствуют сферы деятельности, где не применяют результаты измерений, испытаний, контроля.

1 Основные понятия

Аттестация методик (методов) измерений - исследование и подтверждение соответствия методик (методов) измерений установленным метрологическим требованиям к измерениям;

Ввод в эксплуатацию средства измерений - документально оформленная в установленном порядке готовность средства измерений к использованию по назначению;

Государственный метрологический надзор - контрольная деятельность в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, осуществляемая уполномоченными федеральными органами исполнительной власти и заключающаяся в систематической проверке соблюдения установленных законодательством Российской Федерации обязательных требований, а также в применении установленных законодательством Российской Федерации мер за нарушения, выявленные во время надзорных действий;

Государственный первичный эталон единицы величины - государственный эталон единицы величины, обеспечивающий воспроизведение, хранение и передачу единицы величины с наивысшей в Российской Федерации точностью, утверждаемый в этом качестве в установленном порядке и применяемый в качестве исходного на территории Российской Федерации;

Государственный эталон единицы величины - эталон единицы величины, находящийся в федеральной собственности;

Единица величины - фиксированное значение величины, которое принято за единицу данной величины и применяется для количественного выражения однородных с ней величин;

Единство измерений - состояние измерений, при котором их результаты выражены в допущенных к применению в Российской Федерации единицах величин, а показатели точности измерений не выходят за установленные границы;

Измерение - совокупность операций, выполняемых для определения количественного значения величины;

Испытания стандартных образцов или средств измерений в целях утверждения типа - работы по определению метрологических и технических характеристик однотипных стандартных образцов или средств измерений.

Калибровка средств измерений - совокупность операций, выполняемых в целях определения действительных значений метрологических характеристик средств измерений.

Методика (метод) измерений - совокупность конкретно описанных операций, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений с установленными показателями точности.

Метрологическая служба - организующие и (или) выполняющие работы по обеспечению единства измерений и (или) оказывающие услуги по обеспечению единства измерений структурное подразделение центрального аппарата федерального органа исполнительной власти и (или) его территориального органа, юридическое лицо или структурное подразделение юридического лица либо объединения юридических лиц, работники юридического лица, индивидуальный предприниматель.

Метрологическая экспертиза - анализ и оценка правильности установления и соблюдения метрологических требований применительно к объекту, подвергаемому экспертизе. Метрологическая экспертиза проводится в обязательном (обязательная метрологическая экспертиза) или добровольном порядке.

Обязательные метрологические требования - метрологические требования, установленные нормативными правовыми актами Российской Федерации и обязательные для соблюдения на территории Российской Федерации.

Передача единицы величины - приведение единицы величины, хранимой средством измерений, к единице величины, воспроизводимой эталоном данной единицы величины или стандартным образцом.

Поверка средств измерений - совокупность операций, выполняемых в целях подтверждения соответствия средств измерений метрологическим требованиям.

Прослеживаемость - свойство эталона единицы величины или средства измерений, заключающееся в документально подтвержденном установлении их связи с государственным первичным эталоном соответствующей единицы величины посредством сличения эталонов единиц величин, поверки, калибровки средств измерений.

Прямое измерение - измерение, при котором искомое значение величины получают непосредственно от средства измерений.

Сличение эталонов единиц величин - совокупность операций, устанавливающих соотношение между единицами величин, воспроизводимых эталонами единиц величин одного уровня точности и в одинаковых условиях.

Средство измерений - техническое средство, предназначенное для измерений.

Стандартный образец - образец вещества (материала) с установленными по результатам испытаний значениями одной и более величин, характеризующих состав или свойство этого вещества (материала).

Тип средств измерений - совокупность средств измерений, предназначенных для измерений одних и тех же величин, выраженных в одних и тех же единицах величин, основанных на одном и том же принципе действия, имеющих одинаковую конструкцию и изготовленных по одной и той же технической документации.

Тип стандартных образцов - совокупность стандартных образцов одного и того же назначения, изготавливаемых из одного и того же вещества (материала) по одной и той же технической документации

Утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений - документально оформленное в установленном порядке решение о признании соответствия типа стандартных образцов или типа средств измерений метрологическим и техническим требованиям (характеристикам) на основании результатов испытаний стандартных образцов или средств измерений в целях утверждения типа;

Фасованные товары в упаковках - товары, которые упаковываются в отсутствие покупателя, при этом содержимое упаковки не может быть изменено без ее вскрытия или деформирования, а масса, объем, длина, площадь или иные величины, определяющие количество содержащегося в упаковке товара, должны быть обозначены на упаковке;

Эталон единицы величины - техническое средство, предназначенное для воспроизведения, хранения и передачи единицы величины.

2 Нормативно-правовые основы метрологии

Значимость и высокая ответственность измерений в экономике государства обуславливают необходимость установления в законодательном порядке комплекса правовых актов и положений по метрологии. Россия в числе семнадцати государств подписала Метрическую конвенцию в 1875 г.

Вся метрологическая деятельность в РФ основана на конституционной норме (Конституция РФ, статья 71, пункт «Р»), которая закрепляет централизованное государственное руководство основными вопросами законодательной метрологии. В федеральном ведении находятся стандарты, эталоны, метрическая система и исчисление времени.

В целях реализации конституционной нормы приняты Федеральные законы «Об обеспечении единства измерений», «О техническом регулировании», составляющие правовые основы метрологической деятельности.

Нормативные документы по обеспечению единства измерений:

- постановления Правительства РФ по отдельным вопросам и направлениям метрологической деятельности;

- комплекс нормативно-технических документов (ГОСТов, методических указаний и т.п.) государственной системы обеспечения единства измерений (ГСИ), устанавливающих единую номенклатуру стандартных взаимосвязанных

правил и положений, требований и норм, относящихся к организации и методике оценивания и обеспечения точности измерений;

- рекомендации государственных научных метрологических центров Росстандарта.

Основные *цели* ФЗ «Об обеспечении единства измерений»:

- установление правовых основ обеспечения единства измерений в Российской Федерации;

- защита прав и законных интересов граждан, общества и государства от отрицательных последствий недостоверных результатов измерений;

- обеспечение потребности граждан, общества и государства в получении объективных, достоверных и сопоставимых результатов измерений, используемых в целях защиты жизни и здоровья граждан, охраны окружающей среды, животного и растительного мира, обеспечения обороны и безопасности государства, в том числе экономической безопасности;

- содействие развитию экономики Российской Федерации и научно-техническому прогрессу.

Закон закрепляет одно из основных понятий метрологии – единство измерений и другие понятия.

Закон устанавливает, что государственное управление деятельностью по обеспечению единства измерений осуществляет Национальный орган РФ по метрологии – *Росстандарт* (ранее назывался *Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии*), определяет его цели, задачи, компетенцию, ответственность и полномочия.

Положения Закона расширены *Государственной системой обеспечения единства измерений* (ГСИ) - комплексом нормативных документов межрегионального и межотраслевого уровней, устанавливающих правила, нормы, требования, направленные на достижение и поддержание единства измерений в РФ.

Основные *объекты* ГСИ:

- единицы физических величин;
- государственные эталоны, поверочные схемы;
- методы и средства поверки СИ;
- номенклатура и способы нормирования МХ СИ;
- нормы точности измерений;
- способы выражения и формы представления результатов и показателей точности измерений;

- методики выполнения измерений;
- методики оценки достоверности и формы представления данных о свойствах веществ и материалов;

- требования к стандартным образцам свойств веществ и материалов;

- термины и определения в области метрологии;

- организация и порядок проведения государственных испытаний СИ, поверки и метрологической аттестации СИ и испытательного оборудования;

- организация и порядок проведения калибровки СИ, метрологической экспертизы нормативно-технической, проектной, конструкторской и технологической документации, а также экспертизы свойств материалов и веществ.

В дополнение и для реализации положений ФЗ «Об обеспечении единства измерений» Правительство РФ разрабатывает и принимает подзаконные акты – нормативные документы в области метрологии.

3 Свойства, физические величины. Измерение ФВ

Свойство – философская категория, выражающая такую сторону объекта (явления, процесса), которая обуславливает его различие или общность с другими объектами (явлениями, процессами) и обнаруживается в его отношении к ним. Свойство – категория качественная.

Величина – свойство чего-либо, что может быть выделено среди других свойств и оценено тем или иным способом, в том числе и количественно.

Величины подразделяют на два вида:

- идеальные;
- реальные.

Идеальные величины – являются обобщением (моделью) конкретных реальных понятий и относятся главным образом к математике.

Реальные величины подразделяют на две группы:

- нефизические;
- физические.

Нефизические величины свойственны общественным наукам (философия, психология, социология, экономика). Нефизические величины не могут быть измерены, а только оценены.

Физические величины свойственны материальным объектам (процессам, явлениям), изучаемым в естественных (физика, химия) и технических (машиноведение, электротехника) науках.

Физическая величина (ФВ) – одно из свойств физического объекта, в качественном отношении общее для многих физических объектов, а в количественном – индивидуальное, для каждого из них (твёрдость, плотность, теплопроводность, электропроводность).

По возможности измерения ФВ подразделяют на:

- измеряемые;
- оцениваемые.

Изменяемые – величины, которые могут быть выражены количественно в виде определённого числа установленных единиц измерения.

Оцениваемые – величины, для которых не может быть введена единица измерения.

По видам явлений ФВ подразделяют на группы:

- *вещественные*;
- *энергетические*;
- *характеризующие протекание процессов во времени*.

Вещественные – описывают физические и физико-химические свойства веществ, материалов (масса, плотность, электрическое сопротивление).

Энергетические – описывают энергетические характеристики процессов преобразования, передачи, использования энергии (энергия, мощность, сила и напряжение электрического тока).

Характеризующие протекание процессов во времени – различного рода спектральные характеристики, корреляционные функции.

По принадлежности к различным физическим процессам ФВ классифицируют на:

- пространственно-временные;
- механические, тепловые, электрические, магнитные;
- акустические, световые;
- физико-химические;
- ионизирующих излучений, атомной и ядерной физики.

По степени зависимости от других величин ФВ подразделяют на:

- основные (условно независимые);
- производные (условно зависимые);
- дополнительные.

Измерение ФВ – познавательный процесс, заключающийся в сравнении путём физического эксперимента данной ФВ с её известной величиной, принятой за единицу измерения.

Основное уравнение измерения – уравнение вида:

$$Q = q \cdot /Q/. \quad (1)$$

Значение ФВ - Q – оценка её размера в виде некоторого числа принятых для неё единиц.

Числовое значение ФВ - q – отвлечённое число, показывающее отношение значения величины к единице измерения данной величины.

Единица ФВ - $/Q/$ – величина фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение равное единице измеряемой величины. Единицу ФВ применяют для количественного выражения однородных величин.

В практической деятельности производят измерения различных величин, характеризующих свойства тел, веществ, явлений и процессов. Разнообразные количественные или качественные проявления любого свойства образуют множества, отображения которых образуют шкалы.

Шкала ФВ – упорядоченная последовательность значений, принятая по соглашению на основании результатов точных измерений. В соответствии с логической структурой проявления свойств различают шкалы измерений:

- шкала наименований (шкала цветов);
- шкала порядка (шкалы вязкости вещества, силы ветра);
- шкала интервалов (шкалы летоисчисления, температур);
- шкала отношений, (шкалы массы, термодинамической температуры);
- абсолютная шкала (шкалы относительных величин - усиления, ослабления).

Шкалы наименований и порядка называют неметрическими (концептуальными), шкалы интервалов и соотношений - метрическими. Метрические и абсолютные шкалы относят к разряду линейных. Практическая реализация шкал из-

мерений осуществляют стандартизацией шкал, единиц измерений, способов и условий их однозначного воспроизведения.

4 Системы единиц физических величин. Система SI

Система ФВ – совокупность ФВ, в которой одни величины принимают независимыми, а другие являются их функциями.

Обосновано, но произвольным образом выбирают несколько ФВ и называют *основными*. Остальные выражают через основные на основе известных уравнений связи между ними и называют *производными*.

Система единиц ФВ – совокупность основных, производных и дополнительных единиц ФВ, образованная в соответствии с принятыми принципами.

В науке и технике в разное время применяли системы единиц:

- СГС (сантиметр, грамм, секунда);
- МКС (метр, килограмм, секунда);
- МКСГ (метр, килограмм, секунда, градус);
- МКСА (метр, килограмм, секунда, ампер);
- МСС (метр, секунда, свеча) и ряд других.

Единая международная система единиц (SI) принята Генеральной конференцией по мерам и весам в 1960 г. На территории РФ действует в соответствии с ГОСТ 8.417-2002 система единиц SI. Международная система (SI, фр. Le Système International d'Unités) для механических единиц совпадает с системой МКС, а для электромагнитных – с системой МКСА.

Система SI принята для применения в большинстве стран мира, что обусловлено её достоинствами:

- универсальность, применение во всех областях науки и техники;
- унификация всех областей и видов измерений;
- когерентность величин;
- возможность воспроизведения единиц с высокой точностью;
- упрощение записи формул в физике, химии, технических науках;
- уменьшение числа допускаемых единиц измерения;
- единая система образования десятичных кратных и дольных единиц, имеющих собственные наименования;
- облегчение педагогического процесса в средней и высшей школах;
- лучшее взаимопонимание при развитии научно-технических и экономических связей между различными странами.

Международная система физических единиц СИ включает семь основных и две дополнительные единицы.

Основные единицы системы SI:

- *метр* – единица длины – длина пути, которую проходит свет в вакууме за $1/299\,792\,458$ долю секунды;

- *килограмм* – единица массы – масса международного прототипа – цилиндра, изготовленного из сплава платины и иридия;

-*секунда* – единица времени - продолжительность 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующих переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия Cs^{133} ;

-*ампер* – единица силы тока - сила тока, которая при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 метр один от другого, в вакууме создавала бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Ньютонов на каждый метр длины;

-*кельвин* – единица температуры - температура, составляющая $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды;

-*моль* – единица количества вещества - количество вещества, содержащее столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде углерода C^{12} – массой 0,012 кг;

-*кандела* – единица силы света - сила света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила которого составляет $1/683$ Вт/ср².

Дополнительные единицы системы СИ:

радиан – единица плоского угла - плоский угол между двумя радиусами окружности, длина дуги которой равна радиусу;

стерадиан – единица телесного угла - телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Производные единицы могут быть когерентными и неkohерентными.

Когерентная единица – производная единица ФВ, связанная с другими единицами системы уравнением, в котором числовой множитель равен единице.

Единицы ФВ подразделяются на системные и внесистемные.

Системная – единица ФВ, входящая в одну из принятых систем.

Внесистемная – единица ФВ, не входящая ни в одну из принятых систем единиц.

По отношению к единицам системы SI внесистемные единицы подразделяют на:

- допускаемые к применению наравне с единицами системы SI (единица массы – тонна, плоского угла – градус, минута, секунда);

- допускаемые к применению в специальных областях науки (единицы длины в астрономии – астрономическая единица, парсек, световой год);

- временно допускаемые к применению наравне с единицами SI (единица длины в морском деле – миля, массы в ювелирном деле – карат);

- изъятые из употребления (единица давления – миллиметр ртутного столба, мощности – лошадиная сила).

Производные единицы системы SI, имеющие специальные названия, приведены в таблице 1. Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами системы SI, приведены в таблице 2. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования приведены в таблице 3.

Таблица 1 Производные единицы системы СИ, имеющие специальные названия

Величина	Единица	
Наименование	Наименование	Обозначение
Частота	герц	Гц
Сила, вес	ньютон	Н
Давление, механическое напряжение	паскаль	Па
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Количество электричества	кулон	Кл
Электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая ёмкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	Ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Поток магнитной индукции	вебер	Вб
Магнитная индукция	тесла	Тл
Индуктивность	генри	Гн
Световой поток	люмен	лм
Освещённость	люкс	лк
Активность радионуклида	беккерель	Бк
Поглощённая доза ионизирующего излучения	грей	Гр
Эквивалентная доза излучения	зиверт	Зв

Таблица 2 Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	10^3 кг
	атомная единица массы	а. е. м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3 600 с
	сутки	сут	86 400 с
Плоский угол	градус	$^{\circ}$	$1,745 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	$'$	$2,909 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	$''$	$4,848 \cdot 10^{-6}$ рад
Длина	астрономическая единица	а. е.	$1,456 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св. год	$9,461 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	ПК	$3,086 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	дптр	1 м^{-1}
Площадь	гектар	га	$1 \cdot 10^4 \text{ м}^2$
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	ВА	-
Реактивная мощность	вар	вар	-

Таблица 3 Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Множитель	Приставка	Обозначение		Множитель	Приставка	Обозначение	
		международное	русское			международное	русское
10^{18}	экса	E	Э	10^{-1}	деци	d	д
10^{15}	пета	P	П	10^{-2}	санتي	c	с
10^{12}	тера	T	Т	10^{-3}	милли	m	м
10^9	гига	G	Г	10^{-6}	микро	μ	мк
10^6	мега	M	М	10^{-9}	нано	n	н
10^3	кило	k	к	10^{-12}	пико	p	п
10^2	гекто	h	г	10^{-15}	фемто	f	ф
10^1	дека	da	да	10^{-18}	атто	a	а

5 Виды, методы измерений

Виды измерений определяются физическим характером измеряемой величины, требуемой точностью измерения, скоростью изменения измеряемой величины, условиями измерений. С развитием науки и техники увеличивается количество видов и совершенствуются методы измерений.

В зависимости от цели различают измерения: контрольные, диагностические и прогностические, лабораторные и технические, эталонные и поверочные, абсолютные и относительные.

Измерения могут быть: контактные и бесконтактные, одно- и многократные, необходимые и избыточные, статические и динамические, с точным и приблизительным оцениванием погрешности.

По способу получения результата различают *виды* измерений:

- *прямые* – искомое значение величины находят экспериментальным сравнением её с единицей измерения (мерой) или отсчётом показаний прибора, отградуированного в установленных единицах (измерение длины линейкой, измерение температуры термометром). Прямые измерения – основа более сложных;

- *косвенные* – искомое значение величины находят по результатам прямых измерений нескольких величин, связанных с искомой известной зависимостью (измерение плотности тела по измеренным массе и линейным размерам, измерение мощности электрической цепи по измеренным значениям силы тока и напряжения);

- *совокупные* – искомое значение величины находят решением системы уравнений, составленных по результатам производимых одновременно прямых измерений нескольких *одноимённых* величин (измерение температурного коэффициента линейного расширения);

- *совместные* – искомое значение величины находят решением системы уравнений, составленных по результатам производимых одновременно прямых и косвенных измерений нескольких *неодноимённых* величин (измерение электрического сопротивления проводника при различных фиксированных значениях температуры).

Метод измерения – прием или совокупность приемов сравнения измеряемой физической величины с ее единицей в соответствии с реализованным принципом измерений.

Принцип измерения – физическое явление или эффект, положенное в основу измерений (измерение температуры по расширению тела).

Стандартные методы прямых измерений:

- *непосредственной оценки* – метод измерений, при котором значение величины определяют непосредственно по показывающему средству измерений (измерение давления пружинным манометром, силы электрического тока - амперметром);

- *сравнения с мерой* – метод измерений, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой (измерение массы на рычажных весах с помощью гирь);

- *дополнения* – метод сравнения с мерой, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению;

- *дифференциальный* – метод измерений, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, и при котором измеряется разность между этими двумя величинами;

- *нулевой* – метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на прибор сравнения доводят до нуля;

- *замещения* – метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают мерой с известным значением величины (поочередное помещение измеряемой массы и гирь на одну и ту же чашу весов).

Нестандартные методы измерений:

- *противопоставления* – метод, при котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно действуют на прибор сравнения (измерение массы на равноплечих весах с помещением измеряемой массы и уравновешивающих её гирь на двух чашах);

- *совпадения* – метод, при котором разность между сравниваемыми величинами измеряют по совпадению отметок шкал или периодических сигналов (штангенциркуль, стробоскоп).

6 Средства измерений. Метрологические характеристики СИ

Средство измерения (СИ) – техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу ФВ, размер которой принимается неизменным в пределах установленной погрешности в течение известного интервала времени.

СИ сгруппированы по отдельным классификационным признакам:

- *по способу регистрации сигнала* - показывающие, регистрирующие (печатающие, пишущие), комбинированные (одновременно показывающие и регистрирующие), интегрирующие (суммирующие);

- по роду выходного сигнала - аналоговые, цифровые, аналого-цифровые;
- по физической природе измеряемой величины - механические, гидравлические, пневматические, тепловые, акустические, электрические, электронные, комбинированные и прочие;
- по виду шкалы - с равномерной и неравномерной шкалой, с нулевой отметкой внутри, на краю или вне шкалы;
- по степени автоматизации - неавтоматические (с ручной наводкой), автоматизированные, автоматические;
- по характеру использования - образцовые, лабораторные, технические (промышленные), полевые.

Основные виды СИ:

- *мера* – средство, хранящее или воспроизводящее ФВ заданного размера. Мера может быть однозначной (гиря, калибр) и многозначной (измерительная линейка, магазин электрических сопротивлений). Измерение методом сравнения с мерой выполняют с помощью специальных средств - компараторов (равноплечие весы, электрический измерительный мост). В ряде случаев в качестве компаратора выступает человек - оператор;
- *измерительный преобразователь* – средство, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, обработки, хранения, но не доступной для непосредственного восприятия оператором (термопара, термометр сопротивления, усилитель);
- *измерительный прибор* – средство, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия оператором (амперметр, вольтметр, манометр);
- *измерительная установка* – совокупность функционально объединённых СИ и вспомогательных устройств, расположенных в одном месте (установки для поверки измерительных приборов, испытаний электротехнических материалов);
- *измерительная система* – комплекс СИ и устройств связи (проводная, инфракрасная, радио, телевизионная, оптоволоконная), предназначенный для выработки сигналов измерительной информации в форме, удобной для использования в системах автоматического контроля и управления;
- *информационно-вычислительный комплекс (ИВК)* – системы автоматического контроля и управления, технического диагностирования, распознавания образов на базе микропроцессорной и вычислительной техники;
- *измерительные принадлежности* – вспомогательные средства измерений величин (термометр, психрометр для измерения параметров воздуха).

По метрологическому назначению СИ подразделяют на два вида:

- метрологические (эталоны);
- рабочие (лабораторные, производственные, полевые).

Эталон – высокоточная мера, предназначенная для воспроизведения, хранения единицы величины с целью передачи её значения другим менее точным СИ. Эталоны классифицируют на первичные (составляют основу государственной системы измерений), вторичные, рабочие (разрядные). Рабочие эталоны воспринимают размер единицы от вторичных эталонов и передают его рабочим СИ.

Эталонная база РФ имеет в своём составе 128 государственных и более 250 вторичных эталонов ФВ.

Перспективное направление развития эталонов – переход на эталоны, основанные на квантовых эффектах. Способность таких эталонов воспроизводить единицы величин не зависит от внешних условий, географического местонахождения, времени.

Рабочие СИ – средства измерений, предназначенные для выполнения измерений в лабораторных и производственных условиях.

Метрологические характеристики (МХ) – характеристики, которые позволяют судить о пригодности СИ для измерений в известном диапазоне с известной точностью.

Индикаторы – приборы и вещества, не имеющие нормированных МХ.

МХ вводят для СИ с целями:

- обеспечения возможности установления точности измерений;
- достижения взаимозаменяемости СИ;
- сравнения и выбора нужных СИ по точности измерений;
- определения погрешности измерительных систем и установок на основе МХ входящих в них СИ;
- оценки технического состояния СИ при поверке.

Нормальные МХ устанавливаются нормативными документами. Наибольшее распространение на практике получили МХ:

- *диапазон показаний* – область значений шкалы, ограниченная начальным и конечным значениями;
- *диапазон измерений* – область значений измеряемой величины, для которой нормированы допускаемые пределы погрешности;
- *цена деления шкалы* – разность значений величин, соответствующих двум соседним отметкам шкалы. СИ с равномерной шкалой имеют постоянную цену деления, а с неравномерной – переменную;
- *чувствительность S* – отношение изменения сигнала на выходе Δy к вызвавшему это изменение изменению Δx сигнала на входе:

$$S = \Delta y / \Delta x. \quad (2)$$

Для стрелочного прибора это отношение перемещения dl конца стрелки к вызвавшему его изменению dx измеряемой величины:

$$S = dl / dx; \quad (3)$$

- *постоянная прибора C* – величина обратная чувствительности:

$$C = 1/S; \quad (4)$$

- *порог чувствительности* – наименьшее значение измеряемой величины, вызывающее заметное изменение показаний прибора;

- *вариация (гистерезис) H* – разность между показаниями в данной точке диапазона измерения при возрастании и убывании измеряемой величины и неизменных внешних условий. Вариация обусловлена наличием зазоров, тепловым или упругим последствием элементов конструкции:

$$H = |x_{\epsilon} - x_y|, \quad (5)$$

где x_0 , x_y – соответственно значения измерений образцовым прибором при возрастании и убывании величины x ;

- *градуировочная характеристика* – зависимость между выходным и входным сигналами СИ, полученная расчётом или экспериментально, представленная аналитически, графически или в виде таблицы. Градуировочная характеристика может изменяться в течение времени под воздействием внутренних и внешних причин.

Основным видом МХ является *погрешность* измерений – разность между показаниями СИ и истинными (действительными) значениями ФВ. Погрешности в зависимости от влияния внешних условий на результат измерений подразделяют на два вида:

- *основная погрешность* – погрешность СИ при нормальных условиях эксплуатации. Нормальные условия: температура 293 ± 5 К, относительная влажность воздуха $65 \pm 15\%$, напряжение в сети электропитания $220 \text{ В} \pm 10\%$ с частотой $50 \text{ Гц} \pm 1\%$, атмосферное давление от 97,4 до 104,0 кПа, отсутствие наводок электрических и электромагнитных полей;

- *дополнительная погрешность* – погрешность измерений, возникающая при отклонении влияющих величин за диапазон значений, установленных нормальными условиями.

Существует несколько способов нормирования погрешности. Наибольшее применение в практике измерений аналоговыми СИ получило нормирование *класса точности* по приведённой погрешности γ , постоянной во всём диапазоне измерений.

7 Нормирование и классы точности средств измерений

Точность средств измерений определяется предельно-допустимыми погрешностями, которые могут быть получены при его использовании.

Нормированием погрешностей средств измерений называют процедуру назначения допустимых границ основной и дополнительных погрешностей измерений, при использовании этих средств измерений, а также выбор формы указания этих границ в нормативно-технической документации.

Пределы допускаемой основной и дополнительных погрешностей определяются разработчиками для каждого типа средств измерений на стадии подготовки производства. В зависимости от назначения средства измерений и характера изменения погрешности в пределах диапазона измерений нормируется для средств измерений различного типа либо предельно-допустимое значение основной абсолютной погрешности, либо предельно-допустимое значение основной приведенной погрешности, либо предельно-допустимое значение основной относительной погрешности.

Для каждого типа средств измерений характер изменения погрешности в пределах диапазона измерений зависит от принципа действия этого средства измерений и может быть самым разнообразным. Однако, как показала практика, среди этого многообразия часто удается выделить три типовых случая, определяющих выбор формы представления пределов допускаемой погрешно-

сти. Типовые варианты отклонения реальных передаточных характеристик средств измерений от номинальной характеристики и соответствующие им графики изменения предельных значений абсолютной и относительной погрешностей в зависимости от измеряемой величины приведены на рисунке 1.

Если реальная передаточная характеристика средства измерений смещена по отношению к номинальной (1-й график на рисунке 1а), абсолютная погрешность, возникающая при этом, (1-й график на рисунке 1б), не зависит от измеряемой величины.

Составляющую погрешности средства измерений, не зависящую от измеряемой величины, называют **аддитивной погрешностью**.

Если угол наклона реальной передаточной характеристики средства измерений отличается от номинального (2-й график на рисунке 1а), то абсолютная погрешность будет линейно зависеть от измеряемой величины (2-й график на рисунке 1б).

Составляющую погрешности средства измерений, линейно зависящую от измеряемой величины, называют **мультипликативной погрешностью**.

Если реальная передаточная характеристика средства измерений смещена по отношению к номинальной и угол ее наклона отличается от номинального (3-й график на рисунке 1а), то в этом случае имеет место как аддитивная, так и мультипликативная погрешность.

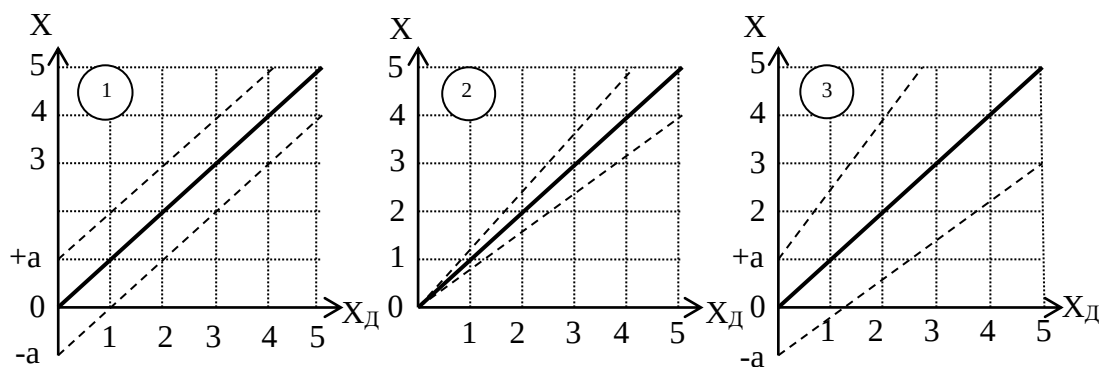
Аддитивная погрешность возникает из-за неточной установки нулевого значения перед началом измерений, ухода нуля в процессе измерений, из-за наличия трений в опорах измерительного механизма, из-за наличия термо-ЭДС в контактных соединениях и т.д.

Мультипликативная погрешность возникает при изменении коэффициентов усиления или ослабления входных сигналов (например, при изменении температуры окружающей среды, или вследствие старения элементов), из-за изменения значений, воспроизводимых мерами, встроенными в измерительные приборы, из-за изменений жесткости пружин, создающих противодействующий момент в электромеханических приборах и т.д.

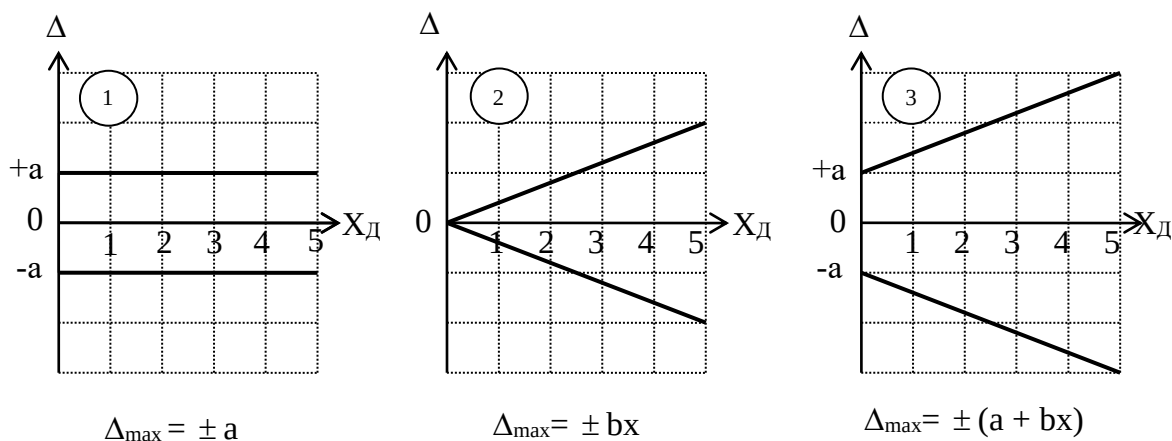
Ширина полосы неопределенности значений абсолютной (рисунке 1б) и относительной (рисунке 1в) погрешностей характеризует разброс и изменение в процессе эксплуатации индивидуальных характеристик множества находящихся в обращении средств измерений определенного типа.

А) Нормирование пределов допускаемой основной погрешности для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью.

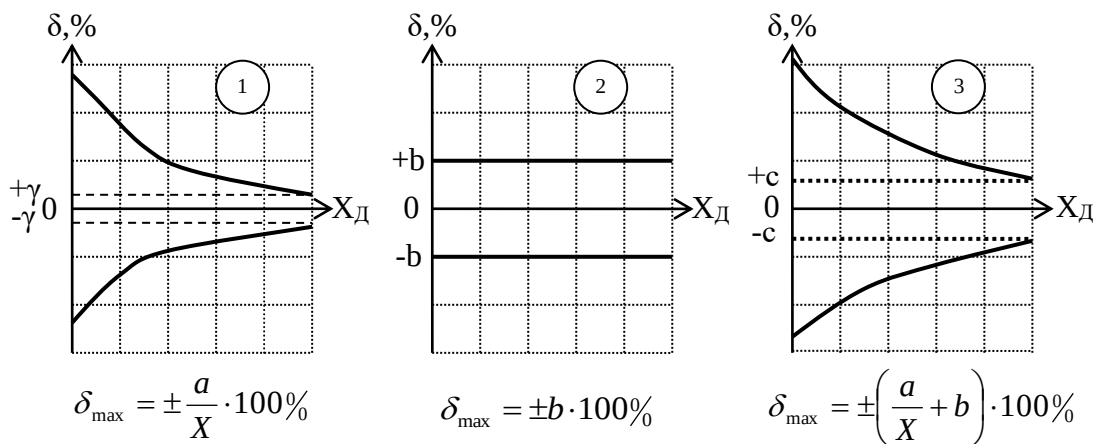
Для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью (1-й график на рисунке 1) удобно нормировать одним числом предельно-допустимое значение абсолютной погрешности ($\Delta_{\max} = \pm a$). В этом случае фактическая абсолютная погрешность Δ каждого экземпляра средства измерений данного типа на различных участках шкалы может иметь различные значения, но не должна превышать предельно-допустимой величины ($\Delta \leq \pm a$).



а) Типовые варианты отклонения реальных передаточных характеристик средств измерений от номинальной характеристики.



б) Пределы допускаемой абсолютной погрешности.



в) Пределы допускаемой относительной погрешности.

Рисунок 1 Иллюстрации к выбору формы представления пределов допускаемой основной погрешности

В многопредельных измерительных приборах с преобладающей аддитивной погрешностью для каждого предела измерений пришлось бы указывать свое значение предельно допустимой абсолютной погрешности. К сожалению, как видно из 1-го графика на рисунке 1в, нормировать одним числом предел допускаемой относительной погрешности в различных точках шкалы не представляется возможным. По этой причине для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью часто нормируют одним числом значение так называемой **основной приведенной относительной погрешности**

Ширина полосы неопределенности значений абсолютной (рисунке 1б) и относительной (рисунке 1в) погрешностей характеризует разброс и изменение в процессе эксплуатации индивидуальных характеристик множества находящихся в обращении средств измерений определенного типа.

А) Нормирование пределов допускаемой основной погрешности для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью.

Для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью (1-й график на рисунке 1) удобно нормировать одним числом предельно-допустимое значение абсолютной погрешности ($\Delta_{\max} = \pm a$). В этом случае фактическая абсолютная погрешность Δ каждого экземпляра средства измерений данного типа на различных участках шкалы может иметь различные значения, но не должна превышать предельно-допустимой величины ($\Delta \leq \pm a$). В многопредельных измерительных приборах с преобладающей аддитивной погрешностью для каждого предела измерений пришлось бы указывать свое значение предельно допустимой абсолютной погрешности. К сожалению, как видно из 1-го графика на рисунке 1в, нормировать одним числом предел допускаемой относительной погрешности в различных точках шкалы не представляется возможным. По этой причине для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью часто нормируют одним числом значение так называемой **основной приведенной относительной погрешности**

$$\gamma = \pm \frac{\Delta_{\max}}{X_N} \cdot 100\% = \pm \frac{a}{X_N} \cdot 100\%,$$

где X_N – нормирующее значение.

Таким способом, например, нормируются погрешности большинства электромеханических и электронных приборов со стрелочными индикаторами. В качестве нормирующего значения X_N обычно используется предел измерений ($X_N = X_{\max}$), удвоенное значение предела измерений (если нулевая отметка находится в середине шкалы), или длина шкалы (для приборов с неравномерной шкалой). Если $X_N = X_{\max}$, то значение приведенной погрешности γ равно пределу допускаемой относительной погрешности средства измерений в точке, соответствующей пределу измерений. По заданному значению предела допускаемой основной приведенной погрешности легко определить предел допускаемой основной абсолютной погрешности для каждого предела измерений многопредельного прибора:

$$\Delta_{\max} = \pm \frac{\gamma \cdot X_{\max}}{100}.$$

После этого для любой отметки шкалы X может быть произведена оценка предельно-допустимой основной относительной погрешности:

$$\delta = \pm \frac{\Delta_{\max}}{X} \cdot 100\% = \pm \gamma \frac{X_{\max}}{X}.$$

Б) Нормирование пределов допускаемой основной погрешности для средств измерений с преобладающей мультипликативной погрешностью.

Как видно из рисунка 1 (2-й график), для средств измерений с преобладающей мультипликативной погрешностью, одним числом удобно нормировать предел допускаемой основной относительной погрешности (рисунке 1в) $\delta_{\max} = \pm b \cdot 100\%$. В этом случае, фактическая относительная погрешность каждого экземпляра средства измерений данного типа на различных участках шкалы может иметь различные значения, но не должна превышать предельно допустимой величины ($\delta \leq \pm b \cdot 100\%$). По заданному значению предельно допустимой относительной погрешности $\delta_{\max}$ для любой точки шкалы может быть произведена оценка предельно-допустимой абсолютной погрешности:

$$\Delta \leq \pm \frac{\delta_{\max} \cdot X}{100\%} = \pm b \cdot X.$$

К числу средств измерений с преобладающей мультипликативной погрешностью относится большинство многозначных мер, счетчики электрической энергии, счетчики воды, расходомеры и др. Следует отметить, что для реальных средств измерений с преобладающей мультипликативной погрешностью не удастся полностью устранить аддитивную погрешность. По этой причине в технической документации всегда указывается наименьшее значение измеряемой величины, для которого предел допускаемой основной относительной погрешности ещё не превышает заданного значения $\delta_{\max}$. Ниже этого наименьшего значения измеряемой величины погрешность измерений не нормируется и является неопределенной.

В) Нормирование пределов допускаемой основной погрешности для средств измерений с соизмеримой аддитивной и мультипликативной погрешностью.

Если аддитивная и мультипликативная составляющая погрешности средства измерений соизмеримы (3-й график на рисунке 1), то задание предельно-допустимой погрешности одним числом не представляется возможным. В этом случае либо нормируется предел допускаемой абсолютной основной погрешности (указываются предельно-допустимые значения a и b), либо (чаще всего) нормируется предел допускаемой относительной основной погрешности. В последнем случае численные значения предельно-допустимых относительных погрешностей в различных точках шкалы оцениваются по формуле:

$$\delta_{\max} = \pm \left[c + d \left(\frac{X_{\max}}{X} - 1 \right) \right],$$

где $X_{\max}$ – предел измерений;

X – измеренное значение;

$d = \frac{a}{X_{\max}} \cdot 100\%$ - значение приведенной к пределу измерений

аддитивной составляющей основной погрешности;

$c = \left(b + \frac{a}{X_{\max}} \right) \cdot 100\%$ - значение результирующей относительной

основной погрешности в точке, соответствующей пределу измерений.

Рассмотренным выше способом (указанием численных значений c и d) нормируются, в частности, предельно-допустимые значения относительной основной погрешности цифровых измерительных приборов. В этом случае относительные погрешности каждого экземпляра средств измерений определенного типа не должны превышать установленных для этого типа средств измерений значений предельно-допустимой погрешности:

$$\delta \leq \delta_{\max} = \pm \left[c + d \left(\frac{X_{\max}}{X} - 1 \right) \right].$$

При этом абсолютная основная погрешность определяется по формуле

$$\Delta \leq \Delta_{\max} = \pm \frac{\delta_{\max} \cdot X}{100}.$$

Г) Нормирование дополнительных погрешностей.

Наиболее часто пределы допускаемых дополнительных погрешностей указывают в технической документации либо одним значением для всей рабочей области величины, влияющей на точность средства измерений (иногда несколькими значениями для поддиапазонов рабочей области влияющей величины), либо отношением предела допускаемой дополнительной погрешности к интервалу значений влияющей величины. Пределы допускаемых дополнительных погрешностей указываются на каждой, влияющей на точность средства измерений величине. При этом, как правило, значения дополнительных погрешностей устанавливаются в виде дольного или кратного значения предела допускаемой основной погрешности. Например, в документации может быть указано, что при температуре окружающей среды за пределами нормальной области температур, предел допускаемой дополнительной погрешности, возникающей по этой причине, не должен превышать $\pm 0,2\%$ на 10°C .

Класс точности средства измерений – это его характеристика, отражающая точностные возможности средств измерений данного типа.

Допускается буквенное или числовое обозначение классов точности. Средствам измерений, предназначенным для измерения двух и более физических величин, допускается присваивать различные классы точности для каждой измеряемой величины. Средствам измерений с двумя или более переключаемыми диапазонами измерений также допускается присваивать два или более класса точности.

Если нормируется предел допускаемой абсолютной основной погрешности, или в различных поддиапазонах измерений установлены разные значения пределов допускаемой относительной основной погрешности, то, как правило, применяется буквенное обозначение классов. Так, например платиновые термометры сопротивления изготавливают с классом допуска **A** или классом допуска **B**.

При этом для класса **A** установлен предел допускаемой абсолютной основной погрешности

$$\Delta_{\max} = (0,15 + 0,001 \cdot t_x),$$

а для класса **B**

$$\Delta_{\max} = \pm(0,3 + 0,005 \cdot t_x),$$

где t_x – температура измеряемой среды.

Если для средств измерений того или иного типа нормируется одно значение предельно-допустимой приведенной основной погрешности, или одно значение предельно-допустимой относительной основной погрешности, или указываются значения **c** и **d**, то для обозначения классов точности используются десятичные числа. В соответствии с ГОСТом 8.401-80 для обозначения классов точности допускается применение следующих чисел:

$1 \cdot 10^n$; $1,5 \cdot 10^n$; $2 \cdot 10^n$; $2,5 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$, где $n = 0, -1, -2$, и т.д.

Для средств измерений с преобладающей аддитивной погрешностью численное значение класса точности выбирается из указанного ряда равным предельно-допустимому значению приведенной основной погрешности, выраженной в процентах. Для средств измерений с преобладающей мультипликативной погрешностью численное значение класса точности соответствует пределу допускаемой относительной основной погрешности также выраженной в процентах. Для средств измерений с соизмеримыми аддитивными и мультипликативными погрешностями числа **c** и **d** также выбираются из указанного выше ряда. При этом класс точности средства измерений обозначается двумя числами, разделенными косой чертой, например, 0,05/0,02. В этом случае **c** = 0,05% ; **d** = 0,02%. Примеры обозначений классов точности в документации и на средствах измерений, а также расчетные формулы для оценки пределов допускаемой основной погрешности приведены в таблице 4.

Примеры обозначений классов точности средств измерений и расчетные формулы для оценки пределов допустимой основной погрешности

Форма представления нормируемой основной погрешности	Примеры обозначения класса точности		Расчетные формулы для оценки пределов допускаемой основной погрешности	Примечания
	В документации	На средствах измерений		
Нормируется предел допускаемой абсолютной основной погрешности	Варианты: - класс B ; - класс допуска B ; - класс точности B .	B	$\Delta_{\max} = \pm a \quad \text{или} \quad \Delta_{\max} = \pm(a + bx)$ $\delta_{\max} = \pm \frac{a}{x} \cdot 100\% \quad \text{или} \quad \delta_{\max} = \pm \left(\frac{a}{x} + b \right) \cdot 100\%$	Значения a и b приводятся в документации на средство измерений.
Нормируется предел допускаемой приведенной основной погрешности	Варианты: - класс точности 1,5 - не обозначается.	1,5	$\Delta_{\max} = \pm \frac{\gamma \cdot x_{\max}}{100}, \quad \gamma = 1,5\%$ $\delta_{\max} = \pm \gamma \cdot \frac{x_{\max}}{x}, \quad \text{где } x_{\max} - \text{предел измерений.}$	Для приборов с равномерной шкалой и нулевой отметкой в начале шкалы
	Варианты: - класс точности 2,5; - не обозначается	∇	$\Delta l_{\max} = \pm \frac{\gamma \cdot L}{100}, \quad \gamma = 2,5\%$ $\Delta l_{\max} - \text{предел допускаемой абсолютной погрешности в мм.}$ $L - \text{длина всей шкалы.}$	Для приборов с неравномерной шкалой. Длина шкалы указывается в документации.
Нормируется предел допускаемой относительной основной погрешности	Класс точности 0,5.	0,5	$\delta_{\max} = \pm b \cdot 100\% = \pm 0,5\%$ $\Delta_{\max} = \pm \frac{\delta_{\max} \cdot x}{100}$	Для средств измерений с преобладающей мультипликативной погрешностью.
	Варианты: - класс точности 0,02/0,01; - не обозначается.	0,02/0,01	$\delta_{\max} = \pm \left[0,02 + 0,01 \left(\frac{x_{\max}}{x} - 1 \right) \right] \%$ $\Delta_{\max} = \pm \frac{\delta_{\max} \cdot x}{100}$	Для средств измерений с соизмеримыми аддитивной и мультипликативной погрешностью

8 Погрешности измерений

При выполнении практических измерений важно оценить их точность. Термин «точность измерений» не имеет строго определения и используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки применяют термин «погрешность результата измерений». Оценка погрешности измерений одна из важнейших задач обеспечения единства измерений.

Для практических целей рассматривают систематические и случайные погрешности, выраженные в абсолютной, относительной или приведённой форме.

Абсолютная погрешность Δ – отклонение результата измерения x от действительного x_0 значения измеряемой величины, выраженное в единицах измерения (абсолютная погрешность может быть положительной или отрицательной):

$$\Delta = x - x_0 . \quad (6)$$

Относительная погрешность δ – отношение абсолютной погрешности к действительному значению измеряемой величины, выраженное в процентах:

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{x_0} \cdot 100, \% . \quad (7)$$

Приведённая погрешность γ – отношение абсолютной погрешности к нормирующему x_N значению, выраженное в процентах:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{x_N} \cdot 100, \% . \quad (8)$$

Нормирующее значение выбирают в зависимости от вида и характера шкалы прибора и принимают равным:

- конечному значению рабочей части шкалы, если нулевая отметка на краю или вне рабочей части шкалы;
- сумме конечных значений шкалы (без учёта знаков), если нулевая отметка внутри шкалы;
- номинальному значению, если прибор предназначен для измерения отклонения величины от номинального значения.

В практике измерений для определения действительного значения к показанию прибора вводят *поправку* c , которая численно равна абсолютной погрешности, взятой с обратным знаком:

$$\pm c = \mp \Delta . \quad (9)$$

Поправку алгебраически складывают с результатом измерений:

$$x_0 = x + (\pm c) . \quad (10)$$

В качестве действительного значения величины при многократных повторных измерениях принимают среднее арифметическое значение:

$$x_0 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (11)$$

Для оценки отклонения отдельных результатов измерения относительно среднего определяют средне квадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (12)$$

Доверительным интервалом $\pm \Delta_r$ называют интервал, который с заданной вероятностью, называемой **доверительной вероятностью** P_d накрывает истинное значение измеряемой величины.

При определении доверительных интервалов необходимо, прежде всего, учитывать, что закон распределения погрешностей, получаемых при проведении многократных измерений, при числе измерений в серии меньше 30, описывается не нормальным законом распределения, а так называемым законом распределения Стьюдента. И, в этих случаях, величину доверительного интервала обычно оценивают по формуле:

$$\Delta_r = t(P_d, n) \cdot \sigma_{\bar{x}}, \quad (13)$$

где $t(P_d, n)$ - так называемый коэффициент Стьюдента.

В таблице Приложения Б приведены значения коэффициентов Стьюдента $t(P_d, n)$ в зависимости от заданной доверительной вероятности и числа проведенных наблюдений n . При выполнении измерений обычно задаются доверительной вероятностью 0,95 или 0,99.

В зависимости от характера проявления, причин возникновения, и возможностей устранения различают разновидности погрешности:

- *систематическая* – остаётся постоянной или изменяется закономерно при повторных измерениях одного и того же параметра;

- *случайная* – изменяется случайным образом при повторных измерениях одного и того же параметра. Значение случайной погрешности заранее не известно, возникает из-за множества не уточнённых факторов, может быть уменьшено обработкой результатов измерений;

- *грубая (промах)* – возникает из-за ошибок оператора, неисправности СИ, резких изменений условий измерений. Грубые погрешности выявляют и устраняют в результате обработки результатов измерений.

Систематическая погрешность имеет составляющие:

- *субъективная* – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора;

- *методическая* – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений;

- *инструментальная* – составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений.

Систематическая погрешность может быть исключена или уменьшена за счёт устранения источников погрешности до начала измерений различными приемами (рандомизация, внесение известных поправок).

В ряде случаев определяют общую погрешность Δ_{Σ} как сумму систематической Δ_c и случайной Δ_0 погрешностей:

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_c + \Delta_0. \quad (14)$$

В зависимости от изменения её величины погрешность измерения может быть:

- *аддитивная* – не изменяется во всём диапазоне измерения;

- *мультипликативная* – изменяется пропорционально измеряемой величине.

В большинстве случаев аддитивная и мультипликативная составляющие действуют одновременно.

В процессе эксплуатации СИ метрологические характеристики и параметры СИ претерпевают изменения. Эти изменения носят случайный монотонный или флуктуирующий характер и приводят к отказам. Важнейший параметр – *надёжность* - характеризует поведение СИ с течением времени и включает понятия:

- *стабильность* – способность сохранять МХ неизменными;

- *безотказность* – свойство непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени;

- *долговечность* – возможность сохранения работоспособности до наступления предельного состояния;

- *ремонтпригодность* – приспособленность к поддержанию работоспособного состояния посредством технического обслуживания и ремонта;

- *сохраняемость* – свойство поддерживать показатели надёжности в течение и после хранения, транспортировки.

9 Правила округления и записи результата измерений

Нормирование пределов допустимых погрешностей средств измерений производится указанием значения погрешностей с одной или двумя значащими цифрами. По этой причине при расчете значений погрешностей измерений также должны быть оставлены только первые одна или две значащие цифры. Для округления используются следующие правила:

1. Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них более 2, и одной значащей цифрой, если первая из них 3 или более.

2. Показание прибора округляется до того же десятичного разряда, которым заканчивается округленное значение абсолютной погрешности.

3. Округление производится в окончательном ответе, промежуточные вычисления выполняют с одной-двумя избыточными цифрами.

Пример 1

- показание прибора 5,361 В;
- вычисленное значение абсолютной погрешности $\pm 0,284$ В;
- округленное значение абсолютной погрешности $\pm 0,26$ В;
- результат измерения $(5,36 \pm 0,26)$ В.

Пример 2

- показание прибора 35,67 мА;
- вычисленное значение абсолютной погрешности $\pm 0,541$ мА;
- округленное значение абсолютной погрешности $\pm 0,5$ мА;
- результат измерения $(35,7 \pm 0,5)$ мА.

Пример 3

- вычисленное значение относительной погрешности $\pm 1,268$ %;
- округленное значение относительной погрешности $\pm 1,3$ %.

Пример 4

- вычисленное значение относительной погрешности $\pm 0,367$ %;
- округленное значение относительной погрешности $\pm 0,4$ %.

10 Метрологическое обеспечение, службы и организации

Метрологическое обеспечение (МО) – установление и применение научных и организационных основ, технических средств, правил, норм, необходимых для достижения единства и требуемой точности измерений. Основная тенденция развития МО – переход от обеспечения единства и требований точности измерений к принципиально новой задаче обеспечения качества измерений.

Качество измерений – совокупность свойств СИ, обеспечивающих получение в установленный срок результатов измерения с требуемой точностью, достоверностью, правильностью, сходимостью и воспроизводимостью.

Точность измерения – степень близости результата измерения к истинному значению измеряемой величины.

Правильность измерения – степень близости систематической погрешности измерения к нулю.

Достоверность измерения – степень близости случайной погрешности к нулю.

Сходимость результатов измерения – близость результатов двух испытаний, полученных одним методом, на идентичных установках, в одной лаборатории.

Воспроизводимость результатов измерения – близость результатов двух испытаний, полученных в разных лабораториях.

МО имеет научную, организационную, нормативную и техническую составляющие. Разработка и проведение мероприятий МО возложено на МС.

Функции МО - обеспечение измерений, испытаний, контроля в целом а также параметров:

- технологических процессов, производств, организаций;
- продукции на всех стадиях её жизненного цикла.

Основные задачи МО:

- установление рациональной номенклатуры измеряемых параметров и оптимальных норм точности измерений при контроле качества продукции;
- технико-экономическое обоснование выбора СИ, установление их рациональной номенклатуры;
- стандартизация, унификация и агрегатирование применяемой контрольно-измерительной техники;
- поверка, метрологическая аттестация и калибровка контрольно-измерительного и испытательного оборудования;
- проведение метрологической экспертизы проектов нормативной, конструкторской и технологической документации;
- подготовка работников соответствующих служб предприятий к выполнению контрольно-измерительных операций.

Государственное управление деятельности по обеспечению единства измерений в России осуществляет Федеральное агентство РФ по техническому регулированию и метрологии, в ведении которой находятся организации:

- *Государственная метрологическая служба (ГМС);*
- *Государственная служба времени и частоты и определения параметров вращения земли (ГСВЧ);*
- *Государственная служба стандартных образцов состава и свойств веществ и материалов (ГССО);*
- *Государственная служба стандартных справочных данных о физических константах и свойствах веществ и материалов (ГСССД).*

Основные задачи Федерального агентства РФ по техническому регулированию и метрологии в области метрологии:

- реализация государственной политики в сфере метрологии, установление и использование стандартов, эталонов, единиц величин;
- осуществление мер по защите прав потребителей и интересов государства в области контроля за соблюдением безопасности товаров (услуг);
- организация функционирования систем обеспечения единства измерений, аккредитации, сбора и анализа научно-технической информации;
- проведение государственного метрологического контроля;

Росстандарт сотрудничает с международными организациями по метрологии:

- *Международное бюро мер и весов (МБМВ);*
- *Генеральная конференция мер и весов (ГКМВ);*
- *Международный комитет мер и весов (МКМВ);*
- *Международная организация законодательной метрологии (МОЗМ);*
- *Международная конференция по измерительной технике и приборостроению (ИМЕКО);*

- *Международная организация по стандартизации (ИСО)* в составе технического комитета «Величины, единицы, обозначения и переводные множители»;
- *Международная электротехническая комиссия (МЭК)*.

Проблемы метрологии в рамках СНГ решает Межгосударственный совет, созданный в соответствии с межправительственным документом «Соглашение о проведении согласованной политики в области стандартизации, метрологии и сертификации».

Государственная метрологическая служба (ГМС) – служба, которая несёт ответственность за метрологическое обеспечение измерений в стране на межотраслевом уровне и осуществляет государственный контроль и надзор. ГМС находится в подчинении Федерального агентства РФ по техническому регулированию и метрологии и имеет в своём составе:

- государственные научно-метрологические центры (ГНМЦ);
- территориальные органы ГМС.

Основные функции ГНМЦ:

- создание, совершенствование, хранение, применение государственных эталонов единиц величин, сличение с международными эталонами;
- выполнение фундаментальных и прикладных научно - исследовательских и опытно-конструкторских работ в области метрологии;
- разработка и совершенствование научных, нормативных, организационных и экономических основ деятельности по метрологии;
- проведение государственных испытаний СИ;
- взаимодействие с метрологическими службами (МС) федеральных органов исполнительной власти, предприятий, организаций;
- информационное обеспечение предприятий и организаций по вопросам метрологии, подготовка и переподготовка.

Метрологические службы государственных органов управления РФ и юридических лиц – службы, создаваемые в соответствии с законом «Об обеспечении единства измерений» в органах государственного управления, на предприятиях и в организациях для реализации МО.

Создание МС обязательно в сферах государственного регулирования единства измерений перечисленных в приложении А.

МС юридических лиц - самостоятельные структурные подразделения, во главе с представителем администрации, аккредитованные органами Федерального агентства РФ по техническому регулированию и метрологии. В состав МС входят калибровочные, поверочные лаборатории, подразделения по обслуживанию и ремонту СИ.

11 Формы государственного регулирования в области обеспечения единства измерений

Государственное регулирование в области обеспечения единства измерений осуществляется в следующих формах:

- 1) утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений;
- 2) поверка средств измерений;

- 3) метрологическая экспертиза;
- 4) государственный метрологический надзор;
- 5) аттестация методик (методов) измерений;
- 6) аккредитация юридических лиц и индивидуальных предпринимателей на выполнение работ и (или) оказание услуг в области обеспечения единства измерений.

12 Государственный метрологический надзор

Государственный метрологический надзор - контрольная деятельность в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, осуществляемая уполномоченными федеральными органами исполнительной власти и заключающаяся в систематической проверке соблюдения установленных законодательством Российской Федерации обязательных требований, а также в применении установленных законодательством Российской Федерации мер за нарушения, выявленные во время надзорных действий.

Государственный метрологический надзор осуществляется за:

- соблюдением обязательных требований в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений к измерениям, единицам величин, а также к эталонам единиц величин, стандартным образцам, средствам измерений при их выпуске из производства, ввозе на территорию Российской Федерации, продаже и применении на территории Российской Федерации;
- наличием и соблюдением аттестованных методик (методов) измерений;
- соблюдением обязательных требований к отклонениям количества фасованных товаров в упаковках от заявленного значения.

Государственный метрологический надзор распространяется на деятельность юридических лиц и индивидуальных предпринимателей, осуществляющих:

- измерения, относящиеся к сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений;
- выпуск из производства предназначенных для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений эталонов единиц величин, стандартных образцов и средств измерений, а также их ввоз на территорию Российской Федерации, продажу и применение на территории Российской Федерации;
- расфасовку товаров.

Юридические лица и индивидуальные предприниматели, осуществляющие выпуск из производства предназначенных для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений эталонов единиц величин, стандартных образцов и средств измерений, а также их ввоз на территорию Российской Федерации и продажу, обязаны уведомлять о данной деятельности федеральный орган исполнительной власти, осуществляющий функции по государственному метрологическому надзору, не позднее трех месяцев со дня ее осуществления. Порядок уведомления устанавливается федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государствен-

ной политики и нормативно-правовому регулированию в области обеспечения единства измерений.

Обязательные требования к отклонениям количества фасованных товаров в упаковках от заявленного значения при их расфасовке устанавливаются техническими регламентами. В технических регламентах также могут содержаться обязательные требования к оборудованию, используемому для расфасовки и контроля расфасовки, правила оценки соответствия отклонения количества фасованных товаров в упаковках от заявленного значения, обязательные требования к упаковке, маркировке или этикеткам фасованных товаров и правилам их нанесения.

Обязанность проведения проверок при осуществлении государственного метрологического надзора возлагается на должностных лиц федеральных органов исполнительной власти, осуществляющих государственный метрологический надзор, и их территориальных органов.

Должностные лица, проводящие проверку, при предъявлении служебного удостоверения и распоряжения федерального органа исполнительной власти, осуществляющего государственный метрологический надзор, о проведении проверки вправе:

- посещать объекты (территории и помещения) юридических лиц и индивидуальных предпринимателей в целях осуществления государственного метрологического надзора во время исполнения служебных обязанностей;
- получать документы и сведения, необходимые для проведения проверки.

Должностные лица, осуществляющие государственный метрологический надзор, обязаны:

- проверять соответствие используемых единиц величин единицам величин, допущенным к применению в Российской Федерации;
- проверять состояние и применение эталонов единиц величин, стандартных образцов и средств измерений в целях установления их соответствия обязательным требованиям;
- проверять наличие и соблюдение аттестованных методик (методов) измерений;
- проверять соблюдение обязательных требований к измерениям и обязательных требований к отклонениям количества фасованных товаров в упаковках от заявленного значения;
- проверять соблюдение установленного порядка уведомления о своей деятельности юридическими лицами и индивидуальными предпринимателями;
- соблюдать государственную, коммерческую, служебную и иную охраняемую законом тайну.

При выявлении нарушений должностное лицо, осуществляющее государственный метрологический надзор, обязано:

- запрещать выпуск из производства, ввоз на территорию Российской Федерации и продажу предназначенных для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений стандартных образцов и средств измерений неутвержденных типов или предназначенных для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений стандартных

образцов и средств измерений, не соответствующих обязательным требованиям (за исключением выпуска из производства и ввоза на территорию Российской Федерации стандартных образцов или средств измерений, предназначенных для проведения испытаний стандартных образцов или средств измерений в целях утверждения типа);

- запрещать применение стандартных образцов и средств измерений неутвержденных типов или стандартных образцов и средств измерений, не соответствующих обязательным требованиям, а также не поверенных средств измерений при выполнении измерений, относящихся к сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений;

- наносить на средства измерений знак непригодности в случаях, когда средство измерений не соответствует обязательным требованиям;

- давать обязательные к исполнению предписания и устанавливать сроки устранения нарушений установленных законодательством Российской Федерации обязательных требований;

- в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, направлять материалы о нарушениях требований законодательства Российской Федерации об обеспечении единства измерений в судебные и следственные органы, а также в федеральный орган исполнительной власти, осуществляющий аккредитацию в области обеспечения единства измерений;

- применять иные меры в соответствии с законодательством Российской Федерации.

Форма знака непригодности средств измерений и порядок его нанесения устанавливаются федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в области обеспечения единства измерений.

Руководитель поверенного предприятия на основе акта проверки обязан утвердить сроки и план организационно-технических мероприятий по устранению выявленных нарушений.

13 Утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений

Утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений - документально оформленное в установленном порядке решение о признании соответствия типа стандартных образцов или типа средств измерений метрологическим и техническим требованиям (характеристикам) на основании результатов испытаний стандартных образцов или средств измерений в целях утверждения типа;

Тип стандартных образцов или тип средств измерений, применяемых в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, подлежит обязательному утверждению. При утверждении типа средств измерений устанавливаются показатели точности, интервал между поверками средств измерений, а также методика поверки данного типа средств измерений.

Государственные испытания СИ – обязательные испытания СИ в сферах распространения государственного метрологического контроля и надзора с последующим утверждением их типа.

Решение об утверждении типа стандартных образцов или типа средств измерений принимается федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по оказанию государственных услуг и управлению государственным имуществом в области обеспечения единства измерений, на основании положительных результатов испытаний стандартных образцов или средств измерений в целях утверждения типа.

Утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений удостоверяется свидетельством об утверждении типа стандартных образцов или типа средств измерений, выдаваемым федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по оказанию государственных услуг и управлению государственным имуществом в области обеспечения единства измерений. В течение срока действия свидетельства об утверждении типа средств измерений интервал между поверками средств измерений может быть изменен только федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по оказанию государственных услуг и управлению государственным имуществом в области обеспечения единства измерений.

На каждый экземпляр средств измерений утвержденного типа, сопроводительные документы к указанным средствам измерений и на сопроводительные документы к стандартным образцам утвержденного типа наносится знак утверждения их типа. Конструкция средства измерений должна обеспечивать возможность нанесения этого знака в месте, доступном для просмотра. Если особенности конструкции средства измерений не позволяют нанести этот знак непосредственно на средство измерений, он наносится на сопроводительные документы.

Испытания стандартных образцов или средств измерений в целях утверждения типа проводятся юридическими лицами, аккредитованными в установленном порядке в области обеспечения единства измерений.

Сведения об утвержденных типах стандартных образцов и типах средств измерений вносятся в Федеральный информационный фонд по обеспечению единства измерений.

Юридические лица и индивидуальные предприниматели, осуществляющие разработку, выпуск из производства, ввоз на территорию Российской Федерации, продажу и использование на территории Российской Федерации не предназначенных для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений стандартных образцов и средств измерений, могут в добровольном порядке представлять их на утверждение типа стандартных образцов или типа средств измерений.

14 Поверка средств измерений

Поверка средств измерений (далее также - поверка) - совокупность операций, выполняемых в целях подтверждения соответствия средств измерений метрологическим требованиям.

Поверку проводят в соответствии с методиками поверки, требованиями, изложенными в соответствующих метрологических инструкциях. Основной МХ, определяемой при поверке, является погрешность, величина которой не должна превышать допустимое значение. При поверке чаще всего используют методы:

- непосредственного сравнения измеряемых величин и величин, воспроизводимых рабочими эталонами;
- непосредственного сличения показаний поверяемого и эталонного приборов при одновременном измерении одной и той же величины.

Поверка бывает первичная, периодическая, внеочередная, экспертная.

Первичная поверка – проводится при выпуске прибора.

Периодическая поверка – выполняется через определённые промежутки времени в процессе эксплуатации или хранения прибора.

Внеочередная проверка – проходит до наступления срока периодической после длительного хранения, повторной настройки, ударного воздействия.

Экспертная поверка – организуется органом ГМС при возникновении спорных ситуаций по МХ, исправности, пригодности СИ к применению.

Средства измерений, предназначенные для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, до ввода в эксплуатацию, а также после ремонта подлежат первичной поверке, а в процессе эксплуатации - периодической поверке.

Требования к организации и проведению поверки СИ устанавливают правила ПР 50.2.006-94.

Применяющие средства измерений в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений юридические лица и индивидуальные предприниматели обязаны своевременно представлять эти средства измерений на поверку.

Поверку средств измерений осуществляют аккредитованные в установленном порядке в области обеспечения единства измерений юридические лица и индивидуальные предприниматели.

Правительством Российской Федерации устанавливается перечень средств измерений, поверка которых осуществляется только аккредитованными в установленном порядке в области обеспечения единства измерений государственными региональными центрами метрологии.

Результаты поверки средств измерений удостоверяются знаком поверки и (или) свидетельством о поверке. Конструкция средства измерений должна обеспечивать возможность нанесения знака поверки в месте, доступном для просмотра. Если особенности конструкции или условия эксплуатации средства измерений не позволяют нанести знак поверки непосредственно на средство измерений, он наносится на свидетельство о поверке.

Порядок проведения поверки средств измерений, требования к знаку поверки и содержанию свидетельства о поверке устанавливаются федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в области обеспечения единства измерений.

Сведения о результатах поверки средств измерений, предназначенных для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, передаются в Федеральный информационный фонд по обеспечению единства измерений проводящими поверку средств измерений юридическими лицами и индивидуальными предпринимателями.

Средства измерений, не предназначенные для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, могут подвергаться поверке в добровольном порядке.

Правила ПР 50.2.011-94 устанавливают порядок ведения в РФ *Государственного реестра СИ*, который предназначен для:

- учёта выданных сертификатов об утверждении типа СИ;
- создания централизованного информационного фонда о СИ, допущенных к производству, выпуску в обращение и применению в РФ;
- учёта типовых программ испытаний СИ;
- организации информационного обслуживания заинтересованных лиц.

15 Калибровка средств измерений

Калибровка (калибровочные работы) – совокупность операций, выполняемых с целью определения и подтверждения действительных значений МХ и пригодности к применению СИ, не подлежащего государственному надзору.

Для проведения калибровки создана *Российская система калибровки (РСК)* – совокупность субъектов деятельности и калибровочных работ, направленных на обеспечение единства измерений в сферах, не подлежащих государственному регулированию обеспечения единства измерений. Такие СИ могут в добровольном порядке подвергаться калибровке.

Основные направления деятельности РСК:

- регистрация органов, осуществляющих аккредитацию МС юридических лиц на право проведения калибровочных работ;
- установление основных принципов и правил РСК;
- аккредитация МС юридических лиц на право проведения калибровки;
- проведение калибровочных работ;
- установление основных принципов и правил РСК;
- организационное, методическое и информационное обеспечение РСК;
- инспекционный контроль за проведением калибровочных работ.

Калибровка средств измерений выполняется с использованием эталонов единиц величин, прослеживаемых к государственным первичным эталонам соответствующих единиц величин, а при отсутствии соответствующих государственных первичных эталонов единиц величин - к национальным эталонам единиц величин иностранных государств.

Выполняющие калибровку средств измерений юридические лица и индивидуальные предприниматели в добровольном порядке могут быть аккредитованы в области обеспечения единства измерений.

Результаты калибровки средств измерений, выполненной аккредитованными в установленном порядке в области обеспечения единства измерений юри-

дическими лицами или индивидуальными предпринимателями, могут быть использованы при поверке средств измерений в порядке, установленном федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в области обеспечения единства измерений.

Организации, проводящие калибровочные работы, должны иметь:

- поверенные средства калибровки – эталоны, установки, другие СИ, применяемые для передачи размера единиц калибруемым СИ;
- документы, регламентирующие организацию и проведение калибровочных работ;
- квалифицированный персонал, помещение, удовлетворяющее нормативным требованиям.

Результаты калибровки удостоверяют калибровочным знаком, наносимым на СИ, свидетельством о калибровке, записью в эксплуатационных документах.

16 Метрологическая экспертиза

Метрологическая экспертиза - анализ и оценка правильности установления и соблюдения метрологических требований применительно к объекту, подвергаемому экспертизе. Метрологическая экспертиза проводится в обязательном (обязательная метрологическая экспертиза) или добровольном порядке.

Содержащиеся в проектах нормативных правовых актов Российской Федерации требования к измерениям, стандартным образцам и средствам измерений подлежат обязательной метрологической экспертизе. Заключение обязательной метрологической экспертизы в отношении указанных требований рассматриваются принимающими эти акты федеральными органами исполнительной власти. Обязательная метрологическая экспертиза содержащихся в проектах нормативных правовых актов Российской Федерации требований к измерениям, стандартным образцам и средствам измерений проводится государственными научными метрологическими институтами.

Обязательная метрологическая экспертиза стандартов, продукции, проектной, конструкторской, технологической документации и других объектов проводится также в порядке и случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации. Указанную экспертизу проводят аккредитованные в установленном порядке в области обеспечения единства измерений юридические лица и индивидуальные предприниматели.

Порядок проведения обязательной метрологической экспертизы содержащихся в проектах нормативных правовых актов Российской Федерации требований к измерениям, стандартным образцам и средствам измерений устанавливается федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в области обеспечения единства измерений.

В добровольном порядке может проводиться метрологическая экспертиза продукции, проектной, конструкторской, технологической документации и дру-

гих объектов, в отношении которых законодательством Российской Федерации не предусмотрена обязательная метрологическая экспертиза.

17 Анализ и оценка состояния измерений

Анализ состояния измерений – анализ состояния измерений, испытаний и контроля на предприятии с целью установления соответствия достигнутого уровня МО определённым требованиям и разработка на этой основе предложений по его улучшению.

В процессе анализа устанавливают:

- влияние состояния измерений, контроля и испытаний на основные технико-экономические показатели деятельности предприятия;
- наличие и потребность в необходимых нормативных документах;
- оснащённость предприятия современным КИО и потребность в нём;
- состояние организационной структуры и деятельности МС, потребность в специалистах-метрологах;
- техническое и метрологическое состояние КИО, обеспеченность ремонтом, поверкой, калибровкой.

Работу по анализу состояния измерений на предприятии проводят под руководством МС федерального органа исполнительной власти, юридического лица. На предприятии анализ осуществляют добровольно с периодичностью раз в два года или в обязательном порядке при аттестации производства, сертификации систем качества, аккредитации испытательных и метрологических лабораторий. Результаты оформляют актом.

В случае необходимости установления соответствия условий выполнения измерений требованиям Российского законодательства в области обеспечения единства измерений проводят оценку состояния измерений по МИ 2427-97.

Эту оценку состояния измерений осуществляют для:

- установления соответствия достигнутого уровня метрологического обеспечения измерений современным требованиям;
- официального удостоверения наличия в лаборатории условий, необходимых для выполнения измерений (например, для получения лицензии на вид деятельности и т.п.).

При фиксировании в акте оценки наличия условий для выполнения измерений в закреплённой за лабораторией области деятельности, ответственные за проведение оценки, оформляет свидетельство о состоянии измерений на предприятии со сроком действия до 5 лет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практически во всех сферах деятельности человека интенсивно применяют результаты измерений, испытаний, исследований. Важность метрологической деятельности в стране подтверждена тем, что Федеральный закон Российской Федерации «Об обеспечении единства измерений», принят в пакете с законами «О защите прав потребителей». ФЗ «Об обеспечении единства измерений» устанавливает правовые основы обеспечения единства измерений в стране, регламентирует отношения государственных органов управления с юридическими и физическими лицами по вопросам, связанным с измерениями.

В экономически развитых странах расходы на операции, связанные с измерениями, достигают 15% затрат общественного труда. Перспективные направления развития метрологии составляют разработка принципиально новых средств измерений, улучшение метрологических характеристик и методик выполнения измерений, совершенствование эталонной базы. Широкое применение получают цифровые методы обработки результатов измерений. Намечен переход к эталонам единиц физических величин, основанным на квантовых эффектах. Такие эталоны не подвержены влиянию атмосферных условий, времени, географической широты местности.

Метрологические организации и службы Российской Федерации под руководством Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии ведут активную работу по совершенствованию законодательной базы метрологии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Нормативно-правовые основы метрологии.
2. Физические свойства, величины. Измерение ФВ.
3. Системы единиц физических величин. Система SI.
4. Виды, методы измерений.
5. Средства измерений.
6. Метрологические характеристики СИ.
7. Погрешности измерений.
8. Метрологическое обеспечение, службы и организации.
9. Международные организации по метрологии.
10. Поверка, калибровка СИ.
11. Государственный метрологический надзор.
12. Государственные испытания, утверждение типа СИ.
13. Метрологическая экспертиза.
14. Анализ и оценка состояния измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегеря В.В. Метрология, стандартизация, сертификация: Учебное пособие. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Логос, 2010. – 560 с.: ил.
2. Лифиц И.М. Стандартизация, метрология и сертификация: Учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт-Издат, 2009. – 335 с.
3. Димов Ю.В. Метрология, стандартизация и сертификация. Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2010. – 464 с.: ил.
4. Яблонский О.П., Иванова В.А. Основы стандартизации, метрологии, сертификации: Учебник. – Ростов на/Д: Феникс, 2010. – 448 с.
5. Радкевич Я.М., Лактионов Б.И., Схиртладзе А.Г. Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. для вузов - 2-е изд., доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 791 с.
6. Крылова Г.Д. Основы стандартизации, сертификации, метрологии: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 711 с.
7. Никифоров А.Д., Бакиев Т.А. Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. пособие. – М.: Высш. Школа, 2002. – 422 с. : ил.
8. Басаков М.И. Сертификации продукции и услуг с основами стандартизации и метрологии: Учебное пособие. Издание 2-е, испр. и доп. – Ростов на /Д: издательский центр «МарТ», 2002. – 256 с.
9. Ранеев Г.Г., Тарасенко А.П. Методы и средства измерений: Учебник для вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 336 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)
**Сферы государственного регулирования
обеспечения единства измерений**

Сферы государственного регулирования обеспечения единства измерений распространяется на измерения, на которые установлены обязательные требования и которые выполняются при:

- 1) осуществлении деятельности в области здравоохранения;
- 2) осуществлении ветеринарной деятельности;
- 3) осуществлении деятельности в области охраны окружающей среды;
- 4) осуществлении деятельности по обеспечению безопасности при чрезвычайных ситуациях;
- 5) выполнении работ по обеспечению безопасных условий и охраны труда;
- 6) осуществлении производственного контроля за соблюдением установленных законодательством Российской Федерации требований промышленной безопасности к эксплуатации опасного производственного объекта;
- 7) осуществлении торговли и товарообменных операций, выполнении работ по расфасовке товаров;
- 8) выполнении государственных учетных операций;
- 9) оказании услуг почтовой связи и учете объема оказанных услуг электро-связи операторами связи;
- 10) осуществлении деятельности в области обороны и безопасности государства;
- 11) осуществлении геодезической и картографической деятельности;
- 12) осуществлении деятельности в области гидрометеорологии;
- 13) проведении банковских, налоговых и таможенных операций;
- 14) выполнении работ по оценке соответствия промышленной продукции и продукции других видов, а также иных объектов установленным законодательством Российской Федерации обязательным требованиям;
- 15) проведении официальных спортивных соревнований, обеспечении подготовки спортсменов высокого класса;
- 16) выполнении поручений суда, органов прокуратуры, государственных органов исполнительной власти;
- 17) осуществлении мероприятий государственного контроля (надзора).

К сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений относятся также измерения, предусмотренные законодательством Российской Федерации о техническом регулировании.

Сфера государственного регулирования обеспечения единства измерений распространяется также на единицы величин, эталоны единиц величин, стандартные образцы и средства измерений, к которым установлены обязательные требования.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)
Значения коэффициентов Стьюдента $t(P_d, n)$.

Таблица А.1 - Значения коэффициентов Стьюдента $t(P_d, n)$

n	P_d							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
3	0,82	1,06	1,34	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93
4	0,77	0,98	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,74	0,94	1,19	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
6	0,73	0,92	1,16	1,48	2,02	2,62	3,37	4,03
7	0,72	0,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
8	0,71	0,90	1,12	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50
9	0,71	0,89	1,11	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
10	0,70	0,88	1,10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
16	0,69	0,87	1,07	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
25	0,69	0,86	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому
комплексу

С.А. Упоров



МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ (КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

ЧАСТЬ 2

«СТАНДАРТИЗАЦИЯ»

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Автор: Глушкова Т.А., к.т.н.

Одобен на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 05.10. 2020

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

(название факультета)

Председатель

Бондарев В. И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 13.10. 2020

(Дата)

Екатеринбург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 Правовые основы стандартизации.....	5
2 Основные понятия.....	5
3 Цели, задачи стандартизации.....	7
4 Принципы стандартизации.....	8
5 Национальный орган Российской Федерации по стандартизации.....	9
6 Государственный контроль (надзор) за соблюдением требований технических регламентов.....	11
7 Национальная система стандартизации.....	13
8 Международные, региональные организации по стандартизации.....	19
9 Информационное обеспечение стандартизации.....	23
10 Работы по стандартизации.....	24
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	29
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	29
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	29
Приложение А Перечень систем стандартов.....	30
Приложение Б Нормативные документы по стандартизации.....	31
Приложение В Общероссийские классификаторы.....	33

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития мирового сообщества характерен:

- высокими темпами интенсификации производства;
- применением широкого спектра машин, аппаратов, приборов, технологической оснастки, оборудования и инструмента;
- использованием широкой номенклатуры новых веществ, новейших материалов и современных технологий;
- применением локальных и глобальных информационных систем.
- расширением международных экономических и торговых связей.

В этих условиях в экономически развитых странах уделяют огромное внимание стандартизации как важнейшему направлению совершенствования технического уровня и качества продукции на всех стадиях её жизненного цикла - научные разработки, проектирование, производство, упаковка и маркировка, хранение, транспортировка, реализация, эксплуатация, утилизация.

Стандартизация охватывает разработку и применение норм, правил, которые отражают действие объективных технико-экономических законов и оказывают в государственном и мировом масштабах существенное позитивное влияние:

- развитие всех отраслей экономики;
- совершенствование управления экономикой и предприятиями;
- увеличение промышленного производства и рост ВВП;
- управление качеством продукции, квалификацией персонала;
- улучшение использования основных фондов, природных богатств;
- разработку и внедрение энергосберегающих, ресурсосберегающих, малоотходных технологий;
- состояние окружающей среды;
- расширение международных экономических связей и торговли.

Законодательную основу стандартизации в Российской Федерации составляют федеральные законы:

- «О защите прав потребителей» от 07.02.92;
- «Об обеспечении единства измерений» № 102-ФЗ от 26.06.2008;
- «О техническом регулировании» от 27.12.02;
- отраслевого характера в части, касающейся стандартизации.

Дальнейшее развитие экономики России связано с развитием промышленного производства, расширением международной торговли и экономического сотрудничества, увеличением количества и технического совершенства товаров, расширением спектра и повышением качества услуг на базе широкого применения международных и национальных стандартов.

Стандартизация - деятельность по установлению правил и характеристик в целях их добровольного многократного использования, направленная на достижение упорядоченности в сферах производства и обращения продукции и повышение конкурентоспособности продукции, работ или услуг.

1 Правовые основы стандартизации

Отношения в области стандартизации регулируют и обеспечивают законодательные, нормативные и другие акты РФ:

- Федеральный закон «О техническом регулировании»;
- закон РФ «О защите прав потребителей»;
- Федеральный закон РФ «Об обеспечении единства измерений»;
- федеральные законы отраслевого характера;
- указы Президента РФ;
- нормативные акты (постановления, распоряжения) Правительства РФ;
- подзаконные акты, направленные на решение социально - экономических задач, предусматривающих использование стандартизации;
- приказы национального органа РФ по стандартизации.

В целях усиления роли стандартизации в научно-техническом прогрессе, повышения качества продукции, экономии материально - энергетических ресурсов в РФ действует *система* Стандартизации в Российской Федерации.

Система – комплекс взаимоувязанных правил и положений, определяющих:

- цели и задачи стандартизации;
- структуру органов, подразделений по стандартизации, их права и обязанности;
- организацию и методику проведения работ по стандартизации во всех отраслях;
- порядок разработки, оформления, издания, внедрения стандартов и другой нормативно-технической документации, формы контроля их соблюдения.

ГОСТ Р 1.0-2004 Стандартизация в Российской Федерации. Основные положения.

ГОСТ Р 1.2-2004 Стандартизация в Российской Федерации. Стандарты национальные Российской Федерации. Правила разработки, утверждения, обновления и отмены.

ГОСТ Р 1.4 -2004 Стандарты организаций. Общие положения.

ГОСТ Р 1.5 -2004 Стандартизация в Российской Федерации. Стандарты национальные Российской Федерации. Правила построения, изложения, оформления и обозначения.

ГОСТ Р 1.8 -2004 Стандартизация в Российской Федерации. Стандарты межгосударственные. Правила проведения в Российской Федерации работ по разработке, применению, обновлению и прекращению применения

ГОСТ Р 1.10 -2004 Стандартизация в Российской Федерации. Правила стандартизации и рекомендации по стандартизации. Порядок разработки, утверждения, изменения, пересмотра и отмены.

ГОСТ Р 1.12-2004 Стандартизация в Российской Федерации. Термины и определения.

2 Основные понятия

Гармонизация стандарта – приведение его содержания в соответствие с другим стандартом (региональным, международным).

Государственный стандарт (ГОСТ Р) – национальный стандарт, принятый федеральным органом исполнительной власти РФ по стандартизации или строительству.

Классификатор – документ, содержащий систематизированный перечень кодов и наименований объектов классификации и классифицированных группировок, разработанный и утверждённый в установленном порядке, обязательный для применения на различных уровнях.

Международный стандарт – стандарт, принятый международной организацией по стандартизации.

Методические инструкции (МИ) – нормативные документы методического содержания, разработанные организациями, подведомственными национальному органу по стандартизации.

Национальный стандарт – стандарт, утверждённый национальным органом по стандартизации.

Нормативный документ – документ, устанавливающий правила, общие принципы или характеристики, касающиеся различных видов деятельности или их результатов, подзаконный акт, принятый Правительством РФ.

Область стандартизации – совокупность объектов стандартизации.

Объект стандартизации – продукция, работа, процесс или услуга, для которой разрабатывают требования, характеристики, параметры или правила.

Правила (ПР) – нормативный документ, устанавливающий обязательные для применения организационные или общетехнические положения, порядки, методы выполнения работ, в том числе межгосударственные (ПМГ).

Проект стандарта – предлагаемый разработчиком проект нормативного документа, предназначенный для широкого обсуждения, голосования и принятия в качестве стандарта.

Региональный стандарт – стандарт, принятый региональной организацией по стандартизации и доступный широкому кругу пользователей.

Регламент – документ, содержащий обязательные правовые нормы, принятый органом исполнительной власти.

Рекомендации (Р) – нормативный документ, содержащий добровольные для применения организационные или общетехнические положения, порядки, методы выполнения работ, в том числе межгосударственные (РМГ).

Руководящие документы (РД) – нормативные документы методического содержания, разработанные организациями, подведомственными национальному органу по стандартизации.

Стандарт – документ, в котором в целях добровольного многократного использования устанавливаются характеристики продукции, правила осуществления процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации продукции, условия выполнения работ или оказания услуг. Стандарт может со-

держат требования к терминологии, маркировке, этикеткам и правилам их нанесения.

Стандарт научно-технических, инженерных обществ (СТО) - стандарт, разработанный общественным объединением.

Технические условия (ТУ) - нормативный документ, устанавливающий технические требования, которым должна удовлетворять продукция, процесс или услуга.

Технический регламент (ТР) – документ, содержащий технические требования непосредственно или путём ссылки на стандарт, технические условия, либо путём включения содержания этих документов.

3 Цели, принципы, задачи стандартизации

Стандартизация как деятельность по установлению правил и характеристик в сферах производства и обращения продукции имеет общие и конкретные цели.

Стандартизация осуществляется *в целях*:

- повышение уровня безопасности жизни и здоровья граждан, имущества физических и юридических лиц, государственного и муниципального имущества, объектов с учетом риска возникновения чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера, повышение уровня экологической безопасности, безопасности жизни и здоровья животных и растений;

- обеспечение конкурентоспособности и качества продукции (работ, услуг), единства измерений, рационального использования ресурсов, взаимозаменяемости технических средств (машин и оборудования, их составных частей, комплектующих изделий и материалов), технической и информационной совместимости, сопоставимости результатов исследований (испытаний) и измерений, технических и экономико-статистических данных, проведения анализа характеристик продукции (работ, услуг), исполнения государственных заказов, добровольного подтверждения соответствия продукции (работ, услуг);

- содействие соблюдению требований технических регламентов;

- создание систем классификации и кодирования технико-экономической и социальной информации, систем каталогизации продукции (работ, услуг), систем обеспечения качества продукции (работ, услуг), систем поиска и передачи данных, содействие проведению работ по унификации.

Конкретные цели стандартизации относят к:

- определённой области материальной, нематериальной деятельности;
- отрасли производства продукции, оказания услуг;
- предприятию, фирме;
- виду продукции.

4 Принципы стандартизации

Стандартизацию осуществляют в соответствии с *принципами*:

- добровольного применения стандартов;
- максимального учёта при разработке стандартов законных интересов заинтересованных лиц;

- применения международного стандарта как основы разработки национального стандарта, за исключением случаев, когда это невозможно вследствие несоответствия требований международных стандартов климатическим и географическим особенностям РФ, техническим и (или) технологическим особенностям или по иным основаниям, либо РФ выступала против принятия международного стандарта или отдельного его положения;

- недопустимости создания препятствий производству и обращению продукции, выполнению работ и оказанию услуг в большей степени, чем это минимально необходимо для выполнения целей стандартизации;

- недопустимости установления таких стандартов, которые противоречат требованиям ТР;

- обеспечения условий для единообразного применения стандартов.

5 Документы в области стандартизации

К документам по стандартизации, используемым в РФ, относят:

- национальные стандарты;
- правила стандартизации;
- нормы и рекомендации в области стандартизации;
- применяемые в установленном порядке классификации, общероссийские классификаторы технико-экономической и социальной информации;
- стандарты организаций;
- своды правил.

Объектами национальных стандартов могут быть:

- характеристики продукции;
- правила выполнения технических документов;
- правила осуществления процессов постановки на производство, хранения, перевозок, реализации, утилизации;
- правила оказания услуг, выполнения работ;
- терминология в различных областях деятельности;
- требования к маркировке продукции и тары, способам упаковки;
- принципы, нормы, правила в области организации деятельности предприятий.

Объектами стандартов организаций могут быть:

- характеристики продукции;
- принципы, нормы, правила в области различных сторон деятельности предприятия, организации.

Важнейшие, перспективные задачи стандартизации:

- обеспечение взаимопонимания между разработчиком, изготовителем, продавцом и заказчиком, покупателем, потребителем;
- установление оптимальных требований к номенклатуре, качеству продукции в интересах потребителя, государства;
- определение требований по совместимости (конструктивной, электрической, электромагнитной, программной, информационной) и взаимозаменяемости продукции;

- унификация на основе применения параметрических и типоразмерных рядов, базовых конструкций, конструктивно-унифицированных узлов, блочно-модульных составных частей изделий;

- нормативное обеспечение межгосударственных и национальных социально-экономических и научно-технических проектов, инфраструктурных комплексов (транспорт, связь, информационные системы, оборона страны, охрана окружающей среды, безопасность населения);

- определение метрологических норм, правил, положений, требований;

- установление требований к современным ресурсосберегающим и малоотходным технологиям;

- создание и ведение систем классификации, кодирования;

- разработка, внедрение и ведение систем каталогизации для обеспечения потребителей информацией о номенклатуре и технических характеристиках товаров, услуг, процессов;

- содействие выполнению законодательства РФ средствами технического регулирования.

В зависимости от того, участники какого географического, экономического, политического региона мира принимают стандарт, различают уровни стандартизации:

- *международный;*

- *региональный;*

- *национальный;*

- *административно-территориальный.*

В мировом сообществе имеет место тенденция гармонизации национальных стандартов с международными стандартами, которая отвечает интересам экономически развитых и развивающихся стран.

5 Национальный орган Российской Федерации по стандартизации

Национальный орган по стандартизации – *Росстандарт* (ранее *Федеральное агентство Российской Федерации по техническому регулированию и метрологии*, а до 2004 г. *Госстандарт РФ*), входящее в состав Министерства промышленности и энергетики РФ, - является органом государственной исполнительной власти по техническому регулированию, осуществляющим межотраслевую координацию и функциональное регулирование в области технического регулирования, стандартизации, оценки соответствия, метрологии.

В структуру *Росстандарта* входят управления:

- метрологии и надзора;

- технического регулирования и стандартизации;

- развития, информационного обеспечения и аккредитации;

- экономики, бюджетного планирования и госсобственности;

- международного и регионального сотрудничества.

Основные направления деятельности национального органа по стандартизации:

- научно-техническое;

- организационное;
- представительское.

Координацию работ по техническому регулированию, стандартизации, оценке соответствия в области строительства, архитектуры, производства строительных материалов и в жилищно-коммунальном хозяйстве осуществляет *Федеральное агентство Российской Федерации по строительству и ЖКХ* (до 2004 г. Госстрой РФ).

Основные функции национального органа по стандартизации:

- утверждение национальных стандартов;
- принятие программ разработки национальных стандартов;
- обеспечение соответствия национальной системы стандартизации интересам экономики, состоянию материально-технической базы;
- содействие научно-техническому прогрессу;
- осуществление учёта национальных стандартов, правил стандартизации, норм и рекомендаций, обеспечение их доступности заинтересованным лицам;
- создание технических комитетов (ТК) по стандартизации и координация их деятельности;
- организация опубликования национальных стандартов, их распространение;
- участие в работе, представление прав и защита интересов РФ в международных организациях при создании международных стандартов;
- утверждение знака соответствия национальным стандартам.

Национальному органу по стандартизации предоставлены права:

- координации деятельности государственных органов управления, касающейся технического регулирования, стандартизации, оценки соответствия, метрологии;
- проведения государственного контроля (надзора) за соблюдением требований ТР;
- принятия мер по запрещению выпуска и реализации продукции, изготовленной с нарушением требований ТР;
- организации профессиональной подготовки и переподготовки кадров в области технического регулирования;
- издания научно-технических журналов, справочников и другой литературы по вопросам технического регулирования и управления качеством.

ТК - постоянный рабочий орган *Росстандарта* в области стандартизации, специализированный по объектам. В ТК на паритетных началах и добровольной основе входят представители:

- федеральных органов исполнительной власти;
- научных организаций, проектно-конструкторских учреждений;
- производственных предприятий, фирм;
- инженерных и научных обществ;
- объединений предпринимателей и обществ по защите прав потребителей.

Основные функции ТК:

- определение концепций развития стандартизации;
- составление проектов новых стандартов и обновление действующих;

- оказание научно-методической помощи организациям, разрабатывающим стандарты и применяющим нормативные документы;
- привлечение к деятельности по стандартизации союзов предпринимателей и обществ потребителей;
- проведение гармонизации отечественных стандартов с международными стандартами;
- подготовка обоснованных позиций РФ для голосования по проектам стандартов в международных организациях;
- проведение и участие в работе заседаний международных организаций по стандартизации.

Заседания ТК по стандартизации являются открытыми.

Материалы заседаний подлежат опубликованию в аналоговой форме (специальные печатные издания, средства массовой информации) и электронно-цифровой форме (цифровые информационные системы общего пользования), доступны для заинтересованных лиц.

6 Государственный контроль (надзор) за соблюдением требований технических регламентов

Государственный контроль (надзор) за соблюдением ТР осуществляют:

- федеральные органы исполнительной власти;
- органы исполнительной власти субъектов РФ;
- государственные учреждения, уполномоченные в соответствии с законодательством РФ;
- должностные лица органов государственного контроля (надзора);
- государственные инспекторы. Главный государственный инспектор – руководитель *Росстандарта*.

Государственный контроль (надзор) должностные лица осуществляют путём проведения плановых и внеплановых проверок. При составлении планов учитывают:

- целевые задания и приоритетные направления проверок;
- информацию потребителей, наличие рекламаций;
- сведения реестров о продукции, прошедшей сертификацию.

Объекты государственного контроля (надзора):

- продукция;
- процессы производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации.

Проведение проверок органы государственного контроля (надзора) осуществляют с применением правил и методов исследований (испытаний) и измерений, разработанных в соответствующих ТР.

Органы государственного контроля (надзора) имеют право:

- требовать от изготовителя (продавца) предъявления декларации о соответствии или сертификата соответствия требованиям ТР, если применение таких документов предусмотрено соответствующим ТР;

- осуществлять мероприятия государственного контроля (надзора) за соблюдением требований ТР в порядке, установленном законодательством;
- принимать мотивированное решение о запрете передачи продукции на реализацию, полном или частичном (в зависимости от характера обнаруженных нарушений) приостановлении процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации, утилизации, если иными мерами невозможно устранить нарушения требований ТР;
- приостановить или прекратить действие декларации о соответствии или сертификата соответствия;
- привлекать изготовителя (исполнителя, продавца) к ответственности, предусмотренной законодательством РФ (если нарушения привели к причинению вреда здоровью человека, то к виновным может быть применено уголовное наказание, предусмотренное статьёй 238 УК РФ);
- принимать иные предусмотренные законодательством РФ меры в целях недопущения вреда.

Органы государственного контроля (надзора) обязаны:

- проводить в ходе мероприятий по государственному контролю (надзору) разъяснительную работу о техническом регулировании, информировать изготовителя (продавца) о существующих ТР;
- соблюдать коммерческую или иную охраняемую законом тайну;
- соблюдать порядок осуществления мероприятий по государственному контролю (надзору) и оформления результатов проверок;
- принимать на основании результатов проверок меры по устранению последствий нарушений требований ТР;
- направлять информацию о несоответствии продукции требованиям ТР изготовителю (продавцу), покупателю (потребителю).

Таким образом, в зависимости от характера нарушений изготовителем (продавцом) требований ТР орган государственного контроля (надзора) принимает решение:

- выдать предписания об устранении нарушения;
- запретить полностью или частично передачу продукции в обращение;
- приостановить или прекратить действие декларации о соответствии или сертификата соответствия.

За нарушение требований ТР, неисполнение предписаний органа государственного контроля (надзора) изготовитель (исполнитель, продавец) несёт ответственность в соответствии с законодательством РФ.

Если в результате несоответствия продукции требованиям ТР причинён вред жизни или здоровью граждан, имуществу физических или юридических лиц, государственному или муниципальному имуществу, окружающей среде, жизни или здоровью животных и растений или возникла угроза причинения такого вреда, то виновный обязан возместить причинённый вред и принять меры в целях недопущения такого вреда. Обязанность возместить причинённый вред не может быть ограничена договором или заявлением одной из сторон.

Изготовитель (исполнитель, продавец), которому стало известно о несоответствии выпущенной в обращение продукции требованиям ТР, обязан сообщить об

этом в орган государственного контроля (надзора) в течение десяти дней с момента получения такой информации.

Лица, которые не имеют отношения к изготовлению и реализации продукции (приобретатель, потребитель), вправе направлять информацию о несоответствии продукции требованиям ТР в орган государственного контроля (надзора) лично или письменно (индивидуально или коллективно).

Изготовитель (продавец) в течение десяти дней с момента получения информации о несоответствии продукции требованиям ТР обязан провести проверку достоверности полученной информации. При подтверждении достоверности полученной информации изготовитель (продавец) обязан:

- разработать программу мероприятий по предотвращению причинения вреда. Программа должна включать в себя мероприятия по информированию приобретателя о наличии угрозы причинения вреда;

- устранить недостатки, при необходимости объявить отзыв продукции. Устранение недостатков, отзыв продукции, доставка продукции к месту устранения недостатков и обратно осуществляет изготовитель (продавец);

- незамедлительно приостановить производство и реализацию продукции, отозвать продукцию и возместить приобретателю (потребителю) убытки в случае невозможности устранить причины причинения вреда.

В случае невыполнения изготовителем (продавцом) программы мероприятий по предотвращению причинения вреда орган государственного контроля (надзора), а также иные лица вправе обратиться в суд с иском о *принудительном отзыве продукции с рынка*. При удовлетворении иска суд обязывает ответчика совершить определённые действия по отзыву продукции с рынка и довести решение суда не позднее одного месяца со дня его вступления в силу до сведения приобретателя через средства массовой информации или иным способом.

В случае если ответчик (изготовитель, продавец) не исполнит решение суда в установленный срок, истец (приобретатель, потребитель) вправе совершить эти действия за счёт ответчика с взысканием с него расходов.

Орган по сертификации, аккредитованная испытательная лаборатория (центр), должностные лица, эксперты несут ответственность за выпуск в обращение продукции, не соответствующей требованиям ТР, в соответствии с законодательством РФ и договором о проведении сертификации.

7 Национальная система стандартизации

Основу национальной системы стандартизации РФ составляют:

- национальные стандарты;
- общероссийские классификаторы технико-экономической и социальной информации, правила их разработки и применения.

Национальные стандарты:

- разрабатываются в порядке, установленном законодательством РФ;
- утверждаются национальным органом по стандартизации в соответствии с правилами, нормами, рекомендациями в области стандартизации;
- применяются на добровольной основе.

Национальные стандарты применяются равным образом и в равной мере независимо от:

- страны и места происхождения продукции, осуществления процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации, выполнения работ и оказания услуг;

- видов или особенностей сделок и лиц, являющихся изготовителями, исполнителями, продавцами, приобретателями.

Применение национального стандарта подтверждается знаком соответствия национальному стандарту.

Общероссийские классификаторы:

- разрабатываются, принимаются, вводятся в действие, ведутся и применяются в порядке, установленном Правительством РФ;

- содержат технико-экономическую и социальную информацию, в том числе в области прогнозирования, статистического учёта, банковской деятельности, налогообложения;

- включают информацию в области межведомственного информационного обмена, создания информационных систем и ресурсов.

Национальный орган по стандартизации разрабатывает и утверждает программу разработки национальных стандартов, обеспечивает доступность программы заинтересованным лицам.

Порядок разработки и утверждения национальных стандартов установлен законодательством РФ.

Разработчиком национального стандарта может быть любое лицо.

Уведомление о разработке национального стандарта направляется в национальный орган по стандартизации и публикуется в печатном издании федерального органа исполнительной власти по техническому регулированию и в информационной системе общего пользования в электронно-цифровой форме. Уведомление должно содержать информацию о имеющихся в проекте национального стандарта положениях, отличающихся от положений соответствующих международных стандартов.

Разработчик дорабатывает проект национального стандарта с учётом полученных в письменной форме замечаний, проводит публичное обсуждение проекта, составляет перечень замечаний и результатов их обсуждения, публикует уведомление о завершении обсуждения. Срок публичного обсуждения проекта национального стандарта не может быть менее двух месяцев.

Проект национального стандарта одновременно с перечнем замечаний представляется разработчиком в технический комитет по стандартизации, который организует проведение экспертизы проекта, готовит мотивированное предложение об утверждении или отклонении проекта, предаёт перечень замечаний и результаты экспертизы в национальный орган по стандартизации.

Национальный орган по стандартизации на основании документов, представленных техническим комитетом, принимает решение об утверждении или отклонении национального стандарта. Уведомление об утверждении национального стандарта подлежит опубликованию в печатном издании национального органа по стан-

дартизации и информационной системе общего пользования в электронно-цифровой форме в течение одного месяца.

Работы по национальной стандартизации под руководством *Росстандарта* ведут:

- научно-исследовательские институты (НИИ);
- конструкторские бюро, опытно-экспериментальные базы НИИ;
- федеральные, региональные, областные центры по стандартизации и метрологии (ЦМС), по сертификации (РОСТЕСТ, г. Москва, УРАЛТЕСТ, г. Екатеринбург);
- конструкторско-технологические, научно-исследовательские подразделения (отделы, бюро, лаборатории, группы) по стандартизации на предприятиях.

НИИ национального органа РФ по стандартизации:

ВНИИКИ – Всероссийский НИИ классификации, терминологии и информации по стандартизации и качеству, г. Москва;

ВНИИ Стандарт – Всероссийский НИИ стандартизации, г. Москва;

ВНИИС – Всероссийский НИИ сертификации, г. Москва;

ВНИИНМАШ – Всероссийский НИИ стандартизации и сертификации в машиностроении, г. Москва;

ВНИИМС – Всероссийский НИИ метрологической службы, г. Москва;

ВНИЦСМВ – Всероссийский научно-исследовательский центр стандартизации, информации, сертификации сырья, материалов, веществ, г. Москва;

ВНИИМ им. Д.И.Менделеева – Всероссийский НИИ метрологии, г. Санкт-Петербург;

УНИИМ – Уральский НИИ метрологии, г. Екатеринбург.

В структуру национального органа РФ по стандартизации входят опытные заводы, издательство, типографии, магазины, учебные заведения. На базе территориальных представительств Национального органа РФ по стандартизации работают органы по оценке соответствия продукции и услуг, испытательные лаборатории, поверочные и калибровочные центры.

Подразделения по стандартизации на предприятиях осуществляют следующие функции:

- составляют годовые и перспективные планы работ по государственной и отраслевой стандартизации, передают их в головную организацию по стандартизации;
- проводят работы по стандартизации, унификации продукции и технологической оснастки;
- определяют технико-экономическую эффективность внедрения стандартов в проектирование и производство;
- осуществляют систематический контроль внедрения и соблюдения стандартов, технических условий при проектировании и производстве продукции;
- пересматривают устаревшие, разрабатывают новые стандарты предприятий и технические условия.

Другие субъекты хозяйственной деятельности (научно-технические общества, инженерные общества) создают в своей структуре специальные подразделения, занимающиеся разработкой нормативно-технической документации по стандартизации и управлению качеством.

Совершенствование стандартизации на предприятиях позволяет:

- улучшить организацию и культуру производства;
- увеличить производительность оборудования и производительность труда персонала;

- улучшить качество конструкторской документации;
- повысить качество, снизить себестоимость продукции;
- сократить номенклатуру материалов, полуфабрикатов, комплектующих.

В зависимости от того, участники какого субъекта деятельности разрабатывают и принимают стандарт, различают *категории* стандартов:

- *стандарты международные* (ИСО);
- *стандарты государственные* (ГОСТ Р);
- *технические условия* (ТУ);
- *стандарты общественных объединений, научно-технических и инженерных обществ* (СТО).

Международный стандарт – стандарт, который разрабатывает и выпускает международная организация по стандартизации с целью содействия взаимному сотрудничеству в интеллектуальной, научно-технической, экономической деятельности, в области охраны окружающей среды и в торговле. Например, основополагающий стандарт ИСО 14001 «Системы управления в области охраны окружающей среды. Руководство по применению». Стандарты ИСО имеют рекомендательный характер. Национальный орган РФ по стандартизации допускает применение стандартов ИСО:

- в качестве ГОСТ Р без изменений в тексте;
- с дополнениями, учитывающими российские требования, например, государственный стандарт ГОСТ Р/ИСО 14001 «Системы управления качеством окружающей среды. Общие требования и рекомендации по использованию».

Национальный стандарт – стандарт разрабатываемый для всех предприятий, организаций, учреждений страны независимо от форм собственности и подчинения, граждан занимающихся индивидуальной трудовой деятельностью, министерств (ведомств), органов местного и государственного управления РФ. Разработку ГОСТ Р ведут ТК по стандартизации в составе *Росстандарта*. После утверждения *Росстандарта* присваивают индекс, в котором указан номер и год утверждения или пересмотра - четыре последние цифры (например, государственный стандарт ГОСТ Р 51685-2000 на геометрические размеры железнодорожных рельсов).

Объектами ГОСТ Р являются:

- организационно-методические и общетехнические объекты;
- совместимые программные и технические средства информационных технологий;
- справочные материалы, классификация и кодирование информации;
- составляющие элементы крупных народно-хозяйственных комплексов (транспорт, энергосистема, связь, оборона, охрана окружающей среды);
- содержание государственных научно-технических и социально-экономических целевых программ и проектов;
- продукция для удовлетворения внутренних потребностей населения и поставок на экспорт;

- достижения науки и техники, позволяющие предприятию, государству обеспечить конкурентоспособность продукции;
- система конструкторской и технологической документации, документация в области управления и организации производства.

Технические условия – нормативный документ, который содержит технические требования, определяющие показатели качества продукции в соответствии с условиями её эксплуатации, обслуживания, ремонта. ТУ разрабатывают и применяют субъекты хозяйственной деятельности независимо от форм собственности и подчинения, когда ГОСТ и ОСТ создавать нецелесообразно, или необходимо дополнить или ужесточить установленные ими требования (например, нормативный документ ТУ 14-2Р-351-2001 на технические требования в отношении стальных колец для автомобильных, башенных кранов и других машин). Объектом ТУ может быть продукция разовой поставки, выпускаемая малыми партиями, а также произведения художественных промыслов. В случае, когда на ТУ нет ссылок в контрактах или договорах, ТУ считается не нормативным, а техническим документом.

Стандарты общественных объединений, научно-технических и инженерных обществ – нормативные документы, которые содержат требования к принципиально новым видам продукции, методам измерений, нетрадиционным технологиям и принципам управления производством. СТО разрабатывают и утверждают общественные объединения с целью распространения перспективных результатов научно-технических исследований (например, стандарт СТО АСЧМ 20-93 Ассоциации «Черметстандарт» на сортамент профилей двутавровых широкополочных балок с параллельными гранями полок).

В зависимости от характера объектов стандартизации различают *виды стандартов*:

- *стандарты основополагающие*;
- *стандарты на продукцию, услуги*;
- *стандарты на процессы*;
- *стандарты на методы контроля (испытаний, измерений, анализа)*.

Основополагающие стандарты – стандарты, которые устанавливают организационные принципы, положения, требования, правила и нормы, имеющие общий характер, с целью содействия взаимопониманию, взаимодействию и техническому единству в различных областях науки, техники и производства. Основополагающие стандарты объединяют взаимосвязанные стандарты, имеющие общую целевую направленность, имеют комплексный характер (ЕСКД, ЕСТД).

Стандарты на продукцию, услуги – стандарты, которые устанавливают требования к группам однородной продукции, услуг или конкретной продукции, услугам (стандарты общих технических требований, параметров и размеров, типов конструкции, сортамента, правил приёмки).

Стандарты на работы (процессы) – стандарты, которые устанавливают требования к конкретным видам работ (процессов), осуществляемым на разных стадиях жизненного цикла продукции: разработка, проектирование, производство, эксплуатация, потребление, хранение, транспортирование, обслуживание, ремонт, утилизация.

Особое место занимают экологические требования, которые включают: условия применения потенциально опасных для окружающей среды материалов, параметры очистного оборудования, правила выбросов в атмосферу и сточные воды.

Стандарты на методы контроля (испытаний, измерений, анализа) - стандарты, которые устанавливают порядок отбора проб (образцов) для испытаний, методы контроля (испытаний, измерений, анализа) характеристик определённой группы продукции с целью обеспечить единство оценки показателей качества. Критерии объективности метода контроля – сходимость и воспроизводимость результатов. Стандартизации подлежат: средства контроля, порядок подготовки и проведения контроля, правила обработки результатов, допустимая погрешность метода. В стандартах предусмотрены различные виды испытаний: повседневные, типовые, периодические.

8 Международные, региональные организации по стандартизации

Главная международная организация по стандартизации ИСО создана в 1946г. СССР был одним из основателей организации, является постоянным членом руководящих органов. РФ входит в ИСО как правопреемник СССР.

Цель деятельности ИСО:

- содействие развитию стандартизации в мировом масштабе для облегчения международного товарообмена и взаимопомощи, расширение сотрудничества в области интеллектуальной, научной, технической и экономической деятельности.

Практическая деятельность ИСО направлена на:

- облегчение координации и унификации национальных стандартов;
- подготовку рекомендаций национальным организациям по стандартизации;
- разработку стандартов ИСО;
- организацию обмена информацией в области стандартизации;
- сотрудничество с другими международными организациями по стандартизации и смежным проблемам (сертификация, метрология).

Объекты стандартизации ИСО:

- основополагающие стандарты;
- машиностроение, химия;
- неметаллические материалы, руды, металлы;
- информационная техника;
- сельское хозяйство;
- строительство, специальная техника;
- охрана здоровья, медицина;
- окружающая среда;
- упаковка и транспортировка товаров.

Организационно в ИСО входят руководящие и рабочие органы.

Руководящие органы - Генеральная ассамблея, Совет, комитеты Совета, Технические бюро.

Рабочие органы - технические комитеты, подкомитеты, технические консультативные группы.

Совет руководит работой ИСО в перерывах между сессиями Генеральной ассамблеи. Решение принимается большинством голосов членов Совета. Совету ИСО подчиняются комитеты:

- *ПЛАКО* – техническое бюро по планированию и организации работы;
- *СТАКО* – комитет по изучению научных принципов стандартизации;
- *КАСКО* – комитет по оценке соответствия продукции, услуг;
- *ИНФКО* – комитет по научно-технической информации, в рамках которого функционирует информационная система *ИСОНЕТ* о документах в области стандартизации - стандартах, справочниках, учебной литературе;
- *ДЕВКО* – комитет по оказанию помощи развивающимся странам;
- *КОПОЛКО* – комитет по защите интересов потребителей;
- *РЕМКО* – комитет по стандартным образцам (эталонам).

По своему содержанию только 20% стандартов ИСО относятся к конкретной продукции. Остальные нормативные документы касаются требований безопасности, взаимозаменяемости, технической и информационной совместимости, методов испытаний, других общих и методических вопросов.

Международные стандарты ИСО, которых разработано более 10 тыс., не имеют статуса обязательных. Каждая страна – участница вправе решать вопрос о применении международных стандартов в зависимости от степени участия страны в международном разделении труда, состоянии экономики и внешней торговли. В РФ принято около половины стандартов ИСО.

Главная международная организация по стандартизации и сертификации в области электротехники Международная электротехническая комиссия МЭК создана в 1906 г. Россия участвует в работе МЭК с 1921 г. Организационная структура МЭК во многом аналогична структуре ИСО.

Основная цель деятельности МЭК:

– содействие международному сотрудничеству по стандартизации и смежным с ней проблемами (испытания, оценка соответствия) в области электротехники, радиотехники, производства электротехнических материалов путём разработки международных стандартов и других документов.

Объекты стандартизации МЭК:

- материалы для электротехнической промышленности;
- электротехническое, электроэнергетическое оборудование;
- изделия электронной промышленности, электроинструмент;
- оборудование для спутников связи;
- терминология.

МЭК разработано более 2 тыс. стандартов. В РФ принято более половины стандартов МЭК

Международные стандарты МЭК можно разделить на два вида:

- общетехнические, носящие общепромышленный характер, - нормативные документы на терминологию, стандартные напряжения и частоты, виды и методы испытаний, требования по безопасности;
- на конкретные виды продукции от бытовых электроприборов до спутников связи

Некоторые виды работ по международной стандартизации и сертификации ведут совместно ИСО и МЭК, а директивы имеют индекс ИСО/МЭК, например, Руководство 2 ИСО/МЭК «Общие термины и определения в области стандартизации и смежных видов деятельности».

Важнейшей целью при разработке стандартов ИСО/МЭК является разработка стандартов в области безопасности, разработка стандартов, содержащих наряду с техническими требованиями, требования по безопасности. Нормы безопасности зависят от уровня социально-экономического развития и образованности общества.

В сферу деятельности МЭК входит поиск методов защиты от различных видов опасностей:

- травмоопасность, опасность поражения электрическим током;
- техническая опасность, пожаро- и взрывоопасность;
- химическая и биологическая опасность;
- опасность излучений (звуковые, инфракрасные, радиочастотные, ультрафиолетовые, ионизирующие, радиационные).

Особый статус имеет Международный специальный комитет по радиопомехам (СИСПР), который занимается стандартизацией методов измерения радиопомех, излучаемых электронными и электротехническими приборами.

Организационно-методическую и практическую работу по стандартизации и оценке соответствия во взаимодействии с ИСО, МЭК в своих географических районах и областях деятельности ведут:

- Европейская экономическая комиссия ООН (ЕЭК ООН);
- Продовольственная и сельскохозяйственная организация ООН (ФАО);
- Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ);
- «Кодекс Алиментариус» - комиссия по разработке стандартов на продовольствие;
- Европейский комитет по стандартизации (СЕН);
- Европейский комитет по стандартизации в электротехнике (СЕНЭЛЕК);
- Европейский институт по стандартизации в области электросвязи (ЕТСИ);
- Межскандинавская организация по стандартизации (ИНСТА);
- Международная ассоциация стран Юго-Восточной Азии (АСЕАН);
- Панамериканский комитет стандартов (КОПАНТ).

Стандартизация, сертификация и метрология в рамках СНГ осуществляется в соответствии с межправительственным соглашением «Соглашение о проведении согласованной политики в области стандартизации, метрологии и сертификации» от 1992 г. Перспективная приоритетная задача Межгосударственного Совета СНГ - развитие сотрудничества с ИСО, МЭК, СЕН.

Активное участие в работе международных и региональных организаций по стандартизации принимают национальные организации экономически развитых государств.

Национальная организация по стандартизации и смежным с ней проблемам в США – Национальный институт стандартов и технологии (NIST) – неправительственная некоммерческая организация, утверждающая национальные стандарты, координирующая работы по разработке и применению стандартов в государственном и частном секторах экономики.

Федеральные стандарты в США разрабатывают:

- Американское общество по испытаниям и материалам (ASTM);
- Американское общество по контролю качества (ASQC);
- Американское общество инженеров – механиков (ASME);
- Общество инженеров – автомобилестроителей (SAE);
- Институт инженеров по электротехнике и электронике (IEEE) и другие организации и фирмы.

Основные задачи разработки и внедрения национальных стандартов в США – экономия энергоресурсов, защита окружающей среды, обеспечение безопасности людей и условий производства.

Национальная организация по стандартизации и смежным с ней проблемам в Британии – Британский институт стандартов (BSI) – независимая организация, координирующая деятельность по стандартизации, управлению качеством и сертификации, информационному обслуживанию и маркетингу, созданная для удовлетворения потребностей обществ инженеров-механиков, инженеров-судостроителей, инженеров-электриков и инженеров-металлургов. Приоритетные направления деятельности BSI – стандартизация в электротехнике, автоматизации, информационной технике, строительстве, химии, здравоохранении, машиностроении. Современное направление – обеспечение безопасности инвалидов, техническая помощь британским фирмам – экспортёрам.

Национальная организация по стандартизации во Франции – Французская ассоциация по стандартизации (ANFOR) – организация, координирующая деятельность по стандартизации, сертификации, метрологии, управлению качеством. Приоритетные направления деятельности в международной стандартизации – информационные технологии, в европейской стандартизации – транспорт и телекоммуникации, в национальной стандартизации – экология, безопасность, агропромышленное производство, а также сфера услуг.

Национальная организация по стандартизации в Германии – Немецкий институт стандартов (DIN). Деятельность DIN финансируется на основе договоров с заинтересованными сторонами – заказчиками нормативных документов и дотациями со стороны государства. Особое внимание уделяется стандартизации в области обеспечения безопасности товаров и услуг, защиты окружающей среды, созданию основополагающих стандартов. Кроме стандартизации DIN занимается проблемами оценки соответствия и информационного обеспечения стандартизации и сертификации.

Национальная организация по стандартизации в Японии – Японский комитет промышленных стандартов (JISC) – консультативный орган при Министерстве внешней торговли и промышленности. Деятельность JISC финансирует правительство Японии. На основании Закона о промышленной стандартизации в Японии производится сертификация промышленной продукции на соответствие национальному стандарту. Разрешение на выдачу сертификата и право маркировки знаком соответствия стандарту даёт министр отрасли по результатам инспекционного контроля качества данной продукции и аттестации предприятия.

Приоритетные направления стандартизации в Японии – учёт интересов зарубежных партнёров, придание открытого характера информации о стандартизации,

гармонизация японских национальных стандартов с международными стандартами, упрощение процедур сертификации, распространение стандартизации на продукцию предприятий частного сектора. Большое внимание уделяется стандартам, направленным на защиту окружающей среды, решение социальных проблем, создание условий для справедливой конкуренции, сохранение лидерства в области стандартизации в Азиатско-Тихоокеанском регионе.

9 Информационное обеспечение стандартизации

Национальному органу по стандартизации – *Росстандарту* - предоставлено исключительное право опубликования официальной информации:

- реестра продукции и услуг, сертифицированных и маркированных знаками соответствия и обращения на рынке;
- российских, международных, региональных, национальных нормативных документов.

Национальный орган РФ по стандартизации ведёт *Федеральный фонд стандартов* – совокупность нормативных документов по стандартизации, метрологии, оценке соответствия. В фонд входят:

- нормативные акты РФ по стандартизации, сертификации, метрологии;
- государственные реестры;
- государственные стандарты, их проекты;
- правила, рекомендации в области стандартизации;
- стандарты отраслей, предприятий, научно-технических и инженерных обществ, общественных организаций;
- общероссийские классификаторы технико-экономической и социальной информации;
- международные договоры, нормативные документы, принятые международными, региональными, национальными организациями зарубежных стран.

Головная организация по информационному обеспечению стандартизации - ВНИИКИ - Всероссийский НИИ классификации, терминологии и информации по стандартизации и качеству. ВНИИКИ совместно с другими НИИ и ЦМС ведёт автоматизированный банк отечественных, международных, региональных, зарубежных стандартов и нормативных документов по управлению качеством.

ВНИИКИ выполняет функцию национального центра международной информационной сети по стандартизации ИСОНЕТ, руководство деятельностью которой осуществляет Комитет по информационным системам и услугам ИНФКО, входящий в Совет ИСО.

Развитие информационных технологий повысило актуальность классификаций и кодирования информации. В РФ создана *Единая система классификации и кодирования технико-экономической и социальной информации* (ЕСКК), объектами которой выступают:

- статистическая информация;
- макроэкономическая, финансовая, правоохранительная деятельность;
- банковское дело, бухгалтерский учёт;
- стандартизация, оценка соответствия;

- производство продукции, предоставление услуг;
- торговля, таможенное дело;
- внешнеэкономическая деятельность.

Составляющие ЕСКК:

- общероссийские классификаторы технико-экономической и социальной информации, средства их ведения;
- нормативные, методические документы по их разработке, ведению и применению.

Национальный орган РФ по стандартизации принял более 20, в стадии внедрения находятся более 25 общероссийских классификаторов, гармонизированных с международными стандартами и классификациями.

Действующие общероссийские классификаторы:

- *ОКПО* – предприятий и организаций;
- *ОКОГУ* – органов государственной власти и управления;
- *ОКЭР* – экономических районов;
- *ОКДП* – видов экономической деятельности, продукции и услуг;
- *ОКСО* – специальностей по образованию;
- *ОКЗ* – занятий;
- *ОКУД* – управленческой документации;
- *ОКП* – продукции;
- *ОКС* – стандартов;
- *ОКПДТР* – профессий рабочих, должностей служащих, тарифных разрядов;
- *ОКОФ* – основных фондов;
- *ЕСКД* – изделий и конструкторских документов в машиностроении;
- *ОКЕИ* – единиц измерения;
- *ОКСВНК* – специальностей высшей научной квалификации.

Национальные стандарты, общероссийские классификаторы и информация об их разработке должна быть доступна заинтересованным лицам. Издательство национального органа РФ по стандартизации выпускает широкий спектр наименований печатной продукции – стандарты, нормативные документы, справочники, журналы с приложениями, учебная литература.

10 Работы по стандартизации

Работы, выполняемые при стандартизации, в условиях современного производства способствуют:

- совершенствованию организации и управления производством;
- повышению производительности оборудования и персонала;
- улучшению проектирования и изготовления продукции, особенно при крупносерийном, массовом производстве;
- ускорению разработки наукоёмких, малоотходных технологий;
- повышению стабильности качества товаров, работ и услуг;
- экономии ресурсов всех видов – материальных, энергетических, временных, людских;
- развитию безотходных технологий и защите окружающей среды.

Основные работы (методы стандартизации), выполняемые при стандартизации:

- систематизация объектов, явлений или понятий;
- кодирование и классификация технико-экономической информации;
- унификация и симплификация деталей, сборочных единиц, узлов, агрегатов, машин, приборов;
- типизация конструкций изделий и технологических процессов;
- агрегатирование машин и других изделий.

Систематизация объектов, явлений или понятий – расположение объектов в определённом порядке и последовательности, образующей чёткую систему, удобную для пользования. Простейшие формы систематизации – расположение объектов в алфавитном или хронологическом порядках.

Кодирование – присвоение по определённым правилам объекту кода, в виде сочетания цифр и букв. Коды обеспечивают идентификацию объектов с помощью минимального количества знаков. Автоматизированные системы управления отраслями промышленности с применением вычислительной техники позволяют обрабатывать большой объём информации, закодированной в десятичных цифровых кодах.

Классификация – разделение множества объектов на классификационные группировки по сходству или различию на основе определённых признаков в соответствии с принятыми правилами.

Наибольшее применение получил *иерархический* метод классификации, в котором исходное множество объектов последовательно разделяется на подмножества (классы, группы, виды) по принципу от общего к частному. Основная сложность при построении классификации – выбор системы признаков, определение порядка их следования. Иерархическая классификация логична, проста, но плохо поддаётся автоматизированной обработке.

Фасетный метод классификации подразделяет объекты на независимые подмножества, обладающие определёнными признаками, необходимыми для решения конкретных задач. Принцип построения фасетной классификации – от частного к общему. Такая классификация хорошо поддаётся автоматизированной обработке.

Порядок проведения работ по классификации и кодированию информации регламентирован Единой системой классификации и кодирования технико-экономической информации *ЕСКК ТЭИ*. На основе Единой системы разрабатывают классификаторы (общероссийский, отраслевой, предприятия). Классификатор по статусу приравнен стандарту соответствующего уровня.

Унификация – приведение объектов одинакового функционального назначения к единообразию по установленному признаку и рациональное сокращение числа этих объектов. Унификация (заводская, отраслевая, межотраслевая) устанавливает минимально необходимое но достаточное число типов, видов, типоразмеров, изделий, сборочных единиц и деталей, обладающих высоким качеством и полной взаимозаменяемостью.

Симплификация – форма стандартизации, при которой уменьшают количество типов изделий до величины, достаточной для удовлетворения существующих в данное время потребностей.

Типизация конструкций изделий – разработка и установление типовых конструкций, содержащих конструктивные параметры общие для изделий, сборочных единиц, деталей.

Типизация технологических процессов – разработка и установление технологического процесса, для производства однотипных деталей или сборки однотипных составных частей или изделий.

Агрегатирование – создание машин, оборудования, приборов и других изделий из унифицированных стандартных агрегатов (автономных сборочных единиц), устанавливаемых в изделия в различном числе и комбинациях. Из минимального числа типоразмеров автономных агрегатов стремятся создать максимальное число компоновок оборудования.

Принципы, определяющие современную научно-техническую организацию работ по стандартизации:

- *системности*;
- *обеспечения функциональной взаимозаменяемости стандартизируемых изделий*;
- *научно-исследовательский*;
- *предпочтительности*;
- *прогрессивности и оптимизации стандартов*;
- *взаимосвязки стандартов*;
- *минимального удельного расхода материалов*.

Принцип системности - применение совокупности взаимосвязанных элементов, функционирование которых приводит к выполнению поставленной цели с максимальной эффективностью и наименьшими затратами. Научно-технический прогресс вызвал необходимость системного подхода к процессу производства, включающего труд людей, средства (оборудование, оснастка, инструмент, средства контроля) и предметы труда (продукция на стадиях её создания и использования).

Принцип обеспечения функциональной взаимозаменяемости стандартизируемых изделий – обеспечение взаимозаменяемости по эксплуатационным показателям. Принцип является главным при комплексной и опережающей стандартизации изделий.

Научно-исследовательский принцип разработки стандартов – проведение специальных теоретических, экспериментальных и опытно-конструкторских работ для подготовки проектов стандартов.

Принцип предпочтительности – установление нескольких рядов значений стандартизируемых параметров, чтобы при их выборе первый ряд предпочесть второму, второй – третьему. Широкое применение получили ряды предпочтительных чисел, построенные по принципу геометрической прогрессии. Принцип является теоретической базой современной стандартизации, позволяет повысить уровень взаимозаменяемости, уменьшить номенклатуру типоразмеров заготовок, деталей, изделий, создаёт условия эффективной специализации и кооперирования в промышленности.

Принцип прогрессивности и оптимизации стандартов – соответствие показателей, норм, характеристик и требований в стандартах мировому уровню науки, техники, производства, учёт прогрессивных тенденций развития стандартизируе-

мых объектов. Принципа позволяет получать в производстве максимальный экономический эффект при минимальных затратах.

Принцип взаимоувязки стандартов – учёт всех основных элементов (факторов), влияющих на конечный объект стандартизации. При стандартизации рассматривают систему характеристик и требований к комплексу взаимосвязанных материальных и нематериальных элементов. Второстепенные элементы, незначительно влияющие на объект, не учитывают.

Принцип минимального удельного расхода материалов – минимизация удельного расхода материалов, полуфабрикатов, стоимость которых в машиностроении составляет 40...80% от конечной себестоимости продукции. Стандартизация заготовок, изделий позволяет получить экономию материалов за счёт рациональных схем и компоновок машин, совершенства методов расчёта деталей на прочность, применения экономичных профилей, сварных конструкций, литых заготовок, пластмасс, композиционных материалов.

Методы стандартизации:

- *прогрессивная стандартизация;*
- *комплексная стандартизация;*
- *опережающая стандартизация.*

Прогрессивная стандартизация (ПС) – стандартизация, которая основана на использовании технических прогнозов, патентов, изобретений, передовых научно-технических и опытно-конструкторских разработок.

Комплексная стандартизация (КС) – стандартизация, при которой осуществляют целенаправленное и планомерное установление и применение системы взаимоувязанных требований как к объекту в целом и его элементам, так и к материальным и нематериальным факторам, влияющим на объект, с целью обеспечения оптимального решения конкретной проблемы. Сущность КС - систематизация, оптимизация и увязка всех взаимодействующих факторов (в процессе проектирования, производства, эксплуатации), обеспечивающих экономически оптимальный уровень качества продукции в требуемые сроки.

Опережающая стандартизация (ОС) – установление повышенных по отношению к достигнутому на практике уровню норм, требований к объектам стандартизации, которые, согласно техническим прогнозам, будут оптимальными в последующее планируемое время. ОС относят к изделию, показателям его качества, средствам производства, методам испытания, контроля. ОС – основа проектирования новой, более совершенной техники.

В качестве примера комплексной стандартизации можно привести *Межотраслевую систему общетехнических стандартов*, направленную на решение крупных народно-хозяйственных задач, обеспечение эффективности производства высококачественной продукции.

В числе прочих в межотраслевую систему входят:

- *ЕСКД* – единая система конструкторской документации;
- *ЕСТД* – единая система технологической документации;
- *СПКП* – система показателей качества продукции;
- *УСД* – унифицированные системы документации;
- *СИБИД* - система информационно-библиографической документации;

- *ГСИ* – государственная система обеспечения единства измерений;
- *ЕСЗКС* – единая система защиты от коррозии и старения материалов и изделий;
- *стандарты на товары, поставляемые на экспорт*;
- *ССБТ* – система стандартов безопасности труда;
- *ЕСТПП* – единая система технологической подготовки производства;
- *разработка и постановка продукции на производство*;
- *система стандартов в области охраны природы и улучшения использования природных ресурсов*;
- *ЕСПД* – единая система программной документации;
- *ЕСГУКП* – единая система государственного управления качеством продукции;
- *СПДС* – система проектной документации для строительства;
- *ЕССП* – единая система стандартов приборостроения.

ЕСКД – система, устанавливающая для всех организаций и предприятий единый порядок организации проектирования, единые правила выполнения и оформления чертежей и ведения чертёжного хозяйства. Этим стандартам присвоен класс 2, например ГОСТ 2.001-93.

Основные задачи ЕСКД:

- повышение производительности труда конструкторов;
- улучшение качества чертёжной документации;
- облегчение взаимообмена конструкторской документацией между организациями;
- углубление унификации при разработке проектов изделий;
- упрощение форм конструкторских документов, графических изображений, внесения в них изменений;
- механизация и автоматизация обработки технических документов;
- эффективное хранение, учёт документов, сокращение их объёмов;
- ускорение оборота документов.

Главные перспективные направления развития ЕСКД:

- полное документальное обеспечение систем автоматизации проектно- конструкторских работ;
- документальное обеспечение автоматизированных систем управления на государственном, отраслевом уровнях и на предприятиях;
- создание общегосударственной сети вычислительных центров на базе ЭВМ четвёртого (сверхминиатюрные ЭВМ на больших интегральных схемах) и пятого (на основе световых и оптических явлений) поколений.

Система ЕСКД широко использована в современных условиях при:

- разработке автоматических систем управления производством;
- создании и применении машинных носителей информации в качестве юридически предусмотренных форм представления документации;
- применении действующих классификаторов и систем документации;
- внедрении стандартных программ сбора, хранения, передачи и обработки информации в общегосударственной автоматизированной системе.

ЕСТД – система, устанавливающая для всех организаций и предприятий единые взаимосвязанные правила, нормы и положения выполнения, оформления, комплектации и обращения, унификации и стандартизации технологической документации. Этим стандартам присвоен класс 3, например ГОСТ 3.1103-84.

ЕСТД решает информационные и организационные задачи:

- широкого внедрения типовых технологических процессов, основанных на технологическом классификаторе деталей машиностроения и приборов;
- сокращения объёма, упорядочения номенклатуры, установления правил составления технологической документации;
- разработки систем нормативов основного производства и учёта;
- повышения в конечном итоге производительности труда технологов.

ЕССП – система, призванная унифицировать и согласовывать по принципу агрегатирования параметры и характеристики приборов и устройств, входящих в систему автоматического контроля, регулирования и управления сложными технологическими процессами. Одновременно система обеспечивает функциональную, информационную, конструктивную, эксплуатационную совместимости указанных приборов и технических средств.

Совместимость технических средств – обеспечение согласованной совместной работы этих средств в предусмотренном сочетании, в рекомендуемом диапазоне нормируемых параметров (энергоносители, присоединительные и габаритно-установочные размеры, эргономические требования).

Повышение требований потребителя к техническому уровню и качеству продукции, необходимость дальнейшего совершенствования качества определяют уровень и сложность работ по стандартизации, поиск совершенствование новых эффективных форм разработки стандартов на продукцию и услуги с учётом международного разделения труда, кооперирования и особенностей товарообмена в стране и за рубежом.

Система управления качеством – совокупность организационной структуры и процедур, процессов, ресурсов, ответственности работников, направленная на повышение качества продукции (работ, услуг). На основании мирового опыта по управлению качеством в РФ приняты стандарты ГОСТ Р ИСО серии 9000. В основе этих, а также вновь разрабатываемых международных стандартов, положены принципы управления качеством:

- ориентация на запросы и требования потребителя;
- повышение роли руководителя в организации управления качеством;
- вовлечение инициативы и ответственности персонала;
- разработка процесса достижения желаемого результата;
- применение системного анализа для повышения эффективности функционирования системы взаимосвязанных процессов;
- формирование потребности у персонала постоянного улучшения продукции, процессов и системы в целом;
- принятие решений на основе сбора и анализа данных и информации;
- постановка взаимовыгодных отношений с поставщиками.

Наличие сертификата системы качества является необходимым, хотя и не достаточным, условием выхода продукции на международный рынок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Промышленность Российской Федерации конца восьмидесятых годов прошлого столетия обслуживали 80...100 тыс. стандартов, в то время как необходимое и достаточное количество стандартов составляло 1...2 тыс. Избыточная стандартизация усложняла разработку новых видов продукции и современных ресурсосберегающих, малоотходных, экологически чистых технологий. Существующая в стране система стандартизации в условиях становления рыночных отношений превратилась в препятствие развития производства новых видов товаров. Закон Российской Федерации «О стандартизации» совместно с законом «О защите прав потребителей» более 10 лет являлся законодательной основой стандартизации. В начале двадцать первого века в стране назрела необходимость совершенствования основ государственной стандартизации.

Федеральный закон «О техническом регулировании» признал утратившим силу закон о «Стандартизации» и предоставил новые возможности по дальнейшему совершенствованию стандартизации и оценки соответствия товаров и услуг обязательным требованиям стандартов. Закон «О техническом регулировании» определил приоритетные цели стандартизации – повышение уровня безопасности граждан и имущества, экологической безопасности, безопасности животных, растений, а также обеспечение научно-технического прогресса и повышение конкурентоспособности продукции, работ, услуг.

Дальнейшее развитие стандартизации, широкое применение прогрессивной, комплексной и опережающей стандартизации являются необходимыми и определяющими условиями роста национального валового продукта, роста благосостояния граждан, успешной интеграции экономики России в мировую экономическую систему, расширения международного экономического и научно-технического сотрудничества, роста объёма и совершенствования структуры международного товарообмена в интересах населения и государства.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Правовые основы стандартизации
2. Цели стандартизации.
3. Задачи стандартизации.
4. Принципы стандартизации.
5. Документы в области стандартизации.
6. Национальный орган РФ по стандартизации. Функции, права.
7. Государственный контроль (надзор) за соблюдением требований технических регламентов.
8. Национальная система стандартизации.
9. Порядок разработки и утверждения национальных стандартов.
10. Категории стандартов.
11. Объекты стандартизации.
12. Виды стандартов.
13. Международные, региональные организации по стандартизации.
14. Информационное обеспечение стандартизации.
15. Общероссийские классификаторы технико-экономической информации.
16. Работы, выполняемые при стандартизации.
17. Принципы организации работ по стандартизации.
18. Методы стандартизации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегеря В.В. Метрология, стандартизация, сертификация: Учебное пособие. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Логос, 2010. – 560 с.: ил.
2. Лифиц И.М. Стандартизация, метрология и сертификация: Учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт-Издат, 2009. – 335 с.
3. Димов Ю.В. Метрология, стандартизация и сертификация. Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2010. - 464 с.: ил.
4. Яблонский О.П., Иванова В.А. Основы стандартизации, метрологии, сертификации: Учебник. – Ростов на/Д: Феникс, 2010. – 448 с.
5. Радкевич Я.М., Лактионов Б.И., Схиртладзе А.Г Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. для вузов - 2-е изд., доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 791 с.
6. Крылова Г.Д. Основы стандартизации, сертификации, метрологии: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 711 с.
7. Федеральный закон от 27 декабря 2002 г. N 184-ФЗ «О техническом регулировании».
8. Закон Российской Федерации от 7 февраля 1992 г. N 2300-I «О защите прав потребителей».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица 1 - Перечень систем межгосударственных и государственных стандартов

Наименование систем	Аббревиатура в обозначении стандарта	Шифр в обозначении	Категория стандартов
1	2	3	4
Государственная система стандартизации РФ	ГСС	1.	ГОСТ Р
Единая система конструкторской документации	ЕСКД	2.	ГОСТ
Единая система технологической документации	ЕСТД	3.	ГОСТ
Система показателей качества продукции	СПКП	4.	ГОСТ
Унифицированная система документации	УСД	6.	ГОСТ ГОСТ Р
Система информационно-библиографической документации	СИБИД	7.	ГОСТ
Государственная система обеспечения единства измерений	ГСИ	8.	ГОСТ ГОСТ Р
Единая система защиты от коррозии и старения	ЕСЗКС	9.	ГОСТ
Система стандартов безопасности труда	ССБТ	12.	ГОСТ ГОСТ Р
Репрография	-	13.	ГОСТ ГОСТ Р
Единая система технологической подготовки производства	ЕСТПП	14.	ГОСТ
Система разработки и постановки продукции на производство	СРПП	15.	ГОСТ ГОСТ Р
Система стандартов в области охраны природы и улучшения использования природных ресурсов	-	17.	ГОСТ ГОСТ Р
Единая система программных документов	ЕСПД	19.	ГОСТ
Система проектной документации по строительству	СПДС	21.	ГОСТ Р
Безопасность в чрезвычайных ситуациях	-	22.	ГОСТ Р
Расчеты и испытания на прочность	-	25.	ГОСТ
Надежность в технике	-	27.	ГОСТ
Система стандартов эргономических требований и эргономического обеспечения	-	29.	ГОСТ
Информационная технология	-	34.	ГОСТ Р
Система сертификации ГОСТ Р	-	40.	ГОСТ Р
Система аккредитации в РФ	-	51.	ГОСТ Р

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1 - Нормативные документы по стандартизации

Наименование документа	Определение	Обозначение	Сфера действия
1	2	3	4
Национальный стандарт РФ	Стандарт, принятый ФА Ростехрегулирования	ГОСТ Р	Российская Федерация
Региональный стандарт	Стандарт, принятый региональной организацией по стандартизации	ГОСТ, СТ СЭВ	Страны — члены региона
Межгосударственный стандарт (является стандартом регионального типа)	Стандарт, принятый Межгосударственным Советом по стандартизации, метрологии и сертификации или Межгосударственной научно-технической комиссией по стандартизации, техническому нормированию и сертификации в строительстве	ГОСТ	Страны — члены Межгосударственного совета (МГС) и (или) Межгосударственной научно-технической комиссии (МНТКС)
Международный стандарт	Стандарт, принятый международной организацией по стандартизации	ИСО, МЭК, ИСО/МЭК	Страны — члены и члены-корреспонденты ИСО и МЭК
Общероссийский классификатор технико-экономической информации	Документ, принятый Госстандартом России или Госстроем России	ОК	Российская Федерация
Стандарт отрасли	Стандарт, принятый государственным органом управления в пределах его компетенции применительно к продукции, работам и услугам отраслевого значения	ОСТ	В одной или нескольких отраслях
Стандарт предприятия	Стандарт, принятый предприятием применительно к внутренним продукциям, работам и услугам.	СТП	На данном предприятии
Стандарт научно-технического, инженерного общества	Стандарт, принятый научно-техническим, инженерным обществом или другим общественным объединением	СТО	На принципиально новые виды продукции, процессы, услуги, методы испытаний
Правила	Документ в области стандартизации, метрологии, сертификации, аккредитации, устанавливающий обязательные для применения организационно-технические и (или) общетехнические положения, порядки (правила процедуры), методы (способы, приемы) выполнения работ соответствующих направлений, а также обязательные требования к оформлению результатов этих работ	ПР	Российская Федерация

Продолжение таблицы Б.2 Нормативные документы по стандартизации

1	2	3	4
Технические условия	Документ, разработанный на конкретную продукцию (изделие, материал, вещество)	ТУ	На конкретное изделие, материал, вещество
Рекомендации	Документ в области стандартизации, метрологии, сертификации, аккредитации, содержащий добровольные для применения организационно-технические и (или) общетехнические положения, порядки (правила процедуры), методы (способы, приемы) выполнения работ соответствующих направлений, а также рекомендуемые правила оформления результатов этих работ	Р	Российская Федерация
Правила по межгосударственной стандартизации	См. «Правила»	ПМГ	Страны — члены МГС и (или) МНКТС
Рекомендации по межгосударственной стандартизации	См. «Рекомендации»	РМГ	Страны — члены МГС и (или) МНКТС
Регламент	Документ, содержащий обязательные правовые нормы и принятый органами власти		Сфера действия регламента

Все действующие в Российской Федерации государственные, межгосударственные, региональные, национальные стандарты других стран вносятся в ежегодно переиздаваемый указатель «Национальные стандарты».

Национальные стандарты (ГОСТ Р) разрабатываются на продукцию, работы и услуги, имеющие межотраслевое значение, и не должны противоречить законодательству Российской Федерации.

Национальные стандарты должны содержать:

- требования к продукции, работам и услугам по их безопасности для окружающей среды, жизни, здоровья и имущества, требования техники безопасности и производственной санитарии;
- требования по технической и информационной совместимости, а также взаимозаменяемости продукции;
- основные потребительские (эксплуатационные) характеристики продукции, методы их контроля, требования к упаковке, маркировке, транспортированию, хранению, применению и утилизации продукции;
- правила и нормы, обеспечивающие техническое и информационное единство при разработке, производстве, использовании (эксплуатации) продукции, выполнении работ и оказании услуг, в том числе правила оформления технической документации, допуски и посадки, общие правила обеспечения качества продукции, работ и услуг, сохранения и рационального использования всех видов ресурсов, термины и их определения, условные обозначения, метрологические и другие общетехнические и организационно-технические правила и нормы. В государственных стандартах содержатся как обязательные для выполнения требования к объекту стандартизации, так и рекомендательные.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица В.1 ОБЩЕРОССИЙСКИЕ КЛАССИФИКАТОРЫ

Код	Наименование ОК	Аббревиатура ОК	Год принятия ОК	Дата введения ОК
001	Общероссийский классификатор стандартов	ОКС	1993	01.01.95
002	Общероссийский классификатор услуг населению	ОКУН	1993	01.01.94
003	Общероссийский классификатор органов государственной власти и управления	ОКОГУ	1993	01.01.96
004	Общероссийский классификатор видов экономической деятельности, продукции и услуг	ОКДП	1993	01.01.94
005	Общероссийский классификатор продукции	ОКП	1993	01.07.94
006	Общероссийский классификатор информации по социальной защите населения	ОКИСЗН	1993	01.01.94
007	Общероссийский классификатор предприятий и организаций	ОКПО	1993	01.07.94
009	Общероссийский классификатор специальностей по образованию	ОКСО	1993	01.07.94
010	Общероссийский классификатор занятий	ОКЗ	1993	01.01.95
011	Общероссийский классификатор управленческой документации	ОКУД	1993	01.07.94
012	Общероссийский классификатор изделий и конструкторских документов	Классификатор ЕСКД	1993	01.07.94
013	Общероссийский классификатор основных фондов	ОКОФ	1994	01.01.96
014	Общероссийский классификатор валют	ОКВ	1994	01.07.95
015	Общероссийский классификатор единиц измерения	ОКЕИ	1994	01.01.96

016	Общероссийский классификатор профессий рабочих, должностей служащих и тарифных разрядов	ОКПДТР	1994	01.01.96
017	Общероссийский классификатор специальностей высшей научной квалификации	ОКСВНК	1994	01.07.95
018	Общероссийский классификатор информации о населении	ОКИН	1995	01.07.96
019	Общероссийский классификатор объектов административно-территориального деления	ОКАТО	1995	01.01.97
020	Общероссийский классификатор деталей, изготавливаемых сваркой, пайкой, склеиванием и термической резкой	ОКД	1995	01.07.96
021	Технологический классификатор деталей машиностроения и приборостроения	ТКД	1995	01.01.96
022	Общероссийский технологический классификатор сборочных единиц машиностроения и приборостроения	ОТКСЕ	1995	01.01.97
023	Общероссийский классификатор начального профессионального образования	ОКНПО	1995	01.07.96
024	Общероссийский классификатор экономических регионов	ОКЭР	1995	01.01.97
025	Общероссийский классификатор стран мира	ОКСМ	1995	01.07.96
026	Общероссийский классификатор информации об общероссийских классификаторах	ОКОК	1995	01.07.96
027	Общероссийский классификатор форм собственности	ОКФС	1999	01.01.2000
028	Общероссийский классификатор организационно-правовых форм	ОКОПФ	1999	01.01.2000
029	Общероссийский классификатор видов экономической деятельности	ОКВЭД	2001	01.01.2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому
комплексу
С.А. Упоров



МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ (КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ)

ЧАСТЬ 3

«ПОДТВЕРЖДЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ»

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Автор: Глушкова Т.А., к.т.н.

Одобен на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 05.10. 2020

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

(название факультета)

Председатель

Бондарев В. И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 13.10. 2020

(Дата)

Екатеринбург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	2
1. Основные понятия.....	3
2. Цели, принципы и формы подтверждения соответствия.....	3
3. Добровольное подтверждение соответствия.....	4
4. Обязательное подтверждение соответствия.....	5
5. Участники системы сертификации.....	9
6. Схемы сертификации продукции и услуг.....	10
7. Порядок обязательного подтверждения соответствия.....	13
8. Организация деятельности органов по сертификации.....	14
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	16
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	17
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	17
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	17
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	18

Деятельность по установлению требований к качеству продукции, услуг, процессам их производства и реализации основана на системах стандартизации, оценки соответствия.

В условиях государственного управления экономикой в процессе управления качеством участвовали с одной стороны - государство в лице предприятий, выпускающих продукцию и оказывающих услуги, совместно с контролирующими и регулирующими органами, а с другой – потребители.

В составе органов, контролирующей деятельность предприятий по качеству продукции, входили отделы технического контроля предприятий, ведомственные комиссии, органы вневедомственного контроля. Главная задача контролирующих органов – предотвращение выпуска предприятиями продукции или услуг, не соответствующих требованиям стандартов и технических условий, утверждённым образцам, положениям проектно - конструкторской и технологической документации, условиям поставки и договоров.

В девяностых годах прошлого века в ходе становления в России экономики рыночного типа получили развитие существенные процессы:

- появление производителей продукции и услуг негосударственных форм собственности;
- увеличение номенклатуры и объёма товаров и услуг;
- расширение внутреннего и международного товарообмена;
- усиление внутренней и международной конкуренции производителей товаров и услуг;
- возникновение реальных перспектив вступления России в международные экономические и торговые организации – Европейский Союз, ВТО.

Названные процессы в сочетании с мировым техническим прогрессом привели к необходимости изменения системы оценки и управления качеством продукции и услуг. В этих условиях эффективным способом гарантии качества, широко применяемым в мировой практике, явилось подтверждение соответствия требованиям стандартов третьей стороной, независимой от изготовителя (продавца) и потребителя (покупателя), - сертификация.

Становление рыночной экономики было поддержано законодательно основополагающими Федеральными законами Российской Федерации:

- «О защите прав потребителей» от 07.02.92;
- «О стандартизации» от 10.06.93;
- «О сертификации продукции и услуг» от 10.06.93.

Дальнейшее развитие экономики России потребовало совершенствования процессов стандартизации и оценки соответствия. Достижению этой цели призван способствовать федеральный закон «О техническом регулировании» от 27.12.02.

Подтверждение соответствия – документальное удостоверение соответствия продукции, процесса, работы, услуги предъявляемым к ним требованиям. Одной из форм оценки соответствия является общепризнанный в мировой практике способ - *сертификация соответствия*.

Сертификация (лат.) – «сделано верно». Чтобы убедиться в том, что продукция «сделана верно», в процессе сертификации необходимо ответить на вопросы:

- каким требованиям продукция, процесс, работа, услуга должны соответствовать?
- как путём можно получить доказательства этого соответствия?

1 Основные понятия

Аккредитация – официальное признание компетентности физического или юридического лица выполнять работы в области оценки соответствия.

Декларирование соответствия – форма подтверждения соответствия продукции требованиям ТР.

Декларация о соответствии – документ, удостоверяющий соответствие продукции требованиям ТР.

Заявитель – физическое или юридическое лицо, осуществляющее обязательное подтверждение соответствия.

Знак обращения на рынке – обозначение, информирующее приобретателя о соответствии продукции требованиям ТР.

Знак соответствия – обозначение, информирующее приобретателя о соответствии продукции требованиям системы добровольной сертификации или национальному стандарту.

Идентификация продукции – установление тождественности характеристик продукции её существенным признакам.

Орган по сертификации – юридическое лицо или индивидуальный предприниматель, аккредитованные в установленном порядке для выполнения работ по сертификации.

Оценка соответствия – прямое или косвенное определение соблюдения требований, предъявляемых к объекту.

Подтверждение соответствия – документальное удостоверение соответствия продукции, объектов, процессов требованиям ТР, положениям стандартов, условиям договоров.

Приобретатель – юридическое или физическое лицо, получающее товар или услугу для производственных, бытовых или личных целей.

Сертификация – форма осуществляемого органом по сертификации подтверждения соответствия объекта требованиям ТР, положениям стандартов или условиям договоров.

Сертификат соответствия – документ, удостоверяющий соответствие объекта требованиям ТР, положениям стандартов, условиям договоров.

Система сертификации – совокупность правил проведения сертификации, участников сертификации, правил функционирования системы.

Схема сертификации – состав, порядок и последовательность действий третьей стороны по оценке соответствия продукции, услуг, систем качества.

Форма подтверждения соответствия – определённый порядок документального удостоверения соответствия продукции или иных объектов, выполнения работ или оказания услуг требованиям ТР, положениям стандартов, условиям договоров.

2 Цели, принципы и формы подтверждения соответствия

Подтверждение соответствия осуществляют в *целях*:

- удостоверения соответствия продукции, процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации, работ, услуг или иных объектов требованиям ТР, стандартов и условиям договоров;
- содействия приобретателям в компетентном выборе продукции, работ, услуг;

- повышения конкурентоспособности продукции, работ, услуг на российском и международном рынках;
- создания условий для обеспечения свободного перемещения товаров по территории РФ;
- осуществления международного экономического, научно - технического сотрудничества и международной торговли.

Подтверждение соответствия осуществляют на основе *принципов*:

- доступности информации о порядке осуществления подтверждения соответствия заинтересованным лицам;
- недопустимости применения обязательного подтверждения соответствия к объектам, в отношении которых не установлены требования ТР;
- установления перечня форм и схем обязательного подтверждения соответствия в отношении определённых видов продукции в соответствующем ТР;
- уменьшения сроков осуществления обязательного подтверждения и затрат заявителя;
- недопустимости принуждения к осуществлению добровольного подтверждения соответствия, в том числе в определённой системе добровольной сертификации;
- защиты имущественных интересов заявителей;
- соблюдения коммерческой тайны в отношении сведений, полученных при осуществлении подтверждения соответствия;
- недопустимости подмены обязательного подтверждения соответствия добровольной сертификацией.

Подтверждение соответствия применяется равным образом и в равной мере независимо от:

- страны или места происхождения продукции, осуществления процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации, выполнения работ и оказания услуг;
- видов или особенностей сделок и лиц, которые являются изготовителями, исполнителями, продавцами, приобретателями, конечными потребителями.

Подтверждение соответствия на территории РФ имеет *характер*:

- *добровольный*;
- *обязательный*.

Добровольное подтверждение соответствия осуществляют в *форме*:

- *добровольной сертификации*.

Обязательное подтверждение соответствия осуществляют в *формах*:

- *принятия декларации о соответствии*;
- *обязательной сертификации*.

Порядок применения форм обязательного подтверждения устанавливает федеральный закон «О техническом регулировании».

3 Добровольное подтверждение соответствия.

Добровольное подтверждение соответствия осуществляется по инициативе заявителя на условиях договора между заявителем и органом по сертификации в форме добровольной сертификации. Добровольное подтверждение соответствия осуществляется для установления соответствия товара, услуги требованиям национальных стандартов, стандартов организаций, систем добровольной сертификации, условиям договоров.

Орган по добровольной сертификации:

- осуществляет подтверждение соответствия объектов добровольного подтверждения соответствия;
- оформляет и выдаёт сертификаты соответствия на объекты, прошедшие добровольную сертификацию;

- предоставляет заявителям право на применение знака соответствия, предусмотренного соответствующей системой добровольной сертификации;

- приостанавливает или прекращает действие выданных им сертификатов соответствия.

Система добровольной сертификации может быть создана юридическими лицами или индивидуальными предпринимателями. Система добровольной сертификации устанавливает:

- перечень объектов добровольной сертификации и их характеристик;
- правила выполнения работ по сертификации;
- порядок оплаты работ по сертификации;
- возможность применения знака соответствия.

Система добровольной сертификации проходит регистрацию в федеральном органе по техническому регулированию, который ведёт единый реестр зарегистрированных систем добровольной сертификации.

Системы добровольной сертификации характерны:

- активной ролью заявителя (выбирает требования к объекту, методы проверки, стандарты и другие нормативные документы, систему и схему сертификации);
- самоорганизацией системы (создание системы возможно любым субъектом хозяйственной деятельности, юридическим или физическим лицом);
- открытостью, возможностью для заинтересованных сторон ознакомиться с составом участников, правилами и процедурами сертификации;
- самостоятельностью, невмешательством федеральных и местных органов власти, общественных структур в деятельность системы.

Объекты, сертифицированные в системе добровольной сертификации, могут быть маркированы *знаком соответствия* системы. Применение знака соответствия национальному стандарту осуществляется заявителем на добровольной основе любым удобным для него способом (типографской печатью, тонкоплёночными технологиями, голографическими изображениями), месте (на товаре, упаковке, технической и сопроводительной документации, рекламе) в порядке, установленном национальным органом по стандартизации.

Знак соответствия:

- убеждает приобретателя, потребителя в надлежащем качестве и безопасности товара, услуги;
- помогает органам госнадзора принять решение о возможности реализации товара;
- является для страховых компаний гарантией безопасности товара.

В РФ действуют более ста систем добровольной сертификации, в том числе системы сертификации:

- в бизнесе и торговле;
- продукции машиностроения и приборостроения «Абрис»;
- веществ и материалов по химическому составу;
- банковских технологий;
- средств и систем в сфере информатизации;
- объектов и услуг;
- систем качества и производств Росстандарта;
- средств измерений;
- морской техники;
- интеллектуальной собственности;
- услуг связи;
- услуг информационных технологий и систем качества предприятий;
- программных средств, применяемых в обязательном медицинском страховании.

4 Обязательное подтверждение соответствия

Обязательное подтверждение соответствия проводится в случаях, установленных соответствующим ТР. Объектом обязательного подтверждения соответствия может быть только

продукция, выпускаемая в обращение на территории РФ. Форма и схемы устанавливаются ТР с учётом степени риска не достижения его целей. Декларация о соответствии и сертификат соответствия имеют равную юридическую силу на всей территории РФ независимо от схем обязательного подтверждения соответствия. Работы по обязательному подтверждению соответствия оплачивает заявитель. Стоимость работ устанавливает Правительство РФ.

Декларирование соответствия осуществляют по одному из *вариантов*:

- принятие декларации о соответствии на основании собственных доказательств;
- принятие декларации о соответствии на основании собственных доказательств и доказательств, полученных с участием органа по сертификации и (или) аккредитованной испытательной лаборатории (третьей стороны).

Заявителем может быть юридическое или физическое лицо, являющееся частным предпринимателем, изготовителем, продавцом, представителем иностранного изготовителя на основании договора с ним, круг заявителей устанавливает соответствующий ТР. Схему декларирования соответствия с участием третьей стороны ТР устанавливает, если отсутствие третьей стороны не приводит к достижению целей подтверждения соответствия.

При декларировании соответствия на основании собственных доказательств заявитель самостоятельно формирует доказательные материалы, в качестве которых использует техническую документацию, результаты собственных испытаний, исследований и (или) другие документы. Состав доказательных материалов определяет соответствующий ТР.

При декларировании соответствия на основании собственных доказательств и полученных с участием третьей стороны доказательств заявитель по своему выбору в дополнение к собственным доказательствам включает:

- протоколы исследований, испытаний и измерений, проведённых в испытательной лаборатории (центре);
- сертификат системы качества, в отношении которого предусмотрен контроль (надзор) органа по сертификации.

Декларация о соответствии оформляется на русском языке и содержит:

- наименование и указание местонахождения заявителя;
- наименование и указание местонахождения изготовителя продукции;
- информацию об объекте подтверждения соответствия;
- наименование ТР, на соответствие требованиям которого подтверждается продукция;
- указание схемы декларирования соответствия;
- заявление-декларацию изготовителя, продавца о безопасности продукции при её использовании в соответствии с целевым назначением;
- сведения о проведённых исследованиях, испытаниях и измерениях, сертификате системы качества, а также документах, послуживших основанием для подтверждения соответствия продукции требованиям ТР;
- указание срока действия декларации о соответствии;
- иные сведения, предусмотренные соответствующим ТР.

Срок действия декларации о соответствии определяет соответствующий ТР. Форму декларации утверждает федеральный орган исполнительной власти по техническому регулированию. Оформленная по установленным правилам декларация подлежит регистрации федеральным органом исполнительной власти по техническому регулированию в течение трёх дней. Порядок ведения реестра деклараций о соответствии, форму представления сведений в реестр, порядок оплаты определяет Правительство РФ.

Декларация о соответствии и доказательные документы хранятся у заявителя в течение трёх лет с момента окончания срока действия декларации. Второй экземпляр декларации хранится в федеральном органе исполнительной власти по техническому регулированию.

До вступления в силу соответствующего ТР Правительство РФ определяет и ежегодно дополняет номенклатуру (перечень) отдельных видов товаров и услуг, в отношении которых распространяется возможность принятия декларации о соответствии вместо обязательной сертификации.

В номенклатуру входят:

- продукция резинотехническая;
- приборы и аппараты оптические;
- подшипники;
- садово-огородный инвентарь;
- продукция деревообработки;
- продукция лёгкой и текстильной промышленности;
- продукция пищевой промышленности, животноводства, растениеводства;
- медицинские изделия.

Обязательное подтверждение соответствия в форме обязательной сертификации осуществляет орган по обязательной сертификации на основании договора с заявителем. Схемы сертификации устанавливает соответствующий ТР. Соответствие продукции требованиям ТР подтверждает сертификат соответствия, выданный заявителю органом по сертификации.

Сертификат соответствия оформляется на русском языке и содержит:

- наименование и указание местонахождения заявителя;
- наименование и указание местонахождения изготовителя продукции;
- наименование и указание местонахождения органа по сертификации, выдавшего сертификат соответствия;
- информацию об объекте сертификации;
- наименование ТР, на соответствие требованиям которого проводилась сертификация;
- заявление органа по обязательной сертификации о соответствии продукции, услуги предъявляемым к ней требованиям;
- информацию о проведённых исследованиях, испытаниях, измерениях;
- информацию о документах, представленных заявителем в качестве доказательств соответствия продукции требованиям ТР;
- указание срока действия сертификата соответствия.

Срок действия сертификата определяет соответствующий ТР. Форму сертификата соответствия утверждает федеральный орган исполнительной власти по техническому регулированию.

Обязательную сертификацию осуществляет орган по сертификации, аккредитованный в порядке, установленном Правительством РФ.

Орган по обязательной сертификации:

- привлекает на договорной основе для проведения исследований, испытаний и измерений испытательные лаборатории (центры), аккредитованные в порядке, установленном Правительством РФ;
- проводит анализ документов, принимает решение, оформляет и выдаёт сертификат соответствия, лицензию на применение знака обращения на рынке;
- ведёт реестр выданных им сертификатов соответствия;
- осуществляет инспекционный контроль за объектами сертификации, если контроль предусмотрен схемой обязательной сертификации, договором;
- информирует органы государственного контроля (надзора) о продукции, поступившей на сертификацию, но не прошедшей её;
- приостанавливает или прекращает действие выданного им сертификата соответствия;
- обеспечивает представление заявителям информации о порядке проведения обязательной сертификации;
- устанавливает стоимость работ по сертификации на основании утверждённой Правительством РФ методики определения стоимости работ.

Федеральный орган исполнительной власти по техническому регулированию ведёт единый реестр выданных сертификатов соответствия. Порядок ведения единого реестра, форму предоставления сведений в реестр, порядок оплаты устанавливает Правительство РФ.

Аккредитованная испытательная лаборатория (центр) оформляет результаты исследований, испытаний и измерений протоколами, на основании которых орган по сертификации при-

нимает решение о выдаче или отказе в выдаче сертификата соответствия. Аккредитованная лаборатория (центр) обязана обеспечить достоверность результатов исследований, испытаний и измерений.

Продукция, соответствие которой требованиям ТР подтверждено в установленном порядке, может быть маркирована *знаком обращения на рынке*. Изображение знака устанавливает Правительство РФ. Знак не является специально защищённым знаком и наносится заявителем в информационных целях любым удобным для него способом.

Заявитель в области обязательного подтверждения соответствия имеет право:

- выбирать форму и схему подтверждения соответствия, предусмотренные для определённых видов продукции соответствующим ТР;
- обращаться для осуществления обязательной сертификации в любой орган по сертификации, область аккредитации которого распространяется на предъявляемую к сертификации продукцию;
- обращаться в орган по аккредитации с жалобами на неправомерные действия органов по сертификации, испытательных лабораторий (центров).

Заявитель в области обязательного подтверждения соответствия обязан:

- обеспечивать соответствие продукции требованиям ТР;
- выпускать в обращение продукцию, подлежащую обязательному подтверждению соответствия, только после подтверждения соответствия;
- указывать в сопроводительной технической документации и при маркировке продукции сведения о сертификате или декларации соответствия;
- предъявлять в органы государственного контроля (надзора) за соблюдением требований ТР, а также другим заинтересованным лицам документы, свидетельствующие о подтверждении соответствия – декларацию, сертификат соответствия или их копии;
- приостанавливать или прекращать реализацию продукции, если истёк срок действия, приостановлено или прекращено действие декларации, сертификата соответствия;
- извещать орган по сертификации об изменениях, вносимых в техническую документацию или технологические процессы производства сертифицированной продукции;
- приостанавливать производство продукции, которая прошла подтверждение соответствия и не удовлетворяет требованиям ТР на основании решений органов государственного контроля (надзора).

При ввозе на территорию РФ продукции, подлежащей обязательному подтверждению соответствия, заявитель одновременно с таможенной декларацией передаёт в таможенные органы декларацию о соответствии или сертификат соответствия. Полученные за пределами территории РФ документы о подтверждении соответствия, протоколы исследований, испытаний и измерений продукции могут быть признаны в соответствии с международными договорами РФ.

В РФ действуют несколько десятков самостоятельных систем обязательного подтверждения соответствия, в том числе системы обязательной сертификации:

- авиационной техники и объектов гражданской авиации;
- посуды;
- лесопромышленной продукции;
- товаров детского ассортимента;
- электрооборудования на соответствие стандартам безопасности;
- металлорежущего, деревообрабатывающего и слесарно-монтажного инструмента;
- металлообрабатывающих станков;
- сельскохозяйственной техники;
- транспортных средств и прицепов;
- технических средств на электромагнитную совместимость;
- нефтепродуктов;
- пищевых продуктов и продовольственного сырья;
- химической продукции;
- «Электросвязь».

Документы об аккредитации, выданные органам по сертификации и аккредитованным испытательным лабораториям (центрам) до вступления в силу федерального закона «О техническом регулировании», а также документы, подтверждающие соответствие (сертификат соответствия, декларация о соответствии) считаются действительными до окончания срока, установленного в них.

Номенклатура продукции, подлежащих обязательному подтверждению соответствия и подтверждение соответствия которой осуществляется в форме принятия декларации о соответствии, определено Правительством Российской Федерации в постановлении от 1 декабря 2009 г. № 982 «Об утверждении единого перечня продукции, подлежащей обязательной сертификации, и единого перечня продукции, подтверждение соответствия которой осуществляется в форме принятия декларации о соответствии».

Пример перечня приведен в таблице 1.

Таблица 1 ИНФОРМАЦИЯ О ПРОДУКЦИИ, ПОДЛЕЖАЩЕЙ ОБЯЗАТЕЛЬНОМУ ПОДТВЕРЖДЕНИЮ СООТВЕТСТВИЯ (В ФОРМЕ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ СЕРТИФИКАЦИИ) В СИСТЕМЕ СЕРТИФИКАЦИИ ГОСТ Р, С УКАЗАНИЕМ НОРМАТИВНЫХ ДОКУМЕНТОВ, УСТАНОВЛИВАЮЩИХ ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ¹

Наименование объекта	Код позиции объекта по ОК 005-93 [ОКП]	Обозначение определяющего нормативного документа	Подтверждаемые требования определяющего нормативного документа
1	2	3	4
0110 Электроэнергия			
Электрическая энергия в электрических сетях общего назначения переменного трехфазного и однофазного тока частотой 50 Гц	01 1000	ГОСТ 13109-97	Пп. 5.2 (в части предельно допускаемых значений), 5.6
0251 Нефтепродукты светлые. Альтернативные виды топлива			
Этанольное моторное топливо для автомобильных двигателей с принудительным зажиганием. Бензолы	02 5141	ГОСТ Р 52201-2004	П. 4.1
0253 Масла смазочные (нефтяные)			
Масла авиационные	02 5311	ГОСТ 21743-76	П. 2.2

5 Участники системы сертификации

Система сертификации – совокупность участников, осуществляющих сертификацию по правилам, установленным в этой системе.

В систему сертификации входят:

- национальный орган по сертификации;

¹ В данном документе учтены изменения в Постановление Правительства РФ от 01.12.2009 № 982, внесенные Постановлениями Правительства РФ от 17.03.2010 № 149, от 20.10.2010 № 848, от 13.11.2010 № 906.

- центральный орган по сертификации;
- орган по сертификации;
- испытательная лаборатория (центр);
- совет по сертификации;
- научно-методический центр по сертификации;
- комиссия по апелляциям;
- заявители сертификации.

Национальный орган по сертификации - федеральный орган исполнительной власти - Федеральное агентство РФ по техническому регулированию и метрологии, осуществляющий организацию работ по обязательной сертификации в соответствии с законодательными актами.

Центральный орган по сертификации – федеральный орган исполнительной власти, осуществляющий разработку систем, правил, порядков сертификации однородной продукции.

Орган по сертификации – региональный орган, проводящий сертификацию, созданный на базе организаций, имеющих статус юридического лица и являющийся третьей стороной. Основные функции органа:

- формирование и актуализация фонда нормативных документов;
- разработка и ведение организационно-методических документов;
- приём и рассмотрение заявок на сертификацию;
- определение испытательной лаборатории, органа по оценке системы качества, проверки производства;
- оформление и выдача сертификата установленной формы, регистрация в Государственном реестре;
- признание зарубежных сертификатов;
- организация инспекционного контроля продукции, системы качества;
- отмена или приостановление действия сертификатов по результатам инспекционного контроля;

Заявители должны иметь беспрепятственный доступ к информации об услугах органа, правилах сертификации, результатах испытаний и сертификации, исключая информацию конфиденциального характера или содержащую коммерческую тайну.

Испытательная лаборатория (центр) – организация, имеющая статус юридического лица, являющаяся третьей стороной и осуществляющая для целей сертификации испытания конкретного вида продукции или конкретные виды испытаний с оформлением протоколов.

Совет по сертификации – орган, разрабатывающий рекомендации по формированию единой политики сертификации, повышению эффективности работ, распространению информации о деятельности системы. В состав совета входят представители центрального органа по сертификации, Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии, министерств, ведомств, служб, агентств, изготовителей продукции, испытательных лабораторий, общественных организаций.

Научно-методический центр по сертификации – центр, созданный при центральном органе по сертификации и осуществляющий системные исследования, разрабатывающий методические и практические рекомендации для ведения технико-экономического анализа работ по сертификации.

Комиссия по апелляциям – комиссия, рассматривающая в установленный срок жалобы, поданные по результатам сертификации, извещает подателя и орган по сертификации о принятом решении. Комиссию создаёт центральный орган по сертификации для рассмотрения жалоб и решения спорных вопросов. В работе комиссии участвуют представители Федерального агентства РФ по техническому регулированию и метрологии, министерств, ведомств, служб, агентств, органов по сертификации, испытательных лабораторий, изготовителей сертифицируемой продукции.

Заявители сертификации – изготовители продукции, исполнители работ, продавцы, обратившиеся в орган по сертификации. Заявители обязаны:

- направлять заявку на проведение сертификации, предоставлять продукцию, необходимую нормативную, техническую и иную документацию;
- обеспечивать соответствие реализуемой продукции требованиям нормативных документов;
- маркировать продукцию знаком обращения на рынке;
- обеспечивать беспрепятственное выполнение полномочий должностными лицами органов по сертификации и инспекционному контролю;
- приостанавливать или прекращать реализацию продукции, если она не отвечает требованиям нормативных документов.

Права и обязанности заявителя регламентированы федеральным законом «О техническом регулировании».

6 Схемы сертификации продукции и услуг

Схема сертификации продукции – перечень мероприятий и последовательность действий третьей стороны по оценке соответствия различных видов продукции или услуг. Мероприятия объединены в три группы:

- испытания в испытательной лаборатории;
- проверка производства (системы качества);
- инспекционный контроль сертифицированной продукции (системы качества).

Среди мероприятий:

- испытания образца или партии продукции;
- анализ состояния производства, системы качества;
- рассмотрение декларации о соответствии;
- рассмотрение дополнительных документов, полученных заявителем помимо сертификации (протоколы приёмочных испытаний, гигиенический сертификат, ветеринарный сертификат, сертификат пожарной безопасности, сертификаты или декларации субпоставщиков, сертификаты происхождения, протоколы испытаний в зарубежных лабораториях).

Система сертификации продукции предусматривает несколько схем. Выбор схемы зависит: от вида продукции; особенностей производства, испытаний, поставки, использования продукции; требуемого уровня доказательности; возможных затрат заявителя. Схему устанавливает ТР.

Схемы сертификации продукции, применяемые в РФ, разработанные с учётом рекомендаций ИСО/МЭК и практики подтверждения соответствия ЕС, приведены в табл. 2.

Схемы 1...8 полностью соответствуют рекомендациям ИСО/МЭК. В российской практике дополнительно применяют модифицированные схемы 2а, 3а, 4а, а также схемы 9...10а, основанные на декларации изготовителя.

Современным актуальным направлением развития сертификации в российской и мировой практике является сертификация услуг (см. табл.3.1).

Объектами сертификации в сфере услуг могут быть:

- услуги, работы;
- организации, предоставляющие услуги, выполняющие работы;
- персонал, предоставляющий услуги, выполняющий работы;
- производственный процесс;
- система управления качеством.

Схемы, относящиеся к сертификации услуг и работ, включают:

- оценку мастерства исполнителя, процесса оказания услуги;
- аттестацию предприятия, сертификацию системы качества;
- проверку результатов оказания услуги;
- инспекционный контроль за сертифицированными услугами.

Таблица 2 - Схемы сертификации продукции

№ схемы	Испытания в испытательных лабо- раториях	Проверка производства (системы качества)	Инспекционный контроль сертифицированной продукции (си- стемы качества)
1	Испытание типового об- разца продукции	--	--
1a	То же	Анализ состояния производства	--
2	То же	--	Испытания образцов продукции, взятых у продавца
2a	То же	Анализ состояния производства	То же
3	То же	--	Испытания образцов продукции, взятых у изготовителя
3a	То же	Анализ состояния производства	То же
4	То же	--	Испытания образцов продукции, взятых у продавца
4a	То же	Анализ состояния производства	Испытания образцов продукции, взятых у изготовителя
5	То же	Сертификация произ- водства или системы качества	Контроль стабильности условий производства или функционирова- ния системы качества
6	Рассмотрение деклара- ции о соответствии	Сертификация системы качества	Контроль стабильности функцио- нирования системы качества
7	Испытания партии продукции	--	--
8	Испытания каждого об- разца	--	--
9	Рассмотрение деклара- ции о соответствии	--	--
9a	То же	Анализ состояния производства	--
10	То же	--	Испытания образцов, взятых у из- готовителя или продавца
10a	То же	Анализ состояния производства	То же

Особенности услуг как объекта сертификации:

- субъективность проверки результата услуги (например, причёски);
- невозможность испытаний результата услуги (испытаний сложной бытовой техники после ремонта по установленным жёстким правилам испытаний);
- непосредственный контакт исполнителя и потребителя услуги требует оценки мастерства исполнителя с учётом этики общения (услуги косметического кабинета);
- предоставление услуги и её потребление происходит одновременно (парикмахерские услуги);
- некоторые характеристики услуг зависят от региона (транспортное обслуживание, общественное питание).

Схемы сертификации услуг, применяемые в РФ, приведены в табл. 3.

Таблица 3 -Схемы сертификации услуг

№ схе- мы	Оценка мастер- ства ис- полните- ля	Оценка процесса оказания услуги	Аттеста- ция пред- приятия	Сертифика- ция системы ка- чества	Выборочная проверка результата услуги	Инспекционный контроль
1	Оценка мастер- ства	--	--	--	Выборочная проверка	Проверка результатов услуги
2	--	Оценка процесса	--	--	Выборочная проверка	Контроль стабильности процесса оказания услуги
3	--	--	--	--	Выборочная проверка	Выборочная проверка резуль- тата услуги
4	--	--	Аттеста- ция	--	Выборочная проверка	То же
5	--	--	--	Сертифика- ция	--	Контроль стабильности функционирова- ния системы

7 Порядок обязательного подтверждения соответствия

Порядок подтверждения соответствия на примере наиболее сложной процедуры под-
тверждения соответствия в форме обязательной сертификации можно представить в виде эта-
пов:

- подача заявки на сертификацию;
- оценка соответствия продукции (услуг), системы качества, персонала;
- анализ документов;
- принятие решения;
- оформление и выдача сертификата соответствия;
- оформление и выдача лицензии на применение знака обращения на рынке;
- инспекционный контроль.
- мероприятия по результатам инспекционного контроля.

Подача заявки на сертификацию – заявитель выбирает орган по сертификации и направляет заявку установленной формы. При отсутствии органа по сертификации заявитель может обратиться в территориальный орган Федеральной службы РФ по техническому регулированию и метрологии или иной орган исполнительной власти. Орган по сертификации в течение одного месяца сообщает заявителю своё решение, в котором указаны условия сертификации – схема, наименование испытательной лаборатории, перечень нормативных документов, на соответствие которым будет проведена сертификация.

Оценка соответствия – имеет особенности в зависимости от объекта (схемы) сертификации. Для продукции – аккредитованная испытательная лаборатория осуществляет отбор и идентификацию образцов изделий, проводит испытания, оформляет и передаёт протоколы результатов испытаний заявителю и в орган по сертификации. Если схема предусматривает проверку производства, системы качества комиссия органа по сертификации проводит эти мероприятия и оформляет их актами. Для услуг (работ) орган по сертификации проводит мероприя-
тия, соответствующие принятой схеме.

Анализ документов – протоколы испытаний, акты оценки производства, системы качества, квалификации персонала и иные документы, представленные заявителем, подвергаются анализу, для подготовки решения о соответствии продукции (услуг) требованиям ТР.

Принятие решения – на основании анализа документов, подготовленных органом по сертификации, испытательной лабораторией и представленные заявителем, эксперт составляет заключение, орган по сертификации принимает решение о соответствии продукции (услуг) требованиям ТР.

Оформление и выдача сертификата соответствия, лицензии на применение знака обращения на рынке – если решение положительное, орган по сертификации оформляет и выдаёт сертификат соответствия, лицензию на применение знака обращения на рынке, регистрирует выданные документы в Государственном реестре. Если решение отрицательное, орган по сертификации выдаёт отказ с указанием причин. Форма сертификата соответствия, срок его действия определяются правилами системы сертификации.

В сертификате соответствия продукции указаны:

- регистрационный номер, срок действия сертификата (3...5 лет);
- наименование органа по сертификации, выдавшего сертификат;
- наименование продукции, код по ОКП;
- заявление о соответствии продукции предъявляемым требованиям;
- нормативные документы, на соответствие которым выдан сертификат;
- протоколы исследований, акты проверки производства и иные документы, на основании которых выдан сертификат соответствия;
- подписи эксперта, руководителя органа по сертификации.

Инспекционный контроль – проводит орган, выдавший сертификат соответствия, если инспекционный контроль предусмотрен схемой сертификации. Контроль проходит в виде плановых (один раз в год в течение срока действия сертификата) и внеплановых (при поступлении рекламаций, при внесении существенных изменений в конструкцию изделия) проверок. В инспекционную комиссию входят представители территориального органа Федеральной службы РФ по техническому регулированию и метрологии, обществ потребителей и других заинтересованных организаций. Инспекционный контроль включает анализ информации, полученной в ходе проверок.

По результатам инспекционного контроля эксперт органа по сертификации составляет акт и принимает решение:

- о продолжении действия сертификата соответствия;
- о приостановлении или отмене действия сертификата соответствия.

Отмена действия сертификата соответствия происходит при несоответствии продукции (услуги) требованиям ТР, при изменении нормативного документа на предмет сертификации.

Мероприятия по результатам инспекционного контроля - проводит изготовитель на основании предписания об устранении нарушений требований ТР, выданном органом государственного контроля (надзора).

Обязательное подтверждение соответствия продукции в форме декларирования соответствия, добровольная сертификация проходят по упрощенной процедуре. При добровольной сертификации систему добровольной, а при её отсутствии систему обязательной сертификации, схему сертификации выбирает заявитель. При положительном решении органа по подтверждению соответствия заявитель получает документы установленной формы - декларацию соответствия, сертификат соответствия. Указанные документы имеют одинаковую юридическую силу.

8 Организация деятельности органов по сертификации

Качество сертификации товаров и услуг определяет высокая компетентность и независимость органов по сертификации, а также способность удовлетворять запросы заявителей и других заинтересованных лиц.

Деятельность органа по сертификации должна быть:

- открытой в информационном обеспечении;
- доступной в организационном и финансовом отношениях;
- антидискриминационной по признакам формы собственности и страны нахождения изготовителя (поставщика).

В административную структуру органа по сертификации входят:

- исполнительный директор;
- координационный (управляющий) совет;
- наблюдательный совет;
- комиссия по сертификации;
- комиссия по оценке системы качества;
- апелляционная комиссия;
- испытательная лаборатория.

Исполнительный директор - руководит текущей работой органа по сертификации в области аккредитации.

Координационный (управляющий) совет - обеспечивает деятельность органа по сертификации. Основные функции координационного совета:

- формирование и контроль реализации политики, определяющей деятельность органа;
- контроль стоимости работ по сертификации;
- определение в необходимых случаях состава штатных специалистов, привлекаемых на договорных условиях для выполнения работ по сертификации;
- организация взаимодействия с национальным органом по сертификации и другими организациями, занимающимися вопросами оценки соответствия.

В координационный совет входят представители всех заинтересованных структур - министерств, служб, агентств, профессиональных ассоциаций, банков, страховых компаний, промышленных предприятий, научных и учебных организаций.

Наблюдательный совет - осуществляет общий надзор за деятельностью органа по сертификации, состоит из представителей организации учредителя.

Комиссии по сертификации и оценке системы качества - изучают отчёты экспертов, проводивших оценку соответствия, и принимают решения о выдаче или отказе в выдаче сертификата соответствия (см. прил.1).

Апелляционная комиссия - рассматривает жалобы, поступившие от заявителей на действия и решения органа по сертификации. В комиссию входят специалисты в области сертификации, независимые юристы.

Испытательная лаборатория - проводит испытания и оформляет протоколы испытаний продукции (см. прил.2), может входить в состав органа по сертификации или быть самостоятельной организацией.

Аккредитацию органов по сертификации и испытательных лабораторий (центров) осуществляют в целях:

- подтверждения компетентности органов по сертификации и испытательных лабораторий (центров), выполняющих работу по подтверждению соответствия;
- обеспечения доверия изготовителей, продавцов и приобретателей к деятельности органов по сертификации и аккредитованных испытательных лабораторий (центров);
- создания условий для признания результатов деятельности органов по сертификации и аккредитованных испытательных лабораторий (центров).

Аккредитацию органов по сертификации и испытательных лабораторий (центров), выполняющих работы по подтверждению соответствия, осуществляют на основе принципов:

- открытости и доступности правил аккредитации;
- компетентности и независимости органов, осуществляющих аккредитацию;
- недопустимости ограничения конкуренции и создания препятствий пользованию услугами органов по сертификации и аккредитованных испытательных лабораторий (центров);
- обеспечения равных условий лицам, претендующим на получение аккредитации;

- недопустимости совмещения полномочий на аккредитацию и подтверждение соответствия;
- недопустимости установления пределов действия документов об аккредитации на отдельных территориях.

Аккредитацию органов по сертификации и испытательных лабораторий (центров), выполняющих работы по подтверждению соответствия, осуществляют в порядке, установленном Правительством РФ.

Испытания продукции в целях оценки соответствия осуществляют испытательные лаборатории. Испытательная лаборатория может быть самостоятельной организацией, частью органа по сертификации или другой организации. Основные требования, предъявляемые к испытательным лабораториям (центрам):

- обладание статусом юридического лица;
- обеспечение испытаний квалифицированным персоналом, оборудованием, методиками;
- исключение возможности оказания давления на сотрудников с целью фальсификации результатов испытаний;
- предоставление результатов испытаний в виде протоколов установленной формы;
- соблюдение мер секретности конфиденциальной информации и защиты прав собственности.

Сведения о товаре (надёжности, экономичности, технических параметрах) с целью сравнения аналогичных товаров различных производителей получают по результатам *сравнительных испытаний*, проводимых в аккредитованных испытательных лабораториях. Анализ результатов публикуют в специальных изданиях.

Полученные за пределами территории РФ документы о подтверждении соответствия, знаки соответствия, протоколы исследований (испытаний) и измерений продукции могут быть признаны в соответствии с международными договорами РФ. При отсутствии такого договора товары, ввозимые на территорию РФ, проходят процедуру подтверждения соответствия на общих основаниях.

Орган по сертификации и его должностное лицо, нарушившие правила выполнения работ по сертификации, если такое нарушение повлекло за собой выпуск в обращение продукции, не соответствующей требованиям ТР, несут ответственность в соответствии с законодательством РФ.

Аккредитованная испытательная лаборатория (центр), эксперты за предоставление недостоверных или необъективных результатов исследований (испытаний) измерений несут ответственность в соответствии с законодательством РФ.

Финансирование работ в области технического регулирования осуществляют за счёт бюджетных средств, которые идут на:

- проведение государственного контроля (надзора) за соблюдением требований ТР;
- создание и ведение Федерального информационного фонда ТР и стандартов;
- реализацию программы разработки ТР, национальных стандартов, а также проведение экспертиз проектов ТР и стандартов;
- разработку общероссийских классификаторов;
- уплату взносов в международные организации по стандартизации.

Средства в федеральный бюджет поступают в виде:

- средств, полученных от заявителей за проведение работ по оценке соответствия;
- штрафов, накладываемых органами государственного контроля (надзора) на юридических и физических лиц;
- средств, вырученных от распространения стандартов, каталогов, справочников.

Расширение международного общественного движения в защиту прав человека и возращание конкурентной борьбы на товарном рынке привели к повышению внимания к социальной лояльности.

Социальная лояльность – степень выполнения фирмой требований конвенций Международной организации труда (МОТ) и ООН в отношении использования детского труда, принудительного труда, обеспечения безопасности и гигиены работ, рабочего времени и вознаграждения, соблюдения свободы ассоциации и прав заключения коллективных договоров.

Принят международный стандарт SA 8000, который базируется на Всеобщей декларации прав человека, Конвенции ООН о правах ребёнка, рекомендациях Международной организации труда (МОТ), стандартах ИСО. Производители товаров заинтересованы в проведении независимого аудита, сертификации по требованию SA 8000 с целью получения сертификата соответствия социальной лояльности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Восстановление в начале двадцать первого века национального промышленного потенциала Российской Федерации, рост поставок по импорту, расширение списка стран партнёров в международной торговле привели к лавинообразному увеличению объёма, расширению номенклатуры товаров и услуг, подлежащих обязательной оценке соответствия. По опыту мировой практики и данным Федерального агентства Российской Федерации и по техническому регулированию и метрологии объём потенциально опасной продукции, подлежащей обязательной сертификации, достигает 80...90% от общего объёма и имеет тенденцию роста.

Практика сертификации в РФ выявила ряд существенных недостатков:

- неэффективность организационных принципов сертификации;
- завышенную номенклатуру товаров и услуг, подлежащих обязательной сертификации;
- необоснованный выбор сложных схем сертификации;
- неравномерное территориальное размещение органов по сертификации и испытательных лабораторий;
- дефицит квалифицированных кадров.

Перечисленные факторы привели к неоправданным материальным, временным, финансовым и людским затратам на организацию и осуществление процедур обязательного подтверждения соответствия.

В начале двадцать первого века в Российской Федерации назрела необходимость совершенствования и оптимизации процедур подтверждения соответствия, увеличения доли товаров и услуг, для которых обязательная сертификация может быть заменена менее затратной формой подтверждения соответствия - декларированием соответствия.

Федеральный закон «О техническом регулировании» предоставил новые возможности по дальнейшему совершенствованию оценки соответствия товаров и услуг обязательным требованиям стандартов.

Дальнейшее совершенствование процедур оценки соответствия является необходимым и определяющим условием роста национального валового продукта, успешной интеграции экономики России в мировую экономическую систему, расширения международного экономического и научно-технического сотрудничества, роста объёма и совершенствования структуры международного товарообмена в интересах нашего государства.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Цели, принципы подтверждения соответствия.
2. Характер, формы подтверждения соответствия.
3. Добровольное подтверждение соответствия.
4. Обязательное подтверждение соответствия по форме декларирования.
5. Обязательное подтверждение соответствия по форме сертификации.
6. Участники системы сертификации.
7. Схемы сертификации продукции.
8. Схемы сертификации услуг.
9. Порядок обязательного подтверждения соответствия.
10. Организация деятельности органов по сертификации.
11. Цели, принципы аккредитации органов по сертификации.
12. Финансирование работ по сертификации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Крылова Г.Д. Основы стандартизации, сертификации, метрологии: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 711 с.
2. Сертификация. Сборник нормативных документов Российской Федерации. / Под ред. д.т.н., проф. Фомина В.Н., - М.: Ассоциация авторов и издателей «Тандем». Издательство «ЭКМОС». – 2000. - 144 с.
3. Никифоров А.Д., Бакиев Т.А. Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. пособие. – М.: Высш. Школа, 2002. – 422 с. : ил.
4. Басаков М.И. Сертификации продукции и услуг с основами стандартизации и метрологии: Учебное пособие. Издание 2-е, испр. и доп. – Ростов на /Д: издательский центр «МарТ», 2002. – 256 с.
5. Федеральный закон «О техническом регулировании». – М.: Ось-89, 2003. – 48 с. (Актуальный закон).
6. Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегеря В.В. Метрология, стандартизация, сертификация: Учебное пособие. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Логос, 2004. – 560 с.: ил.
7. Лифиц И.М. Стандартизация, метрология и сертификация: Учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт-Издат, 2004. – 335 с.
8. Димов Ю.В. Метрология, стандартизация и сертификация. Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2004. - 432 с.: ил.
9. Закон Российской Федерации «О защите прав потребителей». – М.: ИКЦ «МарТ», 2004. – 48 с.
10. Яблонский О.П., Иванова В.А. Основы стандартизации, метрологии, сертификации: Учебник. – Ростов на/Д: Феникс, 2004. – 448 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ФОРМА СЕРТИФИКАТА СООТВЕТСТВИЯ НА ПРОДУКЦИЮ

ГОССТАНДАРТ РОССИИ СИСТЕМА СЕРТИФИКАЦИИ ГОСТ Р СЕРТИФИКАТ СООТВЕТСТВИЯ № _____		
Срок действия с _____ по _____		
Орган по сертификации _____ _____ _____		
удостоверяет, что должным образом идентифицированная заявителем продукция _____ _____ _____		
изготовитель (продавец) _____ _____ _____		код К-ОКП
соответствует требованиям нормативных документов _____ _____ _____		код ТН ВЭД
сертификат выдан на основании _____ _____ _____		
дополнительная информация _____ _____ _____		
Руководитель органа М.П.	_____ подпись	_____ инициалы, фамилия
Эксперт	_____ подпись	_____ инициалы, фамилия
Сертификат имеет юридическую силу на всей территории Российской Федерации		

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ФОРМА ПРОТОКОЛА ИСПЫТАНИЙ

Испытательная лаборатория _____

Регистрационный номер РОСС RU _____

Юридический адрес _____

Регистрационный номер пробы (образца) _____

ПРОТОКОЛ

испытаний проб (образцов)

от _____ 200 ____ г.

ЗАЯВИТЕЛЬ _____

Наименование пробы (образца) _____

Дата выработки _____

Изготовитель _____

Величина партии _____

Дата получения образца _____

Дата и место отбора проб _____

Дата проведения испытаний _____

Дополнительная информация _____

Проба (образец) испытана на соответствие _____

РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ

№ п/п	Наименование показателей	Результат испытаний	Нормируемые показатели	НД на методы испытаний
1.				
2.				
3.				

Испытание провели:

подпись

(Ф. И. О.)

подпись

(Ф. И. О.)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому

комплексу
С.А. Упоров



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ

ТИПЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Автор: Глушкова Т.А., к.т.н.

Одобен на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 05.10. 2020

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Бондарев В. И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 13.10. 2020

(Дата)

Екатеринбург
2020

Типы распределений

Различают дискретные и непрерывные вероятностные распределения. **Дискретное** распределение характеризуется тем, что оно сосредоточено в конечном или счетном числе точек. **Непрерывное** распределение "размазано" по некоторому вещественному интервалу.

Характеристики распределений

Вероятностное распределение может быть описано несколькими эквивалентными способами. Здесь приведены лишь некоторые из них.

- **Функция распределения.** Определена для любого вещественного распределения. Для случайной величины X ее функцией распределения называется

$$F_X(z) = P(X \leq z), \quad -\infty < z < \infty.$$

- **Плотность распределения.** Определена для непрерывных распределений. Представляет собой производную от функции распределения:

$$f_X(z) = F'_X(z), \quad -\infty < z < \infty.$$

- **Функция вероятности.** Альтернативный способ описания дискретных распределений. Если распределение случайной величины X сосредоточено в конечном или счетном числе точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ то его можно описать вероятностями принятия случайной величиной X соответствующих значений:

Значение	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
Вероятность	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

- Здесь $p_k = f(x_k) = P(X = x_k), k=1,2,\dots,n,\dots$

Параметры распределений

Опишем некоторые параметры распределения.

- **Математическое ожидание (среднее значение) EX** случайной величины X . Представляет собой интеграл вида

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} z dF_X(z).$$

Для непрерывной случайной величины может быть выражено также через плотность ее распределения

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} z f_X(z) dz,$$

а для дискретной случайной величины - через функцию вероятности:

$$EX = \sum_k x_k p_k.$$

- **Дисперсия (рассеяние)** случайной величины X имеет вид

$$DX = E(X - EX)^2.$$

В классических методах теории риска дисперсия часто использовалась в качестве меры риска, измерителя рискованности проектов.

- **Стандартное отклонение** случайной величины X задается выражением

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

- **Асимметрия** распределения случайной величины X :

$$\mathcal{A}(X) = \frac{E(X - EX)^3}{\sigma^3(X)}.$$

характеризует различие "хвостов" распределения; асимметрия положительна при более тяжелом правом хвосте, и отрицательна при более тяжелом левом хвосте. Для симметричных распределений асимметрия равна 0.

- **Острровершинность** распределения случайной величины X :

$$\mathcal{A}(X) = \frac{E(X - EX)^4}{\sigma^4(X)} - 3.$$

характеризует тяжесть "хвостов" распределения; положительные значения этого параметра соответствуют распределениям с более тяжелыми хвостами, чем у нормального распределения.

- **Медианой** $a = \text{med}(X)$ распределения случайной величины X называется корень уравнения

$$F_X(a) = \frac{1}{2}.$$

Медиана является средней характеристикой распределения в том смысле, что X с равными вероятностями принимает значения, лежащие справа и слева от a . Преимуществом медианы перед математическим ожиданием является тот факт, что математическое ожидание может быть неопределенным, если задающий его интеграл (в дискретном случае - ряд) расходится, как, например, в случае распределения Коши. Недостатком медианы является ее возможная неоднозначность для дискретных распределений. Медиана симметричного распределения совпадает с его средним значением (если последнее существует).

- **Модой** распределения называется наиболее вероятное значение случайной величины: в непрерывном случае - точка максимума плотности распределения, в дискретном случае - точка максимума функции вероятности. Мода распределения может быть неоднозначной, и использование этого параметра в теории риска ограничено.

Другие характеристики распределений

Вероятностное распределение может быть описано и другими характеристиками. Среди них:

- **Характеристическая функция.** Определена для произвольных распределений.

$$\varphi_X(z) = E \exp(izX) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx) dF_X(x), \quad -\infty < z < \infty.$$

Здесь i - мнимая единица. Для непрерывного распределения характеристическую функцию можно также выразить через плотность распределения:

$$\varphi_X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izx) f_X(x) dx, \quad -\infty < z < \infty,$$

а для дискретного распределения - через функцию вероятности

$$\varphi_X(z) = \sum_k \exp(izx_k) p_k, \quad -\infty < z < \infty.$$

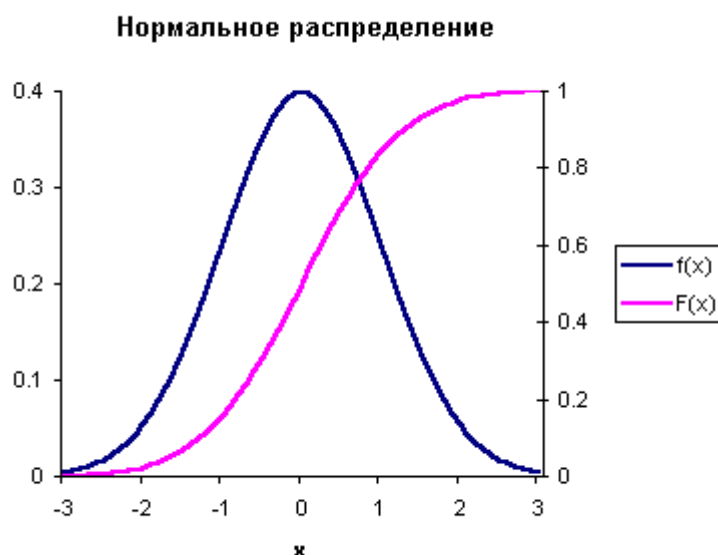
Нормальное распределение

Описание

Нормальным называется вещественное непрерывное распределение с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
, где μ и $\sigma > 0$ - параметры распределения. **Стандартным** называется нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

На следующем рисунке показаны графики плотности распределения (привязан к левой оси ординат) и функции распределения (привязан к правой оси ординат) с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$.



Характеристики

В следующей таблице приведены формулы для вычисления характеристик нормального распределения.

<u>Плотность распределения</u>	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
<u>Функция распределения*</u>	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
<u>Математическое ожидание</u>	μ
<u>Стандартное отклонение</u>	σ
<u>Дисперсия</u>	σ^2
<u>Асимметрия</u>	0
<u>Островершинность</u>	0
<u>Медиана</u>	μ
<u>Мода</u>	μ
<u>Характеристическая функция</u>	$\varphi(z) = \exp(iz\mu - z^2\sigma^2/2)$

* Функция нормального распределения через элементарные функции не выражается.

Моделирование

Простейший метод воспроизведения значений случайной величины с заданным нормальным распределением для использования в методах Монте Карло состоит из следующих шагов:

Получить 12 независимых значений $U_1, \dots, U_{12}$ случайной величины с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$.

Вычислить $N = (U_1 + \dots + U_{12} - 6)$. Величина N хорошо приближает величину со стандартным нормальным распределением (с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$). Преобразованная величина $\sigma N + \mu$ дает желаемый результат.

Распределение Стьюдента

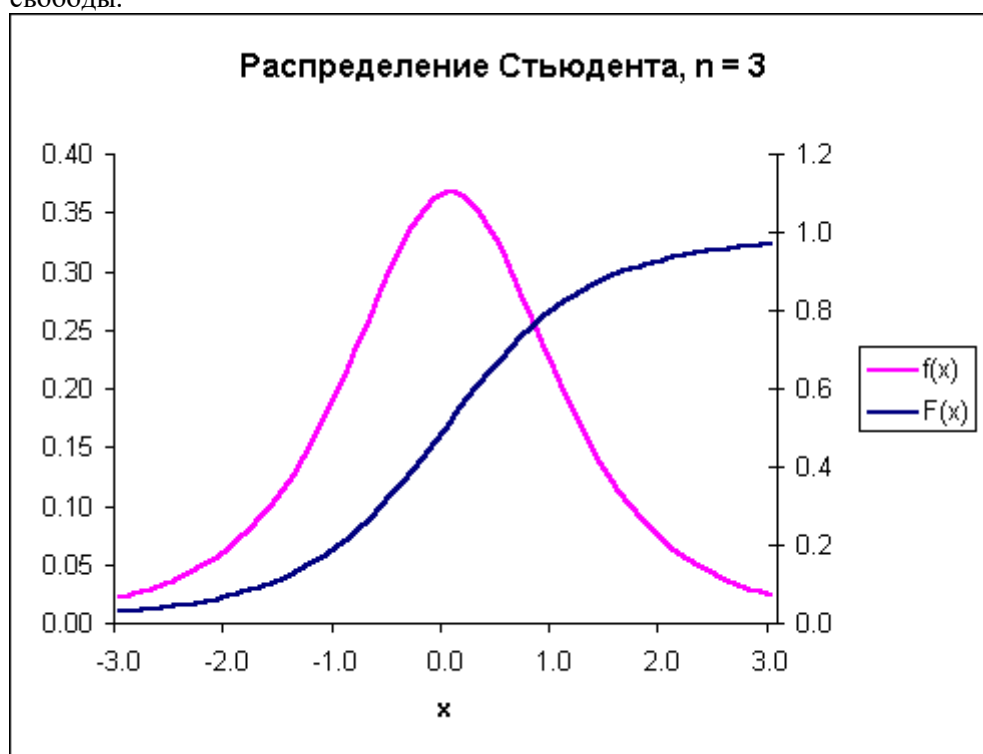
Описание

Распределением Стьюдента с n степенями свободы называется распределение случайной величины

$$t = \xi_0 / ((\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)/n)^{1/2}, \quad (1)$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ - независимые стандартные нормальные случайные величины. Это распределение непрерывно, его плотность и значения параметров приведены ниже в таблице.

На следующем рисунке показаны графики плотности распределения (привязан к левой оси ординат) и функции распределения (привязан к правой оси ординат) Стьюдента с тремя степенями свободы.



Характеристики

В следующей таблице приведены формулы для вычисления характеристик распределения Стьюдента.

<u>Плотность распределения</u>	$f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$
<u>Математическое ожидание</u>	0, ($n > 1$)
<u>Стандартное отклонение</u>	$(n/(n-2))^{1/2}$, ($n > 2$)
<u>Дисперсия</u>	$n/(n-2)$, ($n > 2$)
<u>Асимметрия</u>	0, ($n > 3$)
<u>Медиана</u>	0
<u>Мода</u>	0

Моделирование

Воспроизведение значений случайной величины с распределением Стьюдента с n степенями свободы производится по формуле (1).

Таблица функций распределения Стьюдента

Функции распределения Стьюдента

В следующей таблице приведены значения функции распределения Стьюдента $F_n(x)$ с n степенями

свободы для некоторых значений аргумента x в диапазоне от 0 до 20. В заголовках строк указано значение аргумента x , а в заголовках столбцов - количество степеней свободы n . Так, например, $F_5(0.9) = 0.795$.

Для отрицательных x можно вычислить значение функции по формуле $F_n(x) = 1 - F_n(-x)$. Например, $F_{10}(-1.2) = 1 - F_{10}(1.2) = 1 - 0.871 = 0.129$.

x	1	2	5	10	20	50
0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.1	0.532	0.535	0.538	0.539	0.539	0.540
0.2	0.563	0.570	0.575	0.577	0.578	0.579
0.3	0.593	0.604	0.612	0.615	0.616	0.617
0.4	0.621	0.636	0.647	0.651	0.653	0.655
0.5	0.648	0.667	0.681	0.686	0.689	0.690
0.6	0.672	0.695	0.713	0.719	0.722	0.724
0.7	0.694	0.722	0.742	0.750	0.754	0.756
0.8	0.715	0.746	0.770	0.779	0.783	0.786
0.9	0.733	0.768	0.795	0.805	0.811	0.814
1	0.750	0.789	0.818	0.830	0.835	0.839
1.2	0.779	0.823	0.858	0.871	0.878	0.882
1.4	0.803	0.852	0.890	0.904	0.912	0.916
1.6	0.822	0.875	0.915	0.930	0.937	0.942
1.8	0.839	0.893	0.934	0.949	0.957	0.961
2	0.852	0.908	0.949	0.963	0.970	0.975
2.5	0.879	0.935	0.973	0.984	0.989	0.992
3	0.898	0.952	0.985	0.993	0.996	0.998
3.5	0.911	0.964	0.991	0.997	0.999	1.000
4	0.922	0.971	0.995	0.999	1.000	1.000
4.5	0.930	0.977	0.997	0.999	1.000	1.000
5	0.937	0.981	0.998	1.000	1.000	1.000
6	0.947	0.987	0.999	1.000	1.000	1.000
7	0.955	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000
8	0.960	0.992	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.965	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000
10	0.968	0.995	1.000	1.000	1.000	1.000
12	0.974	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000
14	0.977	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000
16	0.980	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0.982	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000
20	0.984	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000

Таблица функции нормального распределения

Функция стандартного нормального распределения

В следующей таблице приведены значения функции стандартного нормального распределения $\Phi(\cdot)$ для значений аргумента в интервале от 0 до 4 с шагом 0.01. Каждый элемент матрицы представляет значение функции Φ в точке x , равной сумме заголовков строки и столбца. Например, для нахождения значения Φ в точке 0.26, достаточно взять число из строки 0.2 и столбца 0.06, то есть, $\Phi(0.26) = 0.6026$. Аналогично, $\Phi(2.31) = \Phi(2.3 + 0.01) = 0.9896$.

Для отрицательных x можно вычислить значение функции по формуле $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$. Например, $\Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$.

Значения функции нормального распределения $\Phi_{\mu,\sigma}$ с параметрами μ , σ вычисляются по формуле $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi((x - \mu) / \sigma)$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Равномерное распределение

Описание

Говорят, что случайная величина X имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна, принимает значения только на отрезке $[a,b]$, а плотность ее распределения постоянна на отрезке $[a,b]$, и равна 0 вне этого отрезка.

На следующем рисунке показаны графики плотности (привязан к левой вертикальной оси ординат) и функции (привязан к правой оси ординат) равномерного распределения на отрезке $[0,2]$.



Характеристики

В следующей таблице приведены формулы для вычисления характеристик равномерного распределения.

<u>Плотность распределения</u>	$f(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$
<u>Функция распределения</u>	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$
<u>Математическое ожидание</u>	$(a+b)/2$
<u>Стандартное отклонение</u>	$(b-a)/2 \sqrt{3}$
<u>Дисперсия</u>	$(b-a)^2/12$
<u>Асимметрия</u>	0
<u>Островершинность</u>	-6/5

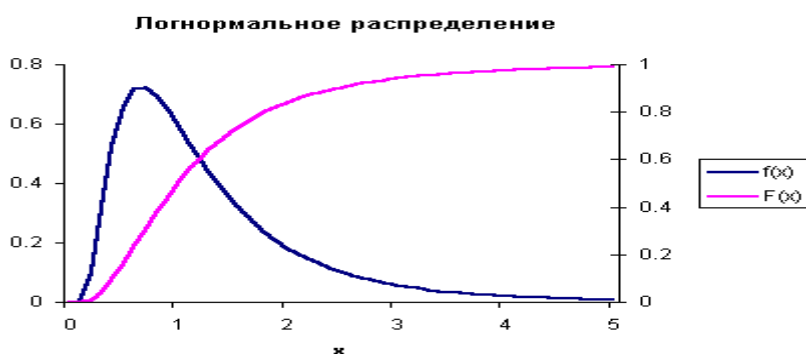
Моделирование

Моделирование значений случайной величины U с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$ доступно в большинстве современных систем программирования. Например, в языке VBA эту роль выполняет функция Rnd(), а в языках Паскаль и Дельфи - функция random.

Логнормальное распределение

Описание

Говорят, что случайная величина X имеет **логнормальное** распределение с параметрами μ , σ , если $X = \exp(Y)$, где Y имеет **нормальное** распределение с параметрами μ , σ . Случайная величина с логнормальным распределением является непрерывной, и принимает только положительные значения. Графики плотности (привязан к левой вертикальной оси ординат) и функции (привязан к правой оси ординат) логнормального распределения с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 0.7$ приведен на следующем рисунке.



Характеристики

В следующей таблице приведены формулы для вычисления характеристик логнормального распределения.

<u>Плотность распределения</u>	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x} \sigma} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
<u>Функция распределения*</u>	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
<u>Математическое ожидание</u>	$\exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$
<u>Стандартное отклонение</u>	$\exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \sqrt{(\exp(\sigma^2) - 1)}$
<u>Дисперсия</u>	$\exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1)$
<u>Асимметрия</u>	$(\exp(\sigma^2) + 2) \sqrt{(\exp(\sigma^2) - 1)}$
<u>Мода</u>	$\exp(\mu - \sigma^2)$

* Функция логнормального распределения F через элементарные функции не выражается. Для приближенного вычисления функции этого распределения с параметрами μ , σ можно воспользоваться формулой $F(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(\ln x)$, где $\Phi_{\mu,\sigma}$ - функция нормального распределения с параметрами μ , σ , способ вычисления которой описан [здесь](#).

Моделирование

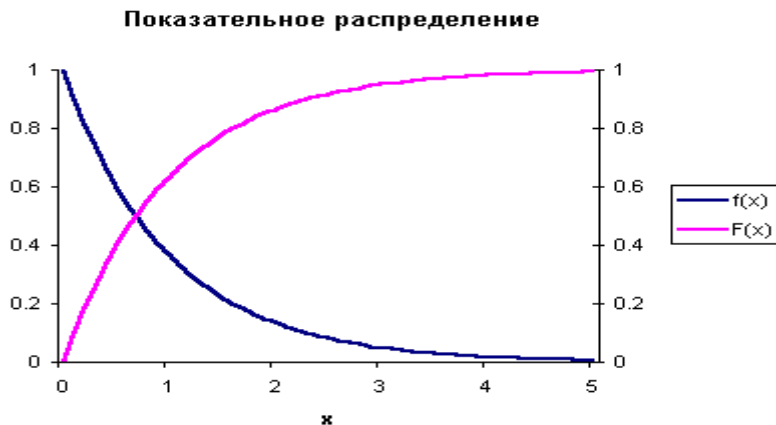
Моделирование значений случайной величины с логнормальным распределением (с параметрами μ , σ) проводится по формуле $X = \exp(Y)$, где Y имеет нормальное распределение с теми же параметрами. Моделирование нормальных величин описано [здесь](#).

Показательное распределение

Описание

Говорят, что случайная величина X имеет **показательное** распределение с параметром $\lambda > 0$, если она непрерывна, принимает только положительные значения, и имеет плотность распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $0 < x < \infty$.

На следующем рисунке показаны графики плотности (привязан к левой вертикальной оси ординат) и функции (привязан к правой оси ординат) показательного распределения с параметром $\lambda = 1$.



Характеристики

В следующей таблице приведены формулы для вычисления характеристик показательного распределения.

<u>Плотность распределения</u>	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
<u>Функция распределения</u>	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
<u>Математическое ожидание</u>	$1 / \lambda$
<u>Стандартное отклонение</u>	$1 / \lambda$
<u>Дисперсия</u>	$1 / \lambda^2$
<u>Асимметрия</u>	2
<u>Острове́ршинность</u>	6
<u>Медиана</u>	$\ln(2) / \lambda$
<u>Мода</u>	0

Моделирование

Моделирование значений случайной величины с показательным распределением (с параметром λ) проводится по формуле $-(\ln U) / \lambda$, где U имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Моделирование равномерных случайных величин описано [здесь](#).

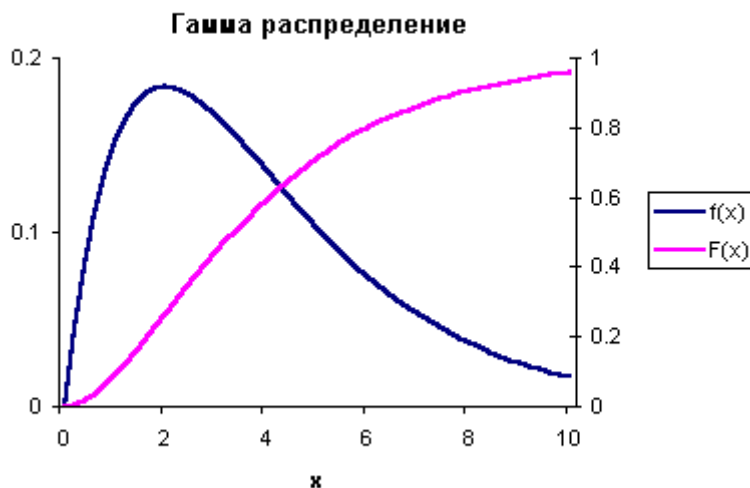
Гамма распределение

Описание

Говорят, что случайная величина X имеет **гамма** распределение с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, если она непрерывна, принимает только положительные значения, и имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

На следующем рисунке показаны графики плотности (привязан к левой вертикальной оси ординат) и функции (привязан к правой оси ординат) гамма распределения с параметрами $\alpha = 2$, $\beta = 2$.



Характеристики

В следующей таблице приведены формулы для вычисления характеристик гамма распределения.

<u>Плотность распределения</u>	$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$
<u>Функция распределения*</u>	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
<u>Математическое ожидание</u>	$\alpha\beta$
<u>Стандартное отклонение</u>	$\sqrt{\alpha\beta}$
<u>Дисперсия</u>	$\alpha\beta^2$
<u>Асимметрия</u>	$2/\sqrt{\alpha}$

* Функция гамма распределения через элементарные функции не выражается.

Моделирование

Моделирование значений случайной величины с гамма распределением (с параметрами α , β) при

целых значениях $\alpha > 0$ проводится по формуле $\sum_{k=1}^{\alpha} P_k$, где $P_k, k = 1, \dots, \alpha$ - независимые реализации показательных случайных величин с параметром $1/\beta$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому
комплексу
С.А. Упоров



**Методические указания к выполнению практических занятий
по курсу**

**МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ
И СЕРТИФИКАЦИЯ**

Применение методов математической статистики

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Глушкова Т.А., к.т.н.

Одобен на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 05.10. 2020

(Дата)

Рассмотрен методической комиссией
факультета

(название факультета)

Председатель

(подпись)

Бондарев В. И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 13.10. 2020

(Дата)

Екатеринбург
2020

При обработке *результатов физических измерений или химических анализов* большое значение имеет анализ содержащихся в них различного рода погрешностей. Для научно - исследовательских работ характерен небольшой объем измерений, из - за чего затрудняется их статистическая обработка. Знание *методов математической статистики* помогает выявлять закономерности, зависимости. Эти методы позволяют грамотно оценивать результаты своей работы, определять "степень доверия" полученным данным.

В методических указаниях приведены термины, схемы и примеры статистической обработки. Необходимые математические основы и приемы просты, не требуют от экспериментатора специальной подготовки. Для проведения анализа данных не нужно применения сложной вычислительной техники – достаточно калькулятора. Этот анализ не занимает много времени и его желательно проводить при обработке каждой серии экспериментальных данных.

1 Метрология – наука об измерениях

В практической жизни человек всюду имеет дело с измерениями. На каждом шагу встречаются измерения таких величин, как длина, объем, вес, время и др.

Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего мира, раскрывая человеку действующие в природе закономерности. Все отрасли техники не могли бы существовать без развернутой системы измерений, определяющих как все технологические процессы, контроль и управление ими, так и свойства и качество выпускаемой продукции.

Отраслью науки, изучающей измерения, является *метрология*.

Метрология в ее современном понимании – наука об измерениях, методах, средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Единство измерений – такое состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности измерений известны с заданной вероятностью. Единство измерений необходимо для того, чтобы можно было сопоставить результаты измерений, выполненных в разных местах, в разное время, с использованием разных методов и средств измерений.

Точность измерений характеризуется близостью их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Таким образом, важнейшей задачей метрологии является усовершенствование эталонов, разработка новых методов точных измерений, обеспечение единства и необходимой точности измерений.

Измерение является важнейшим понятием в метрологии.

Существует несколько видов измерений. При их классификации обычно исходят из характера зависимости измеряемой величины от времени, вида уравнения измерений, условий, определяющих точность результата измерений и способов выражения этих результатов.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения разделяются на

- *статические*, при которых измеряемая величина остается постоянной во времени;
- *динамические*, в процессе которых измеряемая величина изменяется и является непостоянной во времени.

Статическими измерениями являются, например, измерения размеров тела, постоянного давления, динамическими – измерения пульсирующих давлений, вибраций.

По способу получения результатов измерений их разделяют на

- прямые;
- косвенные;
- совокупные;
- совместные.

2 Термины и определения

Термины и определения в соответствии с РМГ 29-99 ГСИ Метрология. Основные термины и определения:

2.1 погрешность результата измерения:

Отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины.

Примечания

1 На практике используют действительное значение величины x_d , в результате чего погрешность измерения $\Delta x_{изм}$ определяют по формуле

$$\Delta x_{изм} = x_{изм} - x_d, \quad (2.1)$$

где $x_{изм}$ - измеренное значение величины.

2 Синонимом термина *погрешность измерения* является термин *ошибка измерения*, применять который не рекомендуется как менее удачный.

2.2 систематическая погрешность измерения:

Составляющая погрешности результата измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Примечание – В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на *постоянные, прогрессивные, периодические* и *погрешности, изменяющиеся по сложному закону*.

Постоянные погрешности – погрешности, которые длительное время сохраняют свое значение, например, в течение времени выполнения всего ряда измерений. Они встречаются наиболее часто.

Прогрессивные погрешности – непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. К ним относятся, например, погрешности вследствие износа измерительных наконечников, контактирующих с деталью при контроле ее прибором активного контроля.

Периодические погрешности – погрешности, значение которых является периодической функцией времени или перемещения указателя измерительного прибора.

Погрешности, изменяющиеся по сложному закону, происходят вследствие совместного действия нескольких систематических погрешностей

2.3 неисключенная систематическая погрешность;

Составляющая погрешности результата измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости.

Примечания

1 Иногда этот вид погрешности называют *неисключенный (ные) остаток (остатки) систематической погрешности*.

2 Неисключенная систематическая погрешность характеризуется ее границами.

Границы неисключенной систематической погрешности Θ при числе слагаемых $N \leq 3$ вычисляют по формуле

$$\Theta = \pm \sum_{i=1}^N |\Theta_i|, \quad (2.2)$$

где Θ_i - граница i -й составляющей неисключенной систематической погрешности.

3 При числе неисключенных систематических погрешностей $N \geq 4$ вычисления проводят по формуле

$$\Theta = \pm K \sqrt{\sum_{i=1}^N \Theta_i^2}, \quad (2.3)$$

где K - коэффициент зависимости отдельных неисключенных систематических погрешностей от выбранной доверительной вероятности P при их равномерном распределении (при $P=0,99$, $K=1,4$). Здесь Θ рассматривается как доверительная квазислучайная погрешность

2.4 случайная погрешность измерения:

Составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях, проведенных с одинаковой тщательностью, одной и той же физической величины

2.5 абсолютная погрешность измерения:

Погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины

2.6 относительная погрешность измерения:

Погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к действительному или измеренному значению измеряемой величины.

Примечание – Относительную погрешность в долях или процентах находят из отношений

$$\delta = \frac{\Delta x}{x}, \text{ или } \delta = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%, \quad (2.4)$$

где Δx - абсолютная погрешность измерений;

x - действительное или измеренное значение величины

2.7 средняя квадратическая погрешность (отклонение) результатов единичных измерений в ряду измерений:

Оценка S рассеяния единичных результатов измерений в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения, вычисляемая по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (2.5)$$

где x_i - результат i -го единичного измерения;

$\bar{x}$ - среднее арифметическое значение измеряемой величины из n единичных результатов.

Примечание - –а практике широко распространен термин *среднее квадратическое отклонение* - –СКО).

2.8 средняя квадратическая погрешность результата измерений среднего арифметического;

Оценка $S_{\bar{x}}$ случайной погрешности среднего арифметического значения результата измерений одной и той же величины в данном ряду измерений, вычисляемая по формуле

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad (2.6)$$

где S - средняя квадратическая погрешность результатов единичных измерений, полученная из ряда равноточных измерений; n - число единичных измерений в ряду

2.9 доверительные границы погрешности результата измерений:

Наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение погрешности результата измерений.

Примечания

1 Доверительные границы в случае нормального закона распределения вычисляются как $\pm tS$, $\pm tS_{\bar{x}}$, где S , $S_{\bar{x}}$ - средние квадратические погрешности, соответственно, единичного и среднего арифметического результатов измерений; t - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений n .

2 При симметричных границах термин может применяться в единственном числе - *доверительная граница*.

3 Иногда вместо термина *доверительная граница* применяют термин *доверительная погрешность* или *погрешность при данной доверительной вероятности*

2.10 поправка:

Значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения составляющих систематической погрешности.

Примечание - знак поправки противоположен знаку погрешности. Поправку, прибавляемую к номинальному значению меры, называют *поправкой к значению меры*; поправку, вводимую в показание измерительного прибора, называют *поправкой к показанию прибора*

2.11 точность результата измерений:

Одна из характеристик качества измерения, отражающая близость к нулю погрешности результата измерения.

Примечание - читают, что чем меньше погрешность измерения, тем больше его точность

2.12 промах:

Погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Примечание - иногда вместо термина "промах" применяют термин *грубая погрешность измерений*

2.13 предельная погрешность измерения в ряду измерений:

Максимальная погрешность измерения (плюс, минус), допускаемая для данной измерительной задачи.

Примечание - о многих случаях погрешность $3S$ принимают за предельную, то есть $\Delta_{\text{пр}} = \pm 3S$. При необходимости за предельную погрешность может быть принято и другое значение погрешности (где S - см. термин 9.14)

2.14 погрешность результата однократного измерения:

Погрешность одного измерения (не входящего в ряд измерений), оцениваемая на основании известных погрешностей средства и метода измерений в данных условиях (измерений).

Пример - при однократном измерении микрометром какого-либо размера детали получено значение величины, равное 12,55 мм. При этом еще до измерения известно, что погрешность микрометра в данном диапазоне составляет $\pm 0,01$ мм, и погрешность метода (непосредственной оценки) в данном случае принята равной нулю. Следовательно, погрешность полученного результата будет равна $\pm 0,01$ мм в данных условиях измерений

2.15 суммарная средняя квадратическая погрешность результата измерений:

Погрешность результата измерений (состоящая из суммы случайных и неисключенных систематических погрешностей, принимаемых за случайные), вычисляемая по формуле

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S^2 + S_{\Theta}^2}, \quad (2.7)$$

где $S_{\Theta} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_i \Theta_i^2}$ - средняя квадратическая погрешность суммы неисключенных систематических погрешностей при равномерном распределении (принимаемых за случайные).

Примечание - доверительные границы суммарной погрешности $(\Delta x)_{\Sigma}$ могут быть вычислены по формуле

$$(\Delta x)_{\Sigma} = \pm t_{\Sigma} S_{\Sigma}, \quad (2.8)$$

где $t_{\Sigma} = \frac{\Theta + t \cdot S_{\bar{x}}}{S_{\Theta} + S_{\bar{x}}}$; Θ - граница суммы неисключенных систематических погрешностей результата измерений, вычисляемая по формулам (2.2) или (2.3); $t \cdot S_{\bar{x}}$ - доверительная граница погрешности результата измерений по 2.9

3 Нормальное распределение. Параметры нормального распределения

При хорошо отлаженной методике мы имеем дело со случайными погрешностями, величины которых больше систематических. Таким образом, проводя многократные замеры, мы получаем набор значений измеряемой величины. Какое же из этих полученных значений мы должны считать наиболее близким к истинному? За наиболее вероятное значение измеряемой величины принимают ее среднее арифметическое значение, вычисленное из всего ряда измеренных значений по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.1)$$

Положение о наибольшей вероятности среднеарифметической величины справедливо, если выполняется так называемый *нормальный закон распределения случайных погрешностей* (для большинства простых измерений он выполняется достаточно хорошо, и мы будем пользоваться нормальным распределением).

Важнейшим параметром нормального распределения случайных погрешностей является дисперсия σ^2 , которая является характеристикой рассеяния их относительно нуля.

$$\sigma^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (3.2)$$

Удобнее пользоваться для характеристики рассеяния значением квадратного корня из дисперсии, т.е. *среднеквадратическим отклонением погрешности*:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (3.3)$$

При увеличении числа замеров величина S стремится к некоторому пределу σ , квадрат которого называется *дисперсией* и является одной из основных численных характеристик распределения.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x - X_1)^2 + \dots + (x - X_n)^2}{n-1}} \quad (3.4)$$

Одна из задач статистической обработки выборки заключается в численном определении среднего арифметического и дисперсии. При обработке экспериментальных данных систему наблюдений над некоторой случайной величиной (результаты измерений распределяются по закону нормального распределения случайных величин) принято рассматривать как случайную выборку из некоторой гипотетической генеральной совокупности, которая представляет собой совокупность всех мыслимых наблюдений над случайной величиной при данных условиях эксперимента. Задача статистического анализа состоит в том, чтобы оценить параметры генеральной совокупности по результатам данной случайной выборки с учетом того элемента неопределенности, который вносится ограниченностью экспериментального материала. В математической статистике принято разделять выборочные параметры и параметры генеральной совокупности. Параметрам генеральной совокупности соответствуют следующие выборочные параметры (таблица 1).

Таблица 1 Соответствие параметров генеральной совокупности и выборочных параметров

Генеральная совокупность	Выборка
μ	$\bar{X}$
σ	S_x
σ^2	S_x^2

Параметры выборки $\bar{X}$, S_x , S_x^2 при увеличении объема выборки ($n \rightarrow \infty$) приближаются к параметрам генеральной совокупности:

$$\lim \bar{X} = \mu, \lim S_x = \sigma, \lim S_x^2 = \sigma^2,$$

где μ - математическое ожидание (среднее арифметическое, генеральное среднее),
 σ - генеральное среднеквадратическое отклонение (стандартное отклонение, стандарт),

σ^2 - генеральная дисперсия (теоретическая дисперсия).

Этим основным параметрам генеральной совокупности соответствуют выборочные параметры:

$\bar{X}$ - выборочное среднее (среднее выборки),

S_x - среднеквадратическая погрешность выборки,

S_x^2 - выборочная дисперсия.

Следует отметить, что объем генеральной совокупности может быть ограничен каким - то большим, но конечным числом.

Практически мы всегда имеем дело с выборками. Выборкой может быть определенное число реальных объектов (зерен минерала, образцов пород, шлифов) или измерений, наблюдений. Количество объектов выборки обозначают n . Как уже упоминалось, цель статистической обработки - оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки. Эти n объектов выборки подвергаются детальному изучению, по результатам которого рассчитывают характеристики (выборочные параметры); они являются приближенной оценкой истинных характеристик всей реальной совокупности объектов (всей генеральной совокупности).

4 Случайная погрешность: интервальная оценка

Вклад случайной погрешности в общую неопределенность результата измерения можно оценить с помощью методов теории вероятностей и математической статистики.

Ввиду наличия случайной погрешности одна и та же величина x при каждом последующем измерении приобретает новое, непрогнозируемое значение. Такие величины называются *случайными*. Случайными величинами являются не только отдельные результаты измерений x_i , но и средние $\bar{x}$ (а также дисперсии $s^2(x)$ и все производные от них величины). Поэтому $\bar{x}$ может служить лишь *приближенной* оценкой результата измерения. В то же время, используя величины $\bar{x}$ и $s^2(x)$, возможно оценить *диапазон* значений, в котором с заданной вероятностью P может находиться результат. Эта вероятность P называется *доверительной вероятностью*, а соответствующий ей интервал значений - *доверительным интервалом*.

Строгий расчет границ доверительного интервала случайной величины возможен лишь в предположении, что эта величина подчиняется некоторому известному *закону распределения*. Закон распределения случайной величины - одно из фундаментальных понятий теории вероятностей. Он характеризует относительную долю (частоту, вероятность появления) тех или иных значений случайной величины при ее многократном воспроизведении. Математическим выражением закона распределения случайной величины служит ее *функция распределения* (функция плотности вероятности) $p(x)$. Например, функция распределения, изображенная на рисунке 1, означает, что для соответствующей ей случайной величины x наиболее часто встречаются значения вблизи $x=10$, а большие и меньшие значения встречаются тем реже, чем дальше они отстоят от 10.

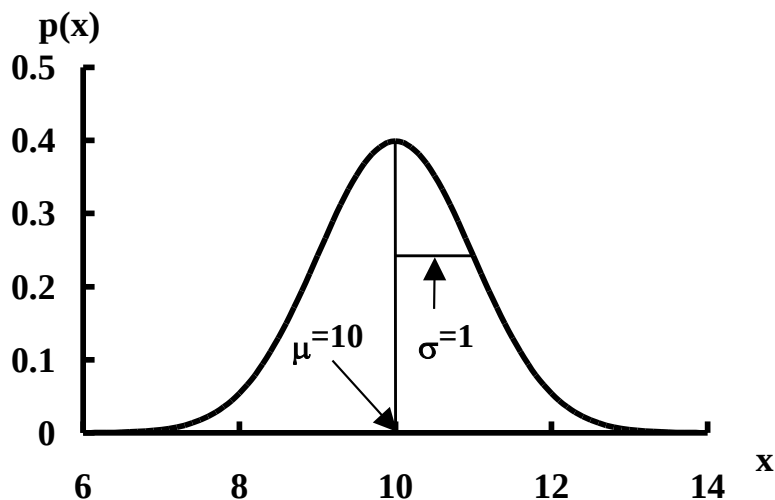


Рисунок 1 Функция плотности вероятности $p(x)$

В качестве примера не случайно приведена колоколообразная, симметричная функция распределения. Именно такой ее вид наиболее характерен для результатов химического анализа. В большинстве случаев закон распределения результатов химического анализа можно удовлетворительно аппроксимировать так называемой *функцией нормального* (или *гауссова*) *распределения*:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1)$$

Параметры этой функции μ и σ характеризуют: μ - положение максимума кривой, т.е. собственно *значение* результата анализа, а σ - ширину "колокола", т.е. *воспроизводимость* результатов. Можно показать, что среднее $\bar{x}$ является приближенным значением μ , а стандартное отклонение $s(x)$ - приближенным значением σ . Естественно, эти приближения тем точнее, чем больше объем экспериментальных данных, из которых они рассчитаны, т.е. чем больше число параллельных измерений n и, соответственно, число степеней свободы f .

В предположении подчинения случайной величины x нормальному закону распределения ее доверительный интервал рассчитывается как

$$x \pm t(P, f)s(x) \quad (4.2)$$

Ширина доверительного интервала нормально распределенной случайной величины пропорциональна величине ее стандартного отклонения. Численные значения коэффициентов пропорциональности t были впервые рассчитаны английским математиком В.Госсетом, подписывавшим свои труды псевдонимом Стьюдент, и потому называются *коэффициентами Стьюдента*. Они зависят от двух параметров: доверительной вероятности P и числа степеней свободы f , соответствующего стандартному отклонению $s(x)$.

Причина зависимости t от P очевидна: чем выше доверительная вероятность, тем шире должен быть доверительный интервал с тем, чтобы можно было гарантировать попадание в него значения величины x . Поэтому с ростом P значения t возрастают. Зависимость t от f объясняется следующим образом. Поскольку $s(x)$ - величина случайная, то в силу случайных причин ее значение может оказаться заниженным. В этом случае и доверительный интервал окажется более узким, и попадание в него значения величины x уже не может быть гарантировано с заданной доверительной вероятностью. Чтобы "подстраховаться" от подобных неприятностей, следует расширить доверительный интервал, увеличить значение t - тем больше, чем менее надежно известно значение s , т.е. чем меньше число его степеней свободы. Поэтому с уменьшением f величины t возрастают.

Коэффициенты Стьюдента для различных значений P и f приведены в табл. 1 (приложение). Проанализируйте ее и обратите внимание на отмеченные закономерности в изменении величин t в зависимости от P и f .

Если единичные значения x имеют нормальное распределение, то и среднее $\bar{x}$ тоже имеет нормальное распределение. Поэтому формулу Стьюдента для расчета доверительного интервала можно записать и для среднего:

$$\bar{x} \pm t(P, f)s(\bar{x}) \quad (4.3)$$

Величина $s(\bar{x})$ меньше, чем $s(x)$ (среднее точнее единичного). Можно показать (с. 27), что для серии из n значений $s(\bar{x}) = s(x) / \sqrt{n}$. Поэтому доверительный интервал для величины, рассчитанной из серии n параллельных измерений, можно записать как

$$\bar{x} \pm \frac{t(P, f)s(x)}{\sqrt{n}} \quad (4.4)$$

где $f=n-1$, а величины $\bar{x}$ и $s(x)$ рассчитывают по формулам (9) и (11).

Пример 1. Для серии значений объемов титранта, равных 9.22, 9.26, 9.24 и 9.27 см³, рассчитать среднее и доверительный интервал среднего при $P=0.95$.

Решение. Среднее значение равно $\bar{x} = \frac{9.22 + 9.26 + 9.24 + 9.27}{4} = 9.248$ см³.

Стандартное отклонение равно

$$s(x) = \sqrt{\frac{(9.22 - 9.248)^2 + (9.26 - 9.248)^2 + (9.24 - 9.248)^2 + (9.27 - 9.248)^2}{4 - 1}} = 0.0222 \text{ см}^3.$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t(P=0.95, f=3)=3.18$.

Доверительный интервал составляет

$$9.248 \pm \frac{3.18 \cdot 0.0222}{\sqrt{4}} = 9.248 \pm 0.035 = 9.25 \pm 0.04 \text{ см}^3.$$

Полученный результат округляем так, чтобы полуширина доверительного интервала содержала только *одну* значащую цифру.

При расчете доверительного интервала встает вопрос о выборе доверительной вероятности P . При слишком малых значениях P выводы становятся недостаточно надежными. Слишком большие (близкие к 1) значения брать тоже нецелесообразно, так как в этом случае доверительные интервалы оказываются слишком широкими, малоинформативными. Для большинства химико-аналитических задач оптимальным значением P является 0.95. Именно эту величину доверительной вероятности (за исключением специально оговоренных случаев) мы и будем использовать в дальнейшем.

Подчеркнем еще раз, что величина доверительного интервала сама по себе позволяет охарактеризовать лишь *случайную* составляющую неопределенности. Оценка систематической составляющей представляет собой самостоятельную задачу.

5 Сравнение результатов анализов. Значимое и незначимое различие случайных величин

Вспомним еще раз, что любой результат измерения (в том числе среднее значение) представляет собой, вообще говоря, случайную величину. Поэтому численное различие двух результатов может быть вызвано случайными причинами и вовсе не свидетельствовать о том, что эти результаты действительно разные. Так, если результаты титрования двух аликвот равны, к примеру, 9.22 и 9.26 см³, то из этого нельзя заключить, что они имеют разный состав, поскольку случайная погрешность измерения объемов титранта составляет несколько сотых миллилитра (см. пример 1 на с. 13).

Подобное различие случайных величин, которое (при некоторой доверительной вероятности) может быть обусловлено только случайными причинами, в математической статистике называется *незначимым*. Очевидно, что если две величины различаются незначимо, то их можно рассматривать как два приближенных значения одного и того же, общего, результата измерения. Напротив, *значимое*, т.е. превышающее уровень случайных погрешностей, различие свидетельствует о том, что соответствующие величины представляют собой два действительно разных результата. Естественно, различие можно считать значимым только тогда, когда оно достаточно велико. Граница, отделяющая значимые различия от незначимых, называется *критической величиной*. Ее можно рассчитать с помощью методов теории вероятностей.

Таким образом, задача сравнения результатов химического анализа состоит в том, чтобы выяснить, *является ли различие между ними значимым*. Сравнить данные химического состава (и, шире, - любые экспериментальные данные) по обычным арифметическим правилам недопустимо! Вместо этого следует применять специальные приемы, называемые *статистическими тестами* или *критериями проверки статистических гипотез*. С некоторыми простейшими - и в то же время наиболее важными для химика-аналитика статистическими тестами - мы сейчас познакомимся.

6 Сравнение среднего и константы: простой тест (критерий) Стьюдента

Вернемся к задаче проверки правильности результата химического анализа путем сравнения его с независимыми данными. Проверяемый результат, являясь средним из нескольких параллельных определений, представляет собой случайную величину $\bar{x}$. Результат же, используемый для сравнения, в ряде случаев можно считать точной (действительной) величиной a , т.е. константой. Это может быть тогда, когда случайная погрешность результата, используемого для сравнения, намного меньше, чем проверяемого, т.е. пренебрежимо мала. Например, в способе "введено-найденно" заданное содержание определяемого компонента обычно известно значительно точнее, чем найденное. Аналогично, при использовании СО паспортное значение содержания также можно считать точной величиной. Наконец, и при анализе образца независимым методом содержание компонента может быть определено с точностью, намного превышающей точность проверяемой методики - например, при проверке атомно-эмиссионной методики с помощью гравиметрической (о типичных величинах случайной погрешности различных методов см. с. 9). Во всех этих случаях задача сравнения данных с математической точки зрения сводится к проверке *значимости* отличия случайной величины $\bar{x}$ от константы a .

Для решения этой задачи можно использовать уже известный нам подход, описанный выше (с. 10) и основанный на интервальной оценке неопределенности величины $\bar{x}$. Доверительный интервал для среднего, рассчитанный по формуле Стьюдента (16), характеризует неопределенность значения $\bar{x}$, обусловленную его случайной погрешностью. Поэтому если величина a входит в этот доверительный интервал, утверждать о значимом различии между $\bar{x}$ и a нет оснований. Если же величина a в этот интервал не входит, различие между $\bar{x}$ и a следует считать значимым. Таким образом, полуширина доверительного интервала, равная $\frac{t(P, f)s(x)}{\sqrt{n}}$, является критической величиной для разности $|\bar{x} - a|$: различие является значимым, если

$$|\bar{x} - a| > \frac{t(P, f)s(x)}{\sqrt{n}} \quad (6.1)$$

Для проверки значимости различия между средним и константой вместо вычисления доверительного интервала можно поступить следующим образом. Легко видеть, что выражение (17) эквивалентно выражению

$$\frac{|\bar{x} - a|}{s(x)} \sqrt{n} > t(P, f) \quad (6.2)$$

Величина, стоящая в левой части выражения (18), характеризует степень различия между $\bar{x}$ и a с учетом случайной погрешности $s(x)$. Она называется *тестовой статистикой* (и в общем случае обозначается в дальнейшем как ξ) для сравниваемых значений. Коэффициент Стьюдента, стоящий в правой части (18), в этом случае непосредственно является критической величиной. Поэтому для проверки значимости различия между $\bar{x}$ и a можно вычислить соответствующую тестовую статистику и сравнить ее с критическим значением - в данном случае табличным значением коэффициента Стьюдента. Если тестовая статистика превосходит критическое значение, различие между сравниваемыми величинами следует признать значимым.

Описанный способ сравнения случайных величин - вычисление тестовой статистики и сравнение ее с табличным критическим значением - является весьма общим. На таком принципе основано множество *статистических тестов* (или *критериев*) - процедур, призванных установить значимость различия между теми или иными случайными величинами. Тест, представленный формулой (18) и предназначенный для сравнения среднего значения и константы, называется *простым тестом Стьюдента*. В химическом анализе его следует применять всегда, когда возникает задача сравнения результатов анализа с каким-либо значением, которое можно считать точной величиной.

Пример 2. При определении никеля в стандартном образце сплава получена серия значений (% масс.) 12.11, 12.44, 12.32, 12.28, 12.42. Содержание никеля согласно паспорту образца - 12.38 %. Содержит ли использованная методика систематическую погрешность?

Решение. Паспортное содержание никеля считаем действительным (точным) значением и применяем простой тест Стьюдента. Имеем:

$$\bar{x} = 12.314, s(x) = 0.132, n = 5, f = 4, a = 12.38.$$

$$\xi = \frac{|\bar{x} - a|}{s(x)} \sqrt{n} = \frac{12.38 - 12.314}{0.132} \sqrt{5} = 1.12 < t(P = 0.95, f = 4) = 2.78$$

Отличие результата анализа от действительного значения незначимо, методика не содержит систематической погрешности.

7 Сравнение двух средних. Критерий Стьюдента

При интерпретации результатов химического анализа возникают и более сложные задачи. Предположим, необходимо сравнить два результата анализа одного и того же образца, полученные разными методами, и при этом оба результата содержат сравнимые между собой случайные погрешности. В этом случае уже нельзя ни один из результатов считать точной величиной и, соответственно, применять простой тест Стьюдента. Математически задача сводится в этом случае к установлению значимости различия между двумя средними значениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Для решения этой задачи используют *модифицированный тест Стьюдента*. Он существует в двух вариантах: точном и приближенном. Точный вариант применяют тогда, когда дисперсии соответствующих величин $s_1^2 = s^2(x_1)$ и $s_2^2 = s^2(x_2)$ различаются незначимо (что, в свою очередь, необходимо предварительно проверить с помощью еще одного статистического теста - теста Фишера, см. следующий раздел). При значимом различии s_1^2 и s_2^2 применяют приближенный вариант (приближение Уэлча).

В точном варианте модифицированного теста Стьюдента тестовая статистика вычисляется как

$$\xi = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\bar{s}(x)} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \quad (7.1)$$

Как видим, по способу вычисления она весьма похожа на тестовую статистику простого теста Стьюдента (см. формулу (18)). В выражении (19) n_1 и n_2 - числа параллельных значений, из которых рассчитаны величины $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, соответственно, а $\bar{s}(x)$ - *среднее стандартное отклонение*, вычисляемое как

$$\bar{s}(x) = \sqrt{\bar{s}^2(x)} = \sqrt{\frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2}{f_1 + f_2}} \quad (7.2)$$

Величины f_1 и f_2 - числа степеней свободы соответствующих дисперсий, равные n_1-1 и n_2-1 . Критическим значением служит коэффициент Стьюдента $t(P, f)$ для выбранной доверительной вероятности P (обычно 0.95) и числа степеней свободы

$$f = f_1 + f_2 = n_1 + n_2 - 2 \quad (7.3)$$

Таким образом, значимое различие между $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ имеет место тогда, когда

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\bar{s}(x)} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t(P, f = n_1 + n_2 - 2) \quad (7.4)$$

В приближении Уэлча тестовая статистика вычисляется следующим образом:

$$\xi = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (7.5)$$

Критическим значением вновь служит коэффициент Стьюдента $t(P, f)$. Число степеней свободы в этом случае вычисляется как

$$f = \frac{(s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2)^2}{\frac{(s_1^2 / n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2 / n_2)^2}{n_2 - 1}} \quad (7.6)$$

и округляется до ближайшего целого числа. Приближенный вариант теста Стьюдента недостаточно достоверен, особенно при малых значениях f_1 и f_2 .

8 Сравнение дисперсий двух серий данных. Критерий Фишера

Для выбора между точным и приближенным вариантом модифицированного теста Стьюдента необходимо предварительно установить, есть ли значимое различие между величинами s_1^2 и s_2^2 , т.е. дисперсий обеих серий данных. Разумеется, задача сравнения дисперсий имеет и вполне самостоятельное значение.

Как и средние $\bar{x}$, дисперсии s^2 тоже представляют собой случайные величины. Поэтому и их сравнение тоже нужно производить с использованием соответствующих статистических тестов. Тест для сравнения двух дисперсий был предложен английским биологом Р.Фишером и носит его имя.

В тесте Фишера тестовой статистикой служит отношение большей дисперсии к меньшей:

$$\xi = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (8.1)$$

Подчеркнем, что необходимо, чтобы $s_1^2 \geq s_2^2$ и, соответственно, $\xi \geq 1$, в противном случае индексы следует поменять местами. Критическим значением служит специальный коэффициент Фишера $F(P, f_1, f_2)$, зависящий от трех параметров - доверительной вероятности P и чисел степеней свободы f_1 и f_2 дисперсий s_1^2 и s_2^2 , соответственно. Значения коэффициентов Фишера для стандартной доверительной вероятности $P=0.95$ приведены в табл. 2 (приложение). Обратите внимание, что $F(f_1, f_2) \neq F(f_2, f_1)$, поэтому при пользовании этой таблицей надо быть очень внимательными.

Если отношение дисперсий (25) меньше, чем соответствующее значение $F(P, f_1, f_2)$, это означает, что различие между s_1^2 и s_2^2 незначимо - дисперсия обеих серий одинакова, - или, как говорят, "дисперсии однородны". В этом случае можно вычислить *среднюю дисперсию* $\bar{s}^2$ по формуле (20) и пользоваться ею как общей характеристикой дисперсий обеих серий. Число степеней свободы этой дисперсии равно $f_1 + f_2$. Если же дисперсии неоднородны, вычисление средней дисперсии, очевидно, лишено смысла.

Еще раз обратим внимание, что тест Фишера предназначен для сравнения только дисперсий результатов, но никак не самих результатов (т.е. средних). Делать какие-либо выводы о различии средних значений, наличии в той или иной серии данных систематической погрешности, различиях в составе образцов и т.д. на основании теста Фишера недопустимо. Для сравнения средних значений после теста Фишера следует применять тест Стьюдента (в той или иной его разновидности).

Пример 3. Примесь тиофена в бензоле (% массовой доли) определяли спектрофотометрическим (1) и хроматографическим (2) методами. Получили следующие серии данных:

(1) 0.12 0.19 0.16 0.14

(2) 0.18 0.32 0.24 0.25 0.28

Известно, что хроматографическая методика не содержит систематической погрешности. Содержит ли систематическую погрешность спектрофотометрическая методика?

Решение. Вычислим средние и дисперсии для обеих серий:

(1) $\bar{x} = 0.153$, $s_1^2 = 8.91 \cdot 10^{-4}$, $n_1=4$, $f_1=3$

(2) $\bar{x} = 0.254$, $s_2^2 = 2.68 \cdot 10^{-3}$, $n_2=5$, $f_2=4$

Сравним дисперсии серий по тесту Фишера:

$\xi = s_2^2 / s_1^2 = 3.0$ (делим большую дисперсию на меньшую!)

Критическое значение $F(0.95, 4, 3) = 9.1$ (не $F(0.95, 3, 4) = 6.6!$)

$\xi < F$, дисперсии данных одинаковы. Поэтому вычисляем среднее стандартное отклонение и применяем точный вариант теста Стьюдента:

$$\bar{s}(x) = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.91 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 2.68 \cdot 10^{-3}}{3 + 4}} = 0.0437$$

$$\xi = \frac{0.254 - 0.153}{0.0437} \sqrt{\frac{4 \cdot 5}{4 + 5}} = 3.27 \quad t(P=0.95, f=7) = 2.37$$

$\xi > t$, средние различаются значимо, спектрофотометрическая методика содержит систематическую погрешность (отрицательную).

Пример 4. В образце сплава определили медь спектрографическим атомно-эмиссионным (1) и титриметрическим (2) методами. Получены следующие результаты (% массовой доли).

(1) 12.1 14.1 13.6 14.8

(2) 13.40 13.75 13.65 13.58 13.60 13.45

Известно, что титриметрическая методика не содержит систематической погрешности. Содержит ли систематическую погрешность атомно-эмиссионная методика?

Решение. Вычислим средние и дисперсии для обеих серий:

$$(1) \bar{x} = 13.65, s_1^2 = 1.31, n_1=4, f_1=3$$

$$(2) \bar{x} = 13.57, s_2^2 = 1.66 \cdot 10^{-2}, n_2=6, f_2=5$$

Сравним дисперсии данных по тесту Фишера:

$$\xi = s_1^2 / s_2^2 = 78.8$$

Критическое значение $F(0.95, 3, 5) = 5.4$. $\xi > F$, дисперсии данных различаются. Для сравнения средних значений применяем приближенный тест Стьюдента-Уэлча:

$$\xi = \frac{13.65 - 13.57}{\sqrt{\frac{1.31}{4} + \frac{1.66 \cdot 10^{-2}}{6}}} = 0.14, \quad f = \frac{(1.31/4 + 1.66 \cdot 10^{-2}/6)^2}{\frac{(1.31/4)^2}{3} + \frac{(1.66 \cdot 10^{-2}/6)^2}{5}} = 3.05 \sim 3,$$

$t(P=0.95, f=3) = 3.18$. $\xi < t$, значимое различие между средними и систематическая погрешность атомно-эмиссионной методики отсутствуют.

Поскольку случайная погрешность титриметрических данных намного меньше, чем атомно-эмиссионных, можно значение 13.57 считать точной величиной и применить простой тест Стьюдента:

$$\xi = \frac{13.65 - 13.57}{\sqrt{1.31}} \sqrt{4} = 0.14 < t(P=0.95, f=3) = 3.18$$

И в этом случае также делаем вывод об отсутствии систематической погрешности атомно-эмиссионной методики.

9 Выявление промахов. Q-тест

В обрабатываемой серии данных должны отсутствовать промахи (с. 9). Поэтому прежде, чем проводить любую обработку данных (начиная с вычисления среднего), следует выяснить, содержит ли она промахи, и если да, то исключить их из рассмотрения. Для выявления промахов служит еще один статистический тест, называемый Q-тестом.

Алгоритм Q-теста состоит в следующем. Серию данных упорядочивают по возрастанию: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$. В качестве возможного промаха рассматривают одно из крайних значений x_1 или x_n - то, которое дальше отстоит от соседнего значения, т.е. для которого больше разность $x_2 - x_1$ либо, соответственно, $x_n - x_{n-1}$. Обозначим эту разность как W_1 . Размах всей серии, т.е. разность между максимальным и минимальным значением $x_n - x_1$, обозначим W_0 . Тестовой статистикой является отношение

$$\xi = \frac{W_1}{W_0} \quad (9.1)$$

Эта величина заключена в пределах от 0 до 1. Чем дальше отстоит "подозрительное" значение от основной массы данных, тем выше вероятность того, что это промах - и тем больше, в свою очередь, величина ξ . Критической величиной служит табличное значение Q-коэффициента $Q(P, n)$ (табл. 3, приложение), зависящее от доверительной вероятности и общего числа данных в серии. Если тестовая статистика превышает критическую величину ($\xi > Q$), соответствующее значение считают промахом и из серии данных исключают. После этого следует проверить на наличие промахов оставшиеся данные (с другим значением Q), поскольку промах в серии может быть не один.

При применении Q-теста вместо стандартной доверительной вероятности, равной 0.95, обычно используют значение $P=0.90$. Наиболее достоверные результаты получаются при $n=5-7$. Для серий большего или меньшего размера Q-тест недостаточно надежен.

Пример 5. При спектрофотометрическом анализе раствора органического красителя получены значения оптической плотности, равные 0.376, 0.398, 0.371, 0.366, 0.372 и 0.379. Содержит ли эта серия промахи? Чему равно среднее значение оптической плотности? Охарактеризуйте воспроизводимость измерения оптической плотности для данного образца.

Решение. Располагаем полученные результаты в порядке возрастания:

0.366 0.371 0.372 0.376 0.379 0.398

Разность 0.371-0.366 равна 0.005, а 0.398-0.379 равна 0.019, поэтому кандидат в промахи - значение 0.398, а $W_1=0.019$. Размах выборки $W_0=0.398-0.366=0.032$. Тестовая статистика равна $\xi = 0.019/0.032 = 0.59$. Критическая величина $Q(P=0.90, n=6)$ равна 0.56. Таким образом, $\xi > Q$, значение 0.398 - промах, его следует исключить.

Проверяем оставшуюся серию значений: 0.371-0.366=0.005, 0.379-0.376=0.003, поэтому следующий кандидат в промахи - 0.366. Имеем: $W_1=0.005$, $W_0=0.379-0.366=0.013$, $\xi = 0.005/0.013 = 0.38$, $Q(P=0.90, n=5)=0.64$. $\xi < Q$, значение 0.366 промахом не является.

Среднее значение оптической плотности составляет

$$\bar{x} = \frac{0.366 + 0.371 + 0.372 + 0.376 + 0.379}{5} = 0.373$$

а его стандартное отклонение - $s(x) = 0.005$. Воспроизводимость охарактеризуем относительным стандартным отклонением (с. 9) $s_r(x)=s(x)/\bar{x} = 0.005/0.373 = 0.013$.

Обработка серии данных вместе с промахом была бы в этом случае грубой ошибкой и привела бы к серьезному искажению значений $\bar{x}$ и $s(x)$.

Приложение А (справочное)

Практическая работа 1

Среднее арифметическое. Среднеквадратическое отклонение.

Среднее арифметическое выборки - выборочное среднее - лучшая оценка генерального среднего. Поэтому при измерении какой-либо величины за результат принимается среднеарифметическое результатов отдельных замеров (после исключения систематических погрешностей). Среднее из определений (замеров) обозначается как $\bar{X}_n$:

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (4.1)$$

Среднеквадратическое отклонение результатов измерения S_x - наиболее обоснованная и распространенная мера случайных погрешностей. В случае, когда имеется n единичных измерений величины X , среднеквадратическое отклонение рассчитывается по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X}_n)^2 + (X_2 - \bar{X}_n)^2 + \dots + (X_n - \bar{X}_n)^2}{n - 1}} \quad (4.2)$$

или

$$S_x = \sqrt{\frac{(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}{n}}{n - 1}}, \quad (4.3)$$

где n - объем выборки (число замеров), S_x - среднеквадратическое отклонение, $X_1, X_2, \dots, X_n$ - результаты замеров, $\bar{X}_n$ - выборочное среднее. Последняя формула более удобна при расчетах на калькуляторах. При вычислениях по этим двум формулам возведение в квадрат должно выполняться без округления результатов (причем точность резко уменьшается при малых n). Величина S_x называется среднеквадратичной погрешностью результатов отдельного измерения. Она имеет ту же размерность, что и переменная X . Относительная точность расчета S_x от 50 до 100 относительных %, поэтому для S_x записываются 1 - 2 значащие цифры.

Величина среднеквадратического отклонения выборки S при больших n (~ 100) может быть довольно близка к среднеквадратическому отклонению генеральной совокупности σ . При малых n значения S могут сильно отличаться от "истинного значения" σ . Поэтому желательно оценивать доверительные интервалы по следующей схеме.

- Рассчитывают среднеквадратическое отклонение S_x по приведенным формулам.
- Задают необходимую доверительную вероятность P . Обычно $P = 0.95$.

Доверительная вероятность измерений должна задаваться самим экспериментатором. Эта величина, определяющая надежность результатов. Чем более ответственны результаты, тем более высокую доверительную вероятность надо принимать. Для технических и аналитических определений (например состав фаз, параметров элементарной ячейки и

других очень точных измерений) обычно принимается доверительная вероятность 0.95. Для важных измерений (на которых базируется новый закон, новое положение или от которых зависит безопасность людей) $P = 0.99$.

3. По таблице А.1 для принятой P и n находят доверительные границы отклонения величины S_x (в долях S_x) Y_1 и Y_2 .

Таблица А.1 Коэффициенты Y_1 и Y_2 для оценки доверительных интервалов погрешностей расчета среднеквадратического отклонения.

n	P= 0.95		P= 0.90	
	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
2	0.42	32	0.51	16
3	0.52	6.3	0.58	4.4
4	0.57	3.7	0.62	2.9
5	0.60	2.9	0.65	2.4
6	0.62	2.5	0.67	2.1
7	0.64	2.2	0.69	1.9
8	0.66	2.0	0.70	1.8
9	0.68	1.9	0.72	1.7
10	0.69	1.8	0.73	1.6
12	0.71	1.7	0.75	1.5
14	0.73	1.6	0.76	1.5
16	0.74	1.5	0.77	1.4
18	0.75	1.5	0.79	1.4
20	0.76	1.5	0.79	1.4
25	0.78	1.4	0.81	1.3
30	0.80	1.3	0.83	1.3
50	0.84	1.2	0.86	1.2
100	0.88	1.2	0.90	1.1
200	0.91	1.1	0.93	1.1

4. Находят доверительные границы отклонения S_x :

$$S_{\min} = S_x Y_1, \quad S_{\max} = S_x Y_2,$$

Полученные значения $S_{\min}$ и $S_{\max}$ означают, что с вероятностью P величина S_x лежит между ними. С учетом доверительных интервалов S_x далее рассчитываются доверительные интервалы погрешности измерения.

Рассмотрим пример. $S_x = 0.03$, $n = 3$. Оценим границы доверительных интервалов.

1. Принимаем $P=0.95$.

2. По табл. 6 для $P=0.95$ и $n = 3$ находим $Y_1 = 0.52$, $Y_2 = 6.3$.

3. $S_{\min} = 0.52 \cdot 0.03 = 0.015$, $S_{\max} = 0.19$. Так, с вероятностью 0.95 S_x может находиться в интервале от 0.015 до 0.19.

Следует помнить, что величина среднеквадратического отклонения выборки сама по себе хотя и несет некоторую информацию о параметрах выборки, но не является достаточной характеристикой. Об этом нельзя забывать и считать статистическую обработку законченной.

Пример. При определении состава синтезированного в опыте плагиоклаза получили путем замеров на микрозонде 10 значений $X_{\text{Ап}}^{\text{Pl}}$: 0.30, 0.31, 0.28, 0.29, 0.32, 0.31, 0.27, 0.29, 0.29, 0.30. Необходимо определить среднее арифметическое и среднеквадратическую ошибку (S_x) и доверительные интервалы для S_x .

1. Обозначим $X_{\text{Ап}}^{\text{Pl}}$ за X , $X_1=0.3$, $X_2=0.31$,, $X_{10}=0.30$.

2. Вычислим среднее

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_{10}}{10} = 0.296 \approx 0.30$$

3. Вычислим S_x

$$S_x = \sqrt{\frac{(0.30 - 0.30)^2 + (0.30 - 0.31)^2 + \dots + (0.30 - 0.30)^2}{10 - 1}} = 0.015 \approx 0.02.$$

4. Оценим границы доверительного интервала для S_x ($n = 10$, задаем $P = 0.95$), по табл. 6 находим (для $n = 10$ и $P = 0.95$) величины Y_1 и Y_2 : $Y_1 = 0.69$, $Y_2 = 1.8$, $S_{\text{мин}} = 0.02 \cdot 0.69 = 0.014 \pm 0.01$, $S_{\text{макс}} = 0.02 \cdot 1.8 = 0.036 \pm 0.04$.

5. Среднее значение $X_{\text{Ап}}^{\text{Pl}} = 0.30$; среднеквадратическая погрешность $S_x = 0.02$.

6. С вероятностью 0.95 $0.04 \geq S_x \geq 0.01$

Коэффициентом вариации результатов наблюдений (измерений) является относительная величина среднеквадратического отклонения:

$$V_x = [S_x / \bar{X}_n] 100\%.$$

Коэффициент вариации позволяет сравнивать влияние случайных погрешностей на результат измерения в разных сериях или проводимых различными методами.

Приложение Б

(справочное)

Практическая работа 2

Исключение выпадающих (анормальных) результатов измерений («промахи»)

Очень часто при замерах (определениях) какой-либо величины возникают сомнения: надо ли отбрасывать результаты замера, несколько отличающихся от всех, какова значимость такого отклонения. Может быть два варианта существования "анормальных" замеров.

1. Замер принадлежит к той же генеральной совокупности, но вероятность его появления мала. В этом случае его исключать нельзя, и расчеты среднего арифметического и среднеквадратического отклонения необходимо проводить с учетом этого замера.

2. Отклоняющийся результат - следствие погрешности в записи (промаха) и не подчиняется случайным законам отклонения от генерального среднего. В этом случае его надо отбросить.

Решение задачи об отбрасывании какого-либо значения надо проводить с большой осторожностью, предварительно проанализировав условия, в которых он получен. Может быть удастся оценить достоверность этого результата и без вероятностного подхода. В противном случае нужно воспользоваться следующими методами.

1. Среди n результатов находят $X_{\min}$ и $X_{\max}$, которые подлежат проверке.

2. Подсчитывают среднее данной выборки:

$$\bar{X} = \frac{X_{\min} + X_2 + \dots + X_{\max}}{n}.$$

3. Подсчитывают выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$S_x = \sqrt{\frac{(X_{\min} - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_{\max} - \bar{X})^2}{n - 1}}.$$

4. Находят следующие отношения:

$$U_{\max} = \frac{X_{\max} - \bar{X}}{S_x} \text{ и } U_{\min} = \frac{\bar{X} - X_{\min}}{S_x}.$$

5. Принимают необходимую доверительную вероятность (для наших целей $P=0.95$).

6. Находят величину β по табл. Б.1 при принятом значении P и выборке объема n .

7. $U_{\max}$ и $U_{\min}$, полученные в п. 4, сравнивают с величиной β по п. 6. Если $U_{\max} \geq \beta$, то проверяемый результат может быть исключен.

Пример. При определении состава синтетического санидина получены следующие содержания K_2O в минерале: 13,1; 12,9; 13,3; 14,1 весовых процентов.

1. Сомнительное значение 14,1.

$$2. \bar{X} = \frac{13.1+12.9+13.3+14.1}{4} = 13.4$$

$$3. S_x = \sqrt{\frac{(13.4 - 13.1)^2 + (13.4 - 12.9)^2 + (13.4 - 13.3)^2 + (13.4 - 14.1)^2}{4 - 1}} = 0.5$$

$$4. U = \frac{14.111 - 13.44}{0.5} = 1.4.$$

5. Принимаем $P = 0.95$.

6. Для $P = 0.95$ и $n = 4$ $\beta = 1.46$ (по табл. 27). $U < \beta$ ($1.4 < 1.46$), результат 14.1 не может быть исключен.

Другой пример. Было получено 5 значений рН для равновесия минерал - раствор: 4.3, 4.2, 4.3, 4.1, 5.3

1. Необходимо проверить 5.3 .

2. $\bar{X} = 4.4$.

$$3. S_x = \sqrt{\frac{(4.4 - 4.3)^2 + (4.4 - 4.2)^2 + (4.4 - 4.3)^2 + (4.4 - 4.1)^2 + (4.4 - 5.3)^2}{5 - 1}} = 0.5$$

$$4. U = \frac{5.3 - 4.4}{0.5} = 1.8.$$

5. Принимаем $\alpha = 0.95$.

6. По таблице Б.1 $\beta = 1.67$ ($n = 5$, $\alpha = 0.95$).

7. $U > \beta$, результат 5.3 можно исключить.

Таблица Б.1 Коэффициенты β для различных значений доверительной вероятности P .

β	Доверительный интервал P		
n	0.90	0.95	0.99
3	1.15	1.15	1.15
4	1.42	1.46	1.48
5	1.60	1.67	1.72
6	1.73	1.82	1.89
7	1.83	1.94	2.02
8	1.91	2.03	2.13
9	1.98	2.11	2.21
10	2.03	2.18	2.29
11	2.09	2.23	2.36
12	2.13	2.29	2.41
13	2.17	2.33	2.47
14	2.21	2.37	2.50
15	2.25	2.41	2.55
16	2.28	2.44	2.58
18	2.34	2.50	2.66
20	2.38	2.56	2.71

Приложение В (справочное)

Практическая работа 3

Оценка границ доверительного интервала величины погрешности для малых выборок.

Погрешность анализа определяется по формуле

$$\varepsilon = \pm \frac{t_{\alpha} S_X}{\sqrt{n}},$$

где S_X - среднеквадратическое отклонение, t_n - коэффициент Стьюдента для оценки погрешности при малых n ($n \leq 20$).

Стьюдент - псевдоним английского химика В.Госсета, предложившего в 1908 г. применять коэффициент t_n .

Фактически t_n применяется вместо Z при $n < 10$. При n стремящемся к бесконечности распределение Стьюдента совпадает с нормальным распределением с единичной

дисперсией: $t_n = \frac{\varepsilon}{S_X}$; значения коэффициентов приведены в таблице В.1

Таблица В.1 Значения коэффициентов Стьюдента t_n (для двусторонней проверки).

	Доверительная вероятность Р						
п	0.3	0.5	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999
2	0.51	1.00	3.1	6.3	12.7(6.3)*	63.7	636.6
3	0.45	0.82	1.9	2.9	4.3(2.9)	9.9	31.6
4	0.42	0.77	1.6	2.4	3.2(2.4)	5.8	12.9
5	0.41	0.74	1.5	2.1	2.8(2.1)	4.6	8.6
6	0.41	0.73	1.5	2.0	2.6(2.0)	4.0	6.9
7	0.40	0.72	1.4	1.9	2.4(1.9)	3.7	6.0
8	0.40	0.71	1.4	1.9	2.4(1.9)	3.5	5.4
9	0.40	0.71	1.4	1.9	2.3(1.9)	3.4	5.0
10	0.40	0.70	1.4	1.8	2.3(1.8)	3.3	4.8
12	0.40	0.70	1.4	1.8	2.2(1.8)	3.1	4.3
14	0.39	0.69	1.4	1.8	2.2(1.8)	3.0	4.2
16	0.39	0.69	1.4	1.8	2.2(1.8)	2.9	4.0
20	0.39	0.69	1.3	1.7	2.1(1.7)	2.9	3.9
30	0.39	0.68	1.3	1.7	2.0(1.7)	2.8	3.7
∞	0.39	0.67	1.3	1.6	2.0(1.6)	2.6	3.3

*В скобках даны величины t_n для $P = 0.95$ при односторонней проверке. Проверка называется двусторонней или односторонней в зависимости от того, как оценивать погрешности величины X - по обе стороны среднего значения ($\pm$) или по одну сторону от среднего соответственно.

Рассмотрим еще пример. При измерении плотности минерала получен ряд следующих значений ($n=5$): 2.75, 2.78, 2.76, 2.77, 2.76. Определить среднее значение и границы доверительного интервала при вероятности $P = 0.95$.

$$\bar{X} = \frac{2.75 + 2.78 + 2.76 + 2.77 + 2.76}{5} = 2.76$$

1. Вычислим

$$S_x = \sqrt{\frac{(2.75-2.76)^2 + (2.78-2.76)^2 + (2.76-2.76)^2 + (2.77-2.76)^2 + (2.76-2.76)^2}{5-1}} = 0.06.$$

2. Вычислим S_x

3. По табл. 27 находим: для $P = 0.95$ и $n = 5$ $t_n = 2.78$.

$$\varepsilon = \pm \frac{t_{\alpha} S_x}{\sqrt{n}} = \frac{2.78 \cdot 0.06}{\sqrt{5}} = 0.07$$

4. Находим

, если $n < 20$, то $\varepsilon = t_n S_x$.

5. Итак, плотность минерала $\bar{X} = 2.76 \pm 0.07$, т.е. вероятность отклонения в замерах за интервал ± 0.07 - 5%.

Приложение Г (справочное)

Практическая работа 4

Сравнение двух выборочных средних при известных параметрах двух выборок.

В практике петрологического эксперимента часто возникает вопрос о значимости различий двух (двух или больше) серий замеров. Например, изменился ли состав минерала в результате опыта (произошло ли смещение реакции) или нет? Для этого необходимо выполнить статистический анализ.

Ход анализа. Гипотеза: средние значения обеих серий замеров совпадают, т.е. в пределах точности различия нет.

1. Устанавливают объем выборок n_1 и n_2 .
2. Вычисляют S_1 и S_2 для обеих выборок. Вычисляют $S_{1,2}$:

$$S_{1,2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

$$t_{2\pi}^p = \frac{X_1 - X_2}{S_{1,2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

3. Вычисляют
4. Принимают доверительную вероятность ($P = 0.95$).
5. Определяют, какую проверку надо произвести (скорее всего, двустороннюю).
6. По значению P и n находим табличное значение t_n (см. табл.). При этом надо учесть, что по таблице $n = n_1 + n_2 - 1$.
7. Сравнивают абсолютную величину t_n^p с t_n :
 - а) если $t_n^p > t_n$, гипотеза отбрасывается, т.е. результаты статистически значимы.
 - б) если $t_n^p \leq t_n$, гипотеза принимается, т.е. разница величин статистически не значима.

Рассмотрим пример. В ходе реакции мольная доля Mg в гранате изменилась от $X_{\text{Mg}}^{\text{Gr}} = 0.21$ до $X_{\text{Mg}}^{\text{Gr}} = 0.24$. Можно ли приписать это изменение только погрешности анализа (другими словами, считать, что состав граната не изменился)? Условия: S_1 и S_2 (для исходного и конечного материалов навески граната) соответственно равны 0.005 и 0.020 при $n_1 = 10$ и $n_2 = 5$.

Гипотеза: средние значения не отличаются друг от друга.

1. $S_1 = 0.005$ и $S_2 = 0.02$.

$$t_{\text{ан}}^P = \frac{0.24 - 0.21}{0,012 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}}} = 4.55.$$

2.

3. Принимаем $P = 0.95$.

4. Для $P = 0.95$ и двусторонней проверки $n = 10 + 5 - 1 = 14$, $t_n = 2.2$ (см. табл. 28).

5. Сравниваем рассчитанную величину (t_n^P) с табличным t_n : $t_n^P > t_n$ ($4.55 > 2.2$). Таким образом, с вероятностью 0.95 произошла реакция с изменением состава граната.

Еще пример. В одном шлифе габбро найдены 2 зерна плагиоклаза состава An_{50} и An_{55} ($X_{Ca}^{Pl} = 0.50$ и 0.55 соответственно). Можно ли считать составы плагиоклазов одинаковыми? Условия : $S_1 = S_2 = 0.03$, $n_1 = n_2 = 3$, $P = 0.95$.

1. Рассчитываем $S_{1,2}$:

$$S_{1,2} = \sqrt{\frac{(3-1)(0.03)^2 + (3-1)(0.03)^2}{3+3-2}} = 0.03$$

2. Рассчитываем t_n^P :

$$t_{\text{ан}}^P = \frac{0.55 - 0.50}{0.03 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}} = 2.04 \approx 2.0.$$

3. Находим по табл. 28 значения t_n . $n = 3 + 3 - 1 = 5$. $t_n = 2.8$.

4. Сравниваем t_n^P и t_n :

$$t_n^P < t_n.$$

Таким образом, составы плагиоклазов (An_{50} и An_{55}) значимо не различаются, и разница в составах обусловлена лишь погрешностями в определении составов плагиоклазов.

Приложение Г
(справочное)
Практическая работа 5
Аппроксимация экспериментальных зависимостей методом наименьших квадратов (МНК)

До сих пор мы рассматривали погрешности при измерениях какой - либо одной величины. Но бывают случаи, когда необходимо определить зависимость между двумя величинами (X и Y). К ним относятся:

- Оценка силы связи (корреляции) между величинами X и Y.
- Нахождение аналитической зависимости между величинами X и Y (нахождение уравнения регрессии).
- Оценка степени аппроксимации данной зависимости уравнением регрессии.

Примерами могут служить широко используемые зависимости коэффициента распределения компонентов между фазами от температуры ($\ln K_D = A \cdot 10^3/T + B$) и от состава X одной из фаз ($\ln K_D = AX^2 + BX + C$).

Расчет коэффициентов корреляции. Прежде чем находить аналитическую зависимость между величинами X и Y, следует определить, существует ли связь между этими двумя параметрами (например, иногда неясно, зависит ли коэффициент распределения элемента между фазами от состава фаз или от f_{O_2} и т.д.). Для решения подобного рода задач проводят корреляционный анализ.

Допустим, что у нас есть набор значений двух величин X и Y. Мы хотим проверить, существует ли зависимость между этими величинами, и оценить ее значимость. Для этого необходимо рассчитать *выборочный коэффициент корреляции* r_{XY} :

$$r_{XY} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}.$$

Полученные значения r_{XY} сравнивают с табличными значениями (табл. 8) для заданной доверительной вероятности и числа экспериментальных данных n . Обычно доверительную вероятность (P) выбирают 0.95, что подходит для большинства экспериментальных исследований. Если рассчитанный r_{XY} больше соответствующего (для заданных n и P) значения коэффициента корреляции из таблицы Г.1, то связь между величинами X и Y значима с вероятностью P.

Рассмотрим расчет коэффициента корреляции на конкретном примере. Пусть для некоторых двух фаз получен набор значений коэффициентов распределения элементов ($\ln K_D \equiv Y$) для приведенной температуры $t^* = 10^3/T \equiv X$. Необходимо определить, зависит ли величина $\ln K_D$ (Y) от t^* (X) и велика ли эта связь.

1. Расчеты удобно вести по приведенной формуле, записывая результаты в таблицу типа таблицы Г.2.

Рассчитаем коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = \frac{0.532}{\sqrt{1.099 \cdot 0.274}} = 0.969.$$

Таблица Г.1 Значения коэффициентов корреляции (r_{xy}) для различных доверительных вероятностей.

$(r_{x,y})$	Доверительная вероятность P		
n	0.90	0.95	0.99
2	0.988	0.997	1.000
3	0.900	0.950	0.990
4	0.805	0.878	0.959
5	0.729	0.811	0.917
6	0.669	0.754	0.874
7	0.621	0.707	0.834
8	0.582	0.666	0.798
9	0.549	0.632	0.765
10	0.521	0.602	0.735
12	0.476	0.553	0.684
14	0.441	0.514	0.641
15	0.412	0.482	0.606
18	0.389	0.456	0.575
20	0.369	0.433	0.549
25	0.322	0.381	0.487
30	0.296	0.349	0.449
40	0.257	0.304	0.393
50	0.231	0.273	0.354
60	0.211	0.250	0.325
80	0.183	0.217	0.283
100	0.164	0.195	0.254

Таблица Г.2 Расчет коэффициента корреляции.

n	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	1.00	0.21	- 0.43	- 0.23	0.099	0.185	0.053
2	1.10	0.30	- 0.33	- 0.14	0.046	0.109	0.020
3	1.15	0.28	- 0.28	-0.16	0.045	0.078	0.026
4	1.20	0.27	- 0.23	-0.17	0.039	0.053	0.029
5	1.20	0.38	- 0.23	-0.06	0.014	0.053	0.004
6	1.30	0.37	- 0.13	-0.07	0.009	0.017	0.005
7	1.40	0.43	- 0.03	-0.01	0.000	0.001	0.000
8	1.40	0.48	- 0.03	0.04	-0.001	0.001	0.002
9	1.50	0.45	0.07	0.01	0.001	0.005	0.000
10	1.60	0.56	0.17	0.12	0.020	0.029	0.014
11	1.70	0.57	0.27	0.13	0.035	0.073	0.017
12	1.80	0.58	0.37	0.14	0.052	0.137	0.020
13	1.80	0.63	0.37	0.19	0.070	0.137	0.036
14	1.90	0.66	0.47	0.22	0.103	0.221	0.048
S	20.05	6.17	-	-	0.532	1.099	0.274
Среднее	1.43	0.44	-	-	-	-	-

2. Задаем доверительную вероятность $P = 0.95$.

3. Сравниваем расчетную величину $r_{XY} = 0.969$ с табличными данными (табл. 30) для $n = 14$, $P = 0.95$.

4. Расчетный r_{XY} (0.969) больше, чем табличное значение (0.514). Следовательно, существует значимая (на уровне 0.95) связь между $\ln K_D$ и t^* .

Теперь надо найти **аналитическую зависимость** между $\ln K_D$ и t^* или в общем случае функциональную зависимость вида $Y = f(X)$.

В результате эксперимента мы получаем для значений аргумента ($X_1, X_2, \dots, X_n$) набор значений функций ($Y_1, Y_2, \dots, Y_n$). Если соединить последовательно точки $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ломаной линией, она не является графическим изображением функции $Y = f(X)$, так как при повторении данной серии опытов мы получим ломаную линию, отличную от первой. Значит, измеренные значения Y будут отклоняться от истинной кривой $Y = f(X)$ вследствие статистического разброса. Наша задача состоит в том, чтобы аппроксимировать экспериментальные данные гладкой (не ломаной) кривой, которая проходила бы как можно ближе к истинной зависимости $Y = f(X)$.

Теория вероятности показывает, что наилучшим приближением будет такая кривая (или прямая) линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали от точек до кривой будет минимальной. Метод нахождения кривой, соответствующей этому условию, и называется *методом наименьших квадратов* (МНК). Фактически это условие минимума соответствует предположению, что разброс точек Y_i относительно кривой $Y = f(X)$ подчиняется закону нормального распределения. Мерой этого распределения является среднеквадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [Y_i - Y(X_i)]^2}{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum \Delta Y_i^*.$$

Требование минимального разброса соответствует минимальному значению этого среднего квадрата. Обычно форму кривой $Y = f(X)$ задают полиномами вида:

$$Y(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_m X^m.$$

Нахождение коэффициентов этого полинома сводится к минимизации S_x методами математического анализа, к решению уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^n \left(Y_j - \sum_{k=0}^m \alpha_k t_j^k \right) t_j^i = 0,$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2, \dots, m$; $m < n-1$.

Для решения этих уравнений применяют итерационный (численный) метод. Фактически без применения компьютера расчет (подбор) коэффициентов α функции $Y = f(X)$ можно проводить лишь для линейной зависимости: $Y = \alpha_1 X + \alpha_0$ (т.е. $Y = \alpha X + b$).

Для степени $m > 1$ расчет коэффициента α_m выполняется на компьютерах.

Приложение Д

(справочное)

Практическая работа 6

Расчет параметров линейной зависимости $Y = aX + b$.

Приведем уравнения, позволяющие рассчитывать величины a и b без их вывода.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i Y_i) - X \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i)^2 - X \sum_{i=1}^n X_i}; b = Y - aX.$$

Продолжим рассмотрение предыдущего примера, в котором для некоторых 2 фаз была получена следующая зависимость $\ln K_D(Y)$ от обратной температуры $t^* = 10^3 / T(X)$. Запишем линейное уравнение связи $\ln K_D(Y) = at^*(X) + b$.

$$X; Y; X_i; Y_i; \sum_{i=1}^n Y_i; X_i^2; \sum_{i=1}^n (X_i)^2; Y_i^2; \sum_{i=1}^n (Y_i)^2.$$

Вычислим величины

Вычисление удобно представить в виде таблицы (таблица Д.1)

Таблица Д.1. Расчет параметров линейной зависимости.

n	X_i	Y_i	$X_i Y_i$	Y_i^2	X_i^2
1	1.00	0.21	0.21	0.044	1.00
2	1.10	0.30	0.33	0.090	1.21
3	1.15	0.28	0.32	0.078	1.32
4	1.20	0.27	0.32	0.073	1.44
5	1.20	0.38	0.46	0.144	1.44
6	1.30	0.37	0.48	0.137	1.69
7	1.40	0.43	0.60	0.185	1.96
8	1.40	0.48	0.67	0.230	1.96
9	1.50	0.45	0.68	0.203	2.25
10	1.60	0.56	0.90	0.314	2.56
11	1.70	0.57	0.97	0.325	2.89
12	1.80	0.58	1.04	0.336	3.24
13	1.80	0.63	1.13	0.397	3.24
14	1.90	0.66	1.25	0.436	3.61
Σ	20.05	6.17	9.36	2.992	29.81
Среднее	1.43	0.44	0.67	0.213	2.13

Вычислим параметры a и b :

$$a = \frac{9.36 - (1.43 \cdot 6.17)}{29.81 - (1.43 \cdot 20.05)} = \frac{0.537}{1.139} = 0.471,$$

$$b = 0.44 - 0.471 \cdot 1.43 = -0.234.$$

Итак, зависимость $Y = aX + b$ или $\ln K_D = at^* + b$ выражается линейным уравнением $\ln K_D = 0.471t^* - 0.234$.

Приложение Е

(справочное)

Практическая работа 7

Расчет точности аппроксимации данных уравнением $Y = aX + b$ ¹.

Оценив связи между X и Y (t^* и $\ln K_D$) (коэффициент корреляции) и найдя линейное уравнение связи, необходимо оценить степень аппроксимации линейным уравнением этой зависимости. Это можно сделать, рассчитывая среднеквадратическое отклонение расчетных значений (Y_p) от экспериментальных (Y_i):

$$S_Y^* = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - Y_p)^2}{n - 1}}.$$

Затем рассчитывают погрешность аппроксимации (ε_{Y^*}) по критерию, предварительно задав доверительную вероятность:

$$\varepsilon_Y^* = \frac{t_{\alpha n} S_Y^*}{\sqrt{n}}.$$

Рассчитаем значение S_{Y^*} и ε_{Y^*} для зависимости $\ln K_D = 0.471t^* - 0.234$ (таблица Е.1).

Таблица Е.1 Расчет точности аппроксимации.

n	X_i	Y_i	Y_p	$Y_i - Y_p$	$(Y_i - Y_p)^2$
1	1.00	0.21	0.24	- 0.03	0.0009
2	1.10	0.30	0.28	0.02	0.0004
3	1.15	0.28	0.31	- 0.03	0.0009
4	1.20	0.27	0.33	- 0.06	0.0036
5	1.20	0.38	0.33	0.05	0.0025
6	1.30	0.37	0.38	- 0.01	0.0001
7	1.40	0.43	0.43	0.00	0.0000
8	1.40	0.48	0.43	0.05	0.0025
9	1.50	0.45	0.47	- 0.02	0.0004
10	1.60	0.56	0.52	0.04	0.0016
11	1.70	0.57	0.57	0.00	0.0000
12	1.80	0.58	0.61	- 0.03	0.0009
13	1.80	0.63	0.61	0.02	0.0004
14	1.90	0.66	0.66	0.00	0.0000
$\bar{a}$	-	-	-	-	0.0142

¹ Подобный расчет можно проводить и для уравнений более высоких степеней.

1. Рассчитаем для заданных X_i по найденному уравнению $Y = 0.471X - 0.234$ значения Y_p ; $(Y_i - Y_p)$; $(Y_i - Y_p)^2$ (табл.13).

2. Вычислим S_{Y^*} :

$$S_Y^* = \sqrt{\frac{0.0142}{14-1}} = 0.033$$

3. Выберем $P = 0.95$ и по табл. 28 для $n = 14$ найдем $t_n = 2.2$.

4. Вычислим величину ε_Y^* :

$$\varepsilon_Y^* = \frac{t_{\alpha n} S_Y^*}{\sqrt{n}} = \frac{2.2 \cdot 0.033}{\sqrt{14}} = 0.22$$

Итак, уравнение $Y = 0.471X - 0.234$ описывает экспериментальную зависимость $\ln K_D = (Y)$ от $t^* (X)$ с погрешностью 0.02 для доверительной вероятности $P = 0.95$. Практически это означает, что с вероятностью 0.95 все экспериментальные точки будут находиться в пределах ± 0.02 от расчетной прямой.

Порядок обработки зависимости двух параметров следующий:

1. Рассчитывается коэффициент корреляции r_{XY} .
2. По табл. 10 оценивается (для выбранного значения P и количества пар X и Y - n) значимость связи X и Y .
3. Находятся коэффициенты линейного уравнения связи $Y = \alpha X + b$.
4. Вычисляется S^*_Y (среднеквадратическое отклонение кривой $Y = \alpha X + b$ от экспериментальных точек).
5. Задаем доверительную вероятность P . Обычно $P = 0.95$.
6. По табл. 28 находим значение t_n для выбранного P и количества точек (пар) - n .
7. Рассчитываем погрешность аппроксимации по формуле:

$$\varepsilon_Y^* = \pm \frac{t_{\alpha n} S_X}{\sqrt{n}},$$

Приложение Ж (справочное)

Алгоритм обработки результатов измерений

В заключение напомним **порядок статистической обработки серии измерений**. С подобной работой наиболее часто приходится сталкиваться экспериментатору:

1. Вычисляется среднее арифметическое выборки (из n результатов измерений):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

2. Находятся погрешности отдельных измерений: $\Delta = X - X_i$.

3. Вычисляется среднеквадратическое отклонение результатов измерений:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta X_i^2}{n-1}}$$

4. Если один результат измерений (или несколько) резко отличается от остальных, то следует проверить, не является ли этот результат промахом, предварительно выбрав уровень значимости q (для большинства наших измерений $q = 0.95$).

5. Определяется коэффициент Стьюдента $t_{p,n}$ для доверительной вероятности P и числа измерений n (см.табл).

6. Находят границы доверительного интервала:

Доверительные границы в случае нормального закона распределения вычисляются как

$$\pm tS / \sqrt{n}, \pm tS_{\bar{X}},$$
$$\Delta X = S_X \cdot t_{p,n}$$

где S , $S_{\bar{X}}$ - средние квадратические отклонения (погрешности), соответственно, единичного и среднего арифметического результатов измерений;

где $t_{p,n}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений n .

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}},$$

$$\varepsilon = t_{an} \frac{S_X}{\sqrt{n}}.$$

7. Окончательный результат записывается в виде $X = \bar{X} \pm \varepsilon$;

8. Вычисляется коэффициент вариации данной серии замеров:

$$V_X = \frac{S_X}{\bar{X}} 100\%.$$

Приложение 3 (справочное) Измерения физических величин

3.1 измерение физической величины;

Совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины.

Примеры

1 В простейшем случае, прикладывая линейку с делениями к какой-либо детали, по сути сравнивают ее размер с единицей, хранимой линейкой, и, произведя отсчет, получают значение величины (длины, высоты, толщины и других параметров детали).

2 С помощью измерительного прибора сравнивают размер величины, преобразованной в перемещение указателя, с единицей, хранимой шкалой этого прибора, и проводят отсчет.

Примечания

1 Приведенное определение понятия "измерение" удовлетворяет общему уравнению измерений, что имеет существенное значение в деле упорядочения системы понятий в метрологии. В нем учтена техническая сторона (совокупность операций), раскрыта метрологическая суть измерений (сравнение с единицей) и показан гносеологический аспект (получение значения величины).

2 От термина "измерение" происходит термин "измерять", которым широко пользуются на практике. Все же нередко применяются такие термины, как "мерить", "обмерять", "замерять", "промерять", не вписывающиеся в систему метрологических терминов. Их применять не следует.

Не следует также применять такие выражения, как "измерение значения" (например, мгновенного значения напряжения или его среднего квадратического значения), так как значение величины - это уже результат измерений.

3 В тех случаях, когда невозможно выполнить измерение (не выделена величина как физическая и не определена единица измерений этой величины) практикуется *оценивание* таких величин по условным шкалам

3.2 равноточные измерения

Ряд измерений какой-либо величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью.

Примечание - Прежде чем обрабатывать ряд измерений, необходимо убедиться в том, что все измерения этого ряда являются равноточными

3.3 неравноточные измерения

Ряд измерений какой-либо величины, выполненных различающимися по точности средствами измерений и (или) в разных условиях.

Примечание - Ряд неравноточных измерений обрабатывают с учетом веса отдельных измерений, входящих в ряд

3.4 однократное измерение

Измерение, выполненное один раз.

Примечание - Во многих случаях на практике выполняются именно однократные измерения. Например, измерение конкретного момента времени по часам обычно производится один раз

3.5 многократное измерение

Измерение физической величины одного и того же размера, результат которого получен из нескольких следующих друг за другом измерений, т.е. состоящее из ряда однократных измерений

3.6 статическое измерение

Измерение физической величины, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения.

Примеры

1 Измерение длины детали при нормальной температуре.

2 Измерение размеров земельного участка

3.7 динамическое измерение

Измерение изменяющейся по размеру физической величины.

Примечания

1 Термин элемент "динамическое" относится к измеряемой величине.

2 Строго говоря, все физические величины подвержены тем или иным изменениям во времени. В этом убеждает применение все более и более чувствительных средств измерений, которые дают возможность обнаруживать изменение величин, ранее считавшихся постоянными, поэтому разделение измерений на динамические и статические является условным

3.8 абсолютное измерение

Измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений физических констант.

Пример - Измерение силы $F = mg$ основано на измерении основной величины - массы m и использовании физической постоянной g (в точке измерения массы).

Примечание - Понятие *абсолютное измерение* применяется как противоположное понятию *относительное измерение* и рассматривается как измерение величины в ее единицах. В таком понимании это понятие находит все большее и большее применение

3.9 относительное измерение

Измерение отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или измерение изменения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную.

Пример - Измерение активности радионуклида в источнике по отношению к активности радионуклида в однотипном источнике, аттестованном в качестве эталонной меры активности

3.10 прямое измерение

Измерение, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно.

Примечание - Термин *прямое измерение* возник как противоположный термину *косвенное измерение*. Строго говоря, измерение всегда прямое и рассматривается как сравнение величины с ее единицей. В этом случае лучше применять термин *прямой метод измерений*.

Примеры

1 Измерение длины детали микрометром.

2 Измерение силы тока амперметром.

3 Измерение массы на весах

3.11 косвенное измерение

Определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

Пример - Определение плотности D тела цилиндрической формы по результатам прямых измерений массы m , высоты h и диаметра цилиндра d , связанных с плотностью уравнением

$$D = \frac{m}{0,25\pi d^2 h}.$$

Примечание - Во многих случаях вместо термина *косвенное измерение* применяют термин *косвенный метод измерений*

3.12 совокупные измерения

Проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях.

Примечание - Для определения значений искомых величин число уравнений должно быть не меньше числа величин.

Пример - Значение массы отдельных гирь набора определяют по известному значению массы одной из гирь и по результатам измерений (сравнений) масс различных сочетаний гирь

3.13 совместные измерения

Проводимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для определения зависимости между ними

3.14 наблюдение при измерении

Операции, проводимые при измерении и имеющие целью своевременно и правильно произвести отсчет.

Примечание - Не следует заменять термин *измерение* термином *наблюдение*

3.15 вид измерений

Часть области измерений, имеющая свои особенности и отличающаяся однородностью измеряемых величин.

Пример - В области электрических и магнитных измерений могут быть выделены как виды измерений: измерения электрического сопротивления, электродвижущей силы, электрического напряжения, магнитной индукции и др.

3.16 подвид измерений

Часть вида измерений, выделяющаяся особенностями измерений однородной величины (по диапазону, по размеру величины и др.).

Пример - При измерении длины выделяют измерения больших длин (в десятках, сотнях, тысячах километров) или измерения сверхмалых длин - толщин пленок

3.17 физическая величина

Одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

3.18 Измеряемая физическая величина;

Физическая величина, подлежащая измерению, измеряемая или измеренная в соответствии с основной целью измерительной задачи

3.19 размер физической величины;

Количественная определенность физической величины, присущая конкретному материальному объекту, системе, явлению или процессу

3.20 значение физической величины;

Выражение размера физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц

3.21 числовое значение физической величины;

Отвлеченное число, входящее в значение величины

3.22 истинное значение физической величины;

Значение физической величины, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении соответствующую физическую величину.

Примечание - Истинное значение физической величины может быть соотнесено с понятием абсолютной истины. Оно может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений

3.23 действительное значение физической величины;

Значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него

3.24 результат измерения физической величины;

Значение величины, полученное путем ее измерения

3.25 неисправленный результат измерения;

Значение величины, полученное при измерении до введения в него поправок, учитывающих систематические погрешности

3.26 исправленный результат измерения;

Полученное при измерении значение величины и уточненное путем введения в него необходимых поправок на действие систематических погрешностей

3.27 сходимость результатов измерений;

сходимость измерений

Близость друг к другу результатов измерений одной и той же величины, выполненных повторно одними и теми же средствами, одним и тем же методом в одинаковых условиях и с одинаковой тщательностью.

Примечание - Сходимость измерений двух групп многократных измерений может характеризоваться размахом, средней квадратической или средней арифметической погрешностью

3.28 воспроизводимость результатов измерений

Близость результатов измерений одной и той же величины, полученных в разных местах, разными методами, разными средствами, разными операторами, в разное время, но приведенных к одним и тем же условиям измерений (температуре, давлению, влажности и др.).

Примечание - Воспроизводимость измерений может характеризоваться средними квадратическими погрешностями сравниваемых рядов измерений

3.29 ряд результатов измерений

Значения одной и той же величины, последовательно полученные из следующих друг за другом измерений

3.30 среднее взвешенное значение величины;

Среднее значение величины из ряда неравноточных измерений, определенное с учетом веса каждого единичного измерения (см. 8.8).

Примечание - Среднее взвешенное значение иногда называют *средним весовым*

3.31 вес результата измерений;

Положительное число (p), служащее оценкой доверия к тому или иному отдельному результату измерения, входящему в ряд неравноточных измерений.

Примечание - В большинстве случаев принято считать, что веса входящих в ряд неравноточных измерений обратно пропорциональны квадратам их средних квадратических погрешностей, т.е. $p_i = 1/S_i^2$. Для простоты обычно результату с большей погрешностью приписывают вес, равный единице ($p=1$), а остальные веса находят по отношению к нему.

ПРИЛОЖЕНИЕ И

(справочное)

Систематические погрешности

Систематические погрешности можно подразделить на следующие группы.

1. Погрешности, природа которых нам известна и величина которых может быть достаточно точно определена. Такие погрешности могут быть исключены введением соответствующих поправок. К погрешностям такого рода можно отнести "дрейф" рентгеновского дифрактометра: для каждой серии замеров можно ввести поправку, введя так называемый "стандарт" - вещество, для которого точно известны положения пиков на дифрактограммах. Определив поправки, можно проводить дальнейшие измерения, не вводя стандарт в исследуемый образец.

2. Другой вид систематических погрешностей - это погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. К их числу относятся погрешности измерительных приборов. Если на приборе указан класс точности 0,5, то это означает, что показания прибора верны с точностью до 0,5% от всей действующей шкалы прибора. Систематической погрешностью такого типа будет погрешность в определении давления манометром (класс 0.5), рассчитанного на измерение давления 4000 атм. Это значит, что давление мы измеряем с точностью 0.5% от всей шкалы, т.е. 20 атм. Систематические погрешности этого типа не могут быть исключены, но их наибольшее значение, как правило, известно. Если, измеряя давление, мы получили значение 2000 атм, то можем написать $P = 2000 \pm 20$. Здесь ± 20 означает, что давление лежит в пределах от 1980 до 2020.

3. Третий вид систематических погрешностей - самый опасный, это погрешности, о существовании которых мы не подозреваем, хотя величина их может быть очень значительна. Они чаще всего появляются при сложных измерениях. Иногда бывает, что величина, которая измерена, как нам кажется, с точностью 2 - 3%, оказывается в 2 - 3 раза больше или меньше найденной величины. Например, измеряя скорость диффузии какого-либо элемента в твердой фазе, мы можем не учесть, что в данном образце существует сеть дислокаций, за счет которых скорость диффузии увеличится в несколько раз. Распознать такую ошибку будет трудно, т. к. повторные замеры распределения компонентов на микроанализаторах будут давать одну и ту же картину, а краевые зоны разных образцов будут иметь одну и ту же высокую плотность дислокаций. Такая погрешность может быть выявлена только при тщательной проверке всех этапов эксперимента, используя разные методики приготовления образцов и т. п.

Таким образом, при проведении эксперимента необходимо тщательно проанализировать все возможные источники систематических погрешностей и исключить их (если это возможно).

Разделение систематических и случайных погрешностей до некоторой степени условно. Можно предвидеть ситуацию, в которой систематическая погрешность неизвестного происхождения будет трудно выявляться и не учитываться. В то же время источниками случайных погрешностей могут быть неконтролируемые изменения параметров эксперимента в сложной системе: изменения внешней (по отношению к изучаемой системе) среды, неоднородность материала исходной навески. Фактически, если эти изменения происходят достаточно быстро, то они должны рассматриваться как фактор, способствующий появлению случайных погрешностей.

Случайные погрешности неустранимы из опытных данных, но они могут быть выявлены и количественно оценены при математической обработке экспериментальных данных, в чем и заключается основная цель статистического анализа.

Интересно рассмотреть соотношения величин систематических и случайных погрешностей. Возможны два случая. 1) Величина систематической погрешности больше величины случайной. В этом случае, проводя серию опытов, мы будем получать постоянные значения какой - либо величины; подобный вариант встречается сравнительно редко и чаще всего связан с недостаточной чувствительностью измерительного прибора. 2) Случайные погрешности больше систематических. Ясно, что для повышения точности измерений в первом случае надо уменьшать величину систематической погрешности (повысить чувствительность прибора) до тех пор, пока она не станет меньше случайной погрешности. Во втором - необходимо уменьшить величину случайной погрешности, это можно сделать, увеличивая количество измерений. В работе экспериментатора чаще всего встречается вторая ситуация, и повысить точность измерений можно, только увеличивая их число. Это не всегда возможно из соображений времени, экономики и т.д. В этом случае мы можем только приближенно оценить нижний предел возможной погрешности по так называемым приборным погрешностям. Реальная величина погрешности может быть значительно выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ К (справочное) Запись чисел. Правила округления

Результаты любого эксперимента выражаются цифрами. Запись должна быть подчинена определенным правилам, произвол в этом деле недопустим. В этом смысле говорят о правильной и неправильной записи результатов. Следует иметь в виду, что неправильная запись может значительно обесценивать результаты даже блестящей экспериментальной работы, поэтому вопрос этот более серьезен, чем может показаться. Общее правило записи таково: она должна содержать только значащие цифры. Значащими считаются все цифры, кроме нулей в начале десятичной дроби (слева от запятой) и нулей в конце числа, если они поставлены вместо неизвестных цифр.

Рассмотрим пример. В качестве условий проведения опыта указано $P = 30\,000$ бар. Если все эти цифры значащие, то нули обозначают отсутствие единиц соответствующих разрядов, другими словами, мы ручаемся за то, что точность нашего измерения давления не хуже ± 1 бар. На самом деле это далеко не так: точность ниже на три порядка. Поэтому приведенная запись неверна, она создает совершенно ложное представление о точности эксперимента. Правильной записью будет 30×10^3 бар или 30 кбар. В такой записи только две значащие цифры, и последняя из них соответствует реальной точности эксперимента.

Другой пример. В результате серии измерений определена плотность $\rho = 13,60$ г / см³. В этой записи 4 значащие цифры, т.е. плотность измерена с точностью до единицы во втором знаке после запятой - до $\pm 0,01$ г/см³. Если бы реальная точность составляла только $\pm 0,1$ г/см³, правильной записью было бы 13,6 г/см³. Пусть, однако, при реальной точности $\pm 0,01$ г/см³ шкала измерительного прибора позволяет получать значение в следующем разряде (тысячные доли г/см³). Как поступить с этими значениями? Очевидно, что просто отбросить их было бы неверно, ибо значения, например, 13,615 и 13,605 г/см³ заметно отличаются. Такие цифры (в данном случае 0,00n г/см³) называются сомнительными; это значит, что n может принимать любое значение в пределах от 1 до 10. При записи результатов можно поступать двояко:

а) отбрасывать все приближенные цифры,

б) оставлять последней приближенную цифру ("принцип А.Н. Крылова"). Например, число 1,9931 (0,0031 - сомнительные цифры) записывается в первом варианте как 1,99, а во втором – 1,993 (сохраняя последнюю сомнительную цифру 3).

В приведенных примерах мы провели *округление* результата. Округлением числа называется уменьшение числа значащих цифр. Правила округления сводятся к следующему:

- если отбрасывается цифра меньше 5, то предпоследняя цифра остается без изменения: $1,9932 \rightarrow 1,993$;

- если отбрасывается цифра больше 5, то предпоследняя цифра увеличивается на единицу: $1,9937 \rightarrow 1,994$;

- если отбрасывается цифра 5, то предпоследняя цифра:

останется неизменной, если перед ней четное число: $1,9925 \rightarrow 1,992$.

увеличится на единицу, если перед ней нечетное число: $1,9935 \rightarrow 1,994$.

Запись надо вести так, чтобы все значащие цифры были верны, и лишь последняя была бы приближенной:

не $D = 1,4231 \pm 0,005$, а $1,413 \pm 0,005$, не $P = 38,742 \pm 0,04$, а $38,74 \pm 0,04$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(справочное)

Оценка погрешности косвенных измерений

При косвенных измерениях искомая физическая величина A является функцией величин $X, Y, Z, \dots$, которые могут быть получены с помощью прямых измерений. Результат косвенного измерения записывается в виде:

$$A \pm \Delta A$$

где $A = f(X, Y, Z, \dots)$ - значение искомой величины, рассчитанное по средним значениям параметров $X, Y, Z, \dots$, каждый из которых измеряется, как правило, по несколько раз. ΔA - абсолютная погрешность косвенного измерения, зависящая от погрешностей параметров $X, Y, Z, \dots$ (т.е. от $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \dots$).

В простейших случаях абсолютную и относительную погрешность косвенных измерений подсчитать нетрудно. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $A = X + Y$. Если известны погрешности ΔX и ΔY , то

$$A \pm \Delta A = (X \pm \Delta X) + (Y \pm \Delta Y)$$

Максимальное значение погрешности равно при этом

$$\Delta A = \Delta X + \Delta Y.$$

Такова же будет максимальная абсолютная погрешность при $A = X - Y$.

Таким образом, относительные погрешности величин, являющихся суммой или разностью двух параметров, равны соответственно :

$$E = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y} \quad \text{и} \quad E = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X - Y}$$

Пусть теперь $A = X \cdot Y$ - тогда

$$A \pm \Delta A = (X \pm \Delta X)(Y \pm \Delta Y) = X \cdot Y \pm X \cdot \Delta Y \pm Y \cdot \Delta X + \Delta X \cdot \Delta Y$$

Пренебрегая слагаемым второго порядка малости $|\Delta X \cdot \Delta Y|$ имеем:

$$\Delta A = X \cdot \Delta Y + Y \cdot \Delta X$$

$$E = \frac{X \cdot \Delta Y + Y \cdot \Delta X}{X \cdot Y} \quad \text{или} \quad E = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

Если $A = \frac{X}{Y}$, то $A \pm \Delta A = \frac{X \pm \Delta X}{Y \pm \Delta Y}$.

Максимальное значение погрешности ΔA получится в случае, если погрешности в числителе и в знаменателе данного выражения взять с разными знаками. Тогда можно записать:

$$A \pm \Delta A = \frac{X + \Delta X}{Y - \Delta Y} = \frac{(X + \Delta X)(Y + \Delta Y)}{(Y - \Delta Y)(Y + \Delta Y)} = \frac{XY + Y \cdot \Delta X + X \cdot \Delta Y}{Y^2}$$

Здесь мы пренебрегли членами $(\Delta Y)^2$ и $\Delta X \cdot \Delta Y$. Максимальная абсолютная погрешность равна в этом случае

$$\Delta A = \frac{Y \cdot \Delta X + X \cdot \Delta Y}{Y^2},$$

а относительная погрешность равна

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

Полученные результаты легко обобщаются на произвольное количество сомножителей. Если в самом общем случае

$$A = C \frac{X^\alpha \cdot Y^\beta \cdot \dots}{Z^\gamma},$$

где C — постоянный коэффициент, а $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — любые целые или дробные числа, то относительную погрешность косвенного измерения величины A можно записать в виде :

$$E = \frac{\Delta A}{A} = \alpha \frac{\Delta X}{X} + \beta \frac{\Delta Y}{Y} + \gamma \frac{\Delta Z}{Z} + \dots$$

Простота последнего выражения указывает на то, что в большинстве случаев удобно оценить сначала относительную погрешность косвенного измерения, а потом уже найти его абсолютную погрешность. Следует, однако, обратить внимание на то обстоятельство, что приведенные формулы применимы только в том случае, если параметры $X, Y, Z, \dots$ не зависят друг от друга. Если же, к

примеру, $A = \frac{Z}{Y}$, где $Z = X + Y$ расчет приведет к неправильному результату, т.к. погрешности одной и той же величины Y будут приписаны различные знаки, поскольку указанная величина фигурирует как в числителе, так и в знаменателе исходного выражения.

Более общие правила вычисления погрешностей, позволяющие избежать подобных ошибок, можно получить, используя дифференциальное исчисление.

Пусть по-прежнему $A = f(X, Y, Z, \dots)$. Тогда относительную погрешность косвенного измерения $E = \frac{\Delta A}{A}$ можно записать в виде $E = \frac{dA}{A}$. С другой стороны, $\frac{dA}{A} = d(\ln A)$ Таким образом, относительная погрешность величины A равна полному дифференциалу натурального логарифма функции, определяющей зависимость данной величины от измеряемых, т.е.

$$E = \frac{\Delta A}{A}$$

Таким образом, для нахождения необходимо:

- 1) Прологарифмировать исходную формулу $\ln A = \ln f(X, Y, Z, \dots)$
- 2) Продифференцировать полученное уравнение, заменив затем дифференциалы $dA, dX, dY, \dots$ погрешностями $\Delta A, \Delta X, \Delta Y, \dots$;
- 3) Сгруппировать члены, содержащие одни и те же погрешности, вынести эти погрешности за скобки, а выражения в скобках взять по модулю;
- 4) заменить знаки “-” перед коэффициентами при погрешностях на знак “+” (для нахождения максимального значения Δ).

Общая формула для расчета относительной погрешности будет при этом выглядеть следующим

образом:

$$E = \frac{\Delta A}{A} = \left| \frac{1}{f} \frac{df}{dX} \right| \Delta X + \left| \frac{1}{f} \frac{df}{dY} \right| \Delta Y + \left| \frac{1}{f} \frac{df}{dZ} \right| \Delta Z + \dots$$

В качестве примера приведем оценку относительной погрешности величины γ , вычисляемой по формуле $\gamma = \frac{H}{H-h}$, где средние значения параметров, полученные после проведения серии измерений (отсчеты по шкале манометра).

$$\begin{aligned} \ln \gamma &= \ln H - \ln(H-h) \\ \frac{d\gamma}{\gamma} &= \frac{dH}{H} - \frac{d(H-h)}{H-h} = \frac{dH}{H} - \frac{dH}{H-h} + \frac{dh}{H-h} \\ \frac{\Delta\gamma}{\gamma} &= \left| \frac{1}{H} - \frac{1}{H-h} \right| \Delta H + \left| \frac{1}{H-h} \right| \Delta h = \left| \frac{-h}{H(H-h)} \right| \Delta H + \left| \frac{1}{H-h} \right| \Delta h \end{aligned}$$

Надо сказать, что расчет по формуле приводит, как правило, к завышению погрешности результата косвенных измерений. Причем это завышение зависит от числа параметров X, Y, Z, ... Если, например, имеется пять таких параметров, то вероятность того, что все ошибки будут иметь заданный знак равна $\frac{1}{16}$. При большем их числе указанная вероятность будет еще меньше. Таким образом, понятно, что максимально возможное значение относительной погрешности, даваемое этим выражением, во многих случаях значительно больше реальной погрешности результата.

Теория вероятностей дает более правильные формулы для оценки погрешностей косвенных измерений. Если при прямых измерениях параметров X, Y, Z ... доминирующей является случайная погрешность, то погрешность косвенного измерения также является случайной величиной. Это означает, что следует искать среднюю квадратичную погрешность результата. Так, если $A = X + Y$, то вместо выражений указанных выше будем иметь :

$$A_{\text{кг}} = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} \quad \text{и} \quad E = \frac{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}}{X + Y}$$

Общая формула для расчета относительной погрешности будет в этом случае иметь следующий вид :

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{f} \sqrt{\left(\frac{df}{dX} \Delta X \right)^2 + \left(\frac{df}{dY} \Delta Y \right)^2 + \left(\frac{df}{dZ} \Delta Z \right)^2 + \dots}$$

или

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{d \ln f}{dX} \Delta X \right)^2 + \left(\frac{d \ln f}{dY} \Delta Y \right)^2 + \left(\frac{d \ln f}{dZ} \Delta Z \right)^2 + \dots}$$

В частности, при $A = C \frac{X^\alpha \cdot Y^\beta \cdot \dots}{Z^\gamma}$ имеем:
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{f} \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta X}{X} \right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta Y}{Y} \right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta Z}{Z} \right)^2 + \dots}$$

Таблица Г.1

№	Вид функции $R=f(X,Y,Z)$	Абсолютная погрешность (ε)	Относительная погрешность, $Q = \varepsilon / R$
1	$A X + B Y$	$\sqrt{A^2 \varepsilon_X^2 + B^2 \varepsilon_Y^2}$	$\frac{\sqrt{A^2 \varepsilon_X^2 + B^2 \varepsilon_Y^2}}{AX + BY}$
2	$A X - B Y$	$\sqrt{A^2 \varepsilon_X^2 + B^2 \varepsilon_Y^2}$	$\frac{\sqrt{A^2 \varepsilon_X^2 + B^2 \varepsilon_Y^2}}{AX - BY}$
3	$AX+BY+CZ$	$\sqrt{A^2 \varepsilon_X^2 + B^2 \varepsilon_Y^2 + C^2 \varepsilon_Z^2}$	$\frac{\sqrt{A^2 \varepsilon_X^2 + B^2 \varepsilon_Y^2 + C^2 \varepsilon_Z^2}}{AX + BY + CZ}$
4	$X Y$	$\sqrt{(\bar{X})^2 \varepsilon_Y^2 + (\bar{Y})^2 \varepsilon_X^2}$	$\sqrt{\frac{\varepsilon_X^2}{(\bar{X})^2} + \frac{\varepsilon_Y^2}{(\bar{Y})^2}}$
5	$XY Z$	$\sqrt{(\bar{Y})^2 (\bar{Z})^2 \varepsilon_X^2 + (\bar{Z})^2 (\bar{X})^2 \varepsilon_Y^2 + (\bar{X})^2 (\bar{Y})^2 \varepsilon_Z^2}$	$\sqrt{\frac{\varepsilon_X^2}{\bar{X}^2} + \frac{\varepsilon_Y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{\varepsilon_Z^2}{\bar{Z}^2}}$
6	X / Y	$\frac{\sqrt{\bar{Y}^2 \varepsilon_X^2 + \bar{X}^2 \varepsilon_Y^2}}{\bar{Y}^2}$	$\sqrt{\frac{\varepsilon_X^2}{(\bar{X})^2} + \frac{\varepsilon_Y^2}{(\bar{Y})^2}}$
7	$X / X + Y$	$\frac{\sqrt{\bar{Y}^2 \varepsilon_X^2 + \bar{X}^2 \varepsilon_Y^2}}{(\bar{X} + \bar{Y})^2}$	$\frac{\sqrt{\bar{Y}^2 \varepsilon_X^2 + \bar{X}^2 \varepsilon_Y^2}}{X(\bar{X} + \bar{Y})}$
8	$XY + Z$	$\sqrt{\bar{Y}^2 \varepsilon_X^2 + \bar{X}^2 \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2}$	$\frac{\sqrt{\bar{Y}^2 \varepsilon_X^2 + \bar{X}^2 \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2}}{X \cdot \bar{Y} + \bar{Z}}$

Библиография

- Зайдель А.Н. Элементарные оценки погрешностей измерений. - Л, 1968.
- Кассандро́ва О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. - М, 1970.
- Котельников Р.Б. Статистическая обработка экспериментальных данных. Вып. 7 (33), М, 1960.
- Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. - М, 1960.

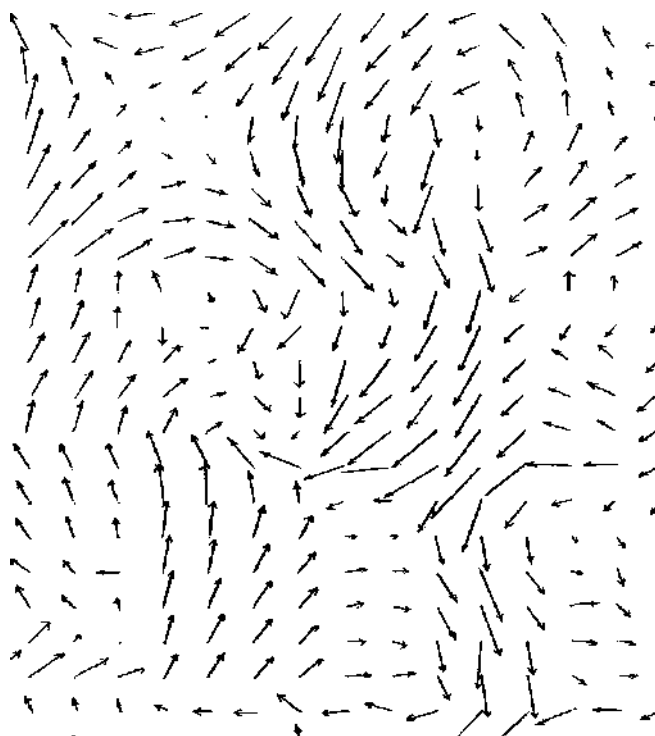
Минобрнауки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования

«Уральский государственный горный университет»

В. Б. ВИНОГРАДОВ, К. В. ВАНДЫШЕВА

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Екатеринбург – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Векторное поле.....	5
Дифференциальные операторы.....	10
Напряженность векторного поля.....	17
Потенциал поля.....	26
Вихревое поле.....	32
Поле поляризующихся сред.....	32
Уравнение Лапласа.....	41
Потенциал двумерных тел.....	49
Намагничивание тел с высокой магнитной восприимчивостью.....	50
Учет взаимного влияния тел с высокой намагниченностью.....	53
Электрическое поле постоянного тока.....	56
Проводящий шар в поле точечного источника тока.....	60
Магнитное поле постоянного тока.....	62
Переменное электромагнитное поле.....	71
Волновые уравнения.....	78
Элементы теории упругости.....	85
Упругие волны.....	91
Тепловое поле.....	98
Литература.....	109

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существующие учебники и учебные пособия по рассматриваемой дисциплине опубликованы более 15 лет назад и не соответствуют новым учебным программам. Они написаны электроразведчиками, в этих учебных изданиях преобладает описание электрических полей. Как правило, в них не рассматривается тепловое поле, количество измерений и приложений в геологии и геофизике которого очень быстро растет. Обучение студентов специальности «Геофизические методы исследования скважин» требует равного освещения теории всех полей, применяемых в геофизике.

Данное пособие в значительной степени отражает содержание курса Овчинникова И. К, у которого учился автор. С благодарностью автор вспоминает встречи с Е. Г. Булахом, автором одного из учебников по теории поля. Однако за отбор материала учебного пособия полностью отвечает автор. Формулы в учебном пособии приводятся в единицах СГСЭ и СГСМ, иногда в единицах, используемых в практической деятельности.

Быстрое развитие компьютерных технологий оказывает влияние на все стороны нашей жизни, в том числе на освоение теоретических дисциплин. Поэтому в пособии приводятся примеры решения задач с помощью математических пакетов.

Выражаю свою благодарность И. В. Гордеевой за помощь в работе. Благодарю также студентов групп ГИС-09 и РФ-09.

Замечания прошу направлять по адресу: 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, д. 30, УГГУ, факультет геологии и геофизики, кафедра геофизики.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

При внесении материального объекта в некоторое пространство он начинает оказывать влияние на окружающие его объекты, которое проявляется в действии механических (пондеромоторных) или иных сил. При рассмотрении физических явлений удобно считать, что силы, воздействующие на объект, существуют независимо от того, вносим мы его в поле или нет. Мы говорим, что объекты создают поле и являются источниками физического поля. Задача определения силового поля состоит в определении векторной величины, характеризующей силу в каждой точке.

Для качественного и количественного описания полей вводят систему координат и используют скаляры, векторы, тензоры и иные математические объекты и структуры. Наиболее часто используют декартовую (X,Y,Z) , цилиндрическую (R,Φ,Z) и сферическую (R,Φ, Θ) системы координат.

Вектором в алгебре называют упорядоченную тройку чисел: $\{X,Y,Z\}$. Иное определение вектора – направленный отрезок. Для характеристики вектора необходимо указывать его длину и направление либо три проекции на оси координат. Вектор в декартовой системе координат определяют проекциями на соответствующие оси $\{a_x, a_y, a_z\}$. В дальнейшем векторы будем обозначать $A, \vec{a}, \vec{A}, \{a_x, a_y, a_z\}$.

Радиус-вектором $\vec{R}$ назовем вектор, начало находится в точке O с источником поля, координаты (x_0, y_0, z_0) , а конец в точке наблюдения с координатами (x, y, z) , т. е. $\vec{R}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ (рис. 1). Для векторов определены операции сложения, вычитания, скалярного произведения, векторного произведения и другие.

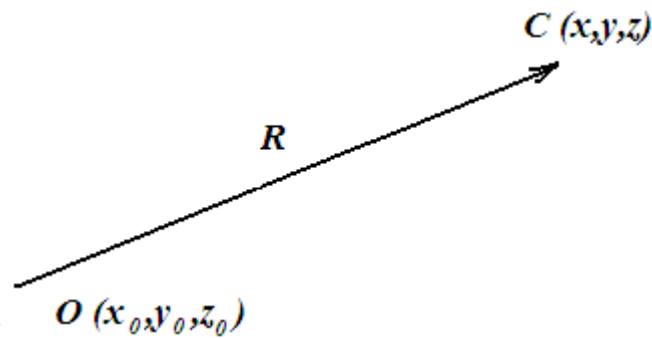


Рис. 1. К определению понятия радиуса-вектора

Операция сложения векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i}(a_x + b_x) + \vec{j}(a_y + b_y) + \vec{k}(a_z + b_z), \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \varphi + b^2},$$

где φ – угол между векторами.

Вычитание векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{i}(a_x - b_x) + \vec{j}(a_y - b_y) + \vec{k}(a_z - b_z), \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2}$$

Умножение вектора на число:

$$\alpha \vec{b} = \{\alpha b_x, \alpha b_y, \alpha b_z\}.$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$(\vec{a} \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторное произведение двух векторов определяют выражением:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Угол между векторами:

$$\varphi = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Вычислим скалярное и векторное произведения векторов $\vec{g}(1,3,4)$, $\vec{d}(2,6,5)$,

$$\vec{f}(y^2, \ln z, \sin x), \quad \vec{h}(e^x, \frac{1}{y}, z):$$

$$(\vec{g} \vec{d}) = 2 + 18 + 20 = 40, \quad \vec{g} \times \vec{d} = -9\vec{i} + 3\vec{j}, \quad (\vec{f} \vec{h}) = y^2 e^x + \frac{\ln z}{y} + z \sin x,$$

$$\vec{f} \times \vec{h} = \vec{i} \left(z \ln z - \frac{\sin x}{y} \right) - \vec{j} (y^2 z - e^x \sin x) + \vec{k} (y - e^x \ln z).$$

При теоретических рассуждений и вычислениях часто векторные уравнения записывают в проекциях на оси координат. Проекции векторного уравнения

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho \vec{R} dV}{R^3} \text{ на оси координат имеют вид:}$$

$$E_x = \int_V \frac{\rho(x-x_0)dV}{R^3}, E_y = \int_V \frac{\rho(y-y_0)dV}{R^3}, E_z = \int_V \frac{\rho(z-z_0)dV}{R^3}.$$

В настоящее время математические операции с векторами удобно проводить с помощью математических пакетов Matlab и других.

При изучении физических полей устанавливают соотношения между двумя векторными величинами. Как правило, коэффициент пропорциональности является физическим параметром среды (плотность, скорость распространения волн, электропроводность). Такие физические параметры горных пород часто зависят от направления. Взаимосвязь в матричном виде принимает вид:

$$\vec{Q} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} \vec{D}, \quad \vec{Q} = K \vec{D}.$$

Девять коэффициентов, записанные в виде матрицы в математике, называют тензором второго порядка. Направления векторов в левой и правой частях в вышеприведенных уравнениях не совпадают. Скалярные величины называют тензором нулевого порядка. Например, плотность является коэффициентом пропорциональности между объемом и массой. Компоненты тензора зависят от выбора системы координат. Тензорами второго порядка являются электропроводность и магнитная восприимчивость.

При решении задач теории полей часто встречается интеграл одного типа, который имеет геометрическую интерпретацию – **телесный угол**. Телесный угол Ω , под которым видна из точки наблюдения O поверхность S , определяют формулой (рис. 2):

$$\Omega = \int_S \frac{\cos \alpha}{R^2} dS,$$

где α – угол между радиусом-вектором и внешней нормалью $\vec{n}$ к поверхности S , для которой вычисляется телесный угол.

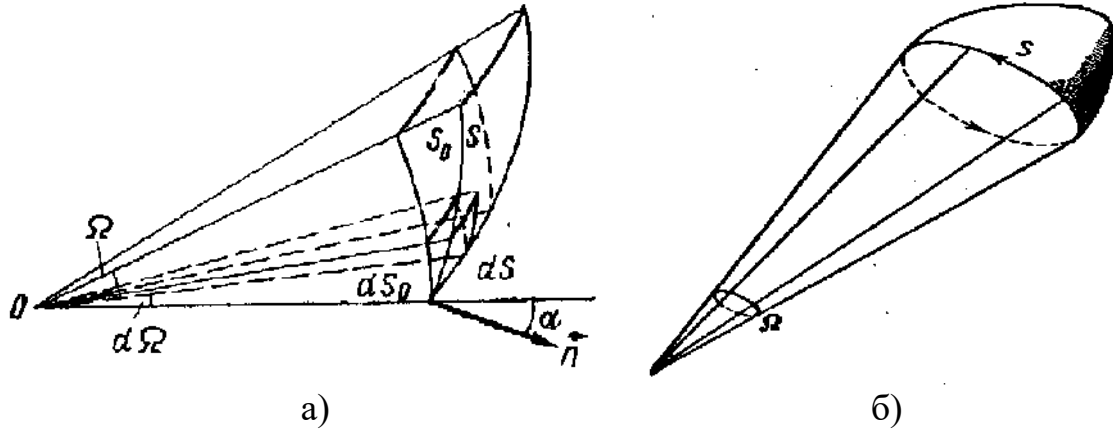


Рис. 2. К определению понятия телесного угла: (а), (б)

Телесный угол, под которым видно все пространство, равен 4π . Телесный угол, под которым видна некоторая поверхность, определяют по аналогии с плоским углом. В некоторых случаях телесный угол определяется легко. Телесный угол, под которым видна грань куба из его центра, равен $\Omega = 4\pi/6 = 2\pi/3$. Телесный угол, под которым видна из центра грань пентагондодекаэдра или ромбододекаэдра, равен $\Omega = 4\pi/12 = \pi/3$. Из сферической тригонометрии известно, что трехгранный угол равен сумме образующих его двугранных углов минус π . Следовательно, телесный угол, под которым видно основание пирамиды в виде выпуклого многоугольника равен $\Omega = \sum_{i=1}^n A_i - \pi(n-2) = 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - A_i)$, где A_i – двугранные углы пирамиды, n – число сторон многоугольника. Каждое слагаемое в последнем выражении вычисляют:

$$\pi - A_i = \arccos \frac{\vec{r}_i \times \vec{r}_{i+1}}{|\vec{r}_i| |\vec{r}_{i+1}|} = \arccos \frac{r_{ix}r_{i+1x} + r_{iy}r_{i+1y} + r_{iz}r_{i+1z}}{\sqrt{(r_{ix}^2 + r_{iy}^2 + r_{iz}^2)(r_{i+1x}^2 + r_{i+1y}^2 + r_{i+1z}^2)}},$$

$$r_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_i & y-y_i & z-z_i \\ x_i-x_{i-1} & y_i-y_{i-1} & 0 \end{vmatrix}, \quad r_{i+1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_{i+1} & y-y_{i+1} & z-z_{i+1} \\ x_{i+1}-x_i & y_{i+1}-y_i & 0 \end{vmatrix}.$$

Для любой поверхности можно выполнить триангуляцию (разбиение на треугольники) и вычислить телесный угол как сумму углов видимости всех

треугольников. Полученная формула позволяет вычислить физические поля, например гравитационное поле горизонтальной пластинки в виде многоугольника $g = k\sigma\Omega$, где k – гравитационная постоянная.

Телесный угол при вершине сферического треугольника ΔABC определяют по формуле Люилье:

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{4} = \left(\operatorname{tg} \frac{l}{2} \operatorname{tg} \frac{l-a}{2} \operatorname{tg} \frac{l-b}{2} \operatorname{tg} \frac{l-c}{2} \right),$$

где a, b, c – длины сторон сферического треугольника, $2l = a + b + c$. Если радиус сферы равен 1:

$$a = \arccos \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B}| |\vec{C}|}, \quad b = \arccos \frac{\vec{A} \times \vec{C}}{|\vec{A}| |\vec{C}|}, \quad c = \arccos \frac{\vec{B} \times \vec{A}}{|\vec{B}| |\vec{A}|}.$$

Вычислим телесный угол, под которым из вершины видно основание прямого конуса (рис. 3, а):

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{hrdr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = 2\pi h \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right).$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью математических пакетов, для этого достаточно вычислить внутренний интеграл:

$$\int \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr = -\frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Осталось лишь подставить пределы и умножить на величину первого интеграла 2π и h .

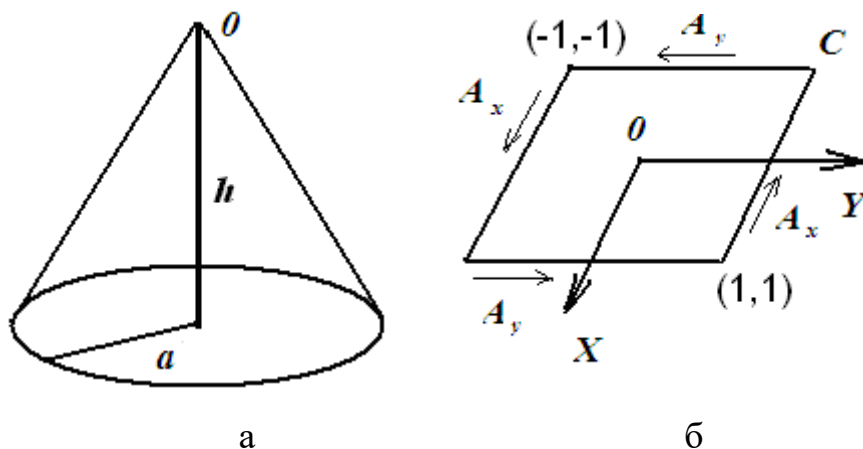


Рис. 3. К вычислению телесного угла при вершине прямого конуса (а), циркуляции вектора по контуру (б)

Циркуляцией вектора по контуру L называют интеграл по замкнутому контуру от проекции вектора на касательную к L :

$$\oint_L A_L dL.$$

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{A}\left\{\frac{-2y}{x^2+1}, \frac{2x}{y^2+1}\right\}$. В качестве контура интегрирования C (рис. 3, б) выберем прямоугольник с вершинами $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$:

$$\oint_C A_l dl = \int_{-1}^1 \frac{2dx}{x^2+1} + \int_{-1}^1 \frac{2dy}{y^2+1} + \int_{-1}^1 \frac{2dx}{x^2+1} + \int_{-1}^1 \frac{2dy}{y^2+1} = 8 \arctg x \Big|_{-1}^1 = 4\pi.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Градиентом скалярного поля f называют вектор $\text{grad } f$:

в декартовой системе координат $\text{grad } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$;

в цилиндрической системе координат $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{i}_z$;

в сферической системе координат $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi$.

Градиент характеризует изменчивость поля в малой окрестности точки, его можно назвать вектором пространственной скорости поля. Он характеризует поведение поля вблизи выбранной точки. Направление градиента есть направление наиболее быстрого возрастания поля (рис. 4), а его величина равна максимальному значению производной из всех возможных значений в данной точке. Градиент не зависит от выбранной системы координат (инвариант), производная функции по любому направлению равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{grad}_l U$$

Вычислим градиент функции, обратной радиусу-вектору $\frac{1}{R}$:

$$\text{grad} \frac{1}{R} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = - \left(\vec{i} \frac{x-x_0}{R^3} + \vec{j} \frac{y-y_0}{R^3} + \vec{k} \frac{z-z_0}{R^3} \right).$$

Те же вычисления можно осуществить с помощью пакета Mathematica:

$$\begin{aligned} D \left[\frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}}, x \right] &= - \frac{x-x_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}; \\ D \left[\frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}}, y \right] &= - \frac{y-y_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}; \\ D \left[\frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}}, z \right] &= - \frac{z-z_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

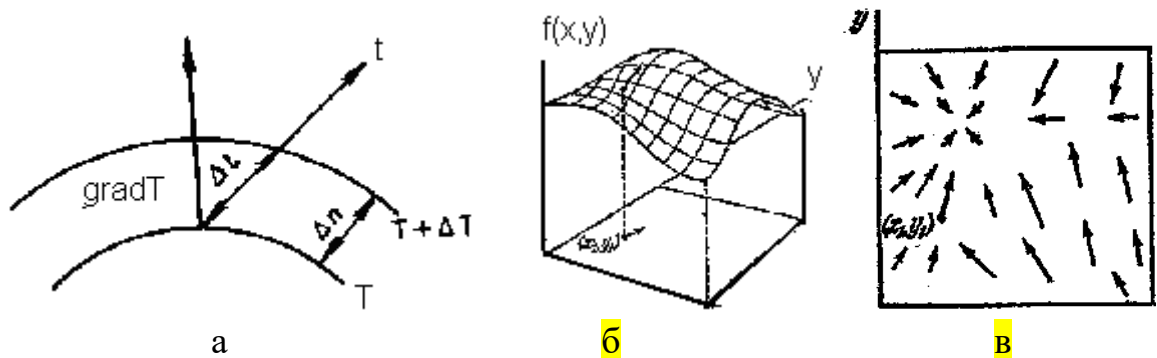


Рис. 4. К определению понятия градиента (а). График скалярной функции (б) и план ее градиента (в)

Вычислим вертикальный градиент гравитационного поля Земли, считая ее шаром. Поле шара $g = \frac{kM}{r^2}$. Вертикальный градиент направлен радиально:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = - \frac{2kM}{r^3} = - \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.976 \times 10^{24}}{(6.367 \times 10^6)^3} = 3.089 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}.$$

Предел отношения поверхностного интеграла нормальной по отношению к поверхности S составляющей вектора к объему этой поверхности, при

стремлении последнего к нулю $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S a_n dS}{\Delta V}$ называют **расходимостью**, или

дивергенцией. Расходимость характеризует плотность источников поля.

Расходимость вектора в декартовых координатах может быть вычислена по формуле:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

В цилиндрической системе координат дивергенция

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rD_r)}{\partial r} + \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial D_z}{\partial z} \right).$$

В сферической системе координат расходимость определена выражением:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + r \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Вычислим дивергенцию градиента скалярной функции f :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \left(\vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f,$$

где $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (лапласиан).

Уравнение $\Delta U = 0$ называют уравнением Лапласа.

Предел отношения интеграла по замкнутому контуру от проекции вектора поля на касательную к контуру к площади, охватываемой контуром, при стремлении последней к нулю:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a}_l dl}{\Delta S} = \operatorname{rot} \vec{a}$$

называют **вихрем** или **ротором** вектора.

Этот предел называют также плотностью циркуляции вектора. На рис. 5 приведены 6 планов векторов полей со значением их расходимости и вихря. В каждом случае приведен контур, который позволяет оценить расходимость и вихрь.

Ротор не зависит от выбора системы координат. Вихрь и дивергенция-инварианты поля относительно системы координат. Вихрь и ротор векторного поля однозначно определяют поле с точностью до постоянного слагаемого. Это свойство двух дифференциальных операторов позволило Максвеллу всего четырьмя уравнениями описать электромагнитное поле.

Вихрь вектора в декартовых координатах имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right),$$

в сферических координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\Theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_\Theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \Theta} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \Theta} \left(\frac{\partial(\sin \Theta E_\varphi)}{\partial \Theta} - \frac{\partial E_\Theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r,$$

в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(E_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z.$$

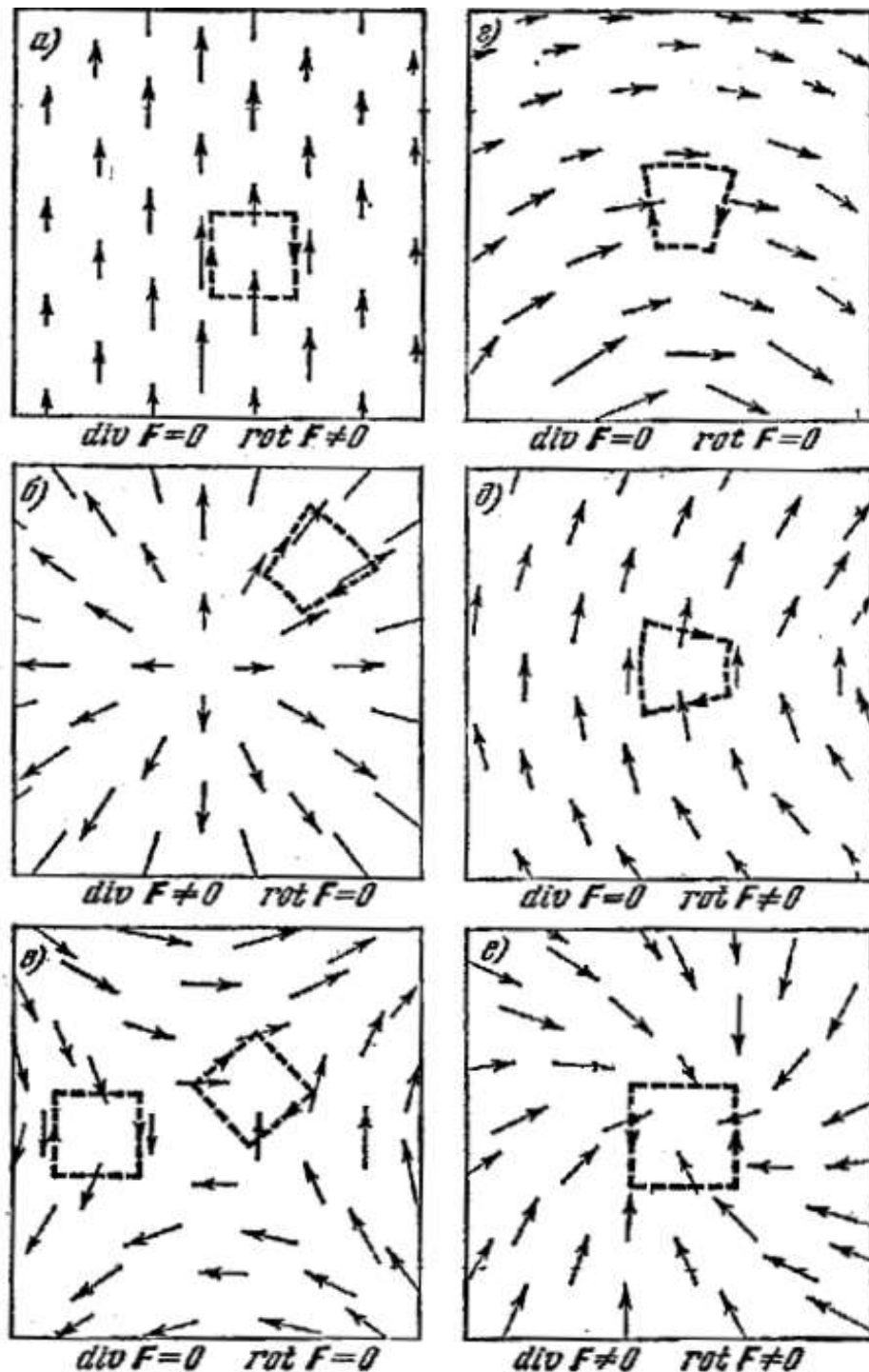


Рис. 5. Дивергенция и вихрь различных векторных полей

Вычислим величину $\text{rot rot } \vec{A}$:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

Градиент, расходимость и вихрь часто называют пространственными производными.

Оператором Гамильтона называют дифференциальный оператор (оператор набла):

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Дифференциальные операторы позволяют компактно записывать уравнения, описывающие физические поля:

$$Q - \lambda C + D\Delta C - \text{div}(C\vec{v}) = \frac{\partial C}{\partial t} \text{ — уравнение переноса радиоактивного газа;}$$

$$\Delta T + F = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \text{ — уравнение распределения температуры;}$$

$$\Delta U - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b \frac{\partial U}{\partial t} + CU = -F \text{ — телеграфные уравнения;}$$

$$\Delta \vec{U}_1 - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho v_p^2} \vec{F}_1 \text{ — уравнение распространения продольных волн и}$$

другие.

Определенную в области задания уравнения действительную функцию, непрерывную вместе со своими частными производными, входящими в уравнение, и обращающую его в тождество, называют регулярным решением. Решения, перестающие быть регулярными в изолированных точках или множествах особого вида, называют фундаментальными.

При проведении преобразований для решения задачи дифференциальные операторы надо воспринимать так же, как таблицу умножения или таблицу сложения, т.е. как формальное правило соответствия одного выражения другому.

ЗАДАЧИ

1. Найдите градиент функций $1/R^3$ и $1/R$.
2. Докажите тождество $\text{div } \vec{A} \times \vec{B} = (\vec{B}, \text{rot } \vec{A}) - (\vec{A}, \text{rot } \vec{B})$.

3. Вычислите телесный угол, под которым из вершины пирамиды высотой $2a$ видно ее основание, если основание пирамиды – квадрат со стороной a . Решение проведите двумя способами.

4. Вычислите телесный угол при вершине прямого конуса высотой $3a$ и диаметром основания a .

5. Вычислите расхожимость градиента функции $U = x^3 y^2 z$.

6. Вычислите дивергенцию векторов $\vec{R}$ и $\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$.

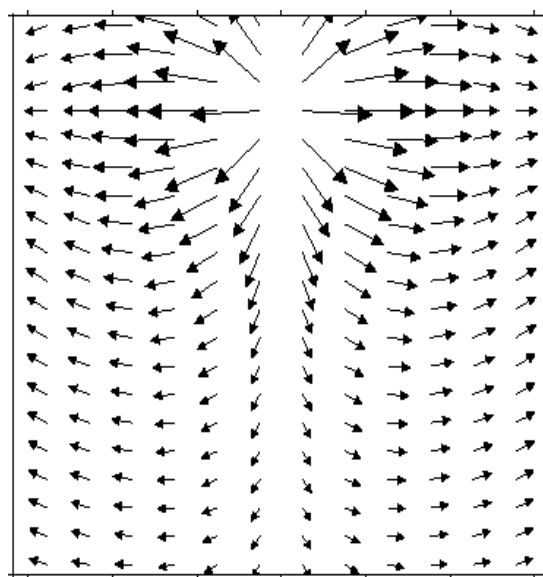
7. Найдите циркуляцию вектора $\vec{A} = y\vec{i}$ по окружности $x = a \cos t$, $y = a + a \sin t$, лежащего в плоскости XOY , $z=0$.

8. Найдите $\text{rot rot } \vec{A}$.

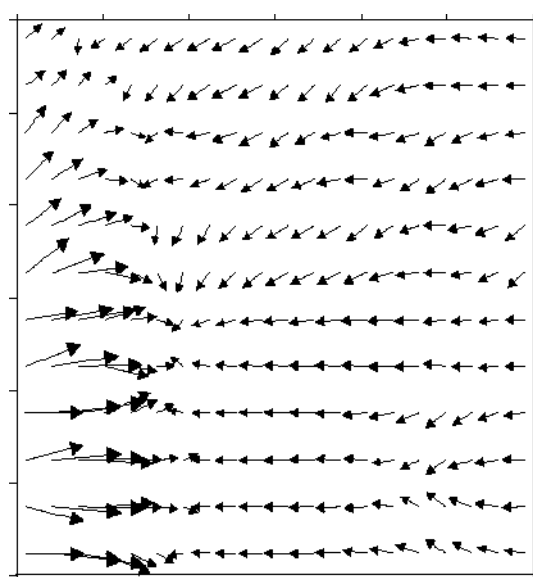
9. Найдите вихрь вектора $\vec{R}$.

10. Докажите, что $\text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B} = \text{rot } (\vec{A} + \vec{B})$.

11. Вычислите вихрь векторного произведения радиус-вектора $\vec{R}$ и постоянного вектора $\vec{A}$.



а



б

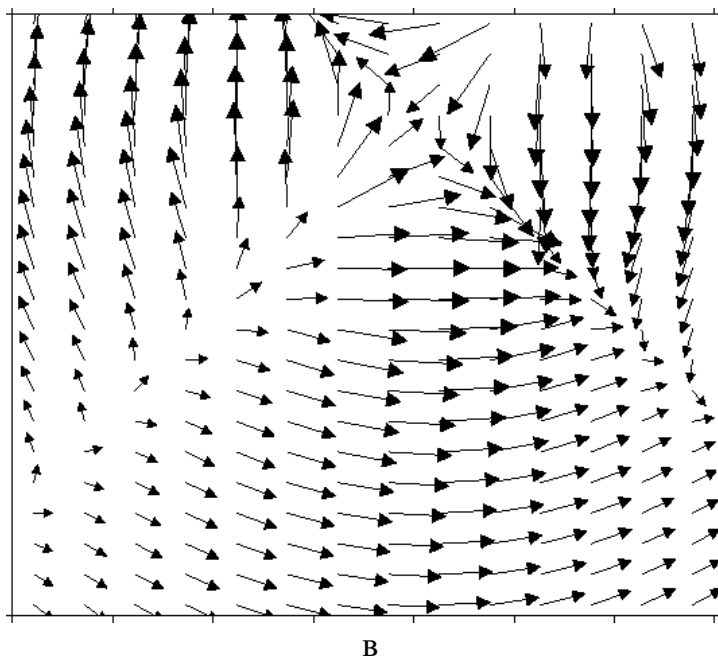


Рис. 6. Векторные поля:

12. Оцените вихрь и расходимость векторных полей представленных на рис. 6.

НАПРЯЖЕННОСТЬ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В теоретических рассуждениях рассматривают идеализированные источники поля (рис. 7):

1. **Точечный источник** – заряд в точке, объем которой равен нулю. Такое приближение удобно при рассмотрении поля на расстояниях во много раз превосходящих собственные размеры источника (см. рис. 7, а, б).

2. **Линейный источник** – заряд, распределенный вдоль некоторой линии. Площадь поперечного сечения источника равна нулю. Источник принято характеризовать линейной плотностью заряда χ , которая равна заряду, линии длиной 1.

3. **Поверхностный источник** – заряд, распределенный по некоторой поверхности. Толщина поверхности равна нулю. Источник характеризуют поверхностной плотностью зарядов, т.е. зарядом участка поверхности площадь которого равна 1.

4. **Объемный источник** – заряд, распределенный в некоторой части пространства, ограниченной некоторой замкнутой поверхностью. Источнику приписывают объемную плотность заряда.

В геофизике измеряются различные характеристики физических полей: в магниторазведке модуль вектора индукции геомагнитного поля T , в гравиразведке – напряженность гравитационного поля g , в электроразведке (при измерении естественного поля) – потенциал U . Поэтому необходимо знать свойства и особенности каждой из измеряемых характеристик поля для различных источников.

Напряженностью гравитационного и электрического полей называют силу, с которой поле действует на единичную массу или единичный положительный заряд. Законы изменения напряженности гравитационного и электростатического полей точечных источников установлены опытным путем Кавендишем и Кулоном. Их математическая запись одинакова с точностью до обозначений:

$$E = \frac{\varepsilon Q}{R^2}, \quad g = \frac{kM}{R^2} \text{ или в векторной форме } \vec{E} = \frac{\varepsilon Q \vec{R}}{R^3}, \quad \vec{g} = \frac{kM \vec{R}}{R^3}.$$

Направление вектора напряженности точечного источника радиальное. Принято считать, что если $E > 0$, то вектор направлен от источника, если $E < 0$, то векторы направлены к источнику поля. Однако между источниками гравитационного и электрического полей существенное различие: не существует тел с отрицательной массой. Вектор напряженности гравитационного поля всегда направлен к источнику. На основе этих результатов можно получить законы изменения напряженности поля линейного, поверхностного и объемного источника. Для этого достаточно разбить изучаемый объект на элементарные источники и проинтегрировать выражение для точечного источника.

Теоретические рассуждения проводят в векторной форме, вычисления осуществляют в скалярной форме, т.е. используют запись уравнений в проекциях на оси координат. В декартовой системе проекции вектора напряженности на оси координат

$$E_x = \frac{Q(x - x_0)}{R^3}, \quad E_y = \frac{Q(y - y_0)}{R^3}, \quad E_z = \frac{Q(z - z_0)}{R^3}.$$

Экспериментальным путем установлен **принцип суперпозиции**: вектор напряженности совокупности точечных источников равен векторной сумме векторов напряженности отдельных источников (рис. 7, в, г):

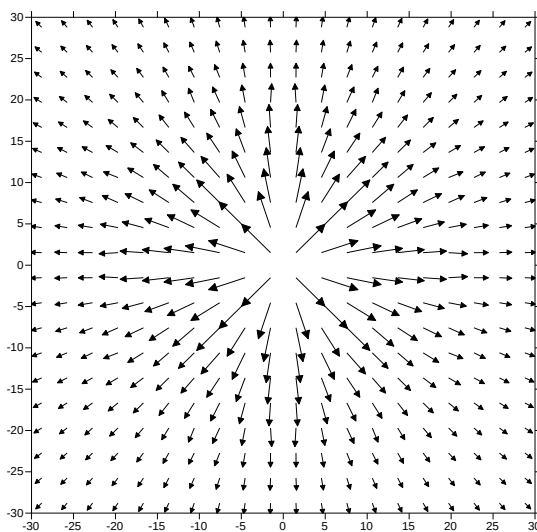
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i \vec{R}_i}{R_i^3}.$$

Свойства напряженности векторного поля точечного источника:

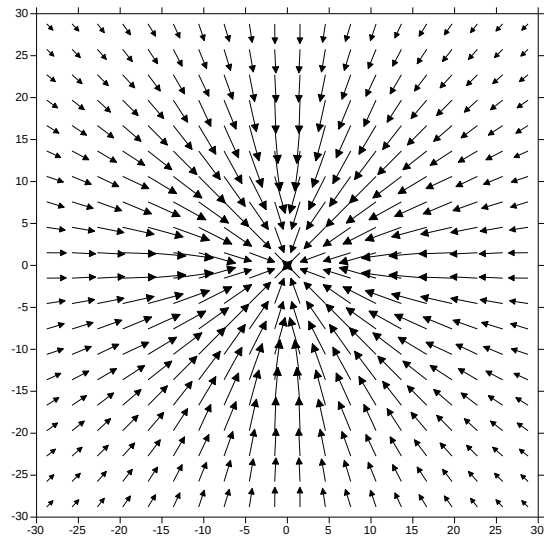
1. Напряженность поля точечного источника непрерывна вне источника.
2. При стремлении точки вычисления к бесконечности напряженность поля стремиться к нулю:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E = 0.$$

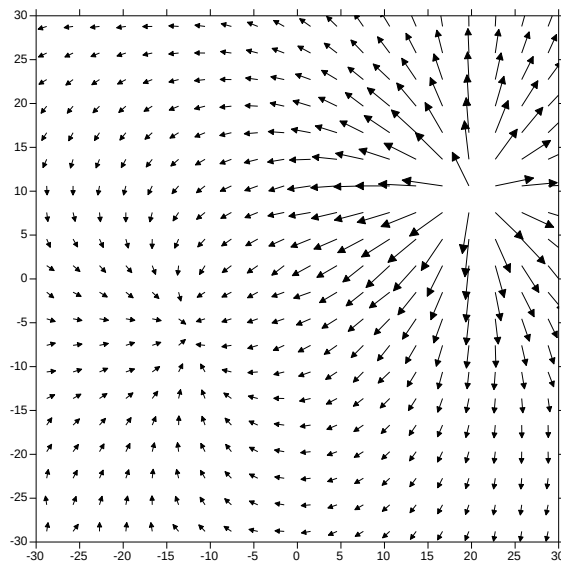
3. При неограниченном приближении к источнику напряженность поля неограниченно возрастает.



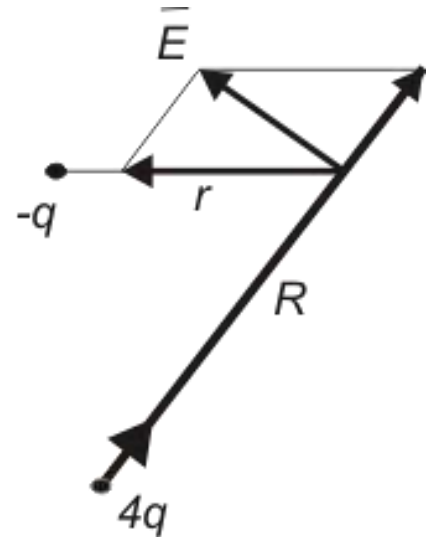
а



б



В



Г

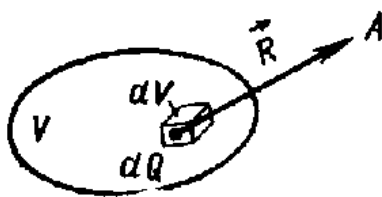
Рис. 7. Векторы напряженности поля точечных источников: положительного точечного заряда (а); отрицательного заряда (б); двух разноименных зарядов (в, г)

Напряженность поля линейных, поверхностных и объемных источников. Для определения полей этих объектов их разбивают на элементарные источники и на основе принципа суперпозиции интегрированием получают формулы вычисления векторов напряженности полей (рис. 8).

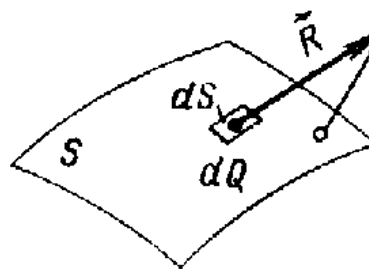
Напряженность поля линейного источника описывается выражениями:

$$\vec{E} = \int_l \chi \frac{\vec{R}}{R^3} dl, \quad E_x = \int_l \chi \frac{x-x_0}{R^3} dl, \quad E_y = \int_l \chi \frac{y-y_0}{R^3} dl, \quad E_z = \int_l \chi \frac{z-z_0}{R^3} dl,$$

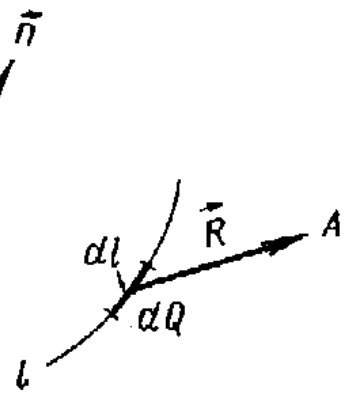
где χ – линейная плотность зарядов (диполей, масс). Эта величина численно равна заряду линии единичной длины (массе линии длиной 1).



а



б



в

Рис. 8. К определению объемного (а), поверхностного (б) и линейного (в) источников

Свойства напряженности поля линейного источника рассмотрим на примере кольца (рис. 9). Поле вычислим на оси кольца. Из симметрии задачи следует, что вектор напряженности в точках оси диска направлен вдоль этой оси, т.е. $E=E_z$:

$$E_z = \chi \int_0^{2\pi} \frac{rd\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 4\pi\chi \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Напряженность поля линейного источника стремится к нулю при удалении от источника. Она всюду конечна и непрерывна вне источника, а при приближении к источнику стремиться к бесконечности.

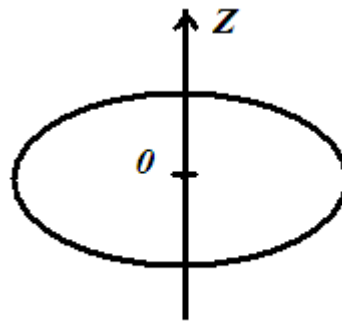


Рис. 9. Линейный источник кольцевой формы

Напряженность поверхностного источника с плотностью поверхностных зарядов (масс, диполей) σ имеет вид:

$$\vec{E} = \int_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} ds.$$

Свойства напряженности поля поверхностного источника поля рассмотрим на примере диска радиуса a с плотностью поверхностных зарядов σ . Поле вычислим на оси диска (рис. 10). Начало полярной системы координат поместим в центре диска. Исходя из симметрии задачи вектор напряженности в точках, принадлежащих оси диска, направлен вдоль оси z , т.е. $E=E_z$:

$$E = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{(z - z_0) r dr}{\left[(z - z_0)^2 + r^2 \right]^{3/2}} = -2\pi \sqrt{z^2 + r^2} \Big|_0^a.$$

Напряженность поверхностного поля вне источника всюду конечна, а при пересечении поверхности источника ее нормальная составляющая терпит разрыв $4\pi\sigma$. В остальной части пространства напряженность поля непрерывна, а при удалении от источника стремится к нулю (см. рис. 10, а).

Свойства напряженности поля объемных источников поля рассмотрим на примере вертикального кругового цилиндра (см. рис. 10, б) высотой $2h$ и радиусом основания a . Вычислим напряженность поля на оси цилиндра. Решение проведем в цилиндрической системе координат, которая отвечает симметрии задачи. Начало координат поместим в центр цилиндра, ось Z направим вдоль оси цилиндра. Из симметрии задачи следует, что вектор напряженности на оси цилиндра направлен вдоль этой оси:

$$E = E_z = \rho \int_{-h}^h dz_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r dr}{\left[r^2 + (z - z_0)^2 \right]^{3/2}} = 2\pi\rho \int_{-h}^h \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} = 2\pi\rho \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2},$$

Далее необходимо рассмотреть два случая: для точки расчета, находящейся внутри цилиндра ($z < h$), и для точки расчета, расположенной вне цилиндра ($z > h$).

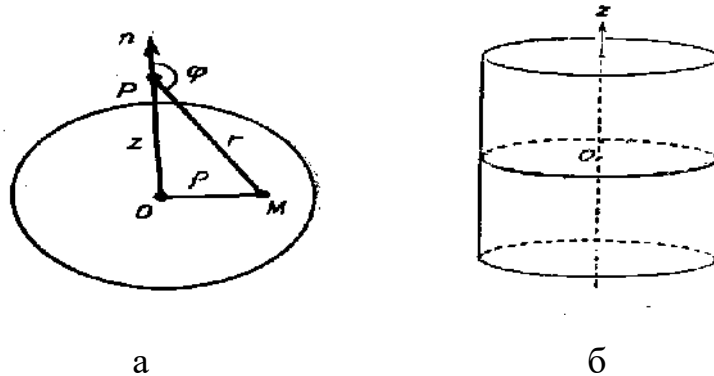


Рис. 10. К вычислению напряженности поля диска (а), вертикального кругового цилиндра (б)

В первом случае:

$$E = 2\pi\rho \left(\sqrt{a^2 + (z - h)^2} + z + h - \sqrt{a^2 + (z + h)^2} - (z - h) \right) = 2\pi \left(2h + \sqrt{a^2 + (z - h)^2} - \sqrt{a^2 + (z + h)^2} \right).$$

Во втором случае:

$$\begin{aligned}
 E &= 2\pi\rho\left[\sqrt{a^2 + (z - z_0)^2} - |z - z_0|\right] + 2\pi\rho\left[\sqrt{a^2 + (z - z_0)^2} - |z - z_0|\right] = \\
 &= 2\pi\rho\left(a - \sqrt{a^2 + (z - h)^2} + z + h - \sqrt{a^2 + (z + h)^2} - h + z - a\right) = \\
 &= 2\pi\rho\left(2z + \sqrt{a^2 + (z - h)^2} - \sqrt{a^2 + (z + h)^2}\right).
 \end{aligned}$$

Полученный результат показывает, что напряженность поля объемного источника всюду конечна, непрерывна и при удалении от источника стремится к нулю.

Обращение в бесконечность и нарушение непрерывности носят формальный характер и получаются только вследствие сделанных допущений, что существуют необъемные источники с бесконечно большой плотностью.

На практике очень часто строят модели среды, состоящие из параллелепипедов. В декартовой системе координат вычислим поле прямоугольного параллелепипеда. Вертикальная составляющая вектора напряженности поля:

$$\begin{aligned}
 E &= \rho \int_{-a}^a dx_0 \int_{-b}^b dy_0 \int_{-c}^c \frac{(z - z_0) dz_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = \\
 &= -\rho \int_{-a}^a dx_0 \int_{-b}^b \frac{dy_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \\
 &= \rho \int_{-a}^a \ln\left(y - y_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right) dx_0 = \\
 &= -\rho\left((x - x_0) \ln\left(y - y_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + (y - y_0) \ln\left(x - x_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - (z - z_0) \operatorname{arctg} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{(z - z_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}\right) \Big| \Big| \Big|.
 \end{aligned}$$

Потоком вектора напряженности через поверхность S (рис. 11 и 12) назовем величину

$$N = \int_S E_n dS,$$

где E_n – нормальная составляющая вектора напряженности поля к поверхности. Название «поток» заимствовано из гидродинамики, где эта величина имеет ясный физический смысл (рис. 11, б).

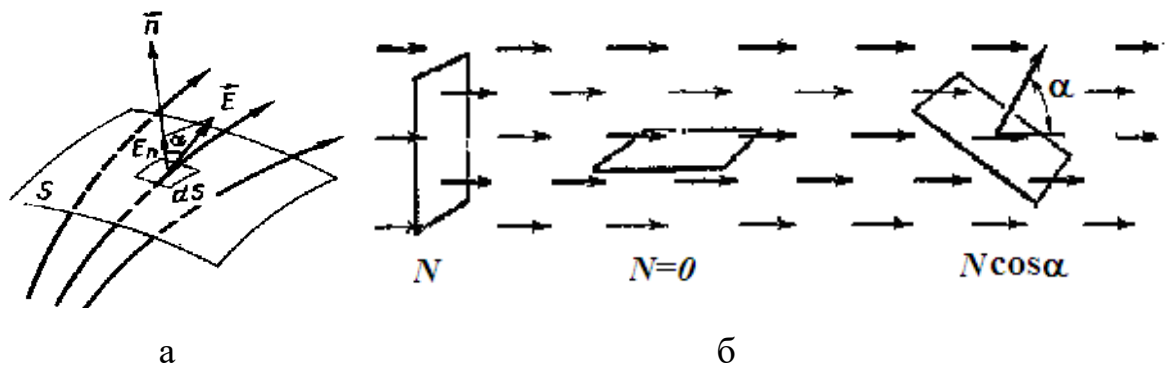


Рис. 11. К определению понятия потока

Поток вектора напряженности точечного источника через поверхность S можно записать в виде:

$$N = \int_S \frac{Q \cos \alpha dS}{R^2} = Q\Omega,$$

где Ω – телесный угол, под которым видна поверхность из точки, где располагается источник.

Таким образом, поток напряженности точечного источника через охватывающую его поверхность равен произведению заряда (массы) на телесный угол, под которым видна поверхность из точки, где располагается источник. Когда поле возбуждается не одним источником, поток вектора через произвольную замкнутую поверхность равен произведению 4π на величину заряда, расположенного внутри поверхности.

Если $N > 0$, то внутри замкнутой поверхности S имеются источники поля.

Если $N < 0$, то внутри замкнутой поверхности есть поглотители потока (например, поглотители тепла).

Если $N = 0$, то внутри замкнутой поверхности нет источников, либо мощность имеющихся источников равна мощности поглощения потока вектора.

Теорема Гаусса – Остроградского: поток вектора напряженности поля через замкнутую поверхность, охватывающую источник, равен $4\pi Q$, а через

поверхность, не охватывающую источник равен нулю. Теорема справедлива для любых источников поля. Теорема Гаусса – Остроградского может быть записана в дифференциальной форме:

$$\text{Div } E = \begin{cases} 4\pi\rho & (\text{в точках с источниками}) \\ 0 & (\text{в точках без источников}). \end{cases}$$

Поток вектора через замкнутую поверхность, охватывающую источник, равен потоку того же вектора через сферу, охватывающую тот же источник (см. рис. 12).

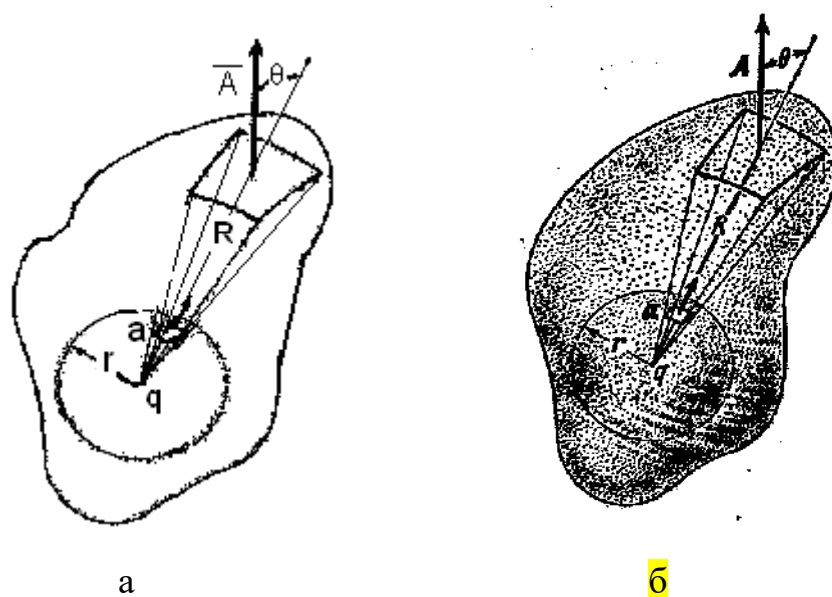


Рис. 12. Поток вектора через замкнутую поверхность равен потоку того же вектора через сферу:

При теоретических рассуждениях используются **формула Гаусса – Остроградского:**

$$\int_S E_n dS = \int_V \text{div } \vec{E} dV,$$

формула Грина:

$$\int_C E_n dl = \int_S \text{div } \vec{E} dS.$$

Данные формулы позволяют преобразовать поверхностный интеграл в объемный и наоборот, а поверхностный интеграл преобразовать в контурный интеграл.

Вычислим поток напряженности точечного источника, находящегося на оси цилиндра через боковую поверхность цилиндра. Начало координат расположим в центре цилиндра, высоту цилиндра обозначим $2h$, радиус основания – r , точечный источник находится на расстоянии a от центра цилиндра. Поток через боковую поверхность цилиндра равен произведению заряда на разность полного телесного угла 4π и суммы углов, под которыми из источника видны оба основания конуса. Выше телесный угол, под которым видно основание конуса из его вершины был вычислен (глава «Векторное поле»). Поэтому можем записать:

$$N = Q \left(4\pi - \pi + \frac{\pi(a-h)}{\sqrt{r^2 + (a-h)^2}} - \pi + \frac{\pi(a+h)}{\sqrt{r^2 + (a+h)^2}} \right) = Q\pi \left(\frac{a-h}{\sqrt{r^2 + (a-h)^2}} + \frac{a+h}{\sqrt{r^2 + (a+h)^2}} \right).$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислите поток векторов $\vec{A} = x\vec{i} + 2y\vec{k}$ и $\vec{B} = x^2\vec{j} - y\vec{k}$ через сферу с центром в начале координат и радиусом $r=1$.
2. Вычислите поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра, если поле обусловлено точечным зарядом $Q=5$, находящимся на середине оси цилиндра.
3. Вычислите поток вектора $\vec{A} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ через поверхность куба, ограниченного плоскостями $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.
4. Определите напряженность поля, создаваемого половиной шара радиусом a с плотностью ρ в точках, расположенных на ребре и в центре сферической поверхности.
5. Определите напряженность поля пластинки с поверхностной плотностью 5 в виде ромба на перпендикуляре, проходящем через его центр.

ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ

Пусть в каждой точке пространства существует векторное поле E . Потенциалом поля назовем скалярную однозначную функцию $U(x,y,z)$, частная производная которой по любому направлению, взятая с обратным знаком, равна составляющей вектора напряженности поля по этому направлению:

$$E_l = \frac{\partial U}{\partial l}.$$

Если такая функция существует, поле называется потенциальным. Вектор

$$\vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z} = -\text{grad } U$$

назовем градиентом потенциала. В символической форме:

$$\vec{E} = -\text{grad } U, \quad E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Для потенциальности поля необходимо и достаточно, чтобы циркуляция вектора поля по любому контуру равнялась нулю:

$$\oint A_l dl = 0.$$

В силовых полях численное значение интеграла $\int_a^b A_l dl$ равно работе по перемещению единичного источника из точки A в точку B .

Дифференциальный критерий потенциальности поля

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

Чтобы поле было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы во всех точках плотность вихревых источников поля равнялась нулю, то есть поле должно быть безвихревым.

Формула Стокса. Циркуляция вектора по контуру равна потоку вихря вектора через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint A_l dl = \int_S \text{rot}_n \vec{A} dS.$$

Формула применяется для преобразования контурного интеграла к поверхностному интегралу и наоборот.

Потенциал точечного источника, как легко проверить:

$$U = \frac{Q}{R}.$$

Потенциал точечного источника в точках, свободных от источников, конечен и непрерывен, а при удалении от него стремится к нулю обратно пропорционально квадрату расстояния.

Потенциал линейного источника

$$U = \int_l \frac{\chi}{R} dl.$$

Рассмотрим свойства линейного источника на примере стержня (рис. 13). Поскольку задача обладает осевой симметрией, совместим начало координат с центром стержня, ось z направим вдоль стержня. Его потенциал примет вид:

$$U(r, z_0) = \int_{-l}^l \frac{\chi dz_0}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} = \chi \ln \frac{\sqrt{r^2 + (z + l)^2} + z + l}{\sqrt{r^2 + (z - l)^2} + z - l}.$$

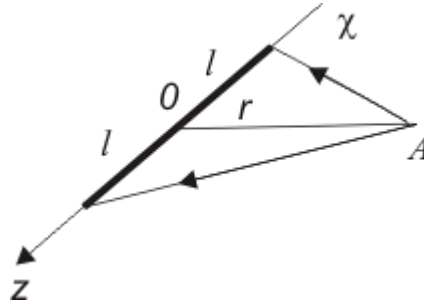


Рис. 13. К вычислению потенциала стержня χ

Потенциал стержня на оси z вне стержня имеет вид:

$$U = \chi \ln \frac{z + l}{z - l}.$$

Из этого выражения следует, что при приближении к стержню потенциал стремится к бесконечности. В остальных точках пространства потенциал конечен, непрерывен, а при удалении от источника стремится к нулю.

Потенциал поверхностного источника рассмотрим на примере диска. Потенциал на оси диска определится выражением:

$$U = \int_0^a \frac{\sigma r dr d\phi}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi\sigma(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|).$$

Потенциал в центре диска равен $2\pi\sigma a$. При пересечении поверхности диска потенциал остается непрерывным и конечным. Однако производная потенциала по нормали к диску терпит разрыв при пересечении диска. При удалении от диска потенциал стремится к нулю (рис. 14). Эти утверждения справедливы для всех поверхностных источников.

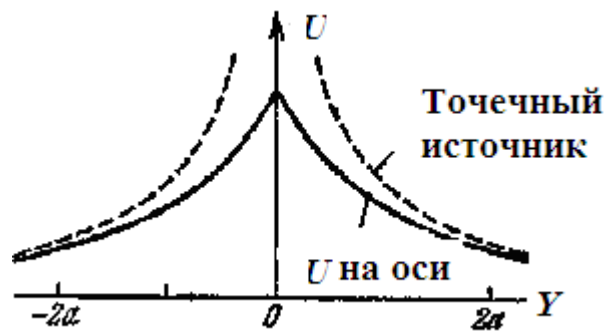
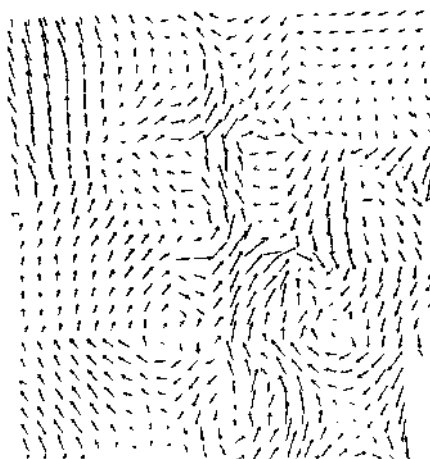


Рис. 14. Графики изменения потенциала диска и точечного источника

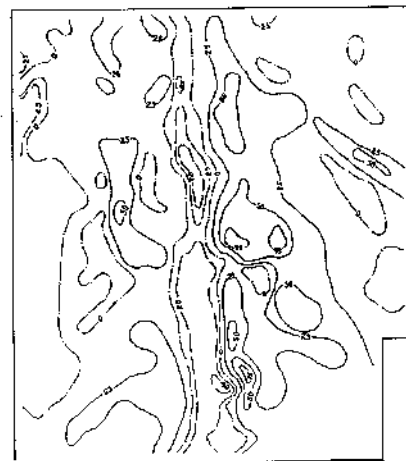
Векторные поля принято изображать графически в виде проекций вектора напряженности на горизонтальную плоскость (рис. 15, а) или в виде планов изолиний величин проекций (рис. 15, б).

Потенциал объемного источника рассмотрим на примере шара (рис. 16). Во внешней по отношению к шару точке потенциал шара радиусом r с объемной плотностью ρ на расстоянии от центра шара L :

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a \frac{\rho r^2 dr}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2rL\cos\theta}} = \frac{\pi\rho}{L} \int_0^a r dr \int_0^{\pi} \frac{d(-2Lr\cos\theta)d\theta}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2rL\cos\theta}} = \\
 &= \frac{2\pi\rho}{L} \int_0^a \left(\sqrt{L^2 + r^2 + 2rL} - \sqrt{L^2 + r^2 - 2rL} \right) r dr = \frac{2\pi\rho}{L} \int_0^a \left(|L+r| - |L-r| \right) r dr = \frac{4\pi\rho}{L} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^a = \\
 &= \frac{4\pi\rho a^3}{L} = \frac{Q}{L}.
 \end{aligned}$$



а



б

Рис. 15. Способы графического изображения векторного поля:
в виде векторов (а); изолиниями проекции вектора на вертикаль (б)

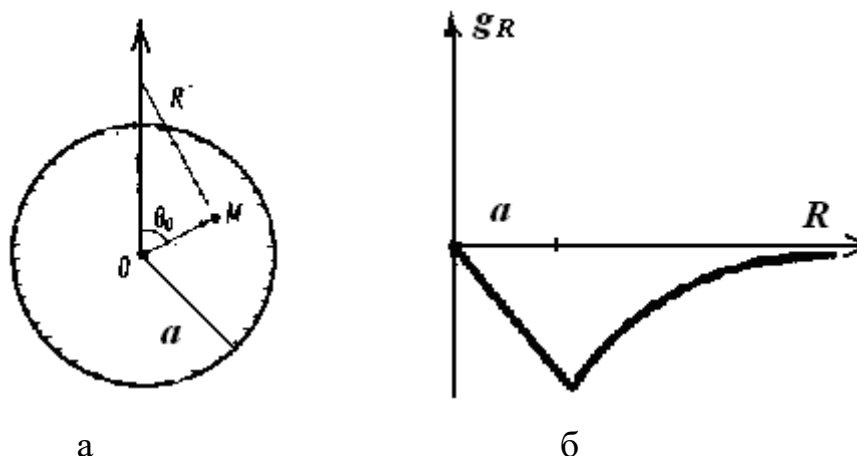


Рис. 16. К вычислению потенциала и напряженности поля шара (а). График зависимости напряженности гравитационного поля шара от расстояния до его центра (б)

Полученное решение совпадает с потенциалом точечного источника с тем же зарядом Q . При вычислении потенциала внутри шара последний интеграл необходимо разбить на два:

$$U = \frac{2\pi\rho}{z} \int_0^a (|z+r| - |z-r|) r dr = \frac{2\pi\rho}{z} \left(\int_0^a (z+r) r dr - \int_0^z (z-r) r dr - \int_z^a (r-z) r dr \right) = 2\pi\rho \left(a^2 - \frac{z^2}{3} \right).$$

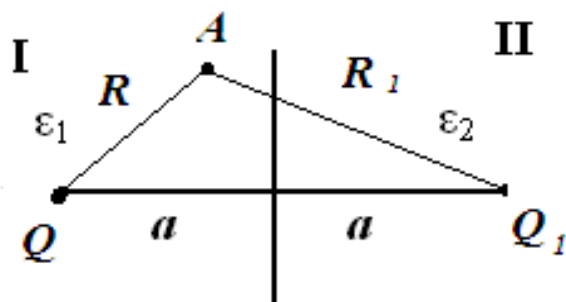
На поверхности шара и вне шара оба выражения принимают одинаковые значения. Потенциал шара всюду конечен, непрерывен, при удалении от источника стремится к нулю. Такими же свойствами обладает потенциал любого объемного источника.

Найдем потенциал поля, создаваемого точечным зарядом Q , расположенным в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 на расстоянии a от плоской границы раздела со средой с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 17). Задачу решим методом зеркальных изображений. Симметрично относительно границы раздела введем во второй среде фиктивный источник Q_1 . Потенциал в точке A

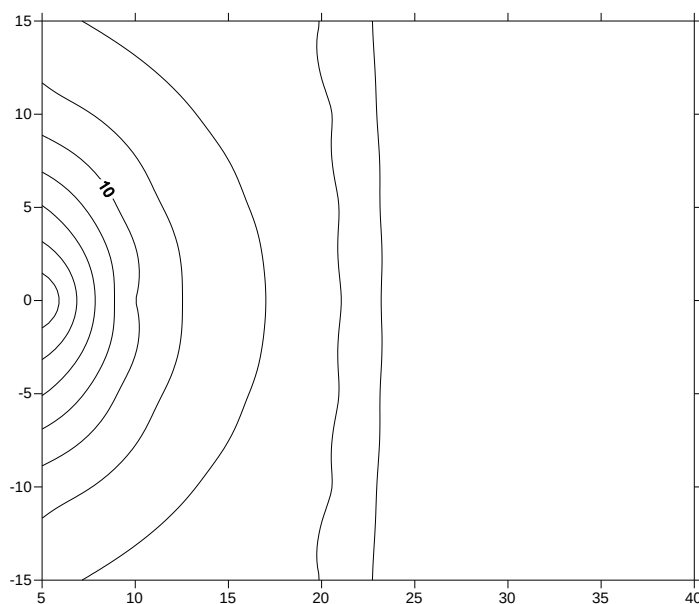
$$U_1 = \frac{Q}{\varepsilon_1 R} + \frac{Q_1}{\varepsilon_2 R_1}.$$

Потенциал во второй среде будем искать как поле фиктивного заряда Q_2 находящегося на месте заряда Q_1 :

$$U_2 = \frac{Q_2}{R}.$$



а



б

Рис. 17. Точечный заряд вблизи плоской границы раздела двух сред (а). План изолиний потенциала в среде с плоской границей раздела (б)

На плоской границе раздела ($R = a$) выполняются условия непрерывности потенциала $U_1 = U_2$ и скачок нормальной составляющей напряженности поля (

$$\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}):$$

$$\frac{Q + Q_1}{\epsilon_1} = \frac{Q_2}{\epsilon_2}, \quad Q - Q_1 = Q_2.$$

Находим два неизвестных из двух уравнений:

$$Q_1 = Q \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad Q_2 = Q \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Потенциал поля определится после подстановки найденных величин фиктивных зарядов в вышеприведенные уравнения:

$$U_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{Q}{R}.$$

Величину $k = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ называют коэффициентом отражения поля от плоской границы, а величину $1 - k = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ называют коэффициентом прохождения.

ВИХРЕВОЕ ПОЛЕ

Векторное поле $\vec{E}$ называют соленоидальным (вихревым), если поток поля через замкнутую поверхность, ограничивающую любую область, равен нулю:

$$\int_S E_n dS = 0.$$

Силовые линии соленоидального поля замкнуты. В области S не должно быть источников потенциальных полей. Соленоидальное поле порождается вихревыми источниками с плотностью $\vec{q} = \text{rot } \vec{E}$. Дифференциальные уравнения соленоидального поля:

$$\text{div } \vec{E} = 0, \text{ rot } \vec{E} = \vec{q}, \text{ div } \vec{q} = 0.$$

Произвольное векторное поле может иметь потенциальную и вихревую части:

$$\vec{E} = -\text{grad} \left(\int_V \frac{\rho dV}{R} \right) + \text{rot} \left(\int_V \frac{\vec{q} dV}{R} \right).$$

Дифференциальные характеристики произвольного вектора определяют его структуру:

$$\vec{E} = \text{grad} \left(\int_V \frac{\text{div } \vec{E}}{R} dV \right) + \text{rot} \left(\int_V \frac{\text{rot } \vec{E}}{R} dV \right).$$

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Оператором Лапласа называют дифференциальный оператор, который в декартовых координатах представляет собой сумму вторых частных производных по x, y, z :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

называют уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа описывает стационарное тепловое поле, потенциальное течение жидкости, электрическое поле постоянного тока, электростатическое поле, магнитостатическое поле, процесс диффузии.

В сферических координатах уравнение Лапласа:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Непрерывную функцию вместе со своими производными в некоторой области, удовлетворяющую уравнению Лапласа, называют гармонической в этой области. Основные свойства гармонических функций:

- если функция U гармоническая в области T , ограниченной некоторой поверхностью, то справедливо равенство:

$$\sum_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0,$$

где S – любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T ;

- если функция U гармоническая в области T , а M – точка, лежащая внутри T , то справедливо:

$$U(M) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D U dS,$$

где D – сфера с центром в точке M , целиком лежащая в области T ;

- если функция U , определенная и непрерывная в замкнутой области T , удовлетворяет уравнению Лапласа внутри T , то максимальное и минимальное значения эта функция принимает на поверхности, ограничивающей область T ;

- если известны значения гармонической функции U в области T , во всех точках ограничивающей эту область поверхности S , то функция U может быть определена в любой точке T ;

- если гармоническая функция U , определенная в области T , принимает на поверхности, ограничивающей область, постоянное значение, то всюду в этой области она принимает это постоянное значение.

Одним из способов решения уравнения Лапласа является способ разделения переменных (метод Фурье). Искомую функцию представляют в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad U(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad U(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z).$$

В цилиндрических координатах уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0.$$

После подстановки функции, предложенной Фурье:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 Z, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + n\Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\gamma^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Решение первых двух уравнений:

$$Z = e^{-\gamma z}, \quad \Phi = e^{n\varphi i}.$$

Третье уравнение с помощью подстановки приводится к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{h^2}{x^2} \right) y = 0.$$

Его решением является цилиндрическая функция Бесселя первого рода:

$$R = J_n(\gamma r), \quad J_n(\gamma r) = \left(\frac{\gamma r}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\gamma r)^2 / 4)^k}{k! (\Gamma(k + n + 1))},$$

где Γ – гамма-функция, $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$.

Бессель Ф. В. при обработке астрономических наблюдений исследовал цилиндрические функции для вычисления коэффициентов разложения в тригонометрический ряд радиус-векторов планет. Функция Бесселя с ростом аргумента колеблется относительно оси абсцисс с экспоненциально убывающей амплитудой. Представление функции, обратной расстоянию с помощью функций Бесселя имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} \exp(-tz) J_0(tz) dt, \quad z \geq 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} \exp(tz) J_0(tz) dt, \quad z \leq 0.$$

Частное решение и общее решение третьего уравнения:

$$Z = e^{-\gamma z + \varphi n i} J(nr), \quad U(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n \varphi i} \int_0^{\infty} C_n(\gamma) e^{-\gamma z} J(\gamma r) \gamma d\gamma,$$

где $C_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n \varphi i} d\varphi \int_0^{\infty} U(r, \varphi) J_n(\gamma r) r dr.$

При некоторых специально подобранных законах изменения γ уравнение Лапласа имеет аналитическое решение. Например, И. К. Овчинников предложил для описания зависимости электропроводности от глубины использовать законы:

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{ch\alpha(k+z)}{ch\alpha z} \right)^{\pm 2}, \quad \gamma = \gamma_0 \left(\frac{sh\alpha(k+z)}{sh\alpha z} \right)^{\pm 2}, \quad \gamma = \gamma_0 e^{\pm 2\alpha z},$$

которые позволяют получить аналитические решения уравнения Лапласа.

Поле вертикально поляризованной сферы. Пусть в однородной изотропной бесконечной среде находится равномерно поляризованная сфера, т. е. такая, что скачок потенциала на границе сферы с вмещающей средой линейно меняется в зависимости от глубины. Обозначим U_1 потенциал поля во вмещающей среде с проводимостью γ_1 , U_2 – потенциал поля внутри шара с проводимостью γ_2 , a – радиус шара, θ – угол между направлением поляризации и направлением из центра сферы на точку наблюдения. Равномерность поляризации обеспечивается распределением скачка потенциала на границе сферы и вмещающей среды по закону:

$$\Delta U = \Delta U_0 \cos \theta,$$

где ΔU_0 – наибольший скачок потенциала $U_1 - U_2$ на границе сферы.

Уравнение Лапласа в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0.$$

Решение должно удовлетворять условиям:

$$U_1 - U_2 = \Delta U_0 \cos \theta, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial r}, \quad \text{при } r=a;$$

$$U_1 \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad U_2 = 0 \text{ при } r = 0.$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая $U = f(r) \cos \theta$.

Подставим избранную функцию в уравнение Лапласа, получим:

$$\cos \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - 2 \frac{f}{r} \right) = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - 2 \frac{f}{r} \right) = 0.$$

Представим функцию f в виде произведения $f = r^2 \varphi$. Наше уравнение преобразуется:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Его решение, как легко убедиться подстановкой, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 2C^2 r$, $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = C^2 r^2$,

где C – произвольная постоянная. Далее получим $\varphi = Ar^3 + B$, $f = ar + \frac{B}{r^2}$,

где A и B – произвольные постоянные. Решение исходного уравнения:

$$U = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta,$$

После рассмотрения граничных условий:

$$U_1 = \frac{B}{r^2} \cos \theta, \quad U_2 = Ar \cos \theta,$$

$$U_1 = \frac{\gamma_2}{2\gamma_1 + \gamma_2} \Delta U_0 \frac{a^2}{r^2} \cos \theta, \quad U_2 = -\frac{2\gamma_1}{2\gamma_1 + \gamma_2} \Delta U_0 \frac{r}{a} \cos \theta.$$

На рис. 24, б представлен график изменения потенциала, вдоль вертикальной линии, проходящей через центр шара.

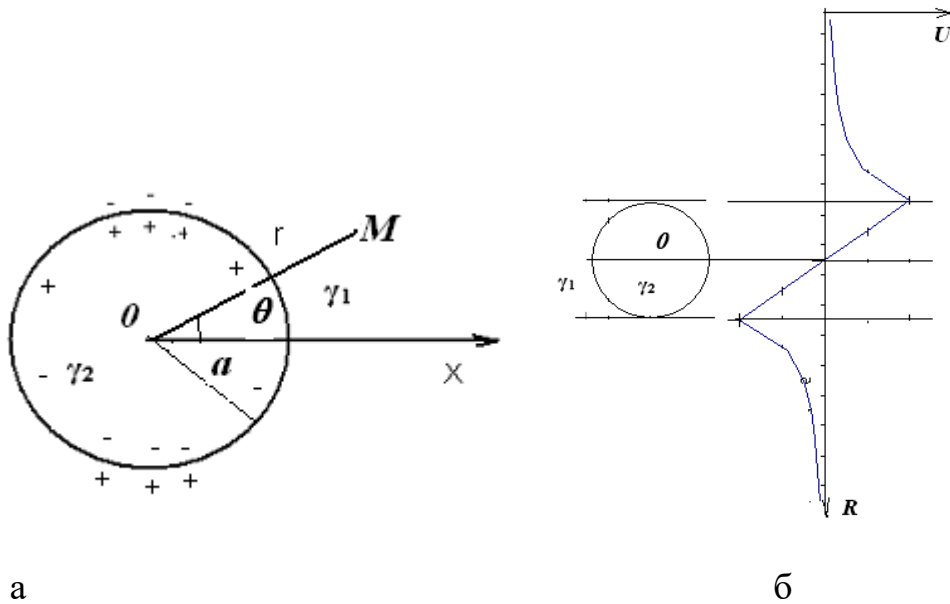


Рис. 24. Однородно вертикально поляризованная сфера (а) и график ее потенциала (б)

Намагничивание однородного шара однородным полем. Пусть в среде с постоянной магнитной проницаемостью μ_1 находится шар с радиусом равным a и постоянной магнитной проницаемостью μ_2 . Намагничивающее поле будем считать однородным, его напряженность обозначим H_0 (рис. 24). Потенциал первичного поля представим в виде $U_0 = -H_0 z = -H_0 R \cos \theta$.

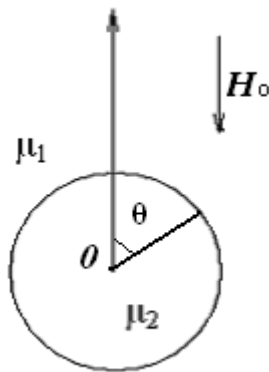


Рис. 25. К определению магнитного поля шара

Введем сферическую систему координат с началом в центре шара, полярную ось направим по намагничивающему полю. Решение будем искать в виде суммы первичного поля и аномального поля, обусловленного присутствием шара: $U(R, \theta) = U_0(R, \theta) + U_a(R, \theta)$. Второе слагаемое (аномальная компонента поля) вне шара и внутри шара имеет разное аналитическое представление. Аномальное поле вне шара обозначим $U_1(R, \theta)$, а потенциал внутри шара – $U_2(R, \theta)$. На поверхности шара ($R=a$) должны выполняться граничные условия:

$$U_1 = U_2 \cdot \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial R} = \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial R}.$$

Потенциалы U_1 и U_2 будем искать в виде:

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}}, \quad U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta).$$

Коэффициенты A_n и B_n найдем, используя граничные условия (для краткости аргумент полиномов Лежандра приводить не будем):

$$-H_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n = -H_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n}{R^{n+1}},$$

$$\mu_1 \left(-H_0 \cos \theta - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) B_n P_n}{a^{n+2}} \right) = \mu_2 \left(-H_0 \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n \right).$$

Эти равенства выполняются только в том случае, если коэффициенты при полиномах Лежандра с одинаковыми номерами в левой и правой частях будут равны. Удовлетворить этим условиям можно только в том случае, если:

$$1) A_n = B_n = 0 \text{ при } n \neq 1;$$

$$2) A_1 a^3 = B_1,$$

откуда получим:

$$\mu_1 \left(H_0 + \frac{2B_1}{a^3} \right) = \mu_2 (H_0 - A_1), \quad A_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} H_0, \quad B_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} a^3 H_0.$$

Таким образом, потенциал намагниченного шара определен внутри шара формулой

$$U_2 = -H_0 \cos \theta + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} H_0 \cos \theta.$$

Векторы напряженности и индукции магнитного поля внутри шара постоянны и направлены параллельно намагничивающему полю. Это отражает общее положение о том, что тела, ограниченные поверхностями второго порядка, намагничиваются (поляризуются) однородно, все остальные тела намагничиваются неоднородно, то есть их намагниченность зависит от координат.

Вне шара потенциал:

$$U_1 = -H_0 \cos \theta + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \frac{a^3 H_0 \cos \theta}{R^2}$$

и совпадает с полем магнитного диполя, расположенного в центре шара, магнитный момент M которого равен магнитному моменту шара:

$$\vec{M} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} a^3 H_0,$$

а намагниченность

$$\vec{J} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} H_0.$$

Компоненты напряженности поля:

$$X = 3M \frac{(x - x_0)(z - z_0)}{R^5}, \quad Y = 3M \frac{(y - y_0)(z - z_0)}{R^5},$$

$$Z = M \frac{2(z - z_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{R^5}.$$

Полученное для шара решение позволяет рассмотреть задачу о сферическом магнитном экране. Потенциал представляют в виде суммы трех потенциалов: во внешней области, во внутренней области и в самой сферической оболочке. Решение во всех областях должно удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям. Магнитное поле внутри сферического экрана

$$H = \frac{9\mu_1\mu_2 H_0}{2(\mu_2^2 + 1)(r_2^3 - r_1^3)/r_2^3 + \mu_2(4r_1^3 + 5r_2^3)/r_2^3}.$$

Убывание интенсивности магнитного поля во внутренней области сферической оболочки оценивают коэффициентом экранирования, который равен отношению интенсивности поля внутри экрана к интенсивности поля во внешнем пространстве:

$$k = \frac{1}{1 + \frac{2(\mu_2 - 1)^2}{9\mu_2} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^3}}.$$

Экранирующий эффект тем больше, чем выше магнитная проницаемость экрана и его толщина. Это выражение используется при расчете экранов устройств, нуждающихся в защите от магнитных помех, например в скважинных приборах.

ПОТЕНЦИАЛ ДВУМЕРНЫХ ТЕЛ

В геологической практике часто встречаются объекты, размеры которых по одному направлению намного больше, чем в двух других (например, дайки). Поле таких объектов в направлении простирания почти не меняется. Такие объекты считают бесконечными по простиранию, а их сечение представляют идеализированными правильными геометрическими фигурами и их называют двумерными телами.

Потенциал однородной бесконечной нити с линейной плотностью χ :

$$U = 2\chi \ln \frac{1}{r},$$

его называют логарифмическим потенциалом.

В двумерном случае под линейным диполем понимают линию, состоящую из одинаковых элементарных диполей, либо две бесконечные линии с плотностью зарядов разного знака, расположенных на бесконечно малом расстоянии (рис. 26). Потенциал линейного диполя, дипольный момент которого M :

$$U = M \frac{\cos \theta}{r}.$$

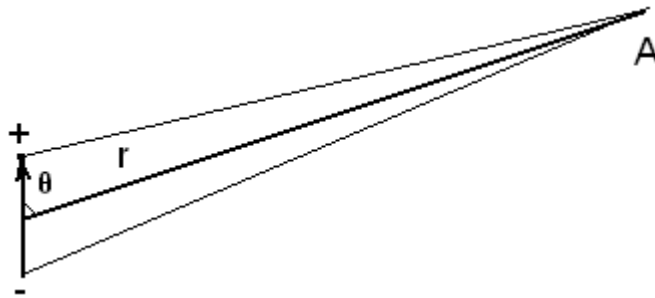


Рис. 25. К выводу формулы потенциала линейного диполя

Векторы магнитной индукции $\vec{B}$ и электрической поляризации $\vec{P}$. Магнитная индукция является основной силовой характеристикой магнитного поля. Напряженность магнитостатического поля $\vec{H}$ вводится уравнением

$$\vec{B} = 1 + 4\pi\chi\vec{H} = \mu\vec{H}.$$

Основное уравнение, описывающее магнитное поле:

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты, магнитное поле соленоидальное. В случае пространственной изменчивости магнитной проницаемости это уравнение имеет вид:

$$\text{div}(\mu \text{grad } U) = 0.$$

Уравнения непрерывности потенциала и нормальной составляющей вектора магнитной индукции на поверхности раздела:

$$\mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}, \quad U_1 = U_2.$$

Величина напряженности магнитного поля внутри магнетика $\vec{H}$ вводится соотношением:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}.$$

Таким образом, $\vec{H}$ – это не поле и не характеристика поля, это разность величин разной природы – поля и величины, характеризующей упорядоченность магнитных моментов. Вектор напряженности магнитного поля – удобная конструкция для теоретических рассуждений. Аналогично вводится вектор электрической индукции:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P},$$

где P – вектор электрической поляризации, реальная физическая величина.

НАМАГНИЧИВАНИЕ ТЕЛ С ВЫСОКОЙ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТЬЮ

Распределение намагниченности в телах с высокими магнитными свойствами существенно зависит от формы тела. Расчет магнитных полей в таких случаях нельзя проводить исходя из принципа суперпозиции. Вычисления полей проводят, решая численными методами интегральные уравнения.

Уравнения вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, x_0) y(x_0) dx_0 = \varphi(x).$$

где $y(x)$ – искомая функция, λ – параметр, называют линейными интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Интегральное уравнение

$$y_0(x) - \lambda \int_a^b K(x, x_0) y_0(x) dx_0 = 0$$

называют соответствующим однородным интегральным уравнением.

Общее решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода есть сумма:

К интегральным уравнениям Фредгольма сводятся некоторые задачи теории упругости, например:

$$F(x) = y_0(x) + \varphi(x).$$

Если для $M > 0$ справедливо неравенство $|\lambda| < 1/M$ и $\int_a^b |K(x, x_0) dx_0| \leq M$ при $a \leq x \leq b$, интегральное уравнение имеет решение $F(x)$. Решение может быть найдено методом последовательных приближений. Искомое решение является пределом последовательности

$$y_0(x) = \varphi(x), \quad \varphi_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, x_0) y_{n-1}(x_0) dx_0.$$

Эффект неоднородного намагничивания железорудных тел при современных средствах измерения магнитных полей необходимо учитывать, если их магнитная восприимчивость превышает 0,01 СИ.

Магнитный потенциал намагниченного тела

$$U = \int_V \vec{J} \text{grad} \frac{1}{r} dV_0.$$

Намагниченность неоднородно намагниченного тела ранее определена выражением

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{J}.$$

Напряженность магнитного поля вне тела выразится интегральным уравнением:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_V ((\mu - 1)\vec{H} + \vec{J}_n) \frac{\vec{r}}{r^3} dV_0.$$

Внешнее поле входит в данное уравнение дважды: как определяемая величина и в подынтегральное выражение величина, определяющая индуцированную намагниченность. Выражение в круглых скобках в подынтегральном выражении представляет собой сумму остаточной и индуцированной намагниченности. Ее называют вектором суммарной намагниченности. Проекцию этого вектора на внешнюю нормаль к поверхности намагниченного тела по аналогии с электрическими зарядами называют плотностью магнитных зарядов простого слоя.

Определим из последнего уравнения аномальное поле $\vec{H}_a = \vec{H} - \vec{H}_0$. Если известна плотность магнитных зарядов на поверхности, можно вычислить магнитное поле геологических объектов сложной формы, ограниченных поверхностью S . Вертикальную составляющую вектора аномалии магнитной индукции можно вычислить:

$$Z(A) = 100 \int_S J_n(M) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) dS,$$

где $J_n(M)$ – плотность простого слоя в точке M поверхности S , n – нормаль к поверхности. Плотность зарядов определяется выражением

$$J_n(M) = \frac{\Delta\chi}{2\pi(2 + \chi_1 + \chi_2)} \int_S J_n(N) \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \frac{\Delta\chi}{2\pi(2 + \chi_1 + \chi_2)} T_{0n}(M),$$

где χ_1 и χ_2 – магнитная восприимчивость среды и объекта, $\Delta\chi$ – избыточная магнитная восприимчивость, T_0 – намагничивающее поле.

Часто интегральные уравнения решают численными методами. При этом изучаемый объем разбивается на конечное число элементарных ячеек, чаще всего прямоугольников или прямоугольных параллелепипедов, а интегральное уравнение аппроксимируют системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для решения СЛАУ существует много методов, адаптированных к типу системы.

УЧЕТ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ТЕЛ С ВЫСОКОЙ НАМАГНИЧЕННОСТЬЮ

Если несколько тел с высокой намагниченностью близко расположены относительно друг друга, то их суммарное поле не равно сумме полей изолированных тел $Z_{01} + Z_{02}$. Принцип суперпозиции не выполняется. Алгоритм учета взаимного влияния разработан Ю. И. Блохом. Рассмотрим его на примере горизонтальных круговых цилиндров, которые, как ранее упоминалось, намагничиваются однородно.

Источником поля будем считать линейный магнитный диполь с магнитным моментом M , удаленный на расстояние L от цилиндра в горизонтальном направлении. Поместим начало координат на оси цилиндра. Потенциал кругового цилиндра радиусом a и магнитной проницаемостью μ в поле магнитного диполя вне цилиндра (рис. 27):

$$U_1 = \frac{M \cos \varphi}{r} = \frac{MR \cos \theta}{R^2 + L^2 + 2RL \sin \theta}$$

Потенциал поля внутри цилиндра будем искать в виде поля линейного диполя с моментом M_0 , расположенного в точке $(0, -l)$, где $l = a^2 / L$:

$$U_2 = M_0 \frac{R \cos \theta}{R^2 + l^2 + 2Rl \sin \theta}$$

После удовлетворения граничных условий внешний потенциал

$$U_1 = -\frac{M(\mu-1)a^2 r \cos \theta}{(\mu+1)(r^2 L^2 + a^4 + 2a^2 Lr \sin \theta)}.$$

Это аномальное поле совпадает с полем магнитного линейного диполя, смещенным в сторону внешнего источника (диполя) от оси цилиндра на расстояние $l = a^2 / L$ и магнитным моментом $M_0 = -\frac{M(\mu-1)}{\mu+1}$ (рис. 27, а).

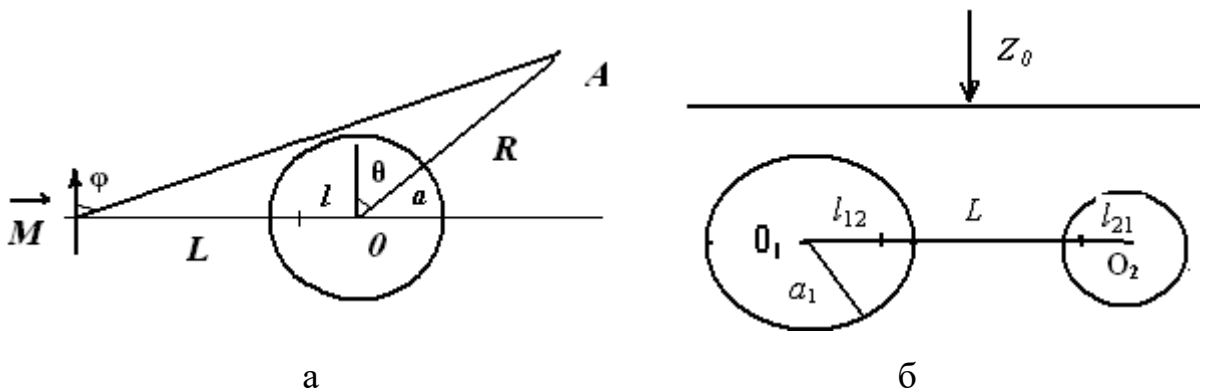


Рис. 27. Горизонтальный цилиндр в магнитном поле диполя (а). Два горизонтальных цилиндра в однородном магнитном поле (б)

Пусть два горизонтальных цилиндра расположены в магнитном поле Z_0 на расстоянии L по горизонтали. Начало координат совместим с осью первого цилиндра (рис. 27, б). Если цилиндры изолированы от влияния других тел, их поле совпадет с полем линейных диполей с магнитными моментами:

$$M_1 = \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 + 1} a_1^2 Z_0, \quad M_2 = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} a_2^2 Z_0.$$

Влияние первого цилиндра на второй можно учесть добавлением линейного магнитного диполя, смещенного от оси второго цилиндра на расстояние $l_{21} = a_2^2 / L$ с магнитным моментом

$$M_{21} = -\frac{(\mu_2 - 1)(\mu_1 - 1)a_1^2 a_2^2 H_0}{(\mu_2 + 1)(\mu_1 + 1)L^2}.$$

Влияние второго цилиндра на первый можно учесть добавлением линейного магнитного диполя с таким же магнитным моментом $M_{12} = M_{21}$, смещенного от оси первого цилиндра в направлении второго цилиндра на расстояние $l_{12} = a_1^2 / L$. Вертикальная и горизонтальная компоненты напряженности магнитного поля взаимного влияния:

$$Z_1 = M_{12} \frac{z^2 - (x - l_{12})^2}{(z^2 + (x - l_{12})^2)^2}, \quad H_1 = -2M_{12} \frac{z(x - l_{12})}{(z^2 + (x - l_{12})^2)^2},$$

$$Z_2 = M_{21} \frac{z^2 - (x - L - l_{21})^2}{(z^2 + (x - L - l_{21})^2)^2}, \quad H_2 = -2M_{21} \frac{z(x - L - l_{21})}{(z^2 + (x - L - l_{21})^2)^2}.$$

Суммарное магнитное поле после первой итерации

$$Z_{\Sigma} = Z_0 + Z_{01} + Z_{02} + Z_1 + Z_2$$

Намагничивающее поле для обоих цилиндров изменится. Изменится и намагниченность обоих цилиндров. Процесс учета взаимного влияния можно аналогичным образом продолжить далее. Итерационный процесс быстро сходится. Расчеты показывают, что в зависимости от расположения тел относительно друг друга суммарное поле может как увеличиваться, так и уменьшаться относительно суммы полей изолированных тел. Изменение поля в результате взаимного влияния двух цилиндров может достигать 20 %.

ЗАДАЧИ

1. Вычислите напряженность аномального магнитного поля кругового горизонтального цилиндра с радиусом a и магнитной восприимчивостью μ_2 , находящегося в однородной изотропной среде с магнитной восприимчивостью μ_2 , возбуждаемого полем H_0 .

2. Докажите, что векторное поле $\vec{A} = 2xz\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ потенциально, и найдите его потенциал.

3. Докажите, что функция $U = \exp(-i\alpha x - i\beta y - \gamma z)$ является решением уравнения Лапласа, если $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

4. Вычислите эффект экранирования для сферической оболочки с $r=8$ см и $r=8,5$ см, изготовленной из материала с $\gamma=5,14 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Закон Ома в дифференциальной форме. Пусть в некотором пространстве с электропроводностью γ протекает ток (рис. 28). Рассмотрим цилиндр малых размеров такой, в котором ось цилиндра совпадает с направлением плотности тока. Тогда для цилиндра имеющего сопротивление R при плотности тока i , справедливы соотношения:

$$dI = -\frac{dU}{R}, dI = idS, R = \frac{dl}{\gamma dS}, idS = -\frac{dU}{dl}, i = -\gamma \frac{\partial U}{\partial l}, \vec{i} = \gamma \vec{E}.$$

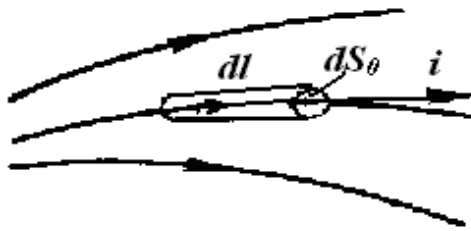


Рис. 28. К выводу закона Ома

Закон Ома в дифференциальной форме устанавливает соотношения между физическими характеристиками в бесконечно малом объеме, теоретически – в точке. В проекциях на оси координат закон записывается:

$$i_x = \gamma E_x, i_y = \gamma E_y, i_z = \gamma E_z.$$

Законы Кирхгофа в дифференциальной форме. Ток в некотором объеме равен изменению заряда в единицу времени:

$$\oint_S i_n dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \int_V \operatorname{div} \vec{i} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \operatorname{div} \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Первое выражение называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Второй закон Кирхгофа в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_l E_l dl = 0, \oint_l E_l dl = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} dS, \int_S \operatorname{rot} \vec{E} dS = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Электрическое поле постоянного тока – потенциальное безвихревое поле.

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Для элементарного объема в форме цилиндра мощность N определена по экспериментальным данным:

$$dN = R(dI)^2, \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{dl}{dS}, \quad dN = \frac{1}{\gamma} (dI)^2 \frac{dl}{dS}, \quad dN = \frac{1}{\gamma} i^2 dV.$$

После интегрирования последнего выражения получим:

$$N = \frac{i^2}{\gamma}, \quad N = \rho i^2.$$

Последнее выражение и есть закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

Объединенный закон постоянного тока. Для постоянного тока $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Исходя из первого закона Кирхгофа получим:

$$\operatorname{div} \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0, \quad \Delta U = 0,$$

Граничные условия для потенциала постоянного тока:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial E_{21}}{\partial t}, \quad E_{t1} - E_{t2} = \frac{\partial E_{21}}{\partial t},$$

$$i_{n1} = i_{n2}, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}.$$

Экспериментально установлено, что ток (упорядоченное движение зарядов) создает постоянное электрическое поле и постоянное магнитное поле. Поскольку эти поля постоянные во времени и не оказывают влияния друг на друга, их можно рассматривать независимо.

При решении задач электрометрии пользуются понятием точечного источника тока. Это шарообразный объект с бесконечно малым радиусом. При расположении точечного источника тока в пространстве с него стекает ток I . Ток в однородной изотропной среде с электропроводностью γ будет растекаться радиально (вихрь и расходимость вектора тока равны 0). Плотность тока на удалении R будет равна $i = I / 4\pi R^2$. Напряженность поля $E = I / 4\pi \gamma R^2$, ее

направление совпадает с направлением вектора плотности тока. Потенциал поля вычислим в соответствии с его определением:

$$E = -\text{grad } U, \quad U = I / 4\pi\gamma R.$$

Рассмотрим поле точечного источника тока в присутствии вертикальной границы раздела сред с проводимостью γ_1 и γ_2 (рис. 29). Расстояние источника от границы до источника обозначим d . Границу атмосферы ($\gamma=0$) с земной поверхностью будем учитывать удвоением силы тока точечного источника. Решение задачи найдем методом зеркальных изображений. Влияние границы раздела будем учитывать введением фиктивного источника тока (M_2), с которого стекает ток $2I_2$, расположенного зеркально симметрично относительно реального источника (M_1).

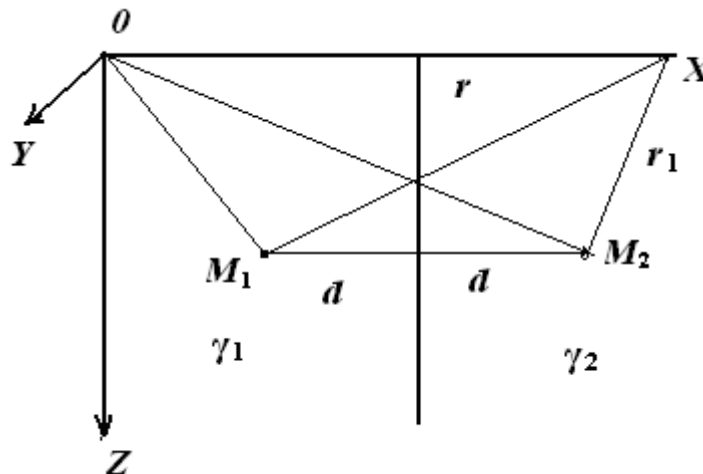


Рис. 29. Точечный источник в присутствии вертикальной границы двух сред

Потенциал точечного источника:

$$U = \frac{I}{2\pi\gamma_1 r}.$$

Потенциал электрического поля тока в первой среде:

$$U_1 = \frac{I}{2\pi\gamma_1 r} + \frac{I_1}{2\pi\gamma_1 r_1},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r_1 = \sqrt{(2d - x)^2 + y^2 + z^2}$.

Потенциал во второй среде вычислим, поместив в точку с действительным зарядом фиктивный источник тока, с которого стекает ток I_2 :

$$U_2 = \frac{I_2}{2\pi\gamma_2} \frac{1}{r}.$$

Исходя из граничных условий определим неизвестные I_1 и I_2 :

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad \text{при } x = d.$$

Обозначим $R = \sqrt{d^2 + y^2 + z^2}$. Тогда получим:

$$\frac{I}{2\pi\gamma_1 R} + \frac{I_1}{2\pi\gamma_1 R} = \frac{I_2}{2\pi\gamma_2 R}, \quad \gamma_1 \frac{I}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{R^3} - \gamma_1 \frac{I_1}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{R^3} = \gamma_2 \frac{I_2}{2\pi\gamma_2} \frac{d}{R^3},$$

$$I - I_1 = I_2, \quad \frac{I + I_1}{\gamma_1} = \frac{I_2}{\gamma_2}.$$

Находим значения неизвестных и подставляем в выражения для потенциала:

$$U_1 = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{r} + \frac{k_{12}}{r_1} \right), \quad U_2 = \frac{I}{2\pi\gamma_2} \frac{1 + k_{12}}{r},$$

где $k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$ называют коэффициентом отражения тока, $(1 - k_{12})$ –

коэффициентом пропускания тока. Пример расчета потенциала, выполненного с помощью пакета Mathcad, приведен на рис. 30. Излом кривой в центральной части соответствует положению контакта.

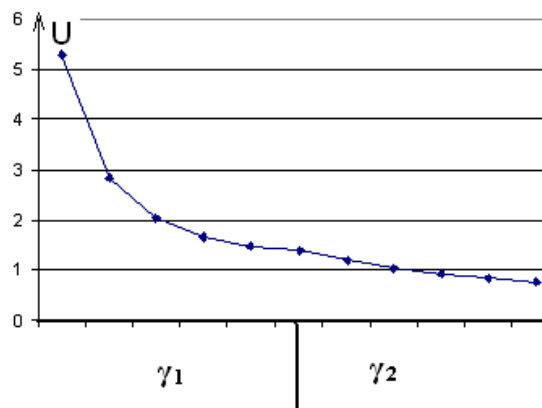


Рис. 30. График зависимости потенциала точечного источника тока в присутствии вертикального контакта

ПРОВОДЯЩИЙ ШАР В ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТОКА

Пусть в среде с проводимостью γ_1 находятся шар радиусом a с проводимостью γ_2 и точечный источник тока (заземление), с которого в

окружающую среду стекает ток I (рис. 31). Задачу будем решать в сферической системе координат, начало которой совместим с центром шара. Полярную ось направим от начала координат к точечному источнику, расположенному вне шара. В такой системе координат решение не будет зависеть от полярного угла φ . Потенциал поля точечного источника поля обозначим U_1 , потенциал поля, вызванного наличием проводящего шара, обозначим U_2 . Потенциал суммарного поля

$$U = U_2 + U_1.$$

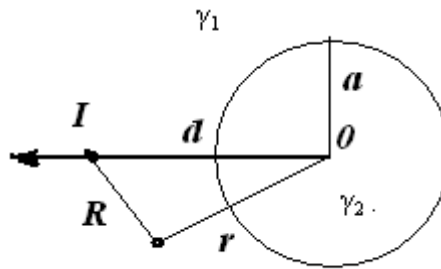


Рис. 30. Шар в поле точечного источника тока

Потенциалы U_1 и U_2 удовлетворяют уравнению Лапласа, а на границе шара выполняются условия непрерывности потенциала и разрыва нормальной составляющей напряженности поля:

$$U_1 = U_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} = \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial r}.$$

Расстояние между источником тока и точкой расчета

$$R = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}.$$

Вне шара потенциал примет вид:

$$U_1 = \frac{I}{4\pi^2 R\gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad a < R,$$

где $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра. Полиномы Лежандра могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Внутри шара потенциал

$$U_2 = \frac{I}{4\pi^2 R \gamma} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) r^n.$$

Разложим величину $1/R$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$\text{при } r < d \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \theta),$$

$$\text{при } r > d \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Это разложение иногда принимают за определение полиномов Лежандра.

Граничные условия примут вид ($r=a$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n(\cos \theta)}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) a^n,$$

$$\gamma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{In}{4\pi\gamma_1 da} \left(\frac{a}{d}\right)^n - \frac{(n+1)B_n}{a^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = \gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{In}{4\pi da \gamma_2} \left(\frac{a}{d}\right)^n + nA_n a^{n-1} \right) P_n(\cos \theta).$$

Граничные условия справедливы для любого угла θ . Следовательно, коэффициенты при полиномах Лежандра с одинаковыми индексами должны быть равны. Отсюда:

$$\frac{B_n}{a^{n+1}} = A_n a^n,$$

$$\gamma_1 \left(\frac{In}{4\pi da \gamma_1} \left(\frac{a}{d}\right)^n - \frac{(n+1)B_n}{a^{n+2}} \right) = \gamma_2 \left(\frac{In}{4\pi da \gamma_2} \left(\frac{a}{d}\right)^n + nA_n a^{n-1} \right).$$

Коэффициенты A_n и B_n рассчитываются следующим образом:

$$A_n = \frac{I}{4\pi d^{n+1} \gamma_1} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)n}{n\gamma_2 + (n+1)\gamma_1}, \quad B_n = \frac{I}{4\pi \gamma_1 d^{n+1}} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)na^{2n+1}}{n\gamma_2 + (n+1)\gamma_1}.$$

Потенциал электрического поля тока, стекающего с точечного источника вне шара равен

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)n}{n\gamma_2 + (n+1)\gamma_1} \left(\frac{a}{d}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right),$$

внутри шара он определяется выражением

$$U_2 = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)n}{n\gamma_2 + (n+1)\gamma_1} \left(\frac{a}{d} \right)^n \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \right).$$

ЗАДАЧИ

1. Найдите потенциал бесконечного вертикально поляризованного цилиндра с радиусом a и электропроводностью γ_1 , расположенного в однородной, изолированной, безграничной среде с электропроводностью γ_2 .

Ответ: $U_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \Delta U_0 \frac{a}{r} \cos\theta$, $U_2 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \Delta U_0 \frac{r}{a} \cos\theta$.

2. Вычислите коэффициенты отражения и пропускания для контакта сред с проводимостью 10^8 и 10^{12} (Ом·см) $^{-1}$.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Возьмем проводник с током. Выделим элемент тока. Закон Био – Савара определяет напряженность магнитного поля (рис. 32):

$$dH = \frac{Idl}{cR^2} \sin\alpha.$$

Это уравнение в векторной форме приобретает вид:

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{l} \times \vec{R}]}{cR^3}.$$

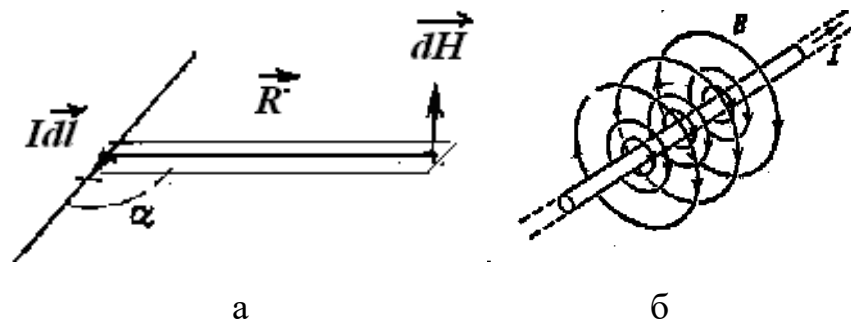


Рис. 32. К определению магнитного поля тока (а). Изолинии магнитной индукции линейного тока (б).

Отсюда магнитное поле линейного тока

$$\vec{H} = \int_l \frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{cR^3}.$$

Аналогичные выражения получим для токов с плотностью $\vec{j}$, растекающихся по поверхности и в пространстве:

$$\vec{H} = \int_S \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{cR^3}, \quad \vec{H} = \int_V \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{cR^3}.$$

Напряженность поля в среде определится формулой:

$$\vec{H} = \int_l \frac{[d\vec{l}\vec{R}]}{cR^3} + \int_S \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{cR^3} + \int_V \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{cR^3},$$

где интегрирование проводится по всем проводникам с током. В матричной форме эти выражения приобретают вид:

$$[\vec{j}\vec{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ j_x & j_y & j_z \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix}.$$

Составляющие вектора поля принимают вид:

$$H_x = \int_V \frac{j_y(z-z_0) - j_z(y-y_0)}{cR^3} dV; \quad H_y = \int_V \frac{j_x(z-z_0) - j_z(x-x_0)}{cR^3} dV;$$

$$H_z = \int_V \frac{j_x(y-y_0) - j_y(x-x_0)}{cR^3} dV.$$

Закон Био – Савара в дифференциальной форме устанавливает соотношение между физическими величинами в бесконечно малой области, теоретически – в точке – области с нулевым объемом. Закон имеет вид:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi\vec{j}}{c}.$$

Закон констатирует, что магнитное поле создается токами. Магнитное поле является вихрями токов.

Это уравнение в проекциях на оси координат:

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{4\pi j_x}{c}, \quad \text{rot}_y \vec{H} = \frac{4\pi j_y}{c}, \quad \text{rot}_z \vec{H} = \frac{4\pi j_z}{c}.$$

Рассмотрим потоки векторов левой и правой части закона Био – Савара через поверхность S :

$$\int_S \text{rot}_n \vec{H} dS = \int_S \frac{4\pi \vec{i}_n}{c} dS.$$

Применяя формулу Стокса

$$\int_S \text{rot} \vec{A}_n dS = \oint_S A_l dl$$

получим закон Био – Савара в интегральной форме:

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi I}{c}.$$

Закон в интегральной форме устанавливает соотношение между характеристиками поля и среды в макрообъеме. Величину $\oint H_l dl$ по аналогии с электродвижущей силой называют магнитодвижущей силой. Закон Био – Савара в интегральной форме позволяет находить ток через магнитное поле и наоборот.

Найдем поле тока, протекающего с постоянной плотностью i по трубе с внешним диаметром b и внутренним диаметром a . В силу цилиндрической симметрии силовые линии магнитного поля трубы имеют форму окружности. Совместим контур радиуса R с одной из силовых линий. Закон Био – Савара для этого контура после интегрирования примет вид:

$$2\pi R H = \frac{4\pi I}{c}, \quad H = \frac{2I}{cR}, \quad H = 2\pi j \frac{a^2 - b^2}{cr}.$$

Оценим возможную величину тока, протекающего во внешнем ядре, если бы им создавалось магнитное поле Земли. Напряженность поля на экваторе составляет приблизительно 0,5 Э, радиус Земли – приблизительно 640000000 см, скорость света $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Отсюда величина тока

$$I = \frac{1}{3 \cdot 10^9} \times \frac{0.5 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 6.4 \cdot 10^8}{2} = 1.6 \cdot 10^9 \text{ А}.$$

Это очень большой ток, наличие которого должно вызывать выделение огромного количества тепла.

Экспериментально установлено, что на проводник длиной dl с током I , находящийся в магнитном поле B , действует сила $\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Произведение $I d\vec{l}$ называют элементом тока.

Био и Савар установили соотношение для элемента линейного тока:

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{cR^3},$$

откуда

$$\vec{H} = \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{cR^3}.$$

Аналогично получим выражения для магнитного поля поверхностного тока с плотностью $\vec{j}$, и объемного тока с плотностью $\vec{i}$:

$$\vec{H} = \int_S \frac{\vec{j} \times \vec{R}}{cR^3} dS, \quad \vec{H} = \int_V \frac{\vec{i} \times \vec{R}}{cR^3} dV,$$

или

$$\vec{H} = \int \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ i_x & i_y & i_z \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix}}{cR^3} dV,$$

или в проекциях

$$\vec{H}_x = \int_V \frac{(z-z_0)i_y - (y-y_0)i_z}{cR^3} dV,$$

$$\vec{H}_y = \int_V \frac{(x-x_0)i_z - (z-z_0)i_x}{cR^3} dV, \quad \vec{H}_z = \int_V \frac{(y-y_0)i_x - (x-x_0)i_y}{cR^3} dV.$$

Векторный потенциал. Запишем векторы:

$$\vec{A} = \int_V \frac{\vec{i} dV}{cR}, \quad \vec{A} = \int_S \frac{\vec{j} dl}{cR}, \quad \vec{A} = \int_L \frac{Idl}{cR}.$$

Вычислим вихрь вектора $\vec{A}$ объемного тока:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \int_V \frac{\vec{i} dV}{cR} = \int_V \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{i_x}{cR} & \frac{i_y}{cR} & \frac{i_z}{cR} \end{vmatrix} dV = \vec{i} \int_V \frac{(i_z(y-y_0) - i_y(z-z_0)) dV}{cR^3} + \\ &+ \vec{j} \int_V \frac{(i_y(z-z_0) - i_z(y-y_0)) dV}{cR^3} + \vec{k} \int_V \frac{(i_y(x-x_0) - i_x(y-y_0)) dV}{cR^3}. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получим для векторов $\vec{A}$ поверхностного и линейного токов. Вектор $\vec{A}$ называют **вектор-потенциалом** магнитного поля. Такое название вызвано сходством аналитического выражения содержащего $\vec{A}$ с выражениями потенциала точечного, поверхностного и объемного источников электрического и гравитационного поля:

$$U = \int_V \frac{\rho dV}{R} \text{ и } \vec{A} = \int_V \frac{\vec{i} dV}{cR} \text{ и т. д.}$$

Однако вектор-потенциал не имеет ясного физического истолкования и используется как удобная вспомогательная величина. Это позволяет напряженность магнитного поля постоянного тока представить в следующем виде:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

$$H_x = \text{rot}_x \vec{A}, \quad H_y = \text{rot}_y \vec{A}, \quad H_z = \text{rot}_z \vec{A}.$$

что

вектор-потенциал является решением уравнения Пуассона-Лапласа:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi \vec{i}}{c} \text{ в точках с токами,}$$

$$\Delta \vec{A} = 0 \quad \text{в точках без токов.}$$

В проекциях на декартовы оси координат уравнение примет вид:

$$\Delta \vec{A}_x = -\frac{4\pi \vec{i}_x}{c}, \quad \Delta \vec{A}_y = -\frac{4\pi \vec{i}_y}{c}, \quad \Delta \vec{A}_z = -\frac{4\pi \vec{i}_z}{c},$$

$$\Delta \vec{A}_x = 0, \quad \Delta \vec{A}_y = 0, \quad \Delta \vec{A}_z = 0.$$

Так же, как и для потенциала, расходимость вектор-потенциала равна 0:

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Найдем вихрь вектора напряженности магнитного поля постоянного тока:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi \vec{i}}{c}$$

Формула $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi \vec{i}}{c}$ связывает напряженность магнитного поля и

плотность тока в точке и является записью закона Био – Савара в

дифференциальной форме. Источником магнитного поля является постоянный ток. Магнитное поле тока вихревое, следовательно – непотенциальное.

Закон Био – Савара в интегральной форме связывающий ток и напряженность магнитного поля, имеет вид:

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi I}{c}.$$

Вычислим **магнитное поле кольцевого тока**. Для решения задачи выберем цилиндрическую систему координат, радиус кольца обозначим a . Векторный потенциал имеет только одну компоненту $A_\varphi(r, z)$:

$$A_\varphi = \frac{I}{c} \int \frac{dl}{R} = \frac{I}{c} \oint \frac{\cos \varphi dl}{R} = \frac{2I}{c} \int_0^\pi \frac{a \cos \varphi d\varphi}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \varphi)^{1/2}}.$$

Решение может быть представлено в виде линейной комбинации эллиптических интегралов первого и второго рода E и K :

$$A_\varphi = \frac{4I}{ck} \sqrt{\frac{a}{L}} \left[\left(1 + \frac{k^2}{2} \right) K - E \right],$$

$$\text{где } k^2 = \frac{4ar}{L^2}, \quad L = \sqrt{(a+r)^2 + z^2}, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Магнитная индукция определится следующим образом:

$$B_\varphi = 0, \quad B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{2zI}{crL} \left[-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right],$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} = \frac{2I}{cL^2} \left[K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} \right].$$

$$\text{На оси кольца } (r=0), \quad B_z = \frac{2\pi a^2 I}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$
 По результатам измерений

известно магнитное поле на полюсах. Последнее соотношение позволяет оценить силу кольцевого тока радиусом 1000 км, протекающего в экваториальной плоскости, который мог бы возбуждать геомагнитное поле. Величина тока оценивается в 10^{10} А. Это слишком большая величина. В качестве источника геомагнитного поля необходимо искать другое явление.

Прецессия протона в геомагнитном поле. Протон обладает моментом количества движения P и магнитным моментом M (рис. 33, а). Эти векторные величины связаны зависимостью:

$$\vec{M} = \gamma \vec{P},$$

где γ – гиромагнитное отношение протона. На протон в магнитном поле с индукцией T действует момент силы:

$$\vec{N} = \vec{M} \times \vec{T}.$$

Скорость изменения момента количества движения протона:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{N} = \vec{M} \times \vec{T}.$$

Исключим величину P из последнего уравнения, получим:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{T}.$$

Поскольку земное магнитное поле можно считать во время измерений постоянным, то после дифференцирования по времени получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} = \gamma \frac{d\vec{M}}{dt} \times \vec{T} = \gamma^2 (\vec{M} \times \vec{T}) \times \vec{T}.$$

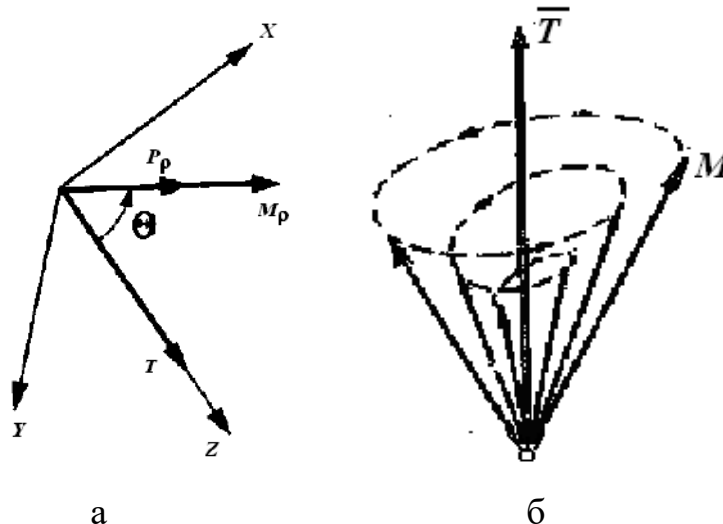


Рис. 33. К выводу уравнения прецессии протона в магнитном поле

Используем тождество $[A[BC]] = B(AC) - C(AB)$, получим

$$\frac{d^2 \vec{M}}{dt^2} = \gamma^2 \{ (\vec{M} \vec{T}) \vec{T} - T^2 \vec{M} \}.$$

Направим ось z по направлению T , тогда $T = T_z$. $T_x = T_y = 0$. Проекция векторного уравнения на оси координат:

$$\frac{d^2 M_z}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 M_x}{dt^2} = -\gamma^2 T^2 M_x.$$

Решение первого уравнения $M = M \cos \Theta$ приводит к выводу о неизменности угла между M и T . Решение второго уравнения позволяет получить частоту свободной ядерной прецессии – частоту вращения магнитного момента протона вокруг вектора магнитной индукции (рис. 33, б):

$$\omega = \gamma T.$$

ЗАДАЧИ

1. На противоположных полюсах сплошного шара с электропроводностью γ находятся точечные заземления. По одному из них подводится ток I , а по другому – отводится. Определить плотность тока и потенциал внутри шара.

2. Вычислите частоту прецессии протона в магнитном поле в нашем городе, если $T = 55000$ нТл.

3. Вычислите напряженность магнитного поля над бесконечной плоскостью, по которой протекает ток с постоянной плотностью i . (Используйте формулу вычисления телесного угла.)

4. Определите магнитное поле кольцевого тока в центре кольца радиусом $a = 10$ см и током $I = 0,5$ А.

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Теорию электромагнитного поля создал выдающийся шотландский физик Джеймс Клерк Максвелл. Он теоретически доказал, что всякое изменение со временем магнитного поля приводит к возникновению переменного электрического поля, а всякое изменение со временем электрического поля порождает переменное магнитное поле. Эти порождающие друг друга переменные электрические и магнитные поля образуют единое электромагнитное поле. Источником электромагнитного поля служат ускоренно движущиеся электрические заряды. Вокруг зарядов, движущихся с постоянной скоростью (например, вокруг проводника с протекающим по нему электрическим током), создается постоянное магнитное поле. Некоторые графические схемы образования и распространения электромагнитного поля приведены на рис. 34.

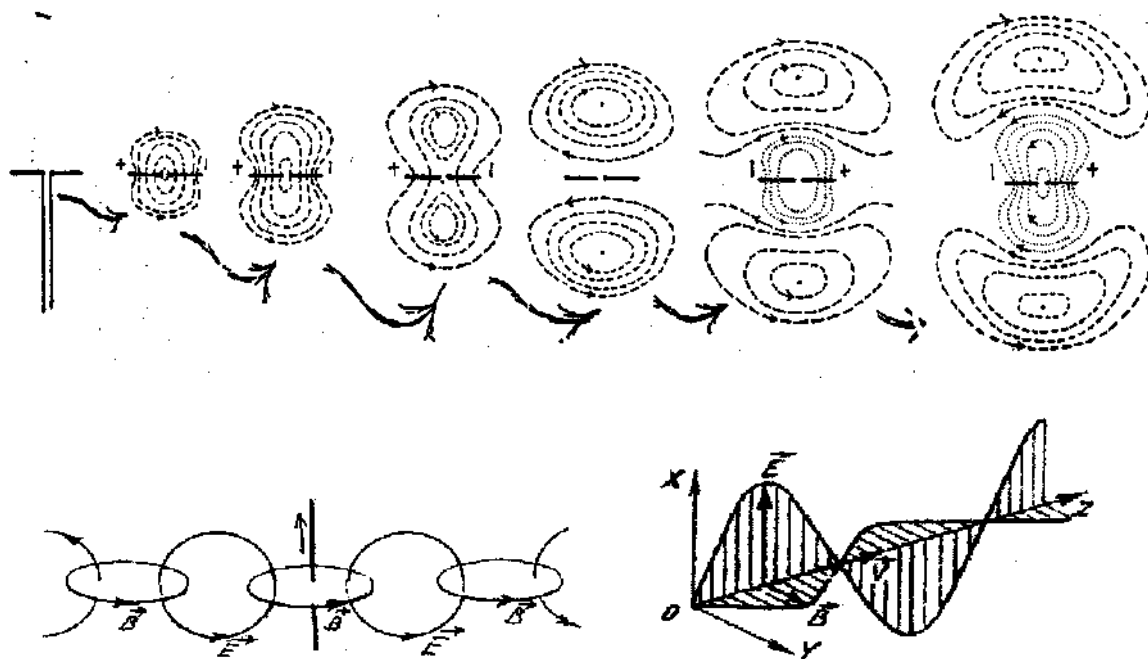


Рис. 34. Схемы образования и распространения электромагнитной волны

Под электромагнитным полем понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле обладает

характерными для него электрическими и магнитными свойствами, доступными наблюдению.

Электромагнитная волна – распространяющееся в пространстве электромагнитное поле (ЭМП). Впервые электромагнитные волны были получены Г. Герцем в его опытах, выполненных в 1888 – 1889 гг. (рис. 34). Сначала Герц был противником теории Максвелла. Целью опытов было опровержение гипотезы Максвелла, а результат опытов оказался блестящим подтверждением этой теории.

Двести лет назад источником электрического поля считались электрические заряды, а источником магнитного поля – магнитные заряды. Сейчас установлено, что изолированных магнитных полюсов нет, и источником магнитного поля считают молекулярные токи. Но по сложившейся традиции среднюю интенсивность магнитного поля в намагниченном веществе называют магнитной индукцией, а среднюю интенсивность электрического поля в диэлектрике – напряженностью электрического поля.

Уравнения Максвелла отражают экспериментально установленные фундаментальные соотношения между характеристиками электрического и магнитного полей. **Закон сохранения заряда** – один из фундаментальных законов природы – выполняется абсолютно точно. Полный заряд любой системы остается неизменным, если в нее не добавляются посторонние заряды извне:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{i} = 0,$$

где ρ – плотность электрических зарядов.

Максвелл предложил рассматривать плотность тока как сумму плотности тока проводимости $\vec{i}$ и плотности тока смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, который не связан с переносом заряда. Плотность тока смещения можно представлять как изменение во времени электрического поля между обкладками конденсатора (часто для краткости слово «плотность» опускают и говорят о токе). Первое уравнение Максвелла представляет собой закон Био – Савара для переменного тока в

дифференциальной форме. Оно отличается от закона Био – Савара для постоянного тока учетом тока смещения:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{D}}{4\pi} \right).$$

Магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами и меняющимся во времени электрическим полем. Магнитные эффекты тока смещения и тока проводимости одинаковы. Поле полного тока является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \left(\vec{i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{D}}{4\pi} \right) = 0.$$

Данное уравнение является первым законом Кирхгофа. Вихрями магнитного поля являются токи проводимости и токи смещения. Линии полного тока нигде не начинаются и не кончаются, они замкнутые. В стационарном поле ток смещения отсутствует (равен 0).

Токи проводимости и смещения одинаковым образом возбуждают магнитное поле. Но ток проводимости – это смещение зарядов, а ток смещения не сопровождается движением частиц, ему отвечает изменение электрического поля. Ток смещения сопровождается выделением джоулева тепла, а ток смещения выделением джоулева тепла не сопровождается. В диэлектриках с поляризованными молекулами токи смещения вызывают выделение тепла, связанное с изменением поляризации. Выделение такого тепла описывается законами, отличающимися от законов Джоуля – Ленца.

Второе уравнение Максвелла представляет собой закон электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Вихрями электрического поля являются изменения во времени магнитного поля. После некоторых преобразований из него получим:

$$\text{ЭДС} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \left(\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \right),$$

где Φ – магнитный поток ($\Phi = \int \vec{B} d\vec{s}$). ЭДС, возникающая в проводнике, пропорциональна скорости изменения магнитного потока через контур этого проводника. Знак минус означает, что направление ЭДС и направление магнитного потока при его увеличении образуют левовинтовую систему. При всяком изменении потока магнитной индукции через проводящий замкнутый контур в нем возникают токи в таком направлении, что магнитное поле этих токов стремится компенсировать изменение магнитного потока. ЭДС в контуре равна работе, совершаемой электрическим полем по перемещению единичного заряда по заданному замкнутому контуру ($\text{ЭДС} = \int \vec{E} d\vec{l}$).

Электрическое поле создается не только зарядами, но и меняющимся во времени магнитным полем. Векторы электрического и магнитного поля взаимно перпендикулярны. Закон индукции Фарадея – Максвелла показывает, что силовой величиной, наряду с напряженностью электрического поля, является магнитная индукция; именно индукция заслуживает название «напряженность» магнитного поля.

Третье и четвертое уравнения Максвелла представляют собой запись теоремы Гаусса для электрического и магнитного полей:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho.$$

Плотность источников электрического поля равна произведению плотности зарядов на 4π . Линии электрической индукции начинаются и заканчиваются на свободных зарядах.

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Линии вектора магнитной индукции замкнуты, т.е. магнитное поле соленоидальное. В природе не существует магнитных зарядов. Магнитное поле чисто вихревое, оно возбуждается электрическими токами.

Для векторов электрической поляризации P и намагниченности J не существует общих и всегда справедливых законов их поведения, подобных уравнениям Максвелла.

Законы Максвелла записывают также в интегральной форме. После интегрирования уравнений Максвелла по некоторому объему V , ограниченному замкнутой поверхностью S , применим формулу Гаусса – Остроградского. Вычислим потоки и заменим их по формуле Стокса. После вынесения производных по времени за знак интеграла получим уравнения Максвелла в интегральной форме. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_S D_n dS = \int_V q dV,$$

поток вектора электрической индукции через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности. Данное уравнение является обобщением закона Кулона на объемно распределенные заряды и произвольное электрическое поле.

Аналогично получим второе уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

составим потоки от обеих частей через некоторую поверхность

$$\int_S \text{rot}_n \vec{E} dS = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS.$$

Применим к левой части уравнения формулу Стокса, получим:

$$\oint_l E_l dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS.$$

В правой части стоит скорость изменения магнитного потока через поверхность, опирающуюся на контур. Это выражение обобщение закона Фарадея на любую часть пространства;

$$\oint_S B_n dS = 0,$$

число силовых линий, входящих в некоторый объем, равно числу выходящих линий.

Для четвертого уравнения интегральная форма имеет вид:

$$\oint_l H_l dl = \int_S j_n dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n dS.$$

В правой части стоит сумма токов проводимости и смещения через поверхность S , слева – циркуляция магнитного поля. Циркуляция магнитного поля по любому замкнутому контуру равна полному току, протекающему через этот контур.

С помощью уравнений Максвелла можно найти напряженность электрического поля E и напряженность магнитного поля H , если известны плотность зарядов ρ и плотность тока i . Количество неизвестных, которые необходимо определить, шесть (по 3 компоненты для каждого вектора E и H).

Найдем отношение токов проводимости и смещения. Пусть задано гармоническое поле $E = E_0 \sin \omega t$. Ток проводимости равен $i = \gamma E = \gamma E_0 \sin \omega t$.

Ток смещения равен $\frac{\partial}{\partial t} \frac{D}{4\pi} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon \omega}{4\pi} E_0 \cos \omega t$. Отношение амплитуд токов, с учетом того, что синус и косинус меньше единицы: $\frac{i_{\text{ПП}}}{i_{\text{СМ}}} = \frac{2\gamma}{\varepsilon \omega}$.

Система уравнений Максвелла является полной, из нее можно определить все свойства поля. Она играет роль основополагающих аксиом для построения всей теории макроскопического переменного электромагнитного поля. Если материальные тела, находящиеся в поле, неподвижны, то в каждой точке μ , γ , ε остаются постоянными, в поле нет постоянных магнитов и ферромагнетиков, полная система дифференциальных уравнений классической электродинамики имеет вид:

Полная система уравнений Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi \frac{\vec{i}}{c},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho,$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P},$$

Граничные условия

$$E_{t1} - E_{t2} = -\frac{\partial E_{21}}{\partial t},$$

$$D_{n1} - D_{n2} = 4\pi \sigma,$$

$$B_{n1} = B_{n2},$$

$$H_{t1} - H_{t2} = \frac{4\pi i_n}{c},$$

$$H_{t1} - H_{t2} = 0, \text{ если}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{B} - 4\pi\vec{J},$$

поверхностные токи

$$, \vec{I} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_c)$$

отсутствуют

Эту систему дополняют уравнением зависимости энергии поля от напряженности поля, которое позволяет проверить предшествующие уравнения экспериментально:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{D}\vec{E}dV + \frac{1}{8\pi} \int \vec{B}\vec{H}dV.$$

Последнее уравнение характеризует преобразование энергии в процессах, которые описываются четырьмя уравнениями Максвелла. Величину $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$ называют вектором Умова – Пойнтинга, его истолковывают как поток электромагнитной энергии – количество энергии, протекающей в единицу времени через перпендикулярную направлению потока поверхность единичной площади. Направление вектора Умова – Пойнтинга, а следовательно, и направление потока энергии в волне, совпадает с направлением распространения волны. Скорость передачи энергии в изотропной среде совпадает со скоростью распространения волны. Справедлива интегральная теорема Пойнтинга: электромагнитная энергия вытекает через поверхность S из рассматриваемого объема V в количестве $\oint_S S_n dS$ единиц энергии в секунду. Объемная плотность энергии электромагнитного поля может быть оценена по формуле (СГС):

$$S = c (E^2 + B^2)/8\pi.$$

Плотность магнитной энергии в ЭМП равна плотности электрической энергии.

Ослабление энергии электрического поля E_0 в веществе описывается формулой

$$E = E_0 e^{-kx}, \quad k \cong 2\pi\nu\beta\mu^{1/2}/\epsilon,$$

где β – коэффициент потерь среды, μ – магнитная проницаемость, ν – частота ЭМП. Для воды при температуре 25 °С на частоте 3 МГц глубина проникновения

1.4 см, для льда – 1.2 м. Неметаллические материалы полупрозрачны для СВЧ ЭМП, которые проникают в них на значительную глубину.

В приведенных выше уравнениях не учитывается способ возбуждения поля. Токи и заряды могут создаваться химическими и механическими процессами, а не только электромагнитными силами. Силы неэлектромагнитного происхождения называют сторонними силами. С учетом сторонних сил уравнения Максвелла записывают:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi(\vec{i} + \vec{i}_{cm}), \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi(\rho + \rho_{cm}).$$

Полноту системы уравнений Максвелла характеризует теорема: электромагнитное поле $\vec{E}(x, y, z, 0)$, $\vec{H}(x, y, z, 0)$ в любой момент времени $t > 0$ в любой точке объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S , однозначно определяется уравнениями Максвелла, если известны начальные значения $\vec{E}(x, y, z, 0)$, $\vec{H}(x, y, z, 0)$ во всем объеме V и либо для $\vec{E}(x, y, z, 0)$, либо для $\vec{H}(x, y, z, 0)$ известны граничные значения его тангенциальных составляющих на поверхности S в течение всего изучаемого промежутка времени $(0, t)$.

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Применим операцию вихря к первому и второму уравнению Максвелла для однородной изотропной среды:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}, \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}, \Delta \vec{E} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\vec{i}}{c} \right)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{i}, -\Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-1}{c} \mu \right) + \frac{4\pi\gamma}{c} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Полученные уравнения называют телеграфными. В теории рассматривают частные случаи телеграфных уравнений:

1. Волновая модель поля рассматривается при распространении электромагнитных волн (ЭМВ) в изоляторе ($\gamma=0$):

$$\Delta \vec{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

2. Квазистационарная модель рассматривается для относительно мед-ленно меняющихся во времени полей (можно пренебречь второй производ-ной по времени по сравнению с первой):

$$\Delta \vec{H} - \frac{4\pi\mu\gamma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \Delta \vec{E} - \frac{4\pi\gamma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

3. Стационарная модель – поле, не зависящее от времени. Электрическое и магнитное поля удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta \vec{H} = 0, \quad \Delta \vec{E} = 0.$$

В приложениях чаще всего рассматривают гармонические поля, т.е. такие зависимость от времени которых описывается:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z) e^{-i\omega t},$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(x, y, z) e^{-i\omega t}.$$

Для сокращения записи обозначим $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}$. Телеграфные уравнения для гармонического поля приобретают вид:

$$\Delta \vec{E} e^{-i\omega t} - \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} \vec{E} e^{-i\omega t} + \frac{4\pi\mu\gamma\omega}{c^2} \vec{E} e^{-i\omega t} = 0, \quad \Delta \vec{H} - \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} \vec{H} + \frac{4\pi\mu\gamma\omega}{c^2} \vec{H} = 0$$

После аналогичных преобразований для $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z)$ получим уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0,$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0,$$

где $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu + \frac{2\mu\gamma}{v} i} = \frac{\omega}{c} (n + i\beta)$ – комплексное волновое число среды – число волн, укладывающихся в отрезок 2π сантиметров. Решения уравнений Гельмгольца:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{-ikz} + \vec{E}_2 e^{ikz}, \quad \vec{H} = \vec{H}_1 e^{-ikz} + \vec{H}_2 e^{ikz}.$$

При $\gamma=0$ в идеальном диэлектрике $\beta=0$, волновое число становится вещественным. Если значение γ очень велико, поле будут определять токи проводимости. Если электропроводность мала или очень велика частота ω , то поле будет обусловлено токами смещения.

Величины, из которых складывается волновое число, называют:

коэффициентом преломления –
$$n = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\epsilon\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu\gamma}{v}\right)^2} + \frac{\epsilon\mu}{2}},$$

коэффициент поглощения –
$$\beta = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\epsilon\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu\gamma}{v}\right)^2} - \frac{\epsilon\mu}{2}}.$$

Рассмотрим, как меняется с глубиной переменное поле в горизонтальной пластине толщиной h , ток в которой направлен по оси Ox . Ось Oz направим вниз (рис. 35). Считаем горизонтальные размеры пластины бесконечными, следовательно, E и H зависят только от координаты z . Получим волновые уравнения в виде:

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + k^2 E(z) = 0, \quad \frac{\partial^2 H(z)}{\partial z^2} + k^2 H(z) = 0.$$

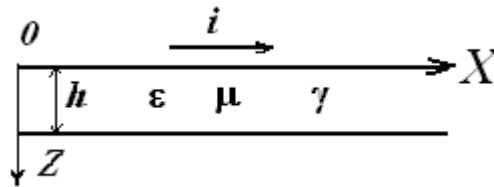


Рис. 35. Горизонтальная пластина

Решение этих уравнений может быть представлено в виде:

$$E(z) = A_1 e^{ikz} + B_1 e^{-ikz}, \quad H(z) = A_2 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz},$$

что можно проверить прямой подстановкой. Коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 найдем с помощью граничных условий $E(0) = E(h), H(0) = -H(h)$.

$$A_1 + B_1 = A_1 e^{ikh} + B_1 e^{-ikh}, \quad A_2 + B_2 = -A_2 e^{ikh} + B_2 e^{-ikh}.$$

Исключим лишние константы из решения:

$$E = A_1 \left(e^{-i(\omega t - kz)} + e^{-i(\omega t - k(h-z))} \right), \quad H = A_2 \left(e^{-i(\omega t - kz)} + e^{-i(\omega t - k(h-z))} \right).$$

Второе уравнение Максвелла $\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в условиях задачи примет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t},$$

что позволяет исключить из решения еще одну константу

$$A_2 = \frac{ck}{\omega\mu} A_1 = \frac{n + i\beta}{\mu} A_1 = A_1 \frac{\sqrt{n^2 + \beta^2}}{\mu} e^{i\varphi}, \text{ где } \varphi = \arctg \frac{\beta}{n}.$$

В итоге после оставления вещественной части решения получим для пластины:

$$E(z, t) = A_1 \left[e^{\frac{-\omega}{c}\beta z} \cos \omega \left(t - \frac{n}{c} z \right) + e^{\frac{-\omega}{c}\beta(h-z)} \cos \left(t - \frac{n}{c} (h - z) \right) \right],$$

$$H(z, t) = A_1 \frac{\sqrt{n^2 + \beta^2}}{\mu} \left[e^{\frac{-\omega}{c}\beta z} \cos \omega \left(\omega t - \omega \frac{n}{c} z - \varphi \right) - e^{\frac{-\omega}{c}\beta(h-z)} \cos \left(\omega t - \omega \frac{n}{c} (h - z) - \varphi \right) \right].$$

Если рассматривать проводящее полупространство, то решение для него будет ($h \rightarrow \infty$):

$$E(z, t) = A_1 e^{\frac{-\omega}{c}\beta z} \cos \left(\omega t - \omega \frac{n}{c} z \right),$$

$$H(z, t) = A_1 \frac{\sqrt{n^2 + \beta^2}}{\mu} e^{\frac{-\omega}{c}\beta z} \cos \left(\omega t - \omega \frac{n}{c} z - \varphi \right).$$

Полученный результат приводит к выводу, что амплитуды электрического и магнитного полей убывают с глубиной по экспоненциальному закону. На глубине $z = \frac{c}{\omega\beta}$ они убывают в e раз. Эта глубина называется **глубиной проникновения поля, или скин-слоем**. Процессы, происходящие в микроволновой печи и при использовании сотовой связи, описываются уравнениями Максвелла. Схожий процесс происходит при разогревании продуктов в микроволновой печи.

Электромагнитным волнам присущи свойства:

- отражение, преломление, поглощение при падении на границу раздела сред (рис. 36);

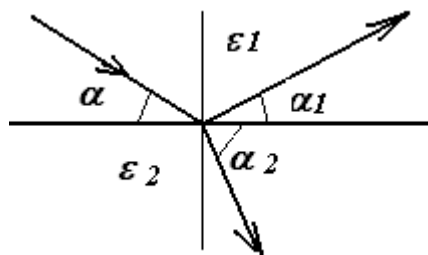


Рис. 36. Схема отражения и преломления плоской волны

- скорость распространения ЭМВ в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ определяется по формуле $v = c / \sqrt{\epsilon\mu}$ (закон Максвелла);
- интерференция, дифракция – огибание препятствий, дисперсия – зависимость параметров среды от частоты ЭМВ;
- ЭМВ – поперечные волны, колебания E и B происходят в плоскости перпендикулярной направлению скорости волны v , векторы E и B с направлением распространения волны образуют правовинтовую систему;
- ЭМВ переносят энергию, массу, но электрический заряд волной не переносится.

Для излучения интенсивных ЭМВ необходима достаточно высокая частота электрических колебаний и незамкнутая электрическая цепь, интенсивность электромагнитных волн, пропорциональная ускорению движущихся электрических зарядов или четвертой степени частоты колебаний ν^4 .

Электромагнитные волны характеризуют длиной волны (λ) и частотой (ν), которые связаны между собой соотношением:

$$\lambda = cT = c/\nu,$$

где T – период колебаний.

Плоской волной называют волну, амплитуда которой зависит только от времени и одной из пространственных координат, направление которой совпадает с направлением распространения волны. У плоской волны в любой момент времени во всех точках любой плоскости, перпендикулярной

направлению распространения волны, векторы E и H имеют одинаковые значения.

Если на пути распространения плоских ЭМВ находится граница сред с разными свойствами, появляются отраженная и преломленная волны. Коэффициент отражения при падении плоской волны из вакуума на проводник

$$r = \frac{\left(\mu - \sqrt{\frac{\gamma\mu}{v}}\right)^2 + \frac{\gamma\mu}{v}}{\left(\mu + \sqrt{\frac{\gamma\mu}{v}}\right)^2 + \frac{\gamma\mu}{v}}.$$

При $v = 250$ ГГц для меди коэффициент отражения равен 98.5 %. Это позволяет применять металлические поверхности в качестве экранов.

Для плоских волн, когда электромагнитное поле зависит только от одной координаты, уравнения поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = 0.$$

Решение этих уравнений:

$$E = E_1 \left(t - \frac{z}{c}\right) + E_2 \left(t + \frac{z}{c}\right), \quad H = H_1 \left(t - \frac{z}{c}\right) + H_2 \left(t + \frac{z}{c}\right).$$

Если в момент времени t_0 поле E_1 принимает некоторое значение, то через время t на удалении ct оно примет то же значение. Решения E_1 и H_1 представляет собой плоскую волну, распространяющуюся со скоростью c в положительном направлении оси Oz . Решения E_2 и H_2 представляет собой плоскую волну, распространяющуюся со скоростью c в противоположном направлении оси Oz . Отношение амплитуд E и H от времени не зависит, т.е. векторы изменяются синхронно.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что функция $\frac{\exp i(\omega t - kR)}{R}$ является решением волнового уравнения.

2. Вычислите коэффициент отражения от скалы при нормальном падении волны, если характеристики пород, слагающих скалу, $\varepsilon = 5$, $\mu = 1$, частота поля $\nu = 10^9$ Гц, $\gamma = 2 \cdot 10^6$ ед. СГСЭ.

3. Найдите составляющие магнитного поля плоской волны, если электрическое поле определено выражением

$$E = E \left(t - \frac{y \cos \beta + z \cos \gamma}{\nu} \right)$$

и направлено по оси Ox . Воспользуйтесь вторым уравнением Максвелла).

4. Вычислите волновое число среды с $\varepsilon = \mu = 1$, $\gamma = 2 \cdot 10^5$ ед. СГСЭ при частоте поля 10^5 Гц.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Размеры и форма тел при приложении внешних сил могут изменяться. Свойство сопротивляемости изменению формы и размеров тел и возврата к прежнему состоянию после прекращения воздействия внешних сил называют упругостью. Если после снятия нагрузки происходит полное восстановление формы и размеров тела, то его называют идеально упругим. Деформация такого тела не зависит от времени действия нагрузки и предшествующего состояния. У идеально упругих тел деформация происходит без трения, ее величина очень мала, а затраченная энергия полностью переходит в накопленную в теле упругую энергию.

Горные породы верхней части земной коры при действии кратковременной нагрузки ведут себя как хрупкие и упругие тела. Об их высокой упругости свидетельствует способность горных пород передавать сейсмические волны. О хрупкости горных пород свидетельствуют повсеместно встречающиеся разломы разного порядка. Горные породы при приложении небольшой нагрузки можно считать идеально упругими. Их деформация полностью обратима, ее величина пропорциональна приложенной нагрузке. После снятия нагрузки деформация исчезает.

Результат механического воздействия на среду принято характеризовать смещением, напряжением и деформацией. При действии механических напряжений происходит смещение частиц среды. Смещение частицы можно характеризовать вектором $U(u_0, v_0, w_0)$. Если можно подобрать скалярную функцию такую что:

$$U = \text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то скалярную функцию называем потенциалом φ .

Выделим в среде площадку, ориентировку которой определим вектором n , перпендикулярным к среде. Действие силы dF , направленной соосно с нормалью к площадке, на площадку dS характеризуют вектором напряжения: $\vec{p}_n = \frac{d\vec{F}}{dS}$.

Ориентировка напряжения может отличаться от n , поэтому индекс указывает на ориентировку относительно площадки (рис. 37, а). Для трех взаимно перпендикулярных площадок для той же силы $d\vec{F}$ получим:

$$\vec{p}_x = \frac{d\vec{F}}{dS_{zy}}, \quad \vec{p}_y = \frac{d\vec{F}}{dS_{xz}}, \quad \vec{p}_z = \frac{d\vec{F}}{dS_{xy}}.$$

Эти векторы полностью характеризуют напряжение в рассматриваемой точке. Поскольку каждый из трех векторов имеет три компоненты, тензор напряжений запишем:

$$p = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix},$$

где первый индекс указывает на нормаль к площадке, а второй – на компоненту напряжения. Например, p_{xy} – компонента напряжения по оси x на площадке с нормалью по оси y . Величины p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} называют нормальными напряжениями, p_{xy} , p_{xz} , p_{yx} , p_{yz} , p_{zx} , p_{zy} называют касательными напряжениями (тангенциальными). В любой точке деформируемой среды можно указать три взаимно перпендикулярных направления, таких, касательные напряжения к которым отсутствуют (равны 0). Эти направления называют главными направлениями, а напряжения – главными напряжениями. Если выбрать направления осей координат совпадающие с главными направлениями, тензор напряжений принимает вид:

$$p = \begin{vmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}.$$

В этом выражении $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Напряжения служат количественной оценкой воздействия внешних сил на геологическую среду.

Пусть точка A сместилась в направлении координатных осей на u_0 , v_0 , w_0 . Находящаяся вблизи точки A точка B сместится на расстояние (рис. 37, б) u_0+dx , v_0+dy , w_0+dz . Используя разложение смещения в ряд Тейлора, получим:

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz ,$$

$$u = u_0 + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz .$$

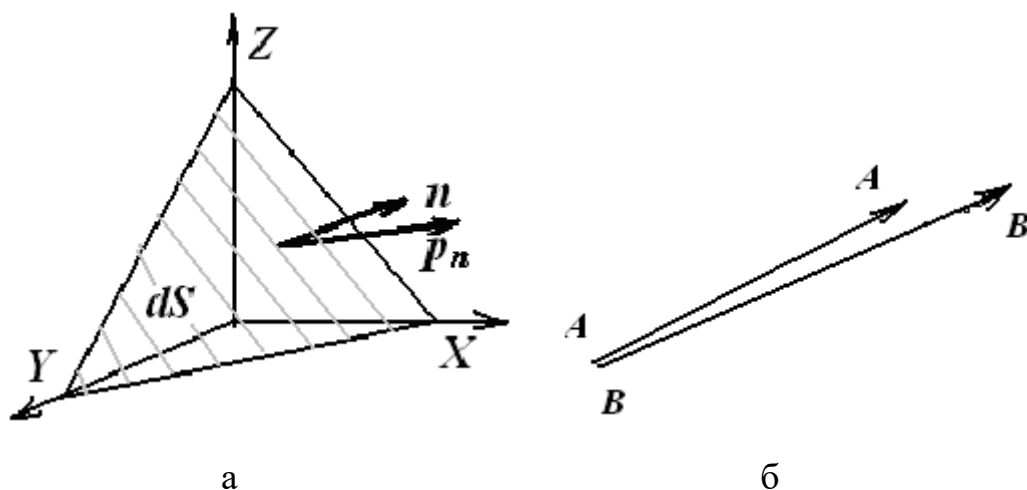


Рис. 37. К определению вектора смещения (а), тензора напряжений (б)

Безразмерные производные в этих выражениях имеют смысл относительных смещений. Они являются мерой изменения формы и размеров тел под действием напряжений. Их называют составляющими тензора деформации:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} .$$

На диагонали в матрице находятся относительные растяжения, вне диагонали – относительные сдвиги. Тензоры деформации несимметричны.

Всегда в каждой точке можно выбрать три взаимно перпендикулярных направления, таких, что направленный отрезок при деформации сохраняет направление, а меняется только его величина. Такие направления и деформации называют главными. Сжатию соответствуют положительные главные деформации, растяжению отвечают отрицательные значения главных деформаций.

Смещение точек среды принято раскладывать на три составляющие: параллельный перенос, чистую деформацию и вращение. Принято разлагать тензор деформации на симметричную и несимметричную части. Вводятся обозначения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Тензор чистой деформации можно представить:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

Под действием внешних сил тело может испытывать кручение. Асимметричная часть тензора деформации

$$\begin{vmatrix} 0 & -\varpi_z & -\varpi_y \\ -\varpi_z & 0 & -\varpi_x \\ -\varpi_y & -\varpi_x & 0 \end{vmatrix}$$

Вектор кручения

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{U}.$$

Его компоненты:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Точки куба, находящиеся на главных направлениях, смещаются вдоль этих направлений. Сумма величин, стоящих на диагонали, не зависит от выбора системы координат, т. е. является инвариантом. Эту сумму называют дилатацией, она равна относительному изменению объема. Иначе дилатацию можно записать:

$$\theta = \operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Если смещение имеет только радиальную составляющую, то в сферических координатах дилатация имеет вид:

$$\theta = \frac{2u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Для малого объема однородной среды обобщенный закон Гука имеет вид:

$$p_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}\varepsilon_{yy} + a_{13}\varepsilon_{zz} + 2a_{14}\varepsilon_{yz} + 2a_{15}\varepsilon_{zx} + 2a_{16}\varepsilon_{xy},$$

$$p_{yy} = a_{21}\varepsilon_{xx} + a_{22}\varepsilon_{yy} + a_{23}\varepsilon_{zz} + 2a_{24}\varepsilon_{yz} + 2a_{25}\varepsilon_{zx} + 2a_{26}\varepsilon_{xy},$$

$$p_{zz} = a_{31}\varepsilon_{xx} + a_{32}\varepsilon_{yy} + a_{33}\varepsilon_{zz} + 2a_{34}\varepsilon_{yz} + 2a_{35}\varepsilon_{zx} + 2a_{36}\varepsilon_{xy},$$

$$p_{yz} = a_{41}\varepsilon_{xx} + a_{42}\varepsilon_{yy} + a_{43}\varepsilon_{zz} + 2a_{44}\varepsilon_{yz} + 2a_{45}\varepsilon_{zx} + 2a_{46}\varepsilon_{xy},$$

$$p_{zx} = a_{51}\varepsilon_{xx} + a_{52}\varepsilon_{yy} + a_{53}\varepsilon_{zz} + 2a_{54}\varepsilon_{yz} + 2a_{55}\varepsilon_{zx} + 2a_{56}\varepsilon_{xy},$$

$$p_{xy} = a_{61}\varepsilon_{xx} + a_{62}\varepsilon_{yy} + a_{63}\varepsilon_{zz} + 2a_{64}\varepsilon_{yz} + 2a_{65}\varepsilon_{zx} + 2a_{66}\varepsilon_{xy}.$$

Матрица коэффициентов a_{ij} антисимметричная, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$. Коэффициенты a_{ij} называют модулями упругости. Например, для известняка $a_{11} = 3500 \text{ Н/м}^2$.

Реакция среды на механические воздействия зависит от свойств среды. Упругие свойства среды мы будем рассматривать в рамках линейного закона Гука. Наиболее простое выражение закон имеет в изотропных средах, свойства которых не зависят от направления. Удлинение в этом случае пропорционально действующему напряжению:

$$l = l_0(1 + \alpha p),$$

где α – коэффициент линейного растяжения. Величину $E = 1/\alpha$ называют модулем Юнга, численно она равна напряжению, при котором удлинение равно первоначальной длине. Модуль Юнга характеризует сопротивление упругой среды действующей силе. Удлинение сопровождается изменением поперечных размеров. Это изменение

$$d = d_0(1 - \beta p)$$

характеризуют коэффициентом поперечного сжатия β . Используют коэффициент Пуассона $\sigma = \beta/\alpha$. Величину

$$E' = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E$$

называют модулем одностороннего сжатия безграничного слоя.

При действии касательных напряжений закон Гука имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta l}{h} = \gamma p_t$$

где γ – коэффициент сдвига.

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

где $G = 1/\gamma$ – модуль сдвига.

Для характеристики напряженного состояния среды используют также угол $\psi = p_t / G$.

Напряженное состояние характеризуют константами Ламэ λ и μ . (Константу μ называют модулем сдвига). Они связаны с модулем Юнга, модулем всестороннего сжатия и коэффициентом Пуассона:

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}.$$

Упругие константы не могут принимать произвольные значения. Справедливы ограничения: $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $0 < \sigma < 0,5$, $E > 0$, $K > 0$.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим задачу о передаче движений в упругой твердой среде. Выведем уравнение, описывающее движение частиц твердой упругой среды. Под действием внешних сил, приложенных к ограниченной части среды, например взрыва, частицы двигаются. В упругой среде частицы колеблются возле положения равновесия. Колебания передаются от одной частицы среды другой частице с некоторой скоростью. При этом надо учитывать объемные силы (массовые силы), в первую очередь силы инерции. Среду будем считать однородной и изотропной, т.е. упругие характеристики σ , E и другие постоянные величины.

Статическое равновесие в среде наступает при равенстве результирующей действия всех сил нулю и равенстве нулю результирующего момента сил:

$$f_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$f_y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = 0,$$

$$f_z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = 0.$$

Определим деформацию сплошного шара от взаимного притяжения его частиц.

Примем радиус шара равным a . На каждую точку шара действует сила $F = -\frac{\rho g r}{a}$, направленная радиально. Уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r} \right) - \frac{\rho g r}{a(\lambda + 2\mu)} = 0.$$

Общее решение данного уравнения $u_r = Cr$. Частное решение возьмем в виде $u_r = C_0 r^3$. Подставляя частное решение в уравнение равновесия, определим константу:

$$C_0 = \frac{\rho g}{10a(\lambda + 2\mu)}.$$

На свободной внешней поверхности шара напряжения равны нулю. В итоге решение примет вид:

$$u_r = -\frac{1}{10} \frac{\rho g a r}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Внутри сферы радиуса $r = a \sqrt{\frac{5\lambda + 6\mu}{9\lambda + 6\mu}}$ деформация представляет собой укорочение, а вне этой сферы деформация – удлинение.

В цилиндрических координатах уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{R_r - R_\beta}{r} + R = 0,$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{2B_r}{r} + B = 0,$$

$$\frac{\partial Z_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{Z_r}{r} + Z = 0.$$

Уравнения равновесия в сферических координатах:

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2R_r - B_\beta - A_\alpha + R_\alpha \operatorname{ctg} \alpha}{r} + R = 0,$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial B_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{B_\alpha (3 + 2 \operatorname{ctg} \alpha)}{r} + B = 0,$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{(R_r - B_\beta) \operatorname{ctg} \alpha - 3A_r}{r} + A = 0.$$

Уравнение равновесия в декартовых координатах можно переписать в виде:

$$f_x + \operatorname{div} \vec{p}_x = 0,$$

$$f_y + \operatorname{div} \vec{p}_y = 0,$$

$$f_z + \operatorname{div} \vec{p}_z = 0.$$

Если к этим уравнениям добавить силы инерции, получим даламберовские условия динамического равновесия:

$$f_x + \operatorname{div} \vec{p}_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$f_y + \operatorname{div} \vec{p}_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$f_z + \operatorname{div} \vec{p}_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Плотность среды связана с константами Ламэ и со скоростями распространения продольной и поперечной упругих волн в ней:

$$v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Продольная волна – это поступательное движение частиц среды в направлении распространения колебаний. При распространении продольной волны происходит изменение элементарных объемов среды. Поперечная волна –

это малые вращения частиц среды в плоскости ортогональной направлению распространения колебаний. При этом происходит изменение формы элементарных объемов без изменения объема. Относительные изменения формы и объема горных пород при проведении сейсморазведки не превышает 0,0001.

Выполним преобразования:

$$\operatorname{div} \vec{p}_x = \operatorname{div}(\vec{i} p_{xx} + \vec{j} p_{xy} + \vec{k} p_{xz}) = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}.$$

Для записи закона Гука в изотропной среде достаточно только констант Ламэ:

$$p_{xx} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{xx}, \quad p_{yy} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{yy}, \quad p_{zz} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{zz},$$

$$p_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}, \quad p_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz}, \quad p_{zx} = 2\mu \varepsilon_{zx}.$$

Динамические уравнения движения и равновесия имеют вид:

$$f_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$f_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$f_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

В однородной и изотропной среде возможно раздельное рассмотрение механических перемещений частиц в виде продольных и поперечных волн. В такой среде вектор смещений можно представить в виде суммы вихревой и потенциальной части. Будем считать среду изотропной, т.е. ее можно охарактеризовать двумя упругими модулями Ламэ, а векторы силы $F(f_x, f_y, f_z)$ и смещений $U(u, v, w)$ имеет две составляющие – потенциальную и вихревую:

$$F = F_1 + F_2, \quad U = U_1 + U_2.$$

Исходя из условия составления суммы векторов $\operatorname{div} \vec{U}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{U}_1 = 0$. Уравнение движения и равновесия для суммы потенциальной и вихревой части получим:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}(\vec{U}_1 + \vec{U}_2) + \mu \Delta(\vec{U}_1 + \vec{U}_2) - \rho \frac{\partial}{\partial t}(\vec{U}_1 + \vec{U}_2) + (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = 0.$$

Поскольку $\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$, то после переноса слагаемых, относящихся к разным векторам в разные части уравнения

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \vec{U}_1 - \frac{\partial^2 \vec{U}_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \vec{F}_1 = -\frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{U}_2 - \frac{\partial^2 \vec{U}_2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \vec{F}_2.$$

Для выполнения равенства достаточно, чтобы правая и левая части уравнения были равны 0, тогда с учетом связи констант Ламэ со скоростями распространения волн получим:

$$\Delta \vec{U}_1 - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho v_p^2} \vec{F}_1,$$

$$\Delta \vec{U}_2 - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho v_s^2} \vec{F}_2.$$

Пусть вектор смещения направлен вдоль одной из пространственных координат, а его величина зависит только от времени и той же пространственной координаты, например $\vec{U} = u(x, t) \vec{i}$. В этом случае $\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Уравнение движения

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{U} + \mu \Delta u + f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

в отсутствии объемных сил примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$u = u_1 \left(t - \frac{x}{v_p} \right) + u_2 \left(t + \frac{x}{v_p} \right),$$

где u_1 и u_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции. Первое слагаемое представляет собой плоскую продольную волну, распространяющуюся в положительном направлении Ox , а второе – продольную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении Ox .

Если вектор смещения зависит от переменной x , а смещение направлено вдоль оси Oy , т.е. $\vec{U} = u(x,t)\vec{j}$, при отсутствии объемных сил уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Решение в этом случае представляет собой плоские поперечные волны. Для смещения, меняющегося по гармоническому закону, для плоской волны получим:

$$u = u_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right],$$

где φ_0 – начальная фаза, ω – круговая частота, v – скорость, отвечающая типу волны (v_p или v_s), u_0 – амплитуда.

В сейсморазведке упругие колебания возбуждают взрывными источниками. Обычно на расстоянии несколько десятков метров можно считать такой источник сферическим излучателем. Радиальное давление

$$p_{rr} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\lambda u}{r}.$$

Будем считать, что сферический излучатель возбуждает гармонические колебания. В идеальном случае смещения точек будут иметь только радиальную составляющую. Тогда на удалении $r = r_0$:

$$P_0 e^{i\omega t} = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\lambda u}{r} \right] \Big|_{r=r_0}.$$

Скалярный потенциал:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \varphi = A \frac{e^{-i\omega(t-r/V_p)}}{r}.$$

Используя граничные условия, можно определить смещение и скалярный потенциал:

$$\varphi = -\frac{P_0 r_0}{r \rho B} e^{i\omega(t - \frac{r-r_0}{V_p})}, \quad u = \frac{P_0 r_0}{r \rho B} \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{V_p} \right) e^{i\omega(t - (r-r_0)/V_p)},$$

где $B = \frac{4V_S^2}{r_0} + \frac{4i\omega}{r_0 V_p} V_S^2 - \omega^2$.

Первое слагаемое убывает значительно медленнее, чем второе слагаемое. Поэтому на удалении от источника смещение характеризуют первым слагаемым:

$$u = u_0 \frac{e^{i\omega(t-(r-r_0)/V_p)}}{r}.$$

Распространение упругих колебаний в среде сопровождается переносом энергии. Плотность потока переносимой энергии определяется вектором Умова:

$$|\vec{P}| = \frac{1}{2} \rho V_p \omega^2 A^2,$$

где V_p – скорость продольных волн, ρ – плотность среды, ω – циклическая частота, A – амплитуда колебаний.

ЗАДАЧА

Определить смещения и напряжения в замкнутой сферической оболочке, нагруженной снаружи равномерно распределенным давлением p_e ($r = a$) и равномерно распределенным давлением изнутри p_i ($r = b$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М.: Недра, 1985. 407 с.

Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.

Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Ч. 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. М.: Недра, 1997. 520 с.

Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.

Кормильцев В. В., Ратушняк А. Н. Моделирование геофизических полей при помощи объемных векторных интегральных уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 98 с.

Кудрявцев Ю. И. Теория поля и ее применение в геофизике. Л.: Недра, 1988. 335 с.

Кутас Р. И., Цвященко В. А., Корчагин И. Н. Моделирование теплового поля континентальной литосферы. Киев: Наукова думка, 1989. 192 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. (Серия : Теоретическая физика. Т. VIII.) М.: Наука, 1982. 352 с.

Муратов Р. З. Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.

Овчинников И. К. Теория поля. М.: Недра, 1979. 352 с.

Овчинников И. К. Электроразведка рудных объектов под верхним слоем земной коры. М.: Недра, 1975. 88 с.

Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Изд-во. МГУ, 1984. 136 с.

Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 443 с.

Саваренский Е. Ф. Сейсмические волны. М.: Недра, 1972. 296 с.

Сапожников В. М., Шевченко В. Г. Теория и методика электроразведки в градиентных средах. Л.: Недра, 1992. 135 с.

Серкерев С. А. Теория гравитационного и магнитного потенциалов. М.: Недра, 1990. 304 с.

Смирнов А. А. Введение в теорию электромагнитного поля. М.: Недра, 1975. 136 с.

Соболев С. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.

Тамм И. Е. Основы электричества. Изд-е 8. М.: Наука, 1966. 624 с.

Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 506 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

Халилеев П. А. Основные понятия электродинамики сплошных сред. Свердловск: УрО АН СССР, 1989. 230 с.

Филатов В. В. Начала теории упругости и теории упругих волн. Екатеринбург: УГГУ, 2006. 102 с.

Череменский Г. А. Прикладная геотермия. Л.: Недра, 1977. 224 с.

Череменский Г. А. Геотермия. Л.: Недра, 1972. 272 с.

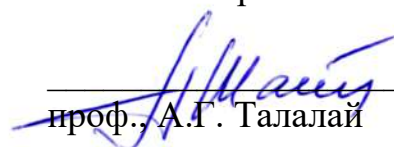
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ:

Заведующий кафедрой
геофизики

«01» сентября 2022 г.


проф., А.Г. Талалай

Редозубов А.А.,

Петряев В.Е.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО
КУРСОВОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ
ПО ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ**

**для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки»,
специализации №1 «Геофизические
методы поисков и разведки месторождений
полезных ископаемых»**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	4
2. Структура и содержание курсового проекта	5
2.1. Общая структура курсового проекта.....	5
2.2. Содержание курсового проекта	6
2.2.1. Введение	6
2.2.2. Геологическое строение района работ	7
2.2.3. Физические и геологические предпосылки для постановки электроразведки	9
2.2.4. Методика и техника проектируемых работ.....	13
2.2.5. Заключение.....	16
3. Основные требования к оформлению курсового проекта	16
Список литературы.....	19
Приложение 1. Образец оформления титульного листа	21
Приложение 2. Темы курсового проекта.....	22

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В подготовке специалистов-геофизиков, способных успешно решать задачи, возникающие в процессе производственной деятельности, важную роль играет курсовое проектирование по дисциплинам специальности, которое позволяет максимально приблизить студента к составлению документации, требуемой на стадии проектирования геофизических работ. При курсовом проектировании по электроразведке студенты систематизируют и углубляют свои знания по дисциплине и получают навыки их применения для решения конкретных задач. Работая над курсовым проектом, студенты также совершенствуют навыки работы со специальной литературой, поиска необходимых библиографических источников, навыки работы с вычислительной техникой и т. д.

Типовым заданием для курсового проекта является составление геолого-методической части проекта электроразведочных работ для решения конкретной геологической задачи в конкретной геологической обстановке. Такой задачей могут быть поиски или разведка месторождений полезных ископаемых, геологическое картирование, инженерно-геологические изыскания и т. п. В задании студенту указывается район и ставится геологическая задача, для решения которой необходимо разработать проект электроразведочных работ заданным методом или выбрать модификацию заданного метода. В задании также указываются один-два литературных источника, в которых можно найти первоначальные сведения о геологическом строении района работ и электрических свойствах слагающих его горных пород. Другие необходимые сведения и содержащие их литературные источники студенту предлагается разыскать самостоятельно, используя справочные библиографические материалы или интернет-ресурсы.

Вместо типового курсового проекта отдельным, как правило, хорошо успевающим, студентам может быть выдано задание на выполнение курсовой работы исследовательского характера. Впоследствии такая курсовая работа при

последующем ее развитии может послужить основой выпускной квалификационной работы. Структура курсовой работы исследовательского характера определяется руководителем.

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

2.1. Общая структура курсового проекта

В курсовом проекте должно быть сформулировано геологическое задание, дана краткая географическая характеристика района работ, описано его геологическое строение и проанализированы физико-геологические предпосылки для постановки электроразведки. На основании этих материалов обосновывается целесообразность применения выбранного метода электроразведки для решения поставленной задачи, выбирается и обосновывается методика работ.

Пояснительная записка (текстовая часть проекта) по объему не должна превышать 25-30 страниц рукописного или 20-25 страниц машинописного текста. Пояснительная записка иллюстрируется рисунками в тексте, таблицами, расчетами и т. п. Текст курсового проекта делится на разделы (главы), которые при необходимости подразделяются на подразделы (параграфы). Разбивка на подразделы производится студентом по своему усмотрению. Все разделы курсового проекта должны быть органически связаны между собой. Изложение материала должно быть четким, ясным и по возможности кратким. Выдвигаемые положения и выводы должны подтверждаться расчетами, таблицами, графиками, ссылками на литературу. Структура курсового проекта приведена ниже. По согласованию с руководителем в эту структуру могут быть внесены изменения. Если вместо типового курсового проекта выполняется курсовая работа исследовательского характера, ее структура зависит от темы и разрабатывается совместно студентом и руководителем.

Типовой курсовой проект состоит из следующих разделов (глав):

ВВЕДЕНИЕ

1. Геологическое строение района работ
2. Физические и геологические предпосылки для постановки электроразведки
3. Методика и техника проектируемых работ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

2.2. Содержание курсового проекта

2.2.1 ВВЕДЕНИЕ

Во введении должна быть четко сформулирована геологическая задача, для решения которой проектируются электроразведочные работы. Указывается стадия геологоразведочных работ, к которой эти работы следует отнести.

Приводятся сведения о районе, характеризующие условия проведения электроразведочных работ. Указывается географическое положение и административная принадлежность района, характеризуется рельеф, климат, растительность. Приводятся сведения о населении и его занятиях, основных населенных пунктах, промышленности и путях сообщения. Приведенные сведения должны давать представление о продолжительности полевого периода, возможности найма рабочей силы на месте проведения работ, условиях базирования и снабжения партии, возможности применения транспортных средств, степени промышленного развития района (необходимого для определения уровня помех в главе «Методика и техника проектируемых работ»). Соответствующими выводами необходимо завершить данный раздел.

Текст следует иллюстрировать обзорной картой с указанием на ней участка проектируемых работ. Обзорную карту можно сделать в виде

выкопировки из географической карты достаточно крупного масштаба, например, карты соответствующей области.

Для составления общей характеристики района следует воспользоваться литературными источниками – энциклопедией, учебником географии, географическим атласом, а также интернет-ресурсами.

2.2.2. Геологическое строение района работ

Описание геологического строения следует начинать с определения положения района работ по отношению к региональным геологическим структурам и очень краткой общей геологической характеристики, которая детализируется в последующих частях раздела.

Стратиграфическая колонка в рудном районе описывается кратко: приводится литологический состав стратиграфических горизонтов, их мощности и распространение. Отмечаются несогласия в залегании стратиграфических комплексов, фациальные изменения и т.п. Следует обратить внимание на стратиграфическую приуроченность полезных ископаемых. Если есть возможность, надо привести обобщенные сведения об электрических свойствах горных пород, слагающих стратиграфические горизонты. Если же полезное ископаемое приурочено к осадочным горным породам, стратиграфии следует уделить большее внимание.

При характеристике магматизма указываются его фазы и характерные для них комплексы пород. Приводятся сведения о форме, размерах и элементах залегания магматических тел. Важным моментом является связь полезных ископаемых с магматическими комплексами, если таковая имеется.

При описании тектоники необходимо привести общую тектоническую схему района и охарактеризовать наиболее крупные структурные элементы. Затем следует перейти к описанию других пикативных структур и дизъюнктивных нарушений, рассмотреть их размеры, элементы залегания и возрастные

взаимоотношения. Если установлен тектонический контроль месторождений полезных ископаемых, следует привести соответствующие сведения.

Серьезное внимание следует уделить вопросу метаморфизма, т. к. на электрические свойства горных пород большое влияние оказывает характер и степень метаморфических изменений. Необходимо рассмотреть пространственное распространение измененных пород, связь метаморфизма с магматической и тектонической деятельностью. Следует обратить внимание на связь с метаморфизмом полезных ископаемых.

Важнейшей частью геологического очерка является характеристика месторождений полезных ископаемых, для поисков которых проектируются электроразведочные работы. Необходимо привести сведения об известных месторождениях и рудопроявлениях, указать их пространственное расположение, стратиграфический, литологический и структурный контроль, связь с метаморфизмом, генетический тип. При этом подробно рассматриваются рудоконтролирующие структуры, состав и степень метаморфизма вмещающих пород, наличие и характер окolorудных изменений, форма, размеры, глубина и элементы залегания, вещественный состав залежей полезных ископаемых. Приводятся сведения о слое рыхлых отложений и коре выветривания, о гипергенных изменениях.

Если на территории района нет известных месторождений, а имеются лишь геологические предпосылки для их обнаружения, следует воспользоваться методом аналогий и рассмотреть какое-либо месторождение соответствующего генетического типа из другого района, имеющее сходное геологическое строение.

Текст геологического очерка иллюстрируется геологическими картами и разрезами района и месторождения.

Геологическое описание района проектируемых работ составляется по литературным источникам. В некоторых случаях дополнительные материалы могут быть предоставлены руководителем.

2.2.3. Физические и геологические предпосылки для постановки электроразведки

Целью этой главы является анализ физико-геологических условий для постановки проектируемых работ при решении поставленных геологических задач, для чего необходимо проанализировать электрические свойства горных пород и полезных ископаемых. Наиболее важными из них являются удельное электрическое сопротивление и поляризуемость, а также способность геологических объектов создавать естественные электрические поля. В высокочастотных методах на распределение изучаемого поля может оказывать заметное влияние диэлектрическая проницаемость среды. Для индуктивных методов имеет значение магнитная проницаемость, если она достаточно велика (магнитная восприимчивость достигает десятых долей единицы СИ и более). Рассматривая электрические свойства горных пород, надо обращать внимание на их изменение в зонах тектонических нарушений, под воздействием различных процессов метаморфизма, гипергенных факторов и т. д. Эти изменения нередко оказываются даже более существенными, чем дифференциация различных типов пород и могут иметь определяющее значение для применения электроразведки. Описание электрических свойств горных пород следует сопровождать фактическим материалом в виде таблиц, гистограмм или вариационных кривых.

Наряду с информацией об электрических свойствах горных пород для применения электроразведки важно учитывать форму, размеры и условия залегания геологических объектов. Рассматривая эти вопросы, следует обратить внимание на связь объектов изучения со структурными элементами, типами горных пород, отличающимися по физическим свойствам (тектонические зоны, области проявления метаморфизма и т. д.), на изменение электрических свойств в околорудном ореоле, особенно в надрудной зоне. Может оказаться, что при применении электроразведки целесообразнее ориентироваться не на непосредственное выявление залежи полезного

ископаемого, а на обнаружение и оконтуривание рудоконтролирующих элементов или геоэлектрических ореолов.

При анализе физико-геологических предпосылок необходимо рассмотреть возможные искажения изучаемых электромагнитных полей различными геоэлектрическими помехами. К ним относится неравномерная мощность и изменчивое удельное сопротивление рыхлых отложений, неоднородность вмещающих пород по сопротивлению и поляризуемости и т. д. Электропроводный слой рыхлых отложений, даже если его параметры выдержаны, оказывает экранирующее влияние на электрическое поле, приводящее к уменьшению интенсивности аномалий от объектов исследования. Этому вопросу следует уделить самое серьезное внимание и ввести соответствующие поправки в расчеты.

На основе анализа геологического строения объекта и его физических свойств формируется физико-геологическая модель (ФГМ). При ее построении форма геологических тел, отличающихся по электрическим свойствам, должна быть как можно более простой, допускающей решение прямой задачи имеющимися средствами, и в то же время возможно лучше отражающей реальную обстановку.

Рассмотрим построение физико-геологической модели на примере колчеданного месторождения. Участок работ сложен породами эффузивного комплекса, имеющими удельное электрическое сопротивление порядка 2000 Ом·м и поляризуемость около 2 %. Оруденение приурочено к мощным, до 300 м и более крутопадающим зонам гидротермально измененных пород хлорит-серицит-кварцевого состава. Метасоматиты имеют несколько пониженное по сравнению с эффузивами удельное электрическое сопротивление (500-1000 Ом·м), поляризуемость же их повышена за счет рассеянной вкрапленности рудных минералов. Вблизи оруденения содержание рудных вкрапленников достигает 7-8 %, что приводит к повышению поляризуемости рудовмещающих метасоматитов до 15-20 %. Рудные залежи, сложенные массивным колчеданом, имеют грубо изометричную форму с

поперечником 100-200 м. Глубина до верхней кромки залежей составляет обычно 100-200 м, но может колебаться в зависимости от уровня эрозионного среза. Удельное сопротивление массивных руд 0,05-0,5 Ом·м, коэффициент поверхностной вызванной поляризации $\lambda=0,6$ м. Коренные породы перекрыты слоем рыхлых отложений мощностью 30-50 м с удельным электрическим сопротивлением в среднем 50 Ом·м. Схематический геологический разрез описанного объекта приведен на рис. 1, а.

Если поставлена геологическая задача непосредственного выявления рудной залежи, в данных условиях можно применить метод переходных процессов, которым такое тело может быть выявлено при глубине до его центра до 400 м. Так как форма залежи в первом приближении изометрична, ее можно аппроксимировать шаром, а в качестве физико-геологической модели принять шар в однородном полупространстве, перекрытом слоем рыхлых отложений.

При решении задачи выявления и оконтуривания минерализованных метасоматитов, вмещающих залежи массивных руд, можно применить метод вызванной поляризации, т. к. метасоматиты обладают повышенной поляризуемостью по сравнению с вмещающими эффузивами из-за рассеянной вкрапленности рудных минералов. Физико-геологическая модель будет представлять собой наклонный пласт, перекрытый горизонтальным слоем рыхлых отложений низкого сопротивления (рис. 1, б).

Чтобы оценить вид и интенсивность аномалий, которые могут быть получены над объектом поисков, выполняется решение прямой задачи для построенной физико-геологической модели. Расчеты показывают, что над пластом рудовмещающих хлорит-серицит-кварцевых пород интенсивность аномалии η_k достигает 3 % (см. рис. 1, б). Таким образом, поставленная задача выявления потенциально рудоносных зон метасоматитов может быть успешно решена методом вызванной поляризации. При решении прямой задачи полезно рассчитать и сравнить аномалии при изменении параметров модели в возможных для данных геологических условий пределах.

Если в районе проектируемых работ развиты геологические образования, которые не представляют интереса, но могут создавать аномалии, подобные аномалиям от объектов поисков, нужно для них также построить физико-геологическую модель и, решив для этой модели прямую задачу, следует сопоставить аномалии от геоэлектрических помех с аномалией от объекта поисков.

Следует оценить степень влияния геоэлектрических помех и возможность разделения аномалий, вызванных геоэлектрическими помехами и объектами поисков. При анализе возможности применения электроразведки для решения поставленных задач следует также использовать сведения о результатах ранее проведенных работ, если таковые имеются.

В конце главы надо сделать выводы о том, насколько эффективен проектируемый метод для решения поставленных геологических задач и каков будет характер аномалий.

При составлении главы следует пользоваться литературными источниками или другими материалами, доступными автору. Если необходимые сведения о районе проектируемых работ отсутствуют, можно воспользоваться материалами по другому району с аналогичным геологическим строением и геоэлектрической обстановкой. В крайнем случае, для характеристики электрических свойств пород можно воспользоваться обобщенными данными из справочника геофизика [11].

2.2.4. Методика и техника проектируемых работ

В данной главе на основе данных о геологической обстановке и физико-геологических условиях применения электроразведки, рассмотренных в предыдущих разделах, обосновывается выбор проектируемого метода электроразведки. Для этого нужно использовать результаты решения прямой задачи, а также имеющиеся данные о ранее проведенных в районе геофизических исследованиях. При этом следует дать оценку предельной

глубины, на которой может быть обнаружен выбранным методом объект поисков. Такая оценка может быть сделана путем решения прямой задачи для объектов, залегающих на различной глубине или по имеющимся в литературе формулам.

Необходимо обосновать сеть наблюдений и определить соответствующий ему масштаб съемки. Если масштаб съемки задан, сеть наблюдений выбирается соответствующей этому масштабу. Связь между масштабом съемки и сетью наблюдений определяется инструкцией по электроразведке [2]. При выборе сети руководствуются обычными требованиями, чтобы аномалия выделялась не менее, чем на двух профилях, а на профиле в пределах аномалии располагалось не менее двух-трех точек. Для определения шага наблюдений по профилю следует воспользоваться результирующим графиком изучаемого параметра, полученным в результате решения прямой задачи, в который были внесены все поправки: за угол наклона пласта и за экранирующее влияние проводящего слоя рыхлых отложений. Затем оценивается пороговое значение аномалии, т. е. минимальная интенсивность аномалии, при которой она может быть уверенно выделена, и определяется ширина аномалии на этом уровне. В качестве порогового уровня обычно принимается удвоенное фоновое значение. Расстояние между профилями можно определить, исходя из ожидаемой длины объекта по простиранию (длина аномалии обычно несколько больше длины объекта). Определяя сеть наблюдений, исходя из размеров объекта, необходимо соблюдать соответствие расстояния между профилями и шага наблюдений одному из общепринятых масштабов. Для этого в случае необходимости найденное расстояние между профилями или между точками на профиле изменяется в меньшую сторону.

Размер установки (разнос питающих электродов, размер петли) выбирается таким, чтобы аномалия от объекта поисков имела максимально возможную интенсивность, но в то же время он не должен быть непомерно большим, чтобы не осложнять проведение полевых работ. При зондировании максимальный разнос электродов AB берется таким, чтобы в нижней своей

части кривая выходила на значение удельного сопротивления опорного горизонта. Разнос приемных электродов согласовывается с разносом питающих электродов и шагом наблюдений. При электропрофилировании разнос между приемными электродами обычно соответствует шагу наблюдений. В индуктивных методах размер установки выбирается таким, чтобы он обеспечивал обнаружение объекта на максимально возможной глубине. Из этих же соображений выбирается рабочая частота. При частотных зондированиях диапазон частот должен обеспечивать изучение разреза в нужном интервале глубин, а размер установки выбирается в зависимости от глубины до опорного горизонта.

Если проектируется кондуктивный метод, то при расчете методики работ следует воспользоваться задачей «Выбор генераторной установки» [7]. Для выбора источника тока необходимо рассчитать силу тока в питающей линии, обеспечивающую уверенные измерения при ожидаемом уровне помех. Исходя из полученных результатов, принимают решение о наиболее целесообразном типе источника тока. Выбирается измерительная аппаратура, обеспечивающая надежные измерения в условиях участка проектируемых работ. При выборе аппаратуры, как правило, следует ориентироваться на ее серийные типы. Необходимо учитывать вес и габариты аппаратуры, способ ее транспортировки, соотнося их с условиями района работ. Обосновывается выбор типов проводов для питающих и приемных линий, конструкция токовых и приемных заземлений, генераторных и измерительных контуров. Указывается методика контроля качества работ и проектная точность измерений, а также порядок камеральной обработки измерений, методика интерпретации и форма представления результатов работ. Описывается и изображается графически схема отработки площади. При этом следует рассчитать рабочий участок питающей линии и, например, если проектируется метод вызванной поляризации в модификации срединного градиента (ВП-СГ), определить максимально допустимое расстояние от питающей линии до боковых профилей.

При составлении этой главы следует пользоваться инструкцией по электроразведке [2], справочником геофизика [12], а также монографиями и статьями, посвященными проектируемыми методами.

2.2.5. Заключение

В заключении отмечается, что удалось сделать при выполнении курсового проекта, какие знания применил студент и какие навыки развил при решении конкретных геологических задач методами электроразведки.

3. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Текст пояснительной записки к курсовому проекту должен быть написан или напечатан на компьютере на листах стандартного (А4) формата. Разделы (главы) нумеруются арабскими цифрами с точкой. Название раздела пишется прописными буквами и располагается на листе симметрично по центру страницы. Переносы слов в заголовках разделов не допускаются. Подразделы (параграфы) должны иметь порядковую нумерацию в пределах каждого раздела. Номер подраздела состоит из номера раздела и номера подраздела, разделенных точкой. Заголовок подраздела пишется строчными буквами за исключением первой прописной. Он начинается с абзаца, а если занимает несколько строк, то вторая и последующая строки начинаются, как обычные строки текста. От текста заголовки подразделов отделяются интервалами.

Текст должен быть написан на одной стороне листа разборчивым почерком. Высота строчных букв должна быть не менее 2,5 мм. Расстояние между основаниями строк 6-8 мм. Для машинописного текста должен использоваться текстовый редактор Microsoft Word, шрифт Times New Roman, кегль 14,

междустрочный интервал полуторный. На листе оставляют поля: слева 25 мм, справа 10 мм, сверху и снизу по 15 мм.

Номер страницы ставится снизу или сверху листа в середине строки. Нумерация начинается с титульного листа (номер на титульном листе не ставится), листы с рисунками, таблицами и т.д. включаются в общую нумерацию.

Начинается пояснительная записка титульным листом, который оформляется на обложке курсового проекта. Образец оформления титульного листа приведен в приложении. После титульного листа на отдельном листе помещается содержание и дальше следует текст. Слово «Содержание» пишется прописными буквами в середине строки. В содержание включаются разделы, подразделы, список литературы, текстовые и графические приложения с указанием страниц.

Формулы пишутся в отдельных строках. Для набора математических формул в машинописном варианте рекомендуется использовать Microsoft Equation. Справа в той же строке в круглых скобках указывается номер формулы. Нумерация формул может быть сквозной или по разделам. В последнем случае номер должен состоять из двух чисел, разделенных точкой – номера раздела и порядкового номера формулы в этом разделе. В следующей строке после слова «где» дается пояснение входящих в формулу символов (столбцом по одному символу в строке). Ссылки на формулы делаются в тексте в круглых скобках (указывается номер формулы).

Рисунки, включенные в пояснительную записку, должны выполняться на отдельных листах тушью или с помощью программных компьютерных средств. Номер рисунка и название рисунка располагается под ним. Под рисунком помещаются также условные обозначения. Нумерация рисунков аналогична нумерации формул. Располагают рисунок на следующем листе после первого упоминания о нем. При ссылке на рисунок его номер указывается в круглых скобках. При повторных ссылках на рисунок перед номером ставится сокращенное слово «смотри», например, (см. рис. 3).

Таблицы должны состоять из вертикальных граф и горизонтальных строк. Диагональное деление головки таблицы не допускается. Заголовки граф указываются в единственном числе и начинаются с прописных букв. Подзаголовки, если они составляют одно предложение с заголовком, начинаются со строчных букв. Если подзаголовки имеют самостоятельное значение, они начинаются с прописных букв. Над таблицей помещается ее название, которое пишется строчными буквами, за исключением первой прописной, и располагается в строке симметрично. Над заголовком справа пишется слово «Таблица» и указывается ее номер. Нумерация таблиц производится так же, как рисунков. Ссылки на таблицы в тексте помещаются в круглых скобках, при этом слово «таблица» пишется без сокращения.

В конце пояснительной записки помещается список литературы, использованной при составлении курсового проекта. Заголовок его пишется прописными буквами и располагается в строке симметрично. В качестве примеров могут служить описания литературных источников, приведенных в списке литературы к учебному пособию.

Ссылка на соответствующий источник делается путем указания его порядкового номера в списке, помещенного в квадратные скобки, например, [2]. В списке литературы источники могут располагаться либо в алфавитном порядке, либо в порядке их упоминания в тексте.

Если в пояснительной записке имеются приложения, каждое из них начинается с нового листа. В правом верхнем углу первого листа пишется прописными буквами слово «ПРИЛОЖЕНИЕ» и указывается его номер арабскими цифрами (знак «№» не ставится). Ссылки на приложения даются в тексте в круглых скобках, например, (приложение 1). Помещаются приложения после списка литературы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровников Л. З., Орлов Л. И., Попов В. А. Полевая электроразведочная аппаратура: Справочник. – М.: Недра, 1986. – 223 с.
2. Инструкция по электроразведке. – Л.: Недра, 1984. – 352 с.
3. Матвеев Б. К. Электроразведка: Учеб. Для вузов. 2-е изд., перераб и доп. – М.: Недра, 1990. – 368 с.
4. Редозубов А. А. Электроразведка. Часть 1. Электроразведка постоянным током. Поляризационные методы электроразведки: Учебн. пособие. 2-е изд., стереотипное. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. – 328 с.
5. Редозубов А. А. Электроразведка. Часть 2. Электроразведка переменным током: Учебн. пособие. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008. – 188 с.
6. Редозубов А. А. Методические указания по курсовому проектированию по электроразведке для студентов специальности 25.00.10 «Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых». – Свердловск, 1991.
7. Редозубов А. А. Часть 2 Решение прямых задач электроразведки постоянным током. – Свердловск, 1991.
8. Серков В. А. Автоматизированная система моделирования электроразведки постоянным током: Методическое руководство для студентов 25.00.10 «Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых». – Свердловск: Изд-во Свердл. горн. ин-та, 1991. – 22 с.
9. Сысков С. С., Петряев В. Е., Шумаков М. С., Косарева Г. А. Интерпретация результатов метода вызванной поляризации: Учебное пособие к практическим занятиям по дисциплине «Электроразведка» для студентов профилизации «Геофизические методы поисков и разведки МПИ (РФ) направления 553200 – «Геология и разведка полезных ископаемых». – Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1996. – 36 с.
10. Сысков С. С., Петряев В. Е., Еловикова Н. Н. Решение прямой и обратной задачи для наклонного поляризующегося пласта: Учебное пособие к курсовому проектированию по дисциплине «Электроразведка» для студентов

профилизации «Геофизические методы поисков и разведки МПИ (РФ) направления 553200 – «Геология и разведка полезных ископаемых». – Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1999. – 25 с.

11. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (Петрофизика): Справочник геофизика/ Под ред. Б. Б. Дортман. – М.: Недра, 1984. – 455 с.

12. Электроразведка: Справочник геофизика. В двух книгах/Под ред. В. К. Хмелевского и В. М. Бондаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1989. – 438 и 378 с.

13. Якубовский Ю. В., Ренард И. В. Электроразведка: Учеб. для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1991. – 359 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»
Факультет геологии и геофизики
КАФЕДРА ГЕОФИЗИКИ

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

по дисциплине Электроразведка на тему:

Руководитель _____ доцент Петряев В.Е.
(должность, ФИО)

Выполнил студент _____
(группа, ФИО)

Екатеринбург- 2022 г.

Темы курсовых проектов по дисциплине «Электроразведка»

№№ п/п	Тема работы	Литературные источники для выполнения работы
1.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков медноколчеданного оруденения в районе Султановского месторождения (Челябинская область).	1. Столпнер М. Н. К методике поисков медноколчеданных месторождений в Зауралье // Геофизические методы при крупномасштабном прогнозировании сульфидных месторождений. Л.: Недра, 1970. 169 с. (с. 24-30). 2. Н.А. Сивов. Султановское колчеданное месторождение на Среднем Урале. В кн. Материалы по геологии и полезным ископаемым Урала. Вып.7. Свердловск, 1958. С. 160 -171.
2.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков колчеданного оруденения в районе Озерного месторождения (Южный Урал)	1. Шаповалов О. М. Применение метода вызванной поляризации на поисковом участке в Челябинской области // Применение метода вызванной поляризации при поисках рудных месторождений. М.: Недра, 1964. 146 с. (с. 26-42). 2. Медноколчеданные месторождения Урала: Геологическое строение / В. А. Прокин, Ф. П. Буслаев, М. И. Исмагилов и др. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. 241 с. (с. 58-64).
3.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков медистых песчаников на северном фланге месторождения Джартас-Пектас (Джезказганское рудное поле)	Журбицкий В. И., Котляров А. М., Маричев К. И. Месторождения медистых песчаников в Джезказганском районе // Геофизические поиски рудных месторождений / Под ред. В. А. Кличникова. Алма-Ата: Изд. КазВИРГ, 1970. 810 с. (с. 415-430).
4.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков полиметаллических месторождений в районе Карболихинского рудного поля на Рудном Алтае	Белаш В. А., Панасевич А. М. Применение метода вызванной поляризации на Рудном Алтае // Применение метода вызванной поляризации при поисках рудных месторождений. М.: Недра, 1964. 146 с. (с. 59-65).
5.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков полиметаллического оруденения в Центральном Каратау	Канев А. Т., Матвеев В. С., Шилов Л. И. и др. Свинцово-месторождения Каратау // Геофизические поиски рудных месторождений. М.: Недра, 1970. 810 с. (с. 430-440).
6.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью детальных поисков колчеданного оруденения на Аралчинской площади (Мугоджары)	Бачин А. П. и др. Медноколчеданные месторождения в Мугоджарах // Геофизические поиски рудных месторождений / Под ред. В. А. Кличникова. Алма-Ата: Изд. КазВИРГ, 1970. 810 с. (с. 415-430)
7.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков медно-порфировых месторождений в Алмалыкском районе (Узбекистан)	1. Геофизические поиски рудных месторождений / Под ред. В. А. Кличникова. Алма-Ата: Изд. КазВИРГ, 1970. 810 с. (с. 406-415). 2. Геофизические методы при крупномасштабном прогнозировании сульфидных месторождений. М.: Недра, 1970. С. 76-83.
8.	Геолого-методическая часть проекта работ методом вызванной поляризации с целью поисков колчеданного оруденения в районе Юбилейного месторождения (Башкирия)	Медноколчеданные месторождения Урала: Геологическое строение / В. А. Прокин, Ф. П. Буслаев, М. И. Исмагилов и др. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. 241 с. (с. 85-94).

9.	Геолого-методическая часть проекта работ методом переходных процессов с целью поисков колчеданного оруденения в районе Гайского месторождения (Южный Урал)	1. Медноколчеданные месторождения Урала: Геологическое строение/ Прокин В. А., Буслаев Ф. П., Исмагилов М. И. и др. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 120-131. 2. Медноколчеданные месторождения Урала: Геологические условия размещения / Прокин В. А., Нечеухин В. М., Сопко П. Ф. и др. Свердловск: УрО АН СССР, 1985. С. 163-167.
10.	Геолого-методическая часть проекта работ методом переходных процессов с целью поисков медноколчеданного оруденения на Шемурской площади (Северный Урал)	Прокин В. А., Буслаев Ф. П., Исмагилов М. И. и др. Медноколчеданные месторождения Урала: Геологическое строение. – Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 64-73.
11.	Геолого-методическая часть проекта работ методом переходных процессов с целью поисков медноколчеданного оруденения в районе Султановского месторождения (Челябинская область)	1. Столпнер М. Н. К методике поисков медноколчеданных месторождений в Зауралье / Геофизические методы при крупномасштабном прогнозировании сульфидных месторождений. – Л.: Недра, 1970. С. 24-30. 2. Н. А. Сивов. Султановское колчеданное месторождение на Среднем Урале. В кн. Материалы по геологии и полезным ископаемым Урала. Вып. 7. Свердловск, 1958. С. 160 -171.
12.	Геолого-методическая часть проекта работ методом переходных процессов с целью поисков колчеданного оруденения в районе Джусинского месторождения (Южный Урал)	1. Прокин В. А., Буслаев Ф. П., Исмагилов М. И. и др. Медноколчеданные месторождения Урала: Геологическое строение. – Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 207-214. 2. Якубовский Ю. В. Индуктивные методы электроразведки. Госгеолтехиздат. – М., 1963. С. 175 – 179.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ:
Заведующий кафедрой
геофизики
«1» сентября 2022 г.


проф. А.Г. Талалай

Редозубов А.А.,

Петряев В.Е.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

**для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки,
специализации №1 «Геофизические
методы поисков и разведки месторождений
полезных ископаемых»**

Екатеринбург, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	2
2. Постановка задачи.....	2
3.Порядок выполнения контрольной работы.....	6
4. Требования к оформлению.....	7
5. Список литературы.....	7
5. Приложение 1. Варианты индивидуальных заданий	8
6.Приложение 2. Титульный лист.....	9

1. Общие положения

Работа представляет собой самостоятельное расчетно-графическое задание, целью которого является изучение нормального электрического поля одного и двух точечных источников тока. Эти поля широко используются в электроразведке. Знание их необходимо при анализе результатов измерений потенциала или градиента потенциала и при выделении аномалий. Кроме того, вызываемые различными объектами аномалии часто можно представить, как комбинацию полей точечных источников, и на основе знания поля точечного источника можно без сложных расчетов получить представление об этих аномалиях.

При выполнении работы расчет графиков потенциала и напряженности поля предлагается выполнить для одного источника, а поле двух источников получить графическим способом с использованием теоремы суперпозиции. При расчете поля одного источника лучше пользоваться средствами Excel. Расчет и построение графиков для двух источников следует выполнить средствами Excel, чтобы освоить применение теоремы суперпозиции. При этом сохраняются все промежуточные построения. Средствами пакета Paint показать положение и знак источников тока. Расчеты сопроводить табличным материалом.

2. Постановка задачи

В однородном изотропном полупространстве с удельным сопротивлением ρ на глубине H расположен точечный источник A , с которого стекает

ток силой I . Начало координат располагается в точке A , оси X и Y ориентированы горизонтально, ось Z - вертикально вверх. Профиль располагается на поверхности земли и ориентирован параллельно оси X . Точка M , в которой определяется поле, перемещается по профилю в интервале $X_{нач} < X < X_{кон}$. Пример, поясняющий задание к контрольной работе приведен на Рис. 1.

**К расчету поля
точечного источника тока**

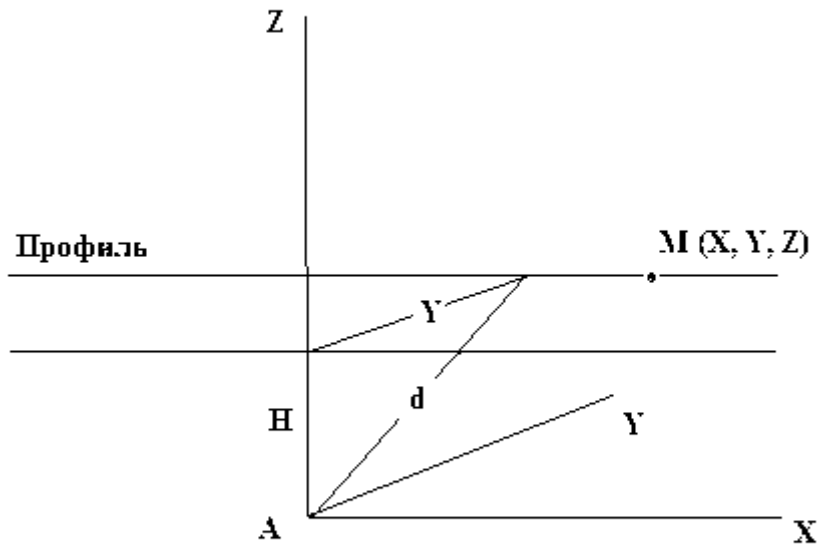


Рис. 1

Электрическое поле в точке M определяется уравнениями:

$$U = \rho I / (2\pi\sqrt{x^2 + y^2 + H^2}) \quad (1)$$

$$E_x = \rho I x / (2\pi(\sqrt{x^2 + y^2 + H^2})^3) \quad (2)$$

$$E_y = \rho I y / (2\pi(\sqrt{x^2 + y^2 + H^2})^3) \quad (3)$$

В приведенных формулах U – потенциал, E_x и E_y – компоненты напряженности поля по осям x и y соответственно.

Анализируя эти формулы нетрудно убедиться, что потенциал и составляющая поля E_y имеют экстремумы при $X_{extr} = 0$, а составляющая E_x при $X_{extr} = \sqrt{y^2 + H^2}$.

Результаты расчета поля точечного источника следует оформить в виде таблицы, пример которой приведен ниже.

Таблица 1

Результаты расчета поля точечного источникаУсловия расчета: $I =$; $\rho =$; $H =$; $y_1 =$; $y_2 =$.

x	y ₁			y ₂		
	U	E _x	E _y	U	E _x	E _y

Начальное и конечное значение x выбирают таким образом, чтобы длина половины профиля была не меньше удвоенного указанного в задании значения L (расстояния между источниками тока при расчете поля 2-х источников). Например: расстояние между источниками тока 1500 м. Значит длина профиля должна составлять не менее 6000 м. Такая длина профиля будет необходима при построении поля 2-х источников тока. Шаг выбирают таким, чтобы получить достаточную детальность графиков и в то же время не загромождать график.

Необходимо рассчитать координату экстремума аналитически, а затем подставив ее значение в формулу найти значение поля в этой точке. На графиках указать положение и знак источников тока, положение координаты X_{extr} и значение поля в этой точке.

Для нахождения поля двух источников следует применить теорему суперпозиции и воспользоваться результатами расчета поля одного источника. Если поле создается источниками А и В, то в любой точке выполняются уравнения:

$$U^{AB} = U^A + U^B \quad (4)$$

$$\vec{E}^{AB} = \vec{E}^A + \vec{E}^B \quad (5)$$

Векторное уравнение (5) переходит в обыкновенное, если вместо полной напряженности поля взять ее любую пространственную компоненту:

$$E_s^{AB} = E_s^A + E_s^B \quad (6)$$

Зная поле одного источника можно найти поле двух источников путем аналитического расчета или графически. Образец построения графика

напряженности поля двух точечных источников разного знака графическим способом приведен на рис 2.

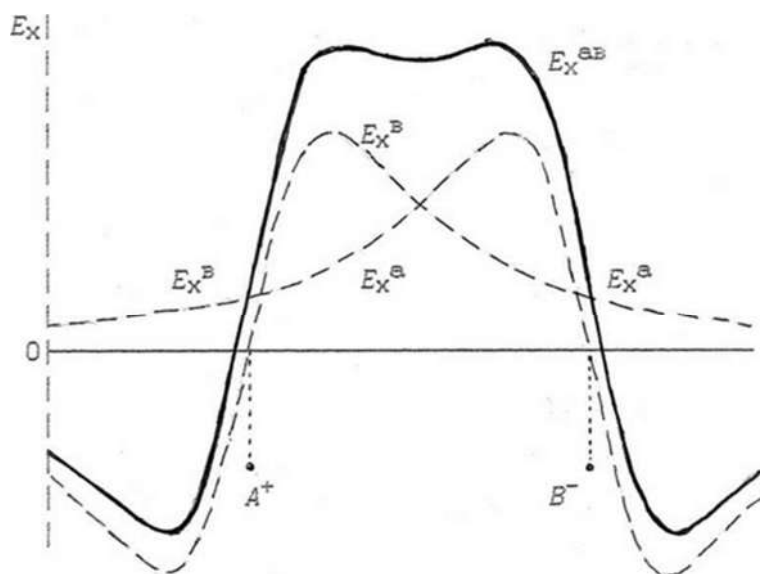


Рис. 2

В приведенном примере источники тока имеют разные знаки. Поэтому поле источника В имеет знак, противоположный по отношению к полю источника А при одинаковой форме и амплитуде графиков. Если источник В имеет ту же полярность, что и источник А, графики для обоих источников совершенно одинаковы, но смещены один относительно другого на расстояние $L = AB$.

Совершенно аналогично строятся графики потенциала для поля двух точечных источников одинакового или разного знака.

В качестве исходных данных студенту выдаются следующие характеристики - удельное электрическое сопротивление среды, глубина погружения источника тока А, расстояние между источниками одинакового или разного знака, характеристики удаления профиля от проекции источников по оси Y (Y_1 и Y_2). Все исходные данные заданы в системе СИ (Приложение 1).

3. Порядок выполнения контрольной работы

При выполнении контрольного задания студенту необходимо выполнить следующее.

1. Выполнить расчет поля точечного источника (U , E_x и E_y) при заданных значениях ρ , I , H по двум профилям, ориентированным параллельно оси X при заданных значениях Y. Результаты расчета представить в виде таблицы (значения U и E должны быть выражены в милливольтх).

2. Построить графики U , E_x и E_y по обоим профилям. Для каждого профиля все графики должны быть построены относительно общей оси расстояний X.

3. Пользуясь теоремой суперпозиции, построить графическим способом по обоим профилям графики U и E_x для поля двух точечных источников разного и одинакового знака при заданном расстоянии L между источниками. Мощности обоих источников принять одинаковыми.

4. Составить объяснительную записку, в которой описать порядок выполнения расчетов и построения графиков для одного и двух источников тока и дать подробный анализ полученных результатов. При анализе результатов надо описать форму всех графиков, указать положение экстремумов, точек перехода через нуль и других характерных особенностей.

4. Требования к оформлению контрольной работы

Текст должен быть написан на листах стандартного формата А4, шрифт Times New Roman, кегль 14. Графические материалы выполнены средствами Excel и доведены с помощью графического редактора Paint. Рисунки и таблицы должны быть аккуратно оформлены (в качестве образца можно использовать рисунки и таблицу, имеющиеся в задании). Текст, таблицы и графические материалы должны иметь титульный лист (см. Приложение 2).

5. Список литературы

1. Редозубов А. А. Электроразведка. Часть 1. Электроразведка постоянным током. Поляризационные методы электроразведки: Учебн. пособие. 2-е изд., стереотипное. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2007. – 328 с.
2. Матвеев Б. К. Электроразведка: Учеб. Для вузов. 2-е изд., перераб и доп. – М.: Недра, 1990. – 368 с.

Приложение 1

Варианты для выполнения контрольной работы

№ варианта	Ток I (А)	ρ (Ом м)	H (м)	Y_1 (м)	Y_2 (м)	L (м)
1	2	1500	500	0	2000	2000
2	1	4000	600	400	3200	3000
3	2	2000	450	200	2500	2000
4	2	1500	350	100	2000	1500
5	0,5	250	100	50	500	450
6	1	1500	500	50	2000	2000
7	2	2000	600	0	2500	2500
8	1,6	3500	450	400	3000	2800
9	0,3	400	100	100	600	600
10	3	2000	400	50	1700	1600
11	0,5	100	50	100	400	500
12	0,5	500	0	100	500	500
13	3	3000	500	350	2500	2800
14	1,5	600	300	100	1400	1400
15	1	500	200	0	1000	800
16	4	3000	600	200	3000	2800
17	2	500	400	0	1500	1500
18	3,2	1500	450	50	1800	1800
19	0,4	600	125	50	750	750
20	2,5	2500	500	300	2700	2500
21	1,5	2000	250	200	1500	1400

Министерство высшего образования
и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»
Факультет геологии и геофизики
Кафедра геофизики

Б1.Б.2.03 «Электроразведка»

КОНТРОЛЬНАЯ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ) РАБОТА

Выполнил: студент Иванов И.И.,
группа РФ-18

Руководитель: доц. Петряев В.Е.

Екатеринбург 2022 г.



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»**

А. А. Редозубов, Г. А. Косарева

ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Часть 1

*Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»*

**для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической
разведки специализации Геофизические методы поисков и
разведки месторождений полезных ископаемых (РФ)**

**Екатеринбург
2020**

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии


В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

А. А. Редозубов, Г. А. Косарева

Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической
разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки
месторождений полезных ископаемых (РФ)

Часть 1

Редозубов А.А., Косарева Г.А. Методическое руководство по выполнению индивидуальных заданий по курсу «Электроразведка» для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых (РФ). Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. 27 с.

Методическое руководство содержит необходимые указания по выполнению индивидуальных домашних заданий, соответствующих программе дисциплины «Электроразведка» для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых (РФ).

Рецензент: В. Е. Петряев, канд.геол.-мин.наук, доцент кафедры геофизики.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного университета.

© Редозубов А.А., Косарева Г.А.,
2020 © Уральский государственный
горный университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Задание 1. Преломление электрического поля на границе раздела.	3
2. Задание 2. Расчет коэффициента установки.	4
3. Задание 3. Приближенное построение графиков ρ_k электропрофилирования.	7
4. Задание 4. Определение типов многослойных кривых ВЭЗ. Определение суммарной продольной проводимости S и удельных сопротивлений верхнего и нижнего слоев.	17
5. Задание 5. Выбор источника тока и расчет питающих заземлений.	19
6. Литература.	26

Задание 1. Преломление электрического поля на границе раздела.

Закон преломления поля на контакте двух сред, различающихся по удельному сопротивлению, вытекает из граничных условий и имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (1.1)$$

где ρ_1 и ρ_2 – удельные сопротивления пород по разные стороны контакта;

α_1 и α_2 – углы, образованные векторами плотности тока (или напряженности поля) с нормалью к контакту в бесконечно близких точках в среде ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Так как изолинии потенциала ортогональны токовым и силовым линиям, для них закон преломления имеет такой же вид, если в формуле (1.1) в качестве углов α_1 и α_2 принимать углы, образованные изолинией потенциала с границей раздела (рис.1.1).

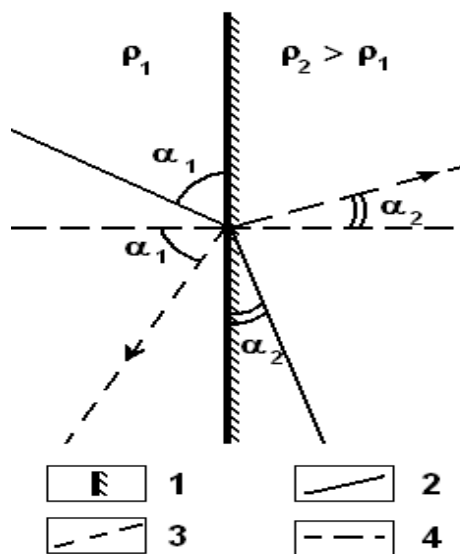


Рис.1.1 Преломление электрического поля на границе двух сред:

1 – граница раздела; 2 – изолинии потенциала; 3 – токовые (силовые) линии; 4 – нормаль к границе раздела.

3. Построить силовые (токовые) линии, проходящие через точки излома изолиний (по обе стороны контакта).

Литература по теме задания: /4/, сс.12-13; /5/, сс.10-11.

Задание

1. По фрагментам двух изолиний потенциала определить положение контакта двух пород разного сопротивления.

2. Определить соотношение удельных сопротивлений пород по разные стороны контакта: найти значения необходимых величин, написать формулу в общем виде, подставить в неё числовые значения и вычислить отношение сопротивлений (большого к меньшему).

Задание 2. Расчет коэффициента установки.

В методах сопротивлений эффективное (кажущееся) сопротивление среды определяется, как произведение нормированной по току в питающей линии разности потенциалов между приемными заземлениями $\Delta U/I$ на коэффициент установки K . Коэффициент K зависит от типа установки и её размеров. В однородной среде кажущееся сопротивление $\rho_k = K \frac{\Delta U}{I}$ равно истинному удельному сопротивлению ρ и от типа и размеров установки не зависит. В неоднородной среде ρ_k зависит от параметров установки и её положения относительно слагающих геоэлектрический разрез геологических тел.

В зависимости от взаимного расположения приемных заземлений M и N может измеряться разность потенциалов ΔU , потенциал U или напряженность поля E . Потенциал измеряется в тех случаях, когда приемное заземление N отнесено на большое расстояние, принимаемое за бесконечное. Напряженность поля может быть измерена, если расстояние между заземлениями M и N равно 1 метру (или другой единице длины при использовании иной системы измерений). Практически можно перейти от ΔU к E и при любом размере линии, если он достаточно мал по сравнению с расстоянием до питающих заземлений: $E = \Delta U/MN$. Таким образом, в зависимости от измеряемой в приемной линии величины, кажущееся сопротивление может быть вычислено по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned}\rho_k &= K \frac{\Delta U}{I} \\ \rho_k &= K \frac{U}{I} \\ \rho_k &= K \frac{E}{I}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Коэффициенты установок в этих случаях, естественно, будут разными.

Для вычисления коэффициента установки во всех случаях используется один и тот же принцип. Надо написать выражение для измеряемой в приемной

линии величины (ΔU , U или E) в однородной среде с удельным сопротивлением ρ . Затем решить полученное уравнение относительно ρ и выделить отношение измеряемой в приемной линии величины к току. Оставшееся после этого в уравнении для ρ выражение представляет собой формулу для вычисления K .

Не останавливаясь на простейших установках, рассмотренных в [4], когда все заземления расположены на одной прямой линии, рассмотрим расчет коэффициента установки для некоторых более сложных случаев.

а) Установка с погруженным питающим заземлением, измерения выполняется в вертикальной скважине (рис.2.1)

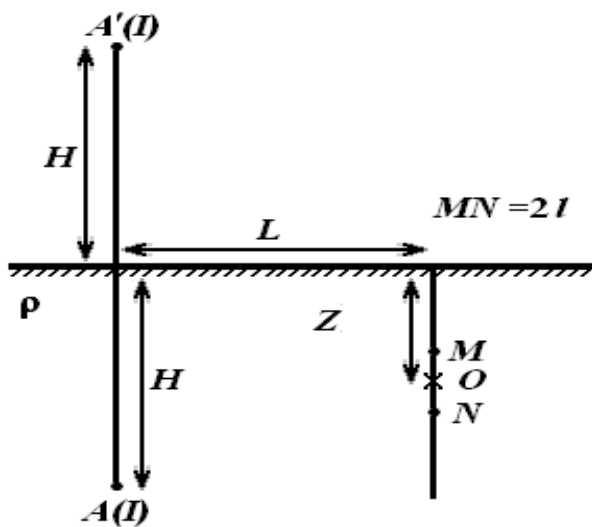


Рис. 2.1. Установка с погруженным питающим заземлением и приемной линией в соседней скважине

Так как и питающее заземление, и приемная линия находятся не на поверхности земли, для учета границы раздела «земля-воздух» в точке, являющейся зеркальным отражением действительного источника A , поместим фиктивный источник A' такой же мощности (см. рис.2.1). Теперь поле можно рассчитывать, как в безграничной среде при двух источниках A и A' .

Разность потенциалов между приемными заземлениями

$$\Delta U = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{A'M} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{A'N} \right) =$$

$$= \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + (H - Z + \ell)^2}} + \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H + Z - \ell)^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H - Z - \ell)^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H + Z + \ell)^2}} \right] \quad (2.2)$$

Решив уравнение (2.2) относительно ρ , получим:

$$\rho = \frac{4\pi}{\frac{1}{\sqrt{L^2 + (H - Z + \ell)^2}} + \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H + Z - \ell)^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H - Z - \ell)^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H + Z + \ell)^2}}} \times$$

$$\times \frac{\Delta U}{I} = K \frac{\Delta U}{I}. \quad (2.3)$$

Если требуется найти выражение коэффициента установки для вычисления ρ_k через напряженность поля E , надо написать уравнение потенциала U в центре линии MN (точка O)

$$U = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + (H - Z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{L^2 + (H + Z)^2}} \right]. \quad (2.4)$$

Продифференцировав выражение U по Z , найдем E_z :

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\rho I}{4\pi} \left\{ -\frac{H - Z}{[L^2 + (H - Z)^2]^{3/2}} + \frac{H + Z}{[L^2 + (H + Z)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (2.5)$$

Решив (2.5) относительно ρ , получим:

$$\rho = \frac{4\pi}{\frac{H + Z}{[L^2 + (H + Z)^2]^{3/2}} - \frac{H - Z}{[L^2 + (H - Z)^2]^{3/2}}} \cdot \frac{E}{I} = K \frac{E}{I} \quad (2.6)$$

не трудно видеть, что в этом случае коэффициент установки имеет размерность не «м», а «м²».

Чтобы получить выражение коэффициента установки для случая измерения потенциала, надо решить относительно ρ уравнение (2.4).

Если питающее заземление или приемная линия располагаются на поверхности земли, учет границы раздела «земля-воздух» производится путем удвоения потенциала, т.е. в выражении для U « 4π » заменяется на « 2π ».

б) Установка с двумя питающими заземлениями одного знака разной мощности (рис.2.2)

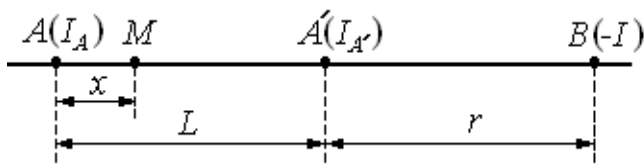


Рис. 2.2. Установка с двумя питающими заземлениями одного знака

Потенциал в точке M создается токами, стекающими с двух положительных источников A и A' и отрицательного заземления B . Сумма токов источников A и

A' равна току на заземлении B . Выражение для потенциала удобно записать, выразив токи, стекающие с заземлений A и A' через ток на заземлении B . В этом случае потенциал

$$U = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{I_A/I}{AM} + \frac{I_{A'}/I}{A'M} - \frac{1}{BM} \right) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{I_A/I}{x} + \frac{I_{A'}/I}{L-x} - \frac{1}{r+L-x} \right). \quad (2.7)$$

Решив уравнение относительно ρ , получим:

$$\rho = \frac{2\pi}{\frac{I_A/I}{x} + \frac{I_{A'}/I}{L-x} - \frac{1}{r+L-x}} \cdot \frac{U}{I} = K \frac{U}{I}. \quad (2.8)$$

Если кажущееся сопротивление вычисляется через разность потенциалов между приемными заземлениями M и N , надо написать выражение для потенциалов в точках M и N , взять их разность и, решив полученное уравнение относительно ρ , найти выражение для коэффициента установки, как это было сделано в предыдущем примере.

Если кажущееся сопротивление вычисляется через напряженность поля, надо продифференцировать выражение (2.7) по x и решить полученное уравнение относительно ρ . Отбросив в полученном решении отношение E/I , найдем выражение для коэффициента установки.

Задание

1. Вывести формулу коэффициента заданной установки в общем виде.

2. Подставить в формулу заданные числовые значения параметров установки и вычислить величину коэффициента установки. Указать размерность.

Литература по теме задания: /4/, сс.32-35; /5/, сс.32-35; /7/, сс.137-141; /2/, с.32; /3/, с.106.

Задание 3. Приближенное построение графиков ρ_k электропрофилирования.

Графики кажущегося сопротивления при профилировании через одиночные контакты и пласты имеют простую форму и их интерпретация обычно не вызывает затруднений. Если расстояние между такими элементами геоэлектрического разреза превышает размер установки, каждый из них

проявляется на графике, как отдельная аномалия, которая легко интерпретируется. Если же в пределах установки могут располагаться два или более элемента разреза, аномалии от них накладываются одна на другую и график ρ_k может стать достаточно сложным для интерпретации. В последнем случае можно использовать способ подбора. Но решение прямой задачи для нескольких близко расположенных границ раздела громоздко и реально осуществимо только с применением компьютера при наличии соответствующих программ. Поскольку интерпретация результатов электропрофилирования, как правило, качественная и сводится к определению положения контактов и оценке соотношения удельных сопротивлений, при решении прямой задачи можно ограничиться получением формы графиков, без точного количественного определения ρ_k . Для этого удобно воспользоваться способом приближенного построения графиков ρ_k , основанном на связи кажущегося сопротивления и плотности тока:

$$\rho_k = \rho_{MN} \frac{j_{MN}}{j_{0MN}}, \quad (3.1)$$

где ρ_{MN} – удельное сопротивление среды между приемными заземлениями;

j_{MN} – плотность тока между приемными заземлениями;

j_{0MN} – плотность тока между приемными заземлениями в однородной среде.

Принцип приближенного построения графиков ρ_k и его применение на примере одиночных пластов подробно рассмотрены в /4/, сс.104-117 и /5/, сс.77-87. Для иллюстрации его использования в более сложных случаях рассмотрим пример, когда на небольшом расстоянии один от другого располагаются два пласта, имеющие повышенное и пониженное сопротивление. Пусть плохо проводящий пласт имеет среднюю, т.е. несколько большую размера приемной линии мощность, а хорошо проводящий пласт маломощный, имеющий мощность, меньшую разноса MN (рис.3.1).

Графики ρ_k комбинированного и симметричного профилирования отдельно над каждым пластом, аналогичные приведенным на рис.3.17,а и 3.22,а

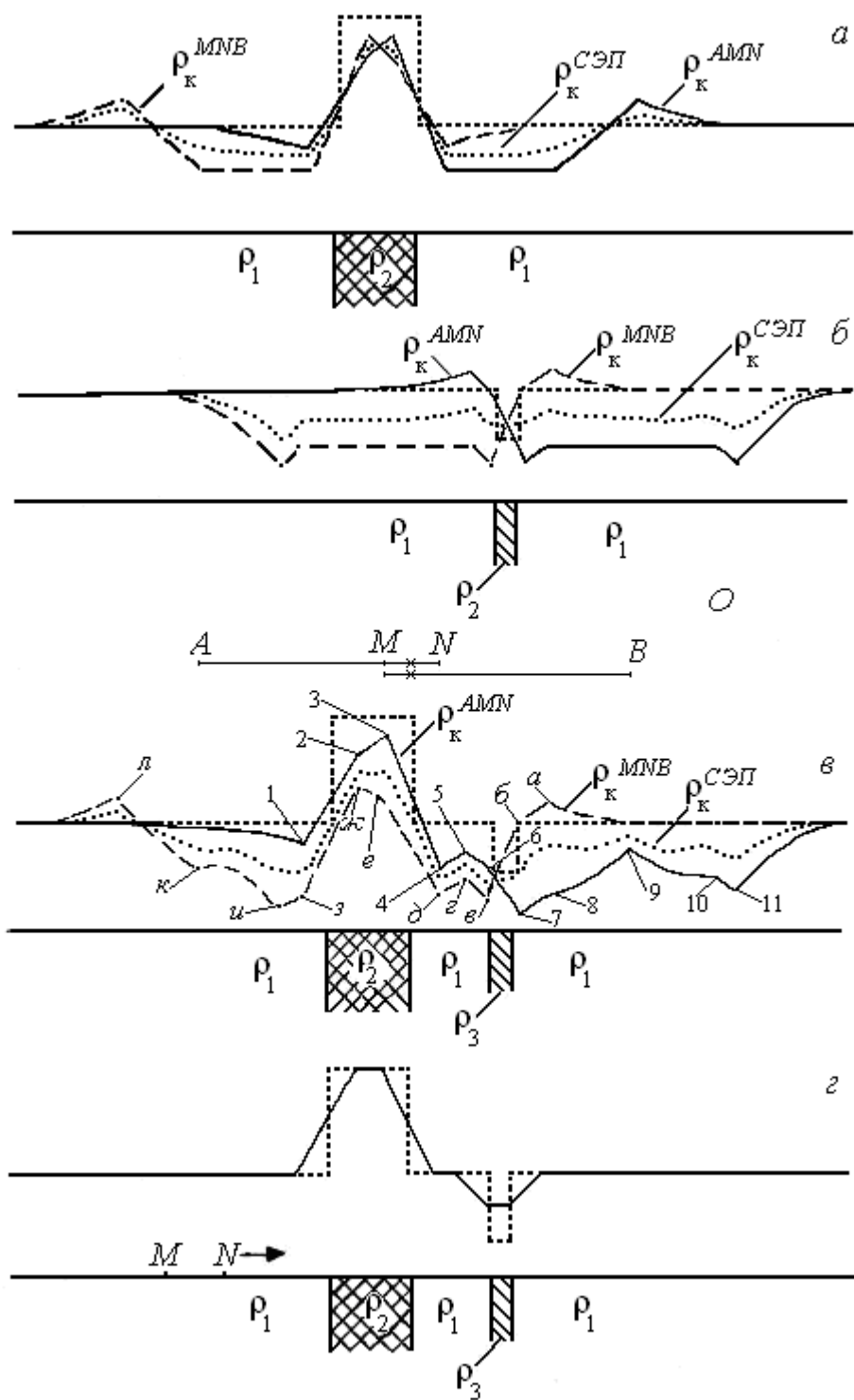


Рис. 3.1. Графики ρ_k электропрофилирования над вертикальным пластом: *а* – графики ρ_k комбинированного и симметричного профилирования над плохо проводящим пластом средней мощности; *б* – то же над хорошо проводящим пластом малой мощности; *в* – то же над сближенными плохо и хорошо проводящими пластами; *г* – график ρ_k срединного градиента над двумя пластами. Мелкими штрихами показаны графики истинных удельных сопротивлений

в /4/ и рис.2.15,а и 2.19,а в /5/, показаны на рис.3.1,а и 3.1,б. Графики ρ_k для случая, когда оба пласта расположены рядом, изображены на рис.3.1,в. Рассмотрим их построение. Пусть установка AMN передвигается слева направо. Пока расстояние до пластов достаточно велико, они не оказывают влияние на растекание тока в пределах установки и $j_{MN} = j_{0MN}$. Поэтому, в соответствии с (3.1), $\rho_k = \rho_{MN} = \rho_1$. По мере приближения к плохо проводящему пласту плотность тока на участке расположения приемной линии уменьшается, так как пласт препятствует растеканию тока. При этом j_{MN} становится меньше j_{0MN} и ρ_k меньше ρ_1 . Понижение ρ_k происходит до тех пор, пока передний приемный электрод N не встанет на контакт (точка 1).

При переходе приемной линии через левый контакт пласта ρ_{MN} быстро возрастает от ρ_1 до ρ_2 . При этом в силу граничного условия скачкообразного изменения j_{MN} не происходит (установка ориентирована вкrest контакта, поэтому величина j_{MN} определяется компонентой плотности тока, нормальной к контакту). Следовательно, поведение ρ_k на этом участке в основном определяется изменением ρ_{MN} . Когда контакт располагается между приемными электродами, кажущееся сопротивление растет, пока заземление M не встанет на контакт (точка 2).

Когда приемная линия перемещается внутри пласта, ρ_{MN} остается постоянным. Но по мере приближения к правому контакту пласта, т.е. к более проводящей среде за пластом, происходит некоторое увеличение j_{MN} и кажущееся сопротивление продолжает расти, достигая максимальной величины, когда электрод N находится на контакте (точка 3). Так как плотность тока внутри пласта меньше j_0 , ρ_k не достигает удельного сопротивления пласта ρ_2 .

При переходе приемной линии через правый контакт плохо проводящего пласта ρ_{MN} уменьшается от ρ_2 до ρ_1 . Кажущееся сопротивление при этом уменьшается, пока электрод M не встает на контакт (точка 4). Так как плотность тока за пластом меньше j_0 вследствие экранирующего действия пласта, ρ_k в этой точке меньше ρ_1 .

Если бы не было проводящего пласта, после перехода линии MN через пласт наблюдалась бы площадка равных сопротивлений, пока питающее заземление и приемная линия разделены пластом (см.рис.3.1,а). В рассматриваемом случае вследствие натекания тока в проводящий пласт j_{MN} растет и соответственно увеличивается ρ_k пока электрод N не встанет на левый контакт проводящего пласта (точка 5). Если бы не было экранирующего действия пласта высокого сопротивления ρ_k в этой точке было бы больше ρ_1 (см.рис.3.1б). В нашем случае кажущееся сопротивление имеет меньшую величину.

После перехода электрода N через левый контакт проводящего пласта по мере движения установки проходит уменьшение ρ_{MN} , так как между приемными заземлениями включается более проводящая среда. Но наименьшее значение ρ_{MN} , когда весь пласт располагается между приемными заземлениями (точка 6), остается больше, чем ρ_3 , так как пласт занимает только часть интервала MN . Поэтому кажущееся сопротивление в точке 6 имеет достаточно большую величину. Так как $MN/2$ больше мощности пласта, эта точка располагается левее пласта.

При дальнейшем перемещении установки, пока пласт располагается внутри приемной линии, ρ_{MN} не меняется. Но при этом между приемными заземлениями вместо участка вмещающей среды перед пластом, имеющего высокое сопротивление и высокую плотность тока, включается участок среды за пластом с тем же сопротивлением ρ_1 , но низкой плотностью тока из-за экранирующего действия пласта. Поэтому j_{MN} уменьшается и происходит быстрое уменьшение ρ_k до тех пор, пока электрод M не встанет на левый контакт проводящего пласта (точка 7).

По мере перемещения электрода M через проводящий пласт ρ_{MN} возрастает, достигая величины ρ_1 , когда электрод M стоит на правом контакте пласта. При этом происходит некоторый рост ρ_k (точка 8). Но из-за экранирующего действия пластов значение ρ_k в этом случае значительно ниже

уровня площадки равных сопротивлений для одиночного пласта (сравните с рис.3.1б).

При дальнейшем движении установки питающее заземление перемещается через плохо проводящий пласт и экранирующее действие пласта уменьшается. При этом увеличивается j_{MN} и кажущееся сопротивление растет, достигая максимальной величины, когда заземление A встает на правый контакт плохо проводящего пласта (точка 9). Происходит «обратное экранирование», пласт как бы отражает поле, увеличивая его интенсивность в правой части профиля. Но из-за экранирующего действия проводящего пласта ρ_k остается меньшим ρ_1 (сравните с рис. 3.1а).

По мере удаления электрода A от плохо проводящего пласта влияние последнего уменьшается и ρ_k постепенно понижается, выходя на нормальный уровень площадки равных сопротивлений для проводящего пласта. Площадка заканчивается, когда питающее заземление встает на левый контакт проводящего пласта (точка 10).

При переходе питающего заземления через проводящий пласт j_{MN} и, соответственно, ρ_k уменьшается, так как пласт как бы «отсасывает» ток от правой части профиля, где расположена линия MN . Минимальное значение ρ_k наблюдается, когда электрод A стоит на правом контакте проводящего пласта (точка 11). После этого, по мере удаления установки от пластов постепенно восстанавливается нормальное растекание тока и ρ_k выходит на уровень сопротивления вмещающей среды ρ_1 .

Теперь рассмотрим график ρ_k для встречной трехэлектродной установки такого же размера. Будем перемещать установку MNB справа налево (удобнее рассматривать поведение ρ_k , когда приемная линия располагается впереди по ходу движения установки). При приближении к проводящему пласту происходит натекание тока в пласт и j_{MN} увеличивается по сравнению с j_{OMN} . Это приводит к увеличению ρ_k , которое становится больше ρ_1 и достигает наибольшей величины, когда электрод M становится на контакт (точка a).

При перемещении заземления M по пласту часть интервала MN заполняется проводящей средой с удельным сопротивлением ρ_3 . Это приводит к уменьшению ρ_{MN} и кажущегося сопротивления, пока электрод M не встанет на левый контакт и весь пласт не окажется в пределах приемной линии (точка б).

Пока пласт находится внутри приемной линии, ρ_{MN} не меняется, но по мере перемещения установки вместо участка вмещающей среды справа от пласта с относительно высоким удельным сопротивлением и высокой плотностью тока включается участок слева от пласта с тем же удельным сопротивлением и низкой плотностью тока. Поэтому ρ_k понижается, достигая наименьшего значения, когда электрод N находится на правом контакте проводящего пласта (точка в).

По мере перемещения электрода N от правого контакта пласта к левому происходит увеличение ρ_{MN} и, соответственно, ρ_k до тех пор, пока заземление N не окажется на левом контакте пласта (точка г).

При дальнейшем перемещении установки в случае одиночного пласта наблюдалась бы площадка равных сопротивлений (см.рис.3.1,б). но так как в нашем случае есть еще плохо проводящий пласт, при приближении к нему плотность тока j_{MN} уменьшается и кажущееся сопротивление понижается, пока электрод M не достигнет правого контакта этого пласта (точка д).

При входе приемной линии в плохо проводящий пласт происходит увеличение ρ_{MN} от ρ_1 до ρ_2 и возрастание кажущегося сопротивления, пока приемная линия полностью не выйдет в пласт (точка е). При приближении к левому контакту пласта происходит увеличение плотности тока за счет натекания тока в более проводящую среду слева от пласта. При этом ρ_k растет, пока электрод M не встанет на левый контакт пласта (точка ж). когда приемная линия установки MNB располагается внутри плохо проводящего пласта, между ней и питающим заземлением находится проводящий пласт, служащий экраном. Поэтому над пластом ρ_k^{MNB} меньше, чем ρ_k^{AMN} .

При выходе приемной линии из плохо проводящего пласта ρ_{MN} уменьшается и, соответственно, понижается ρ_k , пока электрод N не достигает левого контакта пласта (точка $з$). в этом положении между приемной линией и питающим заземлением располагаются оба пласта. Поэтому ρ_k в точке $з$ значительно ниже уровня площадки равных сопротивлений для одиночного плохо проводящего пласта (сравните с рис.3.1,а).

При дальнейшем перемещении установки в нашем случае питающий электрод переходит через хорошо проводящий пласт. При этом наблюдается понижение ρ_k (экранный эффект). Наименьшего значения ρ_k достигает, когда питающий электрод B располагается на левом контакте проводящего пласта (точка $и$).

Далее, по мере удаления питающего заземления от проводящего пласта ρ_k растет и выходит на уровень площадки равных сопротивлений для одиночного плохо проводящего пласта. Площадка равных сопротивлений заканчивается, когда электрод B встает на правый контакт плохо проводящего пласта (точка $к$).

При переходе питающего заземления через плохо проводящий пласт j_{MN} , а с ней и ρ_k растут. После перехода электрода B через середину пласта ρ_k становится больше сопротивления вмещающей среды, достигая наибольшего значения, когда питающее заземление находится на левом контакте плохо проводящего пласта (точка $л$). При дальнейшем движении установки постепенно восстанавливается нормальное растекание тока и ρ_k выходит на уровень удельного сопротивления вмещающей среды.

Кажущееся сопротивление для симметричной установки находится, как среднее арифметическое из ρ_k , измеренных встречными трехэлектродными установками /4/, сс. 92-93, /5/, с.66.

$$\rho_k^{сЭП} = \frac{\rho_k^{AMN} + \rho_k^{MNB}}{2}. \quad (3.2)$$

Сравнивая графики ρ_k для одиночных пластов и двух сближенных таких же пластов можно видеть, как аномалии искажаются влиянием соседних объектов. В методе комбинированного профилирования графики ρ_k для

установок AMN и MNB над одиночным пластом высокого сопротивления (см.рис.3.1, *а*) и над таким же пластом в присутствии проводящего пласта (см.рис.3.1, *в*) по форме одинаковы. Но в случае двух пластов в приведенном примере пропадает обратное пересечение графиков. Это уменьшает надежность интерпретации, так как такой же характер (одновременное повышение ρ_k для обеих установок) имеет аномалия над приповерхностной плохо проводящей неоднородностью.

Над проводящим пластом в случае двух объектов прямое пересечение графиков сохраняется, но смещается в сторону пласта высокого сопротивления. Значение ρ_k^{AMN} между пластами сильно понижены по сравнению со случаем одного пласта (сравните с рис.3.1,*б*). В целом графики ρ_k в этой части профиля больше похожи на аномалию от контакта (см.рис.3.1, *в*).

Аномалия над плохо проводящим пластом в симметричном профилировании мало отличается от аномалии над одиночным пластом. В случае двух пластов только немного уменьшается ее интенсивность (см.рис.3.1, *в*). Над маломощным проводящим пластом аномалия в обоих случаях имеет весьма малую интенсивность (менее 20%). В реальных условиях аномалии такой интенсивности чаще всего выделить не удастся. Заметим, что в комбинированном профилировании над таким одиночным пластом аномалия очень отчетливая (см.рис.3.1, *б*).

Наименьшее искажение аномалий от соседних объектов наблюдается в методе срединного градиента. В этом случае, если разнос питающих электродов AB достаточно большой, в средней части установки поле можно полагать однородным. Если установка ориентирована вкрест простирания вертикальных границ раздела, при переходе через них изменения плотности тока не происходит и во всех точках профиля $j_{MN} = j_{OMN}$. Поэтому, согласно (3.1), $\rho_k = \rho_{MN}$, т.е кажущееся сопротивление равно удельному сопротивлению той среды, в которой располагается приемная линия. Если разные участки среды между приемными электродами различаются по удельному сопротивлению, величина ρ_{MN} находится, как среднее взвешенное значение. Например, пусть участок

длиной d имеет удельное сопротивление ρ_1 , а оставшаяся часть интервала MN - сопротивление ρ_2 . Тогда

$$\rho_{MN} = \frac{\rho_1 d + \rho_2 (MN - d)}{MN}. \quad (3.3)$$

График ρ_k срединного градиента для рассматриваемого геоэлектрического разреза приведен на рис.3.1,г. Как видно из рисунка, в методе срединного градиента аномалии имеют несколько большую интенсивность, чем в симметричном профилировании.

Рассмотренный способ приближенного построения графиков ρ_k можно применить и когда крутопадающие границы раздела перекрыты слоем рыхлых отложений. В этом случае характер графиков сохраняется, только они становятся более сглаженными, а интенсивность аномалий уменьшается.

Задание

1. Построить графики ρ_k для встречных трехэлектродных установок (комбинированного профилирования) над заданным геоэлектрическим разрезом с вертикальными границами раздела. Следите, чтобы положение характерных точек графиков соответствовало размерам вашей установки.

2. По графикам ρ_k для встречных трехэлектродных установок построить график ρ_k симметричного профилирования.

3. Построить график ρ_k срединного градиента.

4. Подробно опишите ход рассуждений, которыми Вы пользовались при построении графиков ρ_k . Опишите характерные признаки аномалий над имеющимися в вашем разрезе объектами. Укажите, как по графикам ρ_k определяется положение границ раздела.

Рекомендация по выполнению задания

Прежде чем приступить к построению графиков ρ_k на листе миллиметровки начертите геоэлектрический разрез. Над разрезом покажите график истинных удельных сопротивлений. На полоске бумаги нарисуйте в

масштабе вашу трехэлектродную установку, отметьте точку записи – центр приемной линии (рис.3.2) Перемещая схему установки вдоль разреза, анализируйте поведение ρ_k , точно отмечайте положение характерных точек графика, которые наблюдаются, когда какой-либо электрод располагается на границе раздела.

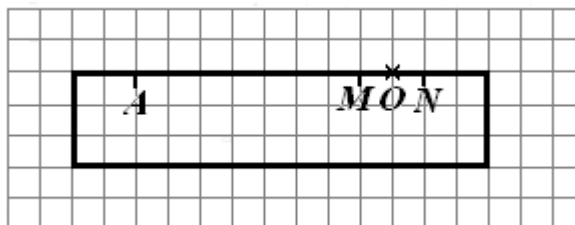


Рис.3.2. Шаблон для построения графика

Литература по теме задания: /4/, сс.92-93, сс.104-117; /5/, сс.66, сс.77-87.

Задание 4. Определение типов многослойных кривых ВЭЗ. Определение суммарной продольной проводимости S и удельных сопротивлений верхнего и нижнего слоев.

Кривые зондирования различаются по числу слоев в разрезах, которым они соответствуют. Различают двухслойные, трехслойные и многослойные (с числом слоев более трех) кривые. В случае необходимости количество слоев в многослойных разрезах конкретизируют и, соответственно, выделяют кривые четырехслойные, пятислойные и т.д.

Более детальная классификация производится по соотношению удельных сопротивлений слоев. Двухслойные кривые по этому признаку могут быть двух типов: кривые с восходящей ветвью ($\rho_2 > \rho_1$) и кривые с нисходящей ветвью ($\rho_2 < \rho_1$).

Трехслойные кривые могут быть четырех типов. Кривые с хорошо проводящим промежуточным слоем ($\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$) называются кривыми типа H . Эти кривые имеют минимум в средней части. Кривыми типа K называют кривые с максимумом, соответствующие разрезу с плохо проводящим

промежуточным слоем ($\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$). Кривые типа Q характеризуются постепенным уменьшением ρ_k по мере увеличения размера установки $AB/2$. От двухслойных кривых с нисходящей ветвью они отличаются наличием в средней части коленообразного уступа (не всегда четко выраженного). Такие кривые соответствуют разрезам, в которых каждый нижележащий слой имеет удельное сопротивление, меньшее, чем у вышележащего слоя ($\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$). В кривых типа A , напротив, ρ_k с увеличением $AB/2$ возрастает. Такие кривые соответствуют разрезам, в которых каждый нижележащий слой имеет более высокое удельное сопротивление ($\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$).

При определении типа многослойных кривых их рассматривают, как совокупность трехслойных кривых. Сначала выделяется участок кривой, соответствующий трем верхним слоям разреза и определяется его тип. Затем отбрасывается первый слой, добавляется участок кривой, соответствующий четвертому слою и определяется тип получившейся трехслойной кривой и т.д. если записать по порядку символы всех трехслойных кривых, получится название многослойной кривой. Число символов в шифре многослойной кривой на два меньше числа слоев в разрезе. Пример определения типа пятислойной кривой приведен на рис.4.1.

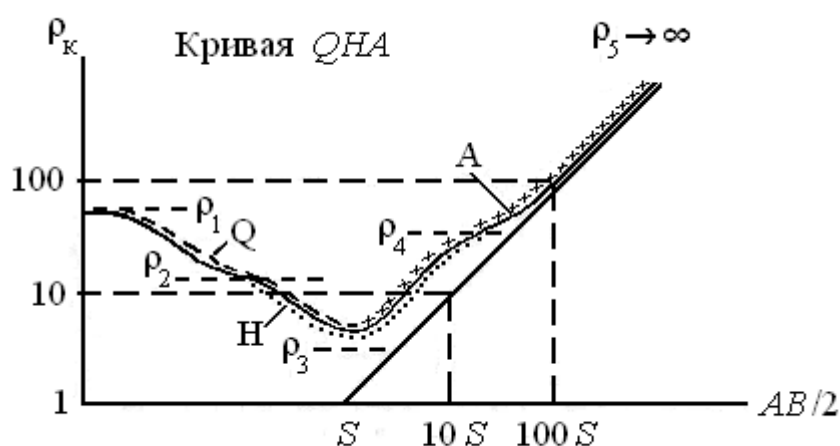


Рис. 4.1. Пример определения типа многослойной кривой

Удельное сопротивление верхнего слоя ρ_1 определяется по асимптоте к начальной части кривой. Аналогично определяется удельное сопротивление

самого нижнего слоя. Если это сопротивление много больше удельного сопротивления вышележащего слоя (в 50-100 раз и более), кривая выходит на асимптоту, наклонную к осям координат под углом 45° . В этом случае удельное сопротивление нижнего слоя полагают бесконечным. Удельное сопротивление промежуточных слоев определить нельзя, можно только дать их грубую оценку.

В случае бесконечного сопротивления нижнего слоя точка пересечения асимптоты с конечной частью кривой с осью $AB/2$ (при $\rho_k=1$) имеет координату $AB/2=S$, равную суммарной проводимости разреза (см.рис.4.1). Значение S можно определить по любой точке асимптоты. Например, при $\rho_k=10$ Ом·м $AB/2=10S$, при $\rho_k=100$ Ом·м $AB/2=100S$ (см.рис.4.1). Иными словами, взяв любую точку асимптоты, можно найти $S= AB/2 \rho_k$.

Задание

1. Определить тип каждой из заданных многослойных кривых.
2. Определить удельное сопротивление верхнего (ρ_1) и нижнего (ρ_N) слоев. Следует указывать конкретное значение N для вашего случая.
3. Для кривых, соответствующих разрезам с бесконечным удельным сопротивлением нижнего слоя, определить продольную проводимость S .

Литература по теме задания: /3/, сс.280-286; /4/, сс.125-126, 133-146; /6/, сс.120-124; /7/, сс.155-157.

Задание 5. Выбор источника тока и расчет питающих заземлений.

Целью работы является получение навыков оценки необходимых в заданных условиях параметров источника тока, выбора подходящего генератора или батарейного источника и расчета питающих заземлений.

В качестве исходных данных в задании указываются тип и размеры электроразведочной установки, ожидаемая величина кажущегося сопротивления, уровень помех U_n в мВ/км, характер почвы и её удельное

сопротивление ρ_n , предполагаемая глубина забивки электродов ℓ и их диаметр. Применительно к этим условиям предполагается определить минимальное значение силы тока I_{AB} в питающей линии, обеспечивающее уверенное измерение разности потенциалов ΔU на приемных электродах и выбрать тип источника тока. Затем следует определить максимально допустимое сопротивление питающей линии R_{AB} , выбрать подходящий тип провода, рассчитать сопротивление одного электрода. Если сопротивление линии с одним электродом на каждом заземлении превышает допустимое, надо определить, сколько электродов следует устанавливать на каждом заземлении. При этом указать, на каком расстоянии в заземлении будут располагаться электроды и при расчете сопротивления заземления учесть коэффициент использования заземлений η . При расчете сопротивления одного электрода следует учитывать коэффициент качества контакта электрода с почвой c .

1. Оценка необходимой силы тока и выбор его источника. Оценка допустимого сопротивления питающей линии.

В реальных условиях измеряемая на приемных электродах разность потенциалов складывается из полезного сигнала и сигнала-помехи. Чтобы обеспечивалась требуемая инструкцией по электроразведке точность измерений не хуже 5%, полезный сигнал ΔU должен превышать помеху U_n по крайней мере в 20 раз. Из этих сопротивлений и оценивается минимально необходимая сила тока в питающей линии:

$$\Delta U = \frac{I_{AB} \rho_k}{K} \geq 20 U_n, \quad (5.1)$$

$$I_{AB} \geq \frac{20 K U_n}{\rho_k}, \quad (5.2)$$

где K - коэффициент установки.

Под U_n подразумевается разность потенциалов, вызванная помехами, на интервале, равном разносу приемных электродов MN . Если помеха задана на интервале другой длины, надо пересчитать её на свой размер MN . Например,

пусть помеха составляет 10 мВ/км, а разнос MN 50 м, т.е. 0,05 км. Очевидно, в этом случае на приемных электродах будет наблюдаться

$$U_{\Pi}=10 \cdot 0,05=0,5 \text{ мВ.}$$

Предположим, что измерения выполняются симметричной установкой с размерами $AB=500$ м, $MN=50$ м. Ожидаемое кажущееся сопротивление порядка 400 Ом·м. Для этой установки $K=3886$ м. Необходимая сила тока

$$I_{AB} \geq \frac{20 \cdot 3886 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{400} = 0,097 \text{ А} = 97 \text{ мА.}$$

В данном примере необходимая сила тока имеет небольшую величину и в качестве источника тока можно использовать аппаратуру, имеющую маломощный генератор или батарею гальванических элементов. Рассмотрим оба варианта.

Вариант 1. Допустим, мы выбрали аппаратуру ЭРА-В-ЗНАК. Генератор этой аппаратуры имеет максимальную мощность $P=40$ ВА (эта аппаратура переменного тока, поэтому мощность измеряется не в Вт, а в ВА). Максимальное напряжение генератора 500 В. Но надо проверить, какое напряжение возможно получить при нашей силе тока:

$$U_{\text{макс}} = \frac{P_{\text{макс}}}{I} = \frac{40}{0,097} = 412 \text{ В.}$$

Таким образом, следует ориентироваться на напряжение генератора не более 412 В. Максимально допустимое сопротивление питающей линии

$$R_{AB\text{макс}} = \frac{U}{I} = \frac{412}{0,097} = 4247 \text{ Ом.}$$

Вариант 2. Мы решили выполнять работу на постоянном токе и использовать батарейный источник питания. Входящий в комплект аппаратуры ЭРА-П источник тока может дать максимальный ток 20 мА. Следовательно, он не подходит и придется работать с посторонним источником тока. Специальные электроразведочные батареи ГРМЦ в настоящее время не выпускаются. Поэтому придется монтировать батарею из находящихся в производстве гальванических элементов. Имеющие широкое распространение элементы 3336 (это квадратные фонарные элементы, которые правильнее было

бы назвать батареями, так как они состоят из 3 элементов) имеют рабочее напряжение 3,7В и позволяют получить ток силой до 350мА, что нас устраивает. Соберем батарею из 20 последовательно включенных элементов. Напряжение такой батареи будет 74 В. Сопротивление питающей линии в этом случае

$$R_{AB \text{ iàen}} = \frac{U}{I} = \frac{74}{0,097} = 763 \text{ Ом.}$$

Батарея будет иметь массу без упаковочного ящика 3 кг (вес одного элемента 150 г). Емкость выбранных нами элементов 0,5А·час. При нашем токе около 0,1А емкости батареи хватит на 5 часов непрерывной работы. Так как измерения на постоянном токе выполняются при кратковременных включениях тока в питающей линии, емкости батареи хватит для работы в течение нескольких недель. Если на некоторых участках сопротивление питающей линии будет уменьшаться и ток будет значительно увеличиваться, для экономии батарей следует уменьшить напряжение. Для этого целесообразно сделать у батареи секционированные выводы.

2. Расчет заземлений

Пусть заземления делаются в щебенистой песчано-глинистой почве с удельным сопротивлением $\rho_{\text{п}} = 90 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Из-за щебенки качество контакта электрода с почвой не очень хорошее и коэффициент качества контакта c примем равным 4. Electroды предполагается забивать на глубину $\ell = 25 \text{ см}$. Диаметр электродов 2 см (радиус $a = 1 \text{ см}$). Тогда сопротивление одного электрода

$$R_{\text{э}} = 0,367 \cdot c \cdot \frac{\rho_{\text{п}}}{\ell} \lg \frac{2\ell}{a} = 0,367 \cdot 4 \cdot \frac{90}{0,25} \lg \frac{0,5}{0,01} = 898 \text{ Ом.}$$

Питающая линия состоит из двух заземлений и соединительного провода. В нашем случае, когда длина питающей линии невелика и сила тока тоже небольшая целесообразно взять легкий провод. Несмотря на его достаточно большое сопротивление, при малой длине и малой силе тока потеря

напряжения в проводе будет небольшой. Возьмем провод ГПСМПО с сопротивлением 50 Ом/км. При длине питающей линии $AB=500$ м сопротивление провода $R_{пр}=25$ Ом. Если каждое питающее заземление сделать из одного электрода, сопротивление питающей линии

$$R_{AB} = 2R_{э} + R_{пр} = 2 \cdot 898 + 25 = 1821 \text{ Ом.}$$

В рассмотренном выше *первом варианте* допустимое сопротивление питающей линии было 4247 Ом. Следовательно, при работе с аппаратурой ЭРА-В-ЗНАК достаточно каждое питающее заземление делать из одного электрода.

Во *втором варианте*, при работе с батарейным источником тока, сопротивление питающей линии по нашим расчетам должно быть не больше 763 Ом. В этом случае для уменьшения сопротивления линии заземления будем устраивать из нескольких электродов каждое. Рассчитаем допустимое сопротивление одного заземления:

$$R_{\text{з.з.}} \leq \frac{R_{AB} - R_{пр}}{2} = \frac{763 - 25}{2} = 369 \text{ Ом}$$

Когда в заземлении несколько электродов, они оказывают взаимное влияние и их эффективное сопротивление увеличивается тем больше, чем меньше расстояние d между электродами. Эффективное сопротивление каждого электрода в системе заземления

$$R_{э \text{ эф.}} = \frac{R_{э}}{\eta}, \quad (5.3)$$

где $\eta = \frac{d}{d + \ell}$ -коэффициент использования заземления.

Будем располагать электроды на расстоянии 4ℓ один от другого, т.е. в нашем случае на расстоянии 1 м. Тогда коэффициент использования заземления

$$\eta = \frac{1}{1 + 0,25} = 0,8$$

Эффективное сопротивление одного электрода в системе заземления

$$R_{э \text{ эф.}} = \frac{R_{э}}{\eta} = \frac{898}{0,8} = 1122 \text{ Ом.}$$

Тогда количество электродов в одном заземлении

$$n = \frac{R_{\text{эф.}}}{R_{\text{аз.}}} = \frac{1122}{369} = 3,04. \quad (5.4)$$

Округлив это число, можно принять количество электродов в каждом заземлении равным 3.

Дополнение 1

Примерное значение коэффициента качества контакта электрода со средой для различных типов почв:

Болотистая почва $c=1,5$

Почва песчано-глинистая или песчаная влажная $c=2$

Почва песчано-глинистая сухая $c=3$

Почва песчаная сухая $c=4$

Почва песчано-глинистая со щебенкой $c=4$

Почва щебенистая $c=5$

Дополнение 2

Формула для коэффициента дипольной экваториальной установки достаточно громоздка. Поэтому часто при расчете коэффициента установки пользуются выражением для напряженности поля идеального диполя, а затем вводят “поправку за недипольность”.

Если расстояние между центрами диполей в экваториальной установке r ,

$$E = E_{\theta} = \frac{I\rho \cdot AB}{2\pi r^3}. \quad (5.5)$$

При конечном размере приемного диполя, если полагать поле на интервале MN однородным,

$$\Delta U = \frac{I\rho \cdot AB}{2\pi r^3} \cdot MN. \quad (5.6)$$

Решив это уравнение относительно ρ , найдем коэффициент установки:

$$\rho = \frac{\Delta U}{I} \cdot \frac{2\pi r^3}{AB \cdot MN}, \quad (5.7)$$

$$K = \frac{2\pi r^3}{AB \cdot MN}. \quad (5.8)$$

Чтобы учесть конечный размер диполей (“недипольность”) надо умножить это выражение для K на поправочный множитель. Номограмма для определения поправки за недипольность приведена в Инструкции по электроразведке /2/.

Если $AB < 0,5r$ и $MN < 0,2r$, поправочный множитель отличается от единицы не более, чем на 10-11 процентов. При определении необходимой силы тока наши расчеты носят оценочный характер. Поэтому поправку за недипольность можно не вводить.

Задание

1. Оценить необходимую в заданных условиях силу тока в питающей линии.
2. Выбрать подходящий источник тока. Оценить максимально допустимое сопротивление питающей линии.
3. Выполнить расчет заземлений. Определить необходимое количество электродов на питающих заземлениях.
4. Выбрать подходящий тип провода.

Литература по теме задания: /1/; /4/, сс.49-58, 68; /6/, сс. 80-82, 84-89, 93-94; /7/, сс.103-105, 133-135; /8/.

Литература

1. Бобровников Л.З., Орлов Л.И., Попов В.А. Полевая электроразведочная аппаратура: Справочник. - М.: Недра, 1986. – 223 с.
2. Инструкция по электроразведке: Наземная электроразведка, скважинная электроразведка, шахтно-рудничная электроразведка, аэроэлектроразведка, морская электроразведка / М-во геологии СССР. – Л.: Недра, 1984. – 352 с.
3. Матвеев Б.К. Электроразведка: Учеб. для вузов. – 2-е изд. Перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 352 с.
4. Редозубов А.А. Электроразведка. Часть 1. Электроразведка постоянным током. Поляризациянные методы электроразведки: Учебное пособие. - Екатеринбург: УГГГА, 2004. – 327 с.
5. Редозубов А.А. Конспект лекций по электроразведке. Часть 1. Нормальные электрические поля. Электроразведка крутослоистых сред. - Екатеринбург: УГГГА, 1994. – 100 с.
6. Электроразведка: Справочник геофизика. В двух книгах/Под ред. В.К.Хмелевского и В.М.Бондаренко. Книга первая. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1989. 438 с.
7. Якубовский Ю.В., Ренард И.В. Электроразведка: Учебн. для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1991. – 359 с.
8. Электроразведочная аппаратура – стенд в лаборатории электроразведки.

Авенир Александрович Редозубов
Косарева Гульшат Ахметовна

Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки
специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений
полезных ископаемых (РФ)
Часть I

Корректурa кафедры геофизики

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60x84 1/16. Печать на ризографе.
Печ.л.____ Уч.-изд.л.____ Тираж _____ экз. Заказ №

издательство УГГУ
620144, г.Екатеринбург, ул.Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

А. А. Редозубов, Г. А. Косарева

ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Часть 2

Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности 21.05.03 Технологии
геологической разведки
специализации Геофизические методы поисков и
разведки месторождений полезных ископаемых (РФ)

Екатеринбург
2020

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

А. А. Редозубов, Г. А. Косарева

ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Часть 2

Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической
разведки
специализации Геофизические методы поисков и разведки
месторождений полезных ископаемых (РФ)

Рецензент: *В. Е. Петряев*, канд. геол.-мин. наук, доцент
кафедры геофизики УГГУ

Методическое руководство рассмотрено на заседании кафедры и рекомендовано к изданию в УГГУ.

Редозубов А. А., Косарева Г. А.

Р33 ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА. Часть 2: методическое руководство по выполнению индивидуальных заданий курса «Электроразведка» для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых (РФ). *А. А. Редозубов, Косарева Г. А.* Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. – 13 с.

Методическое руководство содержит необходимые указания по выполнению индивидуальных домашних заданий, соответствующих программе дисциплины «Электроразведка» для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых (РФ).

Задание 1. Оценка интенсивности аномалий естественного поля фильтрационной природы

Для двух трехслойных разрезов I и II с плохо проводящим основанием заданы мощности h_1 и h_2 и удельные сопротивления ρ_1 и ρ_2 двух верхних слоев. По промежуточному слою происходит фильтрация подземных вод. Длина участка фильтрации L . Разность потенциалов между его началом и концом в обоих случаях одинакова. В каком случае аномалия естественного поля будет больше? Объясните, почему (сделайте необходимые расчеты).

Воспользовавшись формулой (6.2) в [2], оцените напряженность поля на поверхности земли, полагая длину участка фильтрации равной 1000 м, а разность потенциалов между его началом и концом (внутри слоя) равной 500 мВ. Оцените разность потенциалов, измеряемую в приемной линии MN длиной 50 м. Оцените разность потенциалов между началом и концом участка фильтрации на поверхности земли и сравните её с разностью потенциалов в фильтрующем слое.

Таблица 1

Варианты задания 1

Номер варианта	Разрез I				Разрез II			
	h_1	h_2	ρ_1	Ошибка! Ошибка связи. ₂	h_1	h_2	ρ_1	Ошибка! Ошибка связи. ₂
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	15	120	45	10	10	10	30
2	15	10	30	5	15	15	5	30
3	20	10	5	20	10	25	50	5
4	10	10	50	5	20	15	10	15
5	12	12	3	12	12	12	12	3
6	6	10	30	5	8	8	4	16
7	8	8	40	10	8	10	12	10
8	5	10	40	5	10	10	5	20
9	25	10	15	20	25	10	100	10
10	20	5	15	15	20	5	15	5

Продолжение табл.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	9	20	18	10	9	20	4,5	10
12	20	20	40	10	20	15	10	10
13	20	10	10	10	20	10	60	10
14	14	5	7	6	14	5	70	6
15	10	10	100	5	10	10	10	5
16	20	10	10	20	20	10	80	20
17	20	20	100	5	20	20	10	5
18	5	30	25	5	15	30	7,5	30
19	20	12	10	12	20	12	120	12
20	15	15	5	15	15	15	75	15
21	15	20	75	10	15	20	15	10
22	14	5	10	20	14	15	10	5
23	12	12	60	10	12	12	5	10
24	18	10	6	10	18	10	90	10
25	7	14	35	7	7	14	35	35
26	20	5	10	10	20	5	100	10
27	20	20	160	10	20	20	10	10
28	10	10	80	10	10	10	5	10
29	18	4,5	9	9	18	4,5	45	9
30	16	16	80	8	16	16	8	8
31	26	5	13	5	26	5	52	5
32	30	7	15	7	30	7	90	7
33	25	10	5	5	25	10	50	5
34	5	10	25	5	5	10	15	15
35	17	5	8,5	5	17	5	34	5
36	11	9	44	6	11	9	5,5	6
37	21	6	10,5	6	21	6	42	6
38	6	8	24	12	6	8	9	12
39	15	10	45	5	15	10	10	5
40	20	8	15	8	20	8	200	8
41	7	10	21	5	7	10	21	15
42	28	30	14	6	28	30	3,5	6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	28	16	7	16	28	16	112	16
44	9	17	90	8,5	9	17	9	8,5
45	17	15	68	5	17	15	8,5	5

Необходимую для выполнения задания информацию смотрите в [2] с. 225 - 228, или [1] с. 41 - 42, или [3] с. 45 - 46.

Задание 2. Расчет и сопоставление интенсивности аномалий η_k над изометричными объектами при поверхностной и объемной поляризации

Рассчитать графики над объектами, имеющими форму шара, в случае поверхностной и объемной поляризации. В обоих случаях объекты имеют одинаковые размеры и залегают на одинаковой глубине. Для расчета $\eta_{ка}$ можно использовать формулы (6.35) и (6.41) в [2]. В случае поверхностной поляризации удельное сопротивление объекта можно принять равным нулю, так как для массивных руд оно измеряется долями Ом·метра. Чтобы рассчитать аномалию от объемно-поляризующегося объекта, предварительно определите его поляризуемость по формуле (6.38) в [2]. Расчеты выполните для профиля, проходящего над центром объекта. Длину профиля выберите такой, чтобы на графике были экстремумы противоположного знака по обе стороны объекта. Рассчитывать следует аномальные значения $\eta_{ка}$, а затем прибавить к ним поляризуемость вмещающей среды $\eta_1=2\%$. Сравните интенсивности аномалий для случаев поверхностной и объемной поляризации и объясните полученное их соотношение. Кроме графиков η_k постройте график $\rho_k(E)$. Для вычислений можно воспользоваться формулой (5.17) в [2] или формулой (6.32), положив в последней $\lambda=0$.

При выполнении расчетов во всех случаях необходимо учесть границу раздела «земля – воздух» (некоторые формулы в литературе приведены для безграничной среды). Опишите вид всех графиков.

Таблица 2

Варианты задания 2

Номер вар.	a , м	h , м	ρ_1 , Ом·м	ρ_2 , Ом·м	v , %	λ , м	Номер вар.	a , м	h , м	ρ_1 , Ом·м	ρ_2 , Ом·м	v , %	λ , м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	100	160	200	60	12	0,3	24	100	160	400	200	12	0,3
2	50	75	100	25	15	0,25	25	90	135	300	90	10	0,2
3	75	150	150	60	10	0,2	26	70	105	200	80	9	0,25
4	100	170	300	100	7	0,15	27	60	120	250	75	10	0,2
5	80	120	250	50	20	0,4	28	80	120	150	60	14	0,3
6	70	110	120	30	16	0,35	29	50	100	100	35	12	0,25
7	90	145	200	65	9	0,1	30	75	150	200	60	13	0,2
8	60	90	140	56	8	0,2	31	90	155	300	75	17	0,3
9	55	90	180	65	6	0,25	32	80	135	250	75	16	0,25
10	110	180	200	60	11	0,15	33	70	120	400	100	15	0,2
11	100	175	100	20	13	0,3	34	60	90	120	40	11	0,15
12	80	145	160	48	12	0,25	35	50	100	100	35	14	0,25
13	75	150	300	75	18	0,35	36	100	150	400	160	12	0,2
14	100	150	400	80	16	0,25	37	80	130	350	140	10	0,2
15	70	120	350	175	20	0,2	38	90	155	300	90	12	0,25
16	80	130	500	250	10	0,1	39	70	120	200	80	13	0,3
17	60	90	250	75	12	0,25	40	60	95	150	60	15	0,25
18	90	180	400	120	14	0,3	41	50	75	100	35	14	0,2
19	100	165	200	80	12	0,2	42	80	145	180	60	13	0,25
20	50	80	250	50	10	0,15	43	75	135	300	120	18	0,3
21	60	100	300	120	9	0,2	44	90	145	250	100	16	0,2
22	70	140	200	80	12	0,25	45	100	165	300	120	15	0,15
23	80	135	100	35	20	0,35	46	50	90	200	80	14	0,2

Примечание. a - радиус объекта; h - глубина центра объекта; ρ_1 - удельное сопротивление вмещающей среды; ρ_2 - удельное сопротивление объекта; v - содержание рудной вкрапленности в объекте; λ - коэффициент поверхностной поляризации объекта.

Необходимую для выполнения задания информацию смотрите в [2], с. 245 - 251; с. 182; с. 185 - 186.

Задание 3. Расчет кажущегося сопротивления на поверхности анизотропной среды

Заданы продольное ρ_t и поперечное ρ_n удельные сопротивления анизотропной среды и угол падения слоистости α . Требуется определить продольное ρ_{kt} и поперечное ρ_{kn} кажущиеся сопротивления и кажущийся коэффициент анизотропии λ_k . Сравните полученные результаты со значениями этих параметров при вертикальном падении слоистости ($\alpha = 90^\circ$). Сравните отношения ρ_{kt}/ρ_{kn} с отношением ρ_t/ρ_n . Объясните причину различия этих отношений.

Рассчитайте значения кажущегося сопротивления при ориентировке установки под углом 30° и 60° к простиранию слоистости. Постройте полярную диаграмму ρ_k . Рассчитайте отношение осей изолинии потенциала точечного источника. Как соотносятся форма полярной диаграммы ρ_k и форма изолинии потенциала точечного источника?

Таблица 3

Варианты задания 3

Номер вар.	ρ_t Ом·м	ρ_n Ом·м	α град.	Номер вар.	ρ_t Ом·м	ρ_n Ом·м	α град.
1	2	3	4	5	6	7	8
1	100	200	65	24	500	2500	35
2	300	500	50	25	75	750	30
3	200	800	70	26	120	500	65
4	50	300	45	27	220	880	70
5	150	1500	30	28	200	1000	60
6	500	2000	60	29	180	900	50
7	250	1250	50	30	250	2500	45
8	700	2100	75	31	50	250	35
9	80	400	40	32	65	400	75
10	120	600	55	33	80	600	40
11	75	450	45	34	90	400	50
12	30	300	25	35	170	850	55

1	2	3	4	5	6	7	8
13	60	540	35	36	220	660	70
14	100	500	40	37	500	1500	65
15	200	1200	50	38	350	1000	60
16	90	720	45	39	40	200	45
17	400	2000	60	40	60	360	50
18	350	3500	70	41	200	1800	30
19	600	3000	65	42	250	1500	40
20	100	300	60	43	800	2400	70
21	160	800	55	44	70	500	45
22	240	2400	40	45	110	900	30
23	400	2500	35				

Необходимую для выполнения задания информацию смотрите в [2], с. 292 - 293 и с. 288 - 289 или в [1], с. 177- 178.

Задание 4. Оценка влияния анизотропии на результаты ВЭЗ

Предлагается три типа задания. В первом и третьем типах по результатам интерпретации кривых ВЭЗ и данным об анизотропии горных пород необходимо определить истинные мощности слоев. Во втором типе задания предлагается определить значения коэффициентов анизотропии слоев по результатам интерпретации кривых ВЭЗ и данным бурения.

1-й тип

По заданным мощностям h_1 и h_2 двух верхних слоев трехслойного разреза, определенным при интерпретации ВЭЗ ($h_{ВЭЗ}$), и коэффициентам анизотропии λ_1 и λ_2 определить истинные мощности этих слоев. Построить колонки по данным интерпретации ВЭЗ и по исправленным за влияние анизотропии значениям мощности.

2-й тип

По заданным мощностям двух верхних слоев трехслойного разреза, определенным при интерпретации ВЭЗ ($h_{ВЭЗ}$) и истинным мощностям слоев ($h_{ист.}$), полученным по данным бурения, определить коэффициенты анизотропии слоев. Построить колонки для истинных мощностей слоев и мощностей, определенных по ВЭЗ.

3-й тип

По заданным мощностям двух верхних слоев трехслойного разреза с крутым падением сланцеватости, определенным при интерпретации ВЭЗ ($h_{ВЭЗ}$) и кажущемуся коэффициенту анизотропии λ_k определить истинные мощности слоев. Коэффициенты анизотропии всех слоев и углы падения полагать одинаковыми. Построить колонки для истинных мощностей слоев и мощностей, определенных по ВЭЗ.

Таблица 4

Варианты 1-го типа задания 4

Номер вар.	h_1 ВЭЗ	h_2 ВЭЗ	λ_1	λ_2	Номер вар.	h_1 ВЭЗ	h_2 ВЭЗ	λ_1	λ_2
1	25	110	1,3	1,7	25	130	400	1,6	2,3
4	60	300	1,25	1,9	28	90	450	1,3	1,7
7	100	500	1,5	2,0	31	120	500	1,4	1,8
10	150	600	1,4	1,6	34	60	250	1,5	2,5
13	50	250	1,5	2,5	37	100	700	1,8	1,4
16	120	350	1,8	1,3	40	140	800	1,45	1,7
19	80	200	1,3	2,2	43	80	300	1,6	2,4
22	70	150	2,0	1,5	46	150	500	1,8	1,4

Таблица 5

Варианты 2-го типа задания 4

Номер вар.	h_1 ВЭЗ	$h_{1ист}$	h_2 ВЭЗ	$h_{2ист}$	Номер вар.	h_1 ВЭЗ	$h_{1ист}$	h_2 ВЭЗ	$h_{2ист}$
2	25	15	120	80	26	140	100	800	600
5	100	50	500	300	29	120	90	600	400
8	80	60	200	100	32	100	50	500	400

Окончание табл. 5

Номер вар.	h_1 ВЭЗ	$h_{1\text{ист}}$	h_2 ВЭЗ	$h_{2\text{ист}}$	Номер вар.	h_1 ВЭЗ	$h_{1\text{ист}}$	h_2 ВЭЗ	$h_{2\text{ист}}$
11	120	80	400	200	35	80	60	400	200
14	150	100	600	450	38	60	50	300	200
17	60	40	250	100	41	150	120	600	300
20	50	40	300	200	44	120	60	500	400
23	70	50	150	100	47	60	120	700	350

Таблица 6

Варианты 3-го типа задания 4

Номер варианта	h_1 ВЭЗ	h_2 ВЭЗ	λ_k	Номер варианта	h_1 ВЭЗ	h_2 ВЭЗ	λ_k
3	15	30	1,5	27	30	60	2,0
6	20	50	1,8	30	25	150	2,5
9	16	20	2,0	33	17	85	1,7
12	10	20	1,25	36	20	40	2,0
15	12	25	1,5	39	16	32	1,6
18	14	60	2,0	42	18	54	1,8
21	18	90	1,8	45	10	30	2,0
24	13	65	1,3	48	14	70	1,4

Необходимую для выполнения задания информацию смотрите в [2], с. 294 - 296 или в [3], с. 173 - 174 (1-й и 2-й типы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матвеев, Б. К.* Электроразведка: учебн. для вузов. – 2-е изд., перераб.и доп. *Б. К. Матвеев.* –М.: Недра, 1990. - 368 с.
2. *Редозубов, А. А.* Электроразведка. Часть 1. Электроразведка постоянным током. Поляризационные методы электроразведки: учебное пособие. *А. А. Редозубов.* – Екатеринбург: УГГГА, 2004. - 327 с.
3. *Якубовский, Ю. В., Ренард И. В.* Электроразведка: учебн. для вузов. – 3-е изд., прераб. и доп. *Ю. В Якубовский., И. В. Ренард*– М.: Недра, 1991. - 359 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задание 1. Оценка интенсивности аномалий естественного поля фильтрационной природы.....	3
Задание 2. Расчет и сопоставление интенсивности аномалий η_k над изо- метричными объектами при поверхностной и объемной поляризации.....	5
Задание 3. Расчет кажущегося сопротивления на поверхности анизотропной среды.	7
Задание 4. Оценка влияния анизотропии на результаты ВЭЗ.	9
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	12

Авенир Александрович Редозубов
Гульшат Ахметовна Косарева

Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической
разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки
месторождений полезных ископаемых (РФ)
часть 2

Корректурa кафедры геофизики

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60x84 1/16. Печать на ризографе.
Печ.л. ____ Уч.-изд.л. ____ Тираж ____ экз. Заказ №

издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования
«Уральский государственный горный
университет»

А. А. Редозубов, Г. А. Косарева

ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Часть 3

*Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности
21.05.03 Технологии геологической разведки
специализации Геофизические методы поисков и разведки
месторождений полезных ископаемых (РФ)*

**Екатеринбург
2020**

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

А. А. Редозубов, Г. А. Косарева

ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Часть 3

*Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка» для студентов
специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки
специализации Геофизические методы поисков и разведки
месторождений полезных ископаемых (РФ)*

Рецензент: *В. Е. Петряев*, канд. геол.-мин. наук, доцент
кафедры геофизики УГГУ

Методическое руководство рассмотрено на заседании кафедры и рекомендовано к изданию в УГГУ.

Редозубов А. А., Косарева Г. А.

Р33 **ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА. Часть 3:** *Редозубов А. А., Косарева Г. А.*
Методическое руководство по выполнению индивидуальных заданий по курсу «Электроразведка» для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых (РФ).

Методическое руководство содержит необходимые указания по выполнению индивидуальных домашних заданий, соответствующих программе дисциплины «Электроразведка» для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых (РФ). Исходные данные к заданиям включены в руководство.

Задание 1. Оценка поглощения энергии и длины волны электромагнитного поля в квазипроводниках

Условия распространения переменного электромагнитного поля в среде определяются комплексной величиной, называемой волновым числом. Волновое число зависит от физических свойств среды и частоты поля. Оно определяется выражением

$$k = \omega \sqrt{\mu \dot{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu \left(\epsilon + i \frac{\gamma}{\omega} \right)} = a + ib, \quad (1.1)$$

где $\omega = 2\pi f$ - угловая частота;

μ - абсолютная магнитная проницаемость среды;

γ - удельная электропроводность среды;

$\dot{\epsilon} = \epsilon + i \frac{\gamma}{\omega}$ - комплексная диэлектрическая проницаемость.

Вещественная a и мнимая b части волнового числа имеют определенный физический смысл. Вещественная часть волнового числа определяет длину волны и скорость распространения поля в среде, от мнимой части зависит поглощение энергии поля средой и, следовательно, скорость затухания поля при удалении от источника.

Поглощение энергии электромагнитного поля средой происходит вследствие тепловых потерь вихревых токов, индуцированных магнитной составляющей поля. Мнимая часть волнового числа представляет собой коэффициент поглощения, которое происходит по закону e^{-br} (r – расстояние, e – основание натурального логарифма). Из-за поглощения энергии средой при удалении от источника поле затухает в e^{br} раз быстрее, чем это происходит только из-за геометрического фактора рассеивания энергии (как происходит в поле постоянного тока). Единицей измерения коэффициента поглощения является непер деленный на метр (Нп/м).

В зависимости от коэффициента поглощения находится глубина

проникновения поля в землю. Для её характеристики введен параметр $\delta = \frac{1}{b}$, называемый глубиной проникновения или толщиной скин-слоя. Он равен мощности слоя, в котором за счёт поглощения энергии поле ослабляется в e раз.

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\hat{\epsilon}$ характеризует способность среды пропускать как токи проводимости, так и токи смещения. Вещественная часть комплексной диэлектрической проницаемости ϵ определяет способность среды пропускать токи смещения, мнимая часть γ/ω – токи проводимости. От соотношения этих частей зависит соотношение между токами смещения и токами проводимости. Если $\epsilon \gg \gamma/\omega$, мнимой частью комплексной диэлектрической проницаемости можно пренебречь, полагая $\hat{\epsilon} \approx \epsilon$. Это означает пренебрежение токами проводимости, которые в данном случае очень малы и, следовательно, в среде практически существуют только токи смещения. Такие среды называются *квазидиэлектриками*. Так как при протекании тока смещения тепловых потерь нет, в квазидиэлектриках коэффициент поглощения можно полагать равным нулю. Типичным квазидиэлектриком является воздух.

Если $\epsilon \ll \gamma/\omega$, можно пренебречь вещественной частью $\hat{\epsilon}$, полагая таким образом, что в среде существует только токи проводимости. Такие среды называются *квазипроводниками*. Так как мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости зависит от частоты поля, одна и та же среда, в зависимости от частоты, может быть или квазипроводником, или квазидиэлектриком, или занимать промежуточное положение между этими крайними случаями. В звуковом диапазоне частот практически все горные породы являются квазипроводниками.

Задание

1. Пользуясь общим выражением волнового числа формула (1.1), найти выражения вещественной и мнимой частей волнового числа для квазипроводника.

2. Для заданных значений электромагнитных параметров среды и частоты найти коэффициенты поглощения.

3. Определить, во сколько раз на заданном расстоянии r из-за поглощения энергии средой поле затухает быстрее по сравнению со случаем, когда затухание происходит только за счёт геометрического рассеяния энергии.

4. Определить глубину проникновения поля (толщину скин-слоя).

5. Рассчитать длину волны и скорость распространения поля. Сравнить их со случаем, когда поле распространяется в вакууме (воздухе).

6. Сделать вывод, как зависят рассчитанные величины от удельного сопротивления среды и частоты поля.

Литература по теме задания: [1], с. 8 – 12; [3], с. 52 – 56.

Таблица 1

Исходные данные к заданию

Номер вар.	ρ , Ом·м	f , Гц	r , м	Номер вар.	ρ , Ом·м	f , Гц	r , м	Номер вар.	ρ , Ом·м	f , Гц	r , м
1	100	156 4,8	100	8	2000 20	625 2,4	100	15	40	625 4,8	100
2	10	78 0,1	100	9	200 5	78	75	16	30	625 4,8	100
3	500 10	312	50	10	250 5	0,1	100	17	500 10	625	100
4	1000 10	625	150	11	5	156 0,3	50	18	750	321 9,8	150
5	20	156 9,8	50	12	250	625 0,6	100	19	1000 10	156	100
6	150	312 1,2	50	13	300 12	78	100	20	100	312 0,3	200
7	50	156 1,2	25	14	2500 20	312	200	21	20	78 1,2	100

Номер вар.	ρ , Ом·м	f , Гц	r , м	Номер вар.	ρ , Ом·м	f , Гц	r , м	Номер вар.	ρ , Ом·м	f , Гц	r , м
22	1500 15	156	150	31	250 4	19,5	100	40	3	78 0,6	50
23	1500 7	312	100	32	45	312 0,6	70	41	4	125 0,6	75
24	10	39 0,3	150	33	25	625 2,4	100	42	12	312 0,3	100
25	5	78 0,15	100	34	200 4	156	150	43	900 9	156	100
26	800 8	125	200	35	750 3	312	100	44	1200 12	625	100
27	1200 5	125	200	36	4	78 0,3	100	45	60	1250 4,8	100
28	30	156 9,8	100	37	7	125 0,1	50	46	25	312 4,8	50
29	10	312 0,3	100	38	800 4	156	100	47	1000 6	78	100
30	1500 10	1250	100	39	75 3	125	50	48	1200 3	125	100

Примечание. Принять магнитную проницаемость среды $\mu=\mu_0$.

Задание 2. Построение и интерпретация кривой магнитотеллурического зондирования

В магнитотеллурическом зондировании (МТЗ) изучается естественное переменное электромагнитное поле. Магнитную компоненту образуют вариации магнитного поля Земли. Электрическую компоненту образуют индуцированные магнитными вариациями вихревые токи. В качестве фундаментальной модели, на которой основывается интерпретация результатов

МТЗ, принимается модель Тихонова – Каньяра. В этой модели магнитотеллурическое поле аппроксимируется плоской волной, распространяющейся вертикально сверху вниз, а геоэлектрический разрез полагается горизонтально-слоистым.

Глубина проникновения поля в землю зависит от его частоты. Поэтому, выполняя измерения при разных частотах, можно получить информацию об электрических свойствах горных пород на различной глубине, аналогично тому, как это делается при электрическом зондировании на постоянном токе. Только в отличие от зондирования на постоянном токе, где глубина исследования зависит от размера установки, в МТЗ параметром, контролирующим глубину исследования, является частота (период) вариаций. Практически, чтобы получить результаты измерений при разных периодах вариаций, производят непрерывную регистрацию поля в течение некоторого времени, обычно несколько часов.

Так как интенсивность магнитотеллурического поля непрерывно меняется, чтобы исключить влияние колебаний уровня поля измеряют обе компоненты – электрическую и магнитную, а затем вычисляют их отношение, называемое *импедансом*:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}}{\dot{H}}, \quad (2.1)$$

где $\dot{E}$ – напряженность электрического поля;

$\dot{H}$ – напряженность магнитного поля.

По измеренному значению импеданса рассчитывают кажущееся сопротивление, которое в МТЗ обозначают символом ρ_T . Импеданс, как и напряженности компонент поля, комплексная величина. Для вычисления кажущегося сопротивления можно использовать модуль импеданса или его фазу. *Фаза импеданса* – это разность фаз напряженностей электрического и магнитного полей.

Измерение напряженности электрического поля производят с помощью двух взаимно перпендикулярных заземленных приемных линий. Для измерения напряженности магнитного поля используют два магнитометра, измеряющих горизонтальную составляющую. Ориентировка магнитометров должна совпадать с ориентировкой приемных линий. Такая методика позволяет определить величину и направление напряженности в любой момент времени.

Вычисления кажущегося сопротивления по амплитудным значениям E и H производится по формуле

$$\rho_T = 0,2T|\dot{Z}|^2. \quad (2.2)$$

Для вычисления импеданса по этой формуле напряженность электрического поля E выражают в мВ/км, напряженность магнитного поля – в нанотеслах. Так как кроме горизонтальной слоистости обычно существует и неоднородность среды в горизонтальном направлении, модуль импеданса зависит от ориентировки поля в момент измерения. Поэтому при вычислении ρ_T обычно используют эффективный импеданс $|\dot{Z}_{\text{эф.}}|$, имеющий смысл среднего геометрического значения модуля импеданса для различных ориентировок поля.

По вычисленным значениям ρ_T строят кривую зондирования в логарифмическом масштабе. По оси абсцисс откладывают $\sqrt{T}$, по оси ординат – ρ_T . Построение кривой МТЗ, как зависимости ρ_T от $\sqrt{T}$, а не от T , вызвано тем, что глубина исследования пропорционально $\sqrt{T}$ (см. [1, с. 29]). Кривые МТЗ качественно имеют вид, подобный кривым ВЭЗ, и образуют те же типы. Их интерпретация в принципе также аналогична интерпретации кривых ВЭЗ. Отличием от кривых зондирования на постоянном токе является наличие интерференционного экстремума в начальной части кривых (если измерения выполнены начиная с достаточно малых периодов). Если опорный горизонт имеет очень большое сопротивление, кривые МТЗ также входят на прямолинейную асимптоту. Только асимптота кривых МТЗ в этом случае образует с осью $\sqrt{T}$ угол $63^\circ 25'$, а не 45° , как у кривых ВЭЗ.

В случае высокого сопротивления опорного горизонта по асимптоте кривой зондирования можно определить суммарную продольную проводимость S надпорной толщи. Для этого асимптота продолжается до оси $\sqrt{T}$ и при $\rho_T = 1$ Ом·м определяется координата точки пересечения асимптоты с осью $\sqrt{T_s^{(1)}}$ (рис. 2.1). Продольная проводимость разреза

$$S = 356 \sqrt{T_s^{(1)}}. \quad (2.3)$$

Величину $\sqrt{T_s}$ можно определить и при любом другом значении ρ_T . Например, если она определена при $\rho_T = 10$ Ом·м ($\sqrt{T_s^{(10)}}$), продольная проводимость надпорной толщи

$$S = 114 \sqrt{T_s^{(10)}}. \quad (2.4)$$

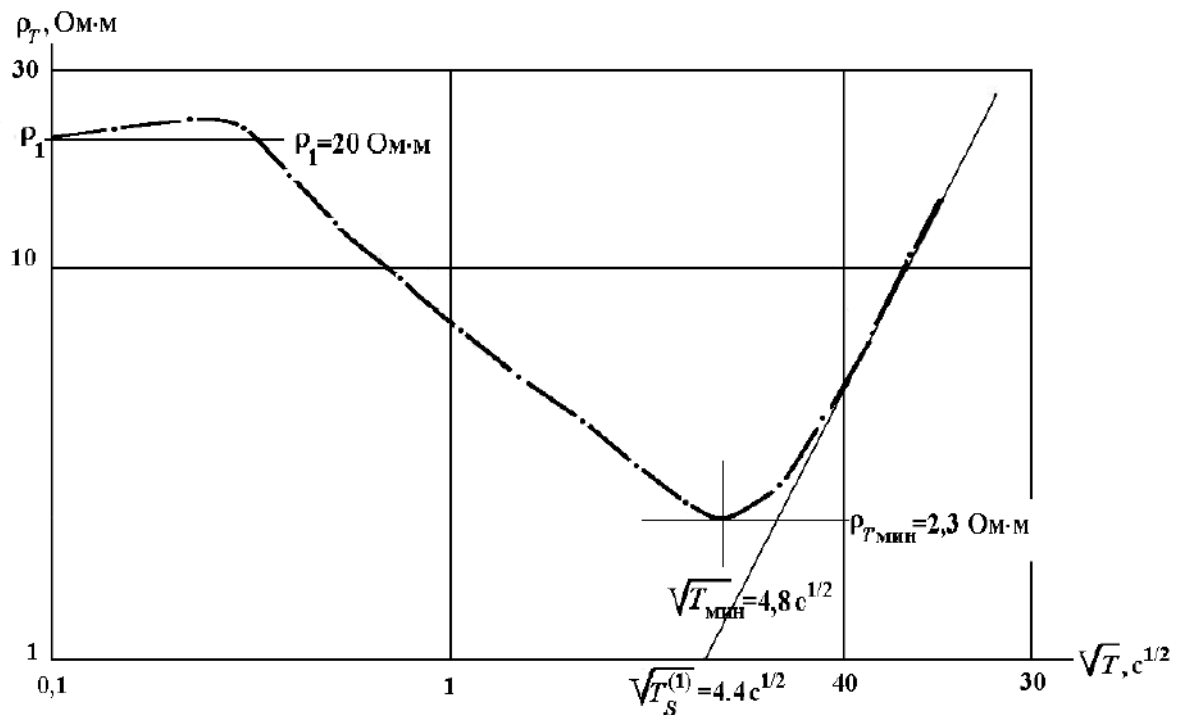


Рис. 2.1. Пример кривой МТЗ для разреза с бесконечно большим сопротивлением нижнего слоя

Когда кривая МТЗ имеет четко выраженный минимум и его координаты определяются достаточно точно, приближенное значение S можно найти по формуле

$$S \approx 520 \sqrt{T_{\min} / \rho_{T\min}}, \quad (2.5)$$

где $T_{\min}$ и $\rho_{T\min}$ – значения T и ρ_T в точке минимума.

Этот способ дает удовлетворительные результаты, если относительное влияние вышележащих слоев на область минимума кривой небольшое и координаты точки минимума определяются главным образом параметрами проводящего слоя. Такие условия существуют, когда мощность проводящего слоя значительно превышает мощность вышележащей толщи, и в этой толще нет слоев с высоким удельным сопротивлением. При получении значительной разницы между значениями S , полученными двумя способами, предпочтение следует отдавать способу определения S по асимптоте, как более точному.

Если есть данные о среднем продольном удельном сопротивлении надпорной толщи $\rho_{t\text{ ср}}$, можно от продольной проводимости перейти к глубине до опорного горизонта:

$$H = \rho_{t\text{ ср}} \cdot S. \quad (2.6)$$

Когда мощность хорошо проводящего слоя достаточно велика, за приближенное значение $\rho_{t\text{ ср}}$ можно принять величину ρ_T в точке минимума. Конечно, точность определения глубины до опорного горизонта в этом случае будет ниже. Погрешность определения H будет тем больше, чем меньше относительная мощность проводящего слоя. Большая разница значений S , полученных двумя способами, как уже указывалось, свидетельствует о сильном влиянии на кривую в области минимума вышележащих пород. Очевидно, в этом случае использовать значение ρ_T в точке минимума для оценки глубины до опорного горизонта не следует.

Рассмотрим интерпретацию кривой МТЗ, приведенной на рис. 2.1. Кривая четырехслойная типа QH. Начальная асимптота кривой $\rho_T = 20$ Ом·м определяет удельное сопротивление первого слоя. Конечная асимптота наклонена под углом $63,5^\circ$, что указывает на весьма большое, практически бесконечное удельное сопротивление нижнего слоя (опорного горизонта). Асимптота к конечной ветви кривой пересекает ось периодов при $\rho_T = 1$ Ом·м в

точке с координатой $\sqrt{T_s^{(1)}} = 4,4c^{1/2}$. Следовательно, продольная проводимость надпорной толщи

$$S = 356 \sqrt{T_s^{(1)}} = 356 \cdot 4,4 = 1566 \text{ См.}$$

Кривая имеет четкий минимум с координатами $\sqrt{T_{\text{мин}}} = 4,8c^{1/2}$ и $\rho_{T_{\text{мин}}} = 2,3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Продольная проводимость, определенная по координатам точки минимума кривой МТЗ

$$S = 520 \sqrt{T_{\text{мин}} / \rho_{T_{\text{мин}}}} = 520 \frac{4,8}{\sqrt{2,3}} = 1646 \text{ См.}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае разница в определении S двумя способами составляет 5,1 %.

Приняв значение ρ_T в точке минимума за среднее продольное удельное сопротивление надпорной толщи, оценим глубину залегания опорного горизонта:

$$H = \rho_{T_{\text{ср}}} \cdot S \approx \rho_{T_{\text{мин}}} \cdot S = 2,3 \cdot 1566 = 3660 \text{ м.}$$

Задание

1. По заданным значениям $|Z_{\text{эф}}|$ рассчитать значения кажущегося сопротивления ρ_T .

2. Построить кривую МТЗ в логарифмическом масштабе со стандартным модулем (62,5 мм). Определить тип кривой МТЗ. Определить удельное сопротивление верхнего и нижнего слоев разреза. Объяснить причину появления небольшого экстремума при малых значениях периода.

3. Провести асимптоту к конечной ветви кривой МТЗ и определить координату её пересечения с осью периодов при $\rho_T = 1 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ или $\rho_T = 10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Найти продольную проводимость надпорной толщи. Проводить асимптоту необходимо возможно точнее, так как от этого зависит точность определения S . Лучше всего угол $63^\circ 25'$ строить по его тангенсу, который равен 2.

4. Определить S по $\rho_{T_{\min}}$ и $T_{\min}$ и сравнить со значением, полученным по асимптоте. Оценить относительное расхождение результатов, полученных этими двумя способами.

5. Оценить примерную глубину до опорного горизонта, приняв за $\rho_{\text{ср}}$ значение ρ_T в точке минимума.

Литература по теме задания: [1], с. 36, с. 42 - 43.

Задание 3. Приближенное построение аномалии от проводящего объекта в индуктивных методах

В низкочастотных индуктивных методах измеряется э. д. с, наведенная в приемном контуре (петле значительных размеров или небольшой многовитковой рамке) переменным магнитным полем. Магнитное поле создается током, пропускаемым по другому контуру, – генераторному. Поле, создаваемое током в генераторном контуре, называется *первичным* (H_1). Если в объеме, в котором возбуждено первичное поле, находится проводящий объект, в нем возбуждается вихревой ток, создающий вторичное поле (H_2). Отклонения от первичного поля представляют собой аномалии, по которым можно установить наличие объектов. Такие аномалии называются *вихревыми*. Они имеют наибольшее значение в рудной электроразведке. Кроме вихревых, существуют и другие типы аномалий (см. [2, с. 5 - 7]). Результаты низкочастотных методов представляют в виде отношения H_2/H_1 , представляющего собой не что иное, как относительную интенсивность аномалии. Обычно эту величину измеряют в процентах.

Рассмотрим механизм формирования вихревой аномалии на примере наклонного проводящего пласта в однородном первичном магнитном поле H_1 . Пусть верхняя кромка пласта располагается на глубине h_1 . Длина пласта по падению d равна $3,6h_1$, угол наклона 34° . Тогда нижняя кромка пласта

располагается на глубине $h_2=3h_1$. Первичное поле H_1 ориентируем вертикально, в рассматриваемый момент времени снизу вверх (рис. 3.1). Практически близкое к однородному вертикальное первичное поле создается в средней части генераторной петли, лежащей на поверхности земли.

В проводящем пласте первичное поле возбуждает вихревой ток. Так как мощность пласта мала, вихревой ток растекается в плоскости пласта. В первом приближении вихревые токи в пласте можно аппроксимировать двумя линейными токами, текущими вдоль кромок пласта. Направление токов

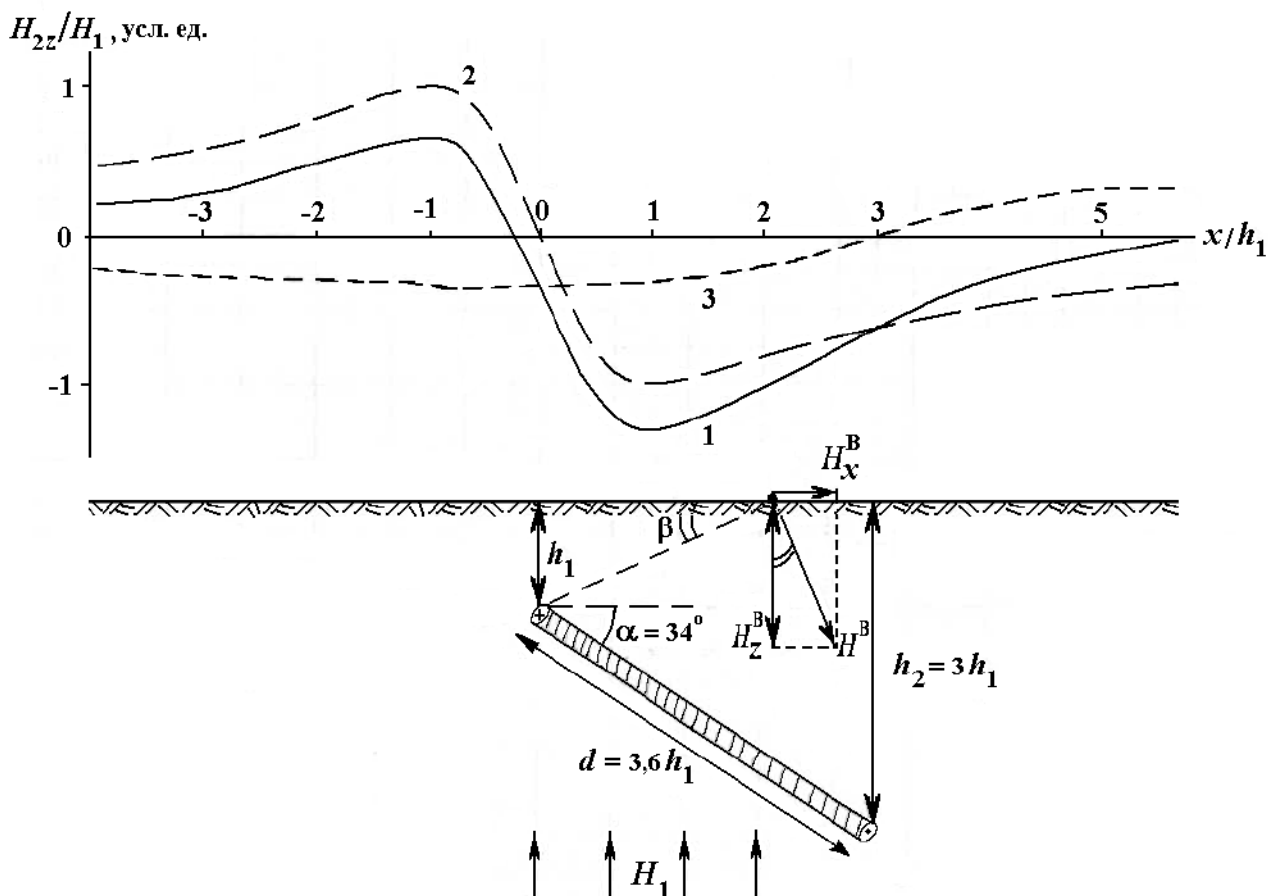


Рис. 3.1. Пример приближенного построения графика над H_{2z} над наклонным пластом:

1 – график H_{2z} от пласта; 2 – график H_z^B от верхнего линейного тока;

3 – то же от нижнего линейного тока

определяется по правилу левого винта. В нашем случае вдоль верхней кромки пласта ток течет от нас, вдоль нижней кромки – к нам. Полагая, что по простиранию длина пласта достаточно велика, можно пренебречь влиянием токов, текущих вдоль боковых кромок и рассматривать аномалию от пласта,

как сумму полей от линейных токов, совмещенных с верхней и нижней кромками.

По закону Био - Савара магнитное поле длинного линейного тока описывается уравнением $H=I/r$, где I – сила тока, r – расстояние от тока до точки наблюдений. Полагая $I=1$, в нашем случае напряженность магнитного поля тока, текущего по верхней кромке пласта, $H^B = 1/\sqrt{x^2 + h_1^2}$. По правилу правого винта поле ориентировано по направлению движения часовой стрелки, т. е. справа от верхней кромки пласта сверху вниз, слева – снизу вверх. Вертикальная компонента поля верхнего тока

$$H_z^B = H^B \cos\beta = H^B \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{x}{x^2 + h_1^2}, \quad (3.1)$$

где β – угол между направлением из точки наблюдений на верхнюю кромку пласта и горизонталью (см. рис. 3.1). График H_z^B переходит через нуль над верхней кромкой пласта и имеет экстремумы, отстоящие от точки перехода через нуль на расстояние, равное h_1 . Таким же образом можно построить график напряженности магнитного поля тока, текущего по нижней кромке пласта. При этом надо учесть, что глубина до этого тока h_2 в нашем примере в 3 раза больше. Соответственно, в это же число раз уменьшается и напряженность поля. Изменяется и направление поля, так как ток вдоль нижней кромки пласта имеет противоположное направление (см. рис. 3.1).

Просуммировав напряженности магнитного поля верхнего и нижнего токов, получим график напряженности вторичного поля от пласта. Для наклонного пласта аномалия H_{2z} знакопеременная, с переходом через нуль, смещенным относительно верхней кромки в сторону восстания пласта. Над пластом аномалия отрицательная, со стороны восстания пласта – положительная, имеющая меньшую интенсивность (см. рис. 3.1).

Таким же образом можно найти вид аномалии горизонтальной составляющей поля H_{2x} , а также для случая горизонтальной или наклонной ориентировки первичного поля.

В методе переходных процессов, в котором изучается неустановившееся поле, возбужденное импульсом постоянного тока в генераторной петле, аномалия имеет точно такой же вид, но имеет противоположный знак (см. [2, с. 76 -77]). Поэтому для построения графиков э. д. с. $\mathcal{E}$, индуцированной в приемной рамке, можно воспользоваться рассмотренным приемом, изменив только направление линейных токов в кромках пласта.

Задание

1. Аппроксимировать вихревые токи, возбужденные в проводящем пласте с заданными параметрами, двумя линейными токами, протекающими вдоль верхней и нижней кромок пласта. Определить направление токов при заданном направлении первичного поля.

2. Рассчитать вертикальные и горизонтальные составляющие напряженности магнитного поля линейных токов. Построить графики H_z и H_x линейных токов.

3. Построить графики для вертикальной и горизонтальной составляющих аномалии от пласта, выполнив графическим способом сложение полей от линейных токов. При построении графиков H_2/H_1 принять первичное поле $H_1=1$. Под графиками показать модель, для которой выполняется расчет, указав направление линейных токов.

4. Построить графики э. д. с., индуцированной в приемной рамке в методе переходных процессов. Для этого надо только изменить направление линейных токов и, соответственно, изменить знак аномалии.

5. Описать вид графиков для низкочастотного и неустановившегося поля, отметив их характерные особенности.

Литература по теме задания: [2, с. 5 – 7, с. 9 – 14, с. 45, с. 48, с. 76 - 77].

Таблица 3

Исходные данные к заданию

Номер вар.	h_1 , м	d , м	α°	Ориентир. H_1	Номер вар.	h_1 , м	d , м	α°	Ориентир. H_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	20	80	20	Вертик.	6	100	500	40	Горизонт.
2	20	80	20	Горизонт.	7	20	80	30	Вертик.
3	50	200	30	Вертик.	8	20	80	30	Горизонт.
4	50	200	30	Горизонт.	9	50	200	40	Вертик.
5	100	500	40	Вертик.	10	50	200	40	Горизонт.
11	100	500	50	Вертик.	30	30	150	20	Горизонт.
12	100	500	50	Горизонт.	31	100	600	40	Вертик.
13	30	150	30	Вертик.	32	100	600	40	Горизонт.
14	30	150	30	Горизонт.	33	40	200	20	Вертик.
15	50	250	20	Вертик.	34	40	200	20	Горизонт.
16	50	250	20	Горизонт.	35	50	300	60	Вертик.
17	100	800	20	Вертик.	36	50	300	60	Горизонт.
18	100	800	20	Горизонт.	37	40	300	40	Вертик.
19	20	150	60	Вертик.	38	40	300	40	Горизонт.
20	20	150	60	Горизонт.	39	60	250	45	Вертик.
21	50	200	45	Вертик.	40	60	250	45	Горизонт.
22	50	200	45	Горизонт.	41	75	300	30	Вертик.
23	100	500	30	Вертик.	42	75	300	30	Горизонт.
24	100	500	30	Горизонт.	43	40	250	45	Вертик.
25	30	200	45	Вертик.	44	40	250	45	Горизонт.
26	30	200	45	Горизонт.	45	75	250	25	Вертик.
27	40	250	30	Вертик.	46	75	250	25	Горизонт.
28	40	250	30	Горизонт.	47	60	300	25	Вертик.
29	30	150	20	Вертик.	48	60	300	25	Горизонт.

Задание 4. Определение условий применения дистанционного индукционного зондирования

Изменение глубины исследования в дистанционных индукционных зондированиях достигается путем изменения расстояния между источником поля и точкой измерения, так же, как при зондированиях на постоянном токе. Измерения при всех размерах установки выполняются на одной частоте. Преимуществом индукционных зондирований является возможность изучения разреза под экранами. Кроме того, так как измерение поля выполняется индуктивным способом, отпадает необходимость устройства заземлений. Последнее важно при сложных условиях заземления (мерзлота, лед, асфальтовые и бетонные покрытия, каменные осыпи). Способ возбуждения может быть любым, но обычно используется тоже индуктивный способ.

Максимальный размер установки должен быть таким, чтобы обеспечивалась необходимая глубина исследования. Обычно он должен быть в 4–6 раз больше глубины до опорного горизонта. Частота поля должна быть такой, чтобы при самом большом разnose соблюдались условия ближней зоны, так как за её пределами дистанционное зондирование невозможно. В качестве условия ближней зоны в дистанционном зондировании принимают соотношение

$$r \leq 0,1\lambda \approx 316\sqrt{\rho_{\text{ср}}/f}, \quad (4.1)$$

где $\rho_{\text{ср}}$ – среднее удельное сопротивление надпорной толщи.

Воспользовавшись этим соотношением можно определить максимальную допустимую частоту при заданном размере установки или максимальный размер установки, допустимый при заданной частоте.

Задание

1. Определить необходимый максимальный размер установки для проведения дистанционных индукционных зондирований в заданных геоэлек-

трических условиях.

2. а) определить максимальную частоту, при которой возможны дистанционные зондирования при этих условиях; б) определить максимальную глубину, до которой возможно изучение разреза при заданной частоте.

Литература по теме задания: [1], с. 75 - 77; [3], с. 283 - 284.

Таблица 4

Исходные данные к заданию

Номер вар.	H , м	ρ , Ом·м	f , Гц	Номер вар.	H , м	ρ , Ом·м	f , Гц	Номер вар.	H , м	ρ , Ом·м	f , Гц
1 а б	25	40	-	2 а б	30	25	- 78	3 а б	25	10	- 125
4 а б	50	75	- 625	5 а б	45	50	- 375	6 а б	20	80	- 125
7 а б	100	250	- 1125	8 а б	80	120	- 625	9 а б	40	25	- 225
10 а б	60	90	- 1250	11 а б	20	50	- 125	12 а б	15	75	- 375
13 а б	75	50	- 375	14 а б	30	45	- 78	15 а б	35	50	-
16 а б	25	35	- 78	17 а б	30	65	- 125	18 а б	50	120	- 1125
19 а б	30	450	- 375	20 а б	40	1500	- 1125	21 а б	35	90	- 78
22 а б	30	85	-	23 а б	45	110	- 2500	24 а б	15	50	- 312
25 а б	20	800	- 640	26 а б	70	55	- 640	27 а б	65	180	- 1280
28 а б	15	65	- 312	29 а б	25	120	- 78	30 а б	55	85	- 1280
31 а б	20	65	- 156	32 а б	55	70	- 640	33 а б	80	650	- 2500
34 а б	60	160	- 1280	35 а б	20	25	- 78	36 а б	30	15	- 640
37 а б	15	10	- 78	38 а б	25	20	- 640	39 а б	40	65	- 1280
40 а б	40	180	- 78	41 а б	50	60	- 640	42 а б	70	120	- 1280
43 а б	65	120	- 2500	44 а б	35	30	- 640	45 а б	45	40	- 312
46 а б	35	40	- 1125	47 а б	50	800	- 312	48 а б	15	15	- 78

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Редозубов, А. А.* Конспект лекций по электроразведке переменным током. Часть 1. Общие сведения о переменных электромагнитных полях. Магнитотеллурические методы и электромагнитные зондирования: учебное пособие. *А. А. Редозубов.* Екатеринбург: Издательство Уральской государственной горно-геологической академии, 1997. - 94 с.

2. *Редозубов, А. А.* Конспект лекций по электроразведке переменным током. Часть 2. Индуктивные методы электроразведки: учебное пособие. *А. А. Редозубов.* Екатеринбург: Издательство Уральской государственной горно-геологической академии, 1999. - 106 с.

3. *Якубовский, Ю. В., Ренард, И. В.* Электроразведка: учебник для вузов. 3-е изд., прераб. и доп. *Ю. В. Якубовский, И. В. Ренард.* М.: Недра, 1991. - 359 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задание 1. Оценка поглощения энергии и длины волны электромагнитного поля в квазипроводниках	3
Задание 2. Построение и интерпретация кривой магнитотеллурического зондирования	6
Задание 3. Приближенное построение аномалии от проводящего объекта в индуктивных методах	12
Задание 4. Определение условий применения дистанционного индукционного зондирования	17
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	19

Авенир Александрович Редозубов
Гульшат Ахметовна Косарева

ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Часть 2

Методическое руководство
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу «Электроразведка»
для студентов специальности 21.05.03 Технологии геологической разведки
специализации Геофизические методы поисков и разведки месторождений
полезных ископаемых (РФ)

Редактор В. В. Баклаева

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60x84 1/16.
Гарнитура Times New Roman Печать на ризографе.
Печ. л. Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ГРАВИРАЗВЕДКА»**

специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация № 1

***Геофизические методы поиска и разведки
месторождений полезных ископаемых***

форма обучения: очная, заочная

Автор: Виноградов В.Б.

Одобрена на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 01.09.2022

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Геологии и геофизики

(название факультета)

Председатель

Бондарев В.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 13.09.2022

(Дата)

Екатеринбург
2022

На составление курсового проекта отводится **4 недели**.

Консультации еженедельно для всей группы по сетке расписания и по 4 человека в день на неделю в одно согласованное время для всех 4 студентов

1 неделя. Выдача задания. Сбор материалов. В библиотеке необходимо взять литературу, указанную в задании.

Написание геологического задания.

Написание физико-географического раздела по БРЭ или иным источником с кратким описанием экономики и освоенности территории с приложением обзорной карты района.

Составление раздела «Геологическая характеристика».

2 неделя. Анализ работ прошлых лет. Истолкование аномалий.

Составление раздела «Геофизическая характеристика».

Решение прямых задач.

Создание ФГМ.

3 неделя Написание раздела «Методика полевых работ». Гравиметр только CG-5 или CG-6.

4 неделя Составление раздела «Камеральные работы».

Написание раздела «Обработка и истолкование результатов измерений».

Вычисление физических объемов и сроков проведения работ.

СРОК СДАЧИ КУРСОВОГО ПРОЕКТА 5 неделя (не позднее пятницы). В субботу 5 недели ЗАЩИТА КУРСОВОГО ПРОЕКТА. Без защиты курсовой проект не оценивается.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА ПО ДИСЦИПЛИНАМ «ГРАВИРАЗВЕДКА»

Курсовой проект составляется в соответствии с принятым в производственных геолого-геофизических организациях «Макетом проекта на общие (детальные) поиски твердых полезных ископаемых» [10]. В данных методических указаниях, сохраняя нумерацию и название разделов «Макета...», рассматривается содержание лишь тех разделов, которые необходимы для написания курсового проекта.

Для выполнения курсового проекта необходимо проработать рекомендуемую литературу по геологическому строению района проектируемых работ, физическим свойствам горных пород и руд, а также по методике и технике гравirazведочных работ и камеральной обработке результатов измерений гравитационного поля [3. 4. 5 и др.].

1. ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

1.1 Целевое назначение работ, пространственные границы объекта, основные оценочные параметры.

Пример. Общие поиски железорудных месторождений в пределах Масловско-Ауэрбаховской зоны на участке южного замыкания Ауэрбаховского интрузива. Площадь исследований 60 кв. км.

Оценочные параметры - получение кондиционных карт поля силы тяжести масштаба 1:10000 и оценка площади на выявление промышленных месторождений до глубины 300 м.

1.2 Геологические задачи, последовательность и основные методы их решения.

Пример. Изучение перспектив площади на обнаружение скрытого магнетитового оруденения на участках южного продолжения Ауэрбаховского рудоконтролирующего разлома.

На участке площадью 60 кв. км. (10×6 км) выполнить площадную гравиметрическую съемку масштаба 1:10000.

1.3 Ожидаемые результаты и сроки выполнения работ (с указанием форм отчетной документации).

Пример. По результатам гравиметрической съемки будут выделены перспективные на магнетитовое оруденение участки, определяются места заложения поисковых скважин (или даются рекомендации на проведение поисково-разведочных работ).

По результатам проведенных работ будет составлен геологический отчет. К тексту отчета будут приложены карты силы тяжести в редукции Буге (с указанием масштаба, плотности промежуточного слоя, сечением изоаномал), схематические геолого-геофизические разрезы по профилям, пересекающим перспективные аномалии, объемная плотностная модель, ее геологическое истолкование.

1. ГЕОГРАФО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТ

Указывается административное положение района работ. Приводится краткая характеристика рельефа, климата, растительного и животного мира, населенности и путей сообщения, возможности найма рабочей силы на месте или их найма в другом районе. Приводится обзорная карта района работ с нанесением участка полевых работ. Определяется категория трудности местности для проведения геофизических и топогеодезических работ (прил.1).

В курсовом проекте этот раздел составляется по литературным источникам, которые указываются в задании.

4. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ И ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЙОНА

4.1. Геологическая характеристика

Указывается геолого-структурное положение района проектируемых работ.

Пример. В структурном плане район работ расположен в пределах восточного крыла Тагильского мегасинклинория в Турьинской структурно-фациальной зоне.

Данный раздел содержит подразделы: “Стратиграфия”, “Магматизм”, “Тектоника”, “Геоморфология и гидрогеология”, “Полезные ископаемые”. В них приводятся краткие сведения по стратиграфии с указанием состава пород и их мощности, сведения об интрузивных образованиях, тектонике. Подробно описываются рудовмещающие комплексы, гидротермальные и метасоматические процессы, отмечаются рудоконтролирующие факторы. Особо отмечаются процессы метаморфизма, которые обуславливают изменение физических свойств горных пород.

В подразделе «Полезные ископаемые» приводится характеристика месторождений и рудопроявлений всех полезных ископаемых, встреченных в данном районе работ, отмечается их приуроченность к определенным комплексам пород, структурно-тектоническим и металлогеническим зонам. Выделяются полезные ископаемые, на которые площадь проектируемых работ является наиболее перспективной, и более подробно описываются месторождения, типичные для этого полезного ископаемого.

Необходимо уделить особое внимание анализу поверхностных рыхлых отложений, поскольку они могут иметь переменную мощность, неоднородны по составу и часто вносят существенные искажения в геофизические поля.

В результате анализа геологического строения района должны быть сформулированы геологические предпосылки для выполнения геологического задания.

4.3. Геофизическая характеристика

В этом разделе проекта необходимо обосновать применение гравиразведки для решения поставленной геологической задачи.

В разделе приводится таблица плотности горных пород и руд, которая составляется по литературным источникам. Выполняется анализ физических свойств горных пород и руд. Породы с близкими физическими свойствами могут объединяться в группы. Указываются возможные пределы изменения плотности, обусловленные метаморфическими процессами, выветриванием и т. п.

На основе анализа физических свойств и особенностей геологического строения составляются плотностная модель (ПМ). Основой для построения ПМ служит геологический разрез, на котором в упрощенном виде выделяются главные источники аномалий. Породы, близкие по свойствам, могут быть объединены в единый источник. Объекты, создающие помехи для выделения главных источников, например переменная мощность рыхлых отложений, также показываются на ПМ.

Необходимо выполнить расчеты гравитационных и магнитных полей в плане от ПМ и провести анализ ожидаемых аномалий от искомых объектов и от объектов-помех. Приводится качественная характеристика ожидаемых гравитационных полей в плане над различными комплексами пород, и особенно над рудовмещающей толщей. При решении задач геологического картирования необходимо дать характеристику полей

над наиболее крупными блоками пород, дать характеристику ожидаемых аномалий над зонами тектонических нарушений.

В результате анализа формулируются физико-геологические предпосылки, благоприятные для решения поставленных задач, и отмечаются факторы, затрудняющие выделение аномалий от искомым объектов. В заключение делаются выводы о возможностях использования гравиразведки для выполнения геологического задания и указываются конкретные задачи, решаемые гравиразведкой. Раздел иллюстрируется геолого-геофизическими разрезами (ПМ), на которых приводятся расчетные кривые поля.

5. МЕТОДИКА, ОБЪЕМЫ И УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОЕКТИРУЕМЫХ РАБОТ

5.1. Геологические задачи и методы их решения

Конкретизируются геологические задачи, которые необходимо решить для выполнения геологического задания. Намечается сеть измерений для решения поставленных задач, а также последовательность проведения создания опорной сети, рядовой съемки и т.д. Указываются решаемые с помощью гравиразведки геологические задачи. Поскольку курсовой проект ограничен рамками курса «Гравиразведка», то задачи, решаемые другими методами, лишь перечисляются, без обоснования.

Пример. Для определения мощности рыхлых отложений будет поставлен метод ВЭЗ, для выявления природы гравитационных аномалий проектируется метод ВП (или МПП) и т. п.

5.8. Наземные геофизические работы

На основании разделов 4.1 и 4.3 перечисляются критерии выбора участка проектируемых работ. **Главной целью курсового проекта является подробное обоснование методики полевых.**

5.8.1. Гравиразведка

В данном разделе необходимо обосновать:

- 1) вид съемки;
- 2) точность и масштаб съемки, сечение изоаномал отчетной карты, масштаб графиков при профильной съемке;
- 3) систему расположения и густоту рядовых пунктов наблюдений, систему опорных пунктов.

Гравиметровая съемка по отдельным маршрутам (профилям) применяется редко, например при рекогносцировочных наблюдениях или при изучении сильно вытянутых по простиранию объектов. Обычно применяется площадной вид съемки с детализацией выявленных аномалий, когда по результатам съемки может быть построена кондиционная гравиметрическая карта на всю площадь исследования.

Проектная точность съемки (среднеквадратическая погрешность определения аномалии силы тяжести в редукции Буге) выбирается в зависимости от интенсивности предполагаемых аномалий, а также от условий работ и заданного масштаба съемки и требований инструкции [5]. Для обоснования проектной точности съемки нужно использовать расчеты для типичных геологических разрезов (ПМ, см. разд. 4.3). Среднеквадратическая погрешность определения аномалии силы тяжести в редукции Буге (ϵ_a) не должна превышать при поисковой съемке 1/5, а при региональной - 1/3 минималь-

ной величины локальных аномалий гравитационного поля, создаваемых искомыми объектами.

При выполнении курсового проекта в некоторых случаях масштаб, указанный в задании, может не соответствовать величине среднеквадратической погрешности, рассчитанной по аномалии для заданного разреза (ε_a)_{расч.} Если (ε_a)_{расч.} оказывается меньше ε_a для заданного масштаба, то искомая аномалия может оказаться пропущенной, т. к. изолинии на отчетной карте (сечение изоаномал) проводят через $2.5\varepsilon_a$.

Пример. Задан масштаб съемки 1:25000, для этого масштаба $\varepsilon_a=0.10$ мГал, изоаномалы проводятся (табл.1) через 0.25 мГал. Амплитуда расчетной аномалии (рис.1) $A=0.2$ мГал, т. е. меньше сечения изоаномал отчетной карты. Аномалия не будет оконтурена изолинией и может оказаться пропущенной. Расчетная погрешность $\varepsilon_a=(1/5)\times A=0.2\times 0.2=0.04$ мГал соответствует (табл. 1) масштабу 1:10000. Следовательно, необходимо изменить масштаб съемки, указанный в геологическом задании. В подобных случаях необходимо в проекте привести убедительное обоснование, т. к. повышение точности съемки и применение более детальных работ потребует увеличения расходов денежных средств и затрат труда.

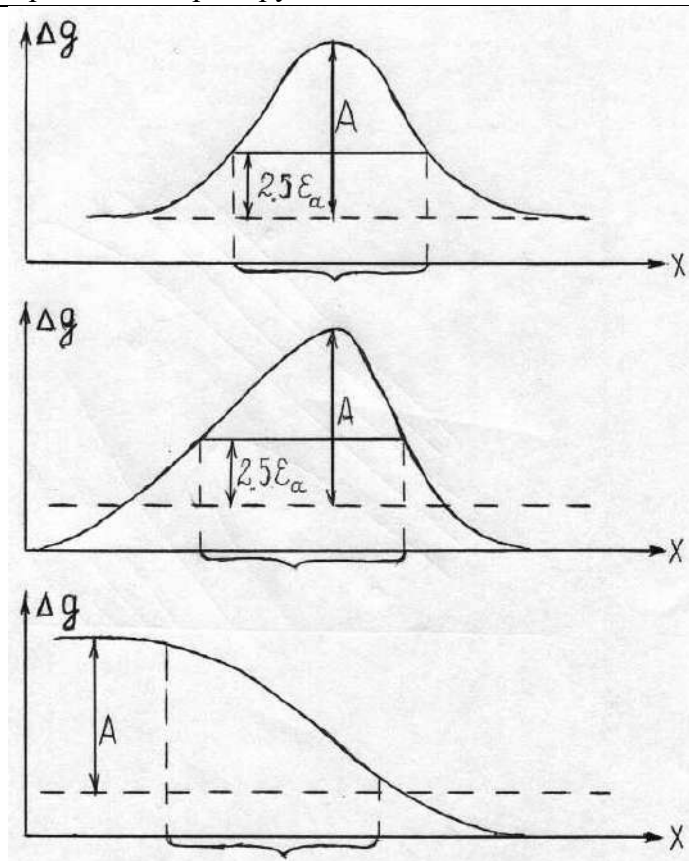


Рис. 1. Определение ширины аномальной зоны

Если (ε_a)_{расч.} превышает ε_a для заданного масштаба съемки, то принимается заданный масштаб, так как искомая аномалия в этом случае будет оконтурена не менее чем одной изолинией.

Пример. Задан масштаб съемки 1:25000, $\varepsilon_a=0.10$ мГал, сечение 0.25 мГал. Расчетная аномалия получилась равной $A=1.2$ мГал, расчетная погрешность (ε_a)_{расч.} $=0.2\times 1.2=0.24$ мГал. Амплитуду аномалии A следует отсчитывать от уровня нормального поля или уровня фона помех (см. рис. 1). Формально можно проектировать съемку масштаба

1:50000 с $\varepsilon_a=0.20$ мГал. Но геологическое задание предусматривает поиски и более мелких рудных тел, залегающих на большей глубине. Следовательно, принимается масштаб съемки, указанный в геологическом задании, и относительно него определяются ε_a , сеть съемки и другие параметры.

Связь масштаба, точности и сети наблюдений определяется Инструкцией по гравиметрической съемке (см. табл.1) [5].

Для построения кондиционной гравиметрической карты желательно предусмотреть измерения по равномерной сети наблюдений. При поисках и картировании объектов изометричной формы в плане рационально проводить измерения по квадратной сети. При изучении объектов вытянутой формы наблюдения лучше проводить по прямоугольной сети. Отношение расстояний между профилями и между пунктами на профиле не должно превышать 5:1. Профили наблюдений следует ориентировать в направлении перпендикулярном основному простиранию контактов, структур и искомым объектам.

Расстояние между профилями наблюдений рассчитывается исходя из того, чтобы аномалия от искомого объекта была установлена как минимум тремя профилями. Если в задачу работ входит картирование нескольких объектов, то при расчете сети наблюдений ориентируются на аномалию объекта минимальных размеров, который должен быть выявлен гравиметрической съемкой.

Расстояние между пунктами наблюдений на профиле рассчитывается по величине ширины аномалий искомого объекта. Для уверенного выделения аномалии необходимо, чтобы не менее трех точек наблюдения, имеющих амплитуду, не меньшую сечения карты, попало в аномальную зону (см. рис.1). Для определения размеров аномальной зоны рассчитывается Δg при минимально возможной глубине залегания искомого объекта. Расстояния между профилями и пунктами наблюдения на профиле приводятся к ближайшим стандартным (см. табл.1). Определяется густота сети, т. е. количество пунктов на 1 кв. км. Рассчитанная сеть наблюдений должна удовлетворять требованиям, указанным в колонке 7 табл.1. для соответствующего масштаба съемки. Таким образом, рассчитав ε_a и густоту, можно определить масштаб съемки либо выбрать оптимальную сеть наблюдений, если масштаб съемки заранее указан в геологическом задании.

В проекте необходимо предусмотреть детализацию выявленных аномалий в объеме до 20 % от общего объема работ и наблюдения по интерпретационным профилям, пересекающим выявленные аномалии. Сеть наблюдений на интерпретационных профилях сгущается примерно в 2 раза. Точность наблюдений на интерпретационных профилях должна быть выше, чем на основных. В проекте необходимо описать сеть наблюдений, указать точность и предполагаемые объемы детализационных работ.

Определив окончательно масштаб, сеть съемки и ε_a , из табл.1 берется среднеквадратическая погрешность определения наблюденных значений силы тяжести:

$$\varepsilon_g = (\varepsilon_0^2 + \varepsilon_{\text{ряд.}}^2)^{1/2}$$

и вычисляются проектные погрешности опорной и рядовой сетей. Опорная сеть должна иметь погрешность в 1.5 - 2 раза меньше погрешности рядовой съемки, т. е. $\varepsilon_{\text{ряд.}}=2\varepsilon_{\text{оп.}}$, отсюда $\varepsilon_g=2.236\varepsilon_{\text{оп.}}$ или $\varepsilon_{\text{оп.}}=0.4472\varepsilon_g$; $\varepsilon_{\text{ряд.}}=0.8944\varepsilon_g$.

Число независимых наблюдений N на точках рядовой и опорной сетей рассчитывается по формуле

$$N > \varepsilon_0^2 / \varepsilon_{\text{пр.}}^2,$$

где ε_0 - среднеквадратическая погрешность единичного наблюдения (определяется по паспорту или в результате испытаний прибора на полигоне);

$\varepsilon_{\text{пр.}}$ - проектная точность рядовой или опорной сети, для которой вычисляется N .

Таблица 1

Соотношение масштаба, точности и сети съемки

Масштаб отчетных карт и гра- фиков	Сече- ние изоано мал, мГал	Ср. кв. погр. опред. силы тяж. в ред. Буге ε_a , мГал	Ср. кв. погр. опред. набл. знач. Силы тяж. ε_g , мГал	Средн. квадр. погр. опред. высот, м	Средн. квадр. погр. опред. коорд. пунктов, м	Густота сети	
						число пунктов на 1 кв. км	Расстоя- ние меж- ду пунк- тами при набл. по профи- лям, м
1	2	3	4	5	6	7	8
1:200000	2	± 0.80	± 0.40	± 2.5	± 100	0.10-0.25	1000-2000
1:100000	1	0 ± 0.40	± 0.30	± 1.2	± 80	0.25-1.00	500-1000
1:50000	0.5	± 0.20	± 0.15	± 0.7	± 40	2-30	100-500
1:50000	0.25	± 0.10	± 0.07	± 0.35	± 40	4-50	50-250
1:25000	0.25	± 0.10	± 0.06	± 0.35	± 20	12-60	50-250
1:25000	0.20	± 0.08	± 0.06	± 0.15	± 20	16-80	20-100
1:10000	0.20	± 0.08	± 0.06	± 0.20	± 4	20-100	20-100
1:10000	0.10	± 0.04	± 0.03	± 0.10	± 4	25-200	10-50
1:5000	0.10	± 0.04	± 0.03	± 0.10	± 2	50-250	10-50
1:5000	0.05	± 0.02	± 0.015	± 0.05	± 2	100-500	5-25

На опорных точках должно быть не менее двух независимых наблюдений. **Способ достижения проектной кратности N обосновывается в проекте – или многократные независимые рейсы (циклы) с одним прибором, или измерения с группой приборов в одном рейсе (цикле).**

Пример. Для гравиметровой съемки масштаба 1:10000 $\varepsilon_a=0.08$ мГал, $\varepsilon_g=0.06$ мГал, $\varepsilon_{оп.}=0.06/2.236=0.027$ мГал, $\varepsilon_{ряд.}=0.054$ мГал. Для рядовой съемки возьмем гравиметр ГНУ-КС, у которого по паспорту $\varepsilon_0=0.06$ мГал. Число независимых наблюдений на рядовой сети: $N_{ряд.}>0.0036/0.054^2$, $N_{ряд.}=2$. Для опорной сети возьмем гравиметр ГНУ-КВ, у которого $\varepsilon_0=0.04$ мГал, $N_{оп.}=0.04^2/0.027^2$, $N=3$. Если при создании опорной сети использовать тот же гравиметр ГНУ-КС, то потребуется 7-кратное повторение.

В случае применения гравиметров CG-5 и CG-6 смещение нуля не более 0,02 мГал/сутки, что позволяет существенно разрядить сеть опорных пунктов (до 2 – 3 в день) и стоимость работ.

Далее осуществляется выбор и обоснование системы полевой опорной сети. Сеть опорных пунктов может создаваться как в самом начале полевых работ, так и в процессе съемки. В последнем случае необходимо до рядовой съемки создать каркасную опорную сеть и один из этих пунктов привязать к пункту государственной опорной гравиметрической сети.

При рекогносцировочных масштабных съемках в трудных для передвижения условиях местности наблюдения на опорной сети выполняются по методике узловых пунктов. Наблюдения на пунктах опорной сети выполняются по центральной и двухступенчатой системе.

Центральной называется такая система наблюдений, при которой каждый опорный пункт имеет непосредственную связь с единым для всего участка исходным пунктом,

который, в свою очередь, привязан к государственной гравиметрической сети. В настоящее время подавляющая часть измерений проводится именно так. Связь между опорными пунктами осуществляется циклами или короткими рейсами. Такая система наблюдений применяется для небольших участков при условии быстрой транспортировки приборов. Схема создания опорной сети по центральной системе показана на рис.2.

Двухступенчатая система состоит из каркасной и заполняющей опорной сети. Стоимость таких работ существенно возрастает, а потому требует дополнительного обоснования. Каркасная сеть создается по центральной или полигонной системе с числом сторон в полигоне 3 - 5. Заполняющая опорная сеть создается рейсами. Рейсы заполняющей опорной сети начинаются и заканчиваются на пунктах каркасной опорной сети. Схема отработки опорной сети по двухступенчатой системе показана на рис. 3а и 3б.

Расстояние между опорными пунктами выбирается из расчета, чтобы рейс по рядовым пунктам укладывался в интервал времени $\Delta t_{\text{эф.}}$, в течение которого закон смещения нуль-пункта гравиметра можно считать линейным. Этот интервал для каждого прибора и для заданной точности съемки определяют по графику смещения нуль-пункта, полученному при изучении характера смещения нуль-пункта во время подготовки гравиметра к полевым работам. В курсовом проекте $\Delta t_{\text{эф.}}$ следует брать для масштаба 1:10000 - 1.5-2 часа; для масштабов 1:25000 и 1:50000 - 3-3.5 часа; для масштабов 1:100000 и 1:200000 - 6-7 часов. Продолжительность рейсов по опорной сети в 2 раза меньше.

По $\Delta t_{\text{эф.}}$ и нормам времени (табл. 2) для избранной сети наблюдений рассчитывается расстояние между опорными пунктами. В зависимости от масштаба съемки расчетные расстояния между магистралями и каркасными опорными пунктами следует приводить к расстояниям, кратным 1 км или 0.5 км. При расстоянии между профилями, соизмеримыми с расстоянием между пунктами на профиле, опорные пункты на магистралях располагают через один профиль, в шахматном порядке. При проектировании нужно учитывать возможность подъезда (наличие посадочной площадки для вертолета) к каркасным опорным пунктам и фактическую проходимость местности для автотранспорта. Характеристики категорий местности приведены в прил. 1. В результате расчета получают лишь примерное расстояние между каркасными пунктами. Фактическое их положение наносится на топографическую карту с учетом удобства подъезда к ним, быстрого и надежного их опознания на местности и т. п.

Рядовые рейсы выполняются по методике без повторений. Каждый рейс начинается и заканчивается на опорных пунктах.

Контрольные рейсы выполняются диагональными ходами в объеме 5 – 10 % от объема рядовой съемки. Схемы рядовых и контрольных рейсов показаны на рис.2, 3а и 3б.

Исходный пункт, на который передают абсолютное значение силы тяжести от пункта Государственной гравиметрической сети, создают по цикловой схеме (рис. 3а, 3б):

ГГС→ИП→ГГС.

Опорные пункты создают по цикловой схеме (рис. 3):

ИП→ОП→ИП.

Наблюдения на пунктах рядовой сети выполняют отдельными рейсами, опирающимися на пункты опорной сети (рис. 3а, 3б). Рядовой рейс выполняют по схеме от опорного пункта до опорного пункта:

ОП1-РП1-РП2-....-РПN-ОП2.

Точность наблюдений на рядовых пунктах в 1.5 – 2 раза ниже, чем на опорных.

Гравиметрические опорные пункты должны по возможности располагаться на площади равномерно, иметь стабильное основание для установки прибора. Удобно совмещать пункты опорной гравиметрической сети с пунктами геодезических сетей.

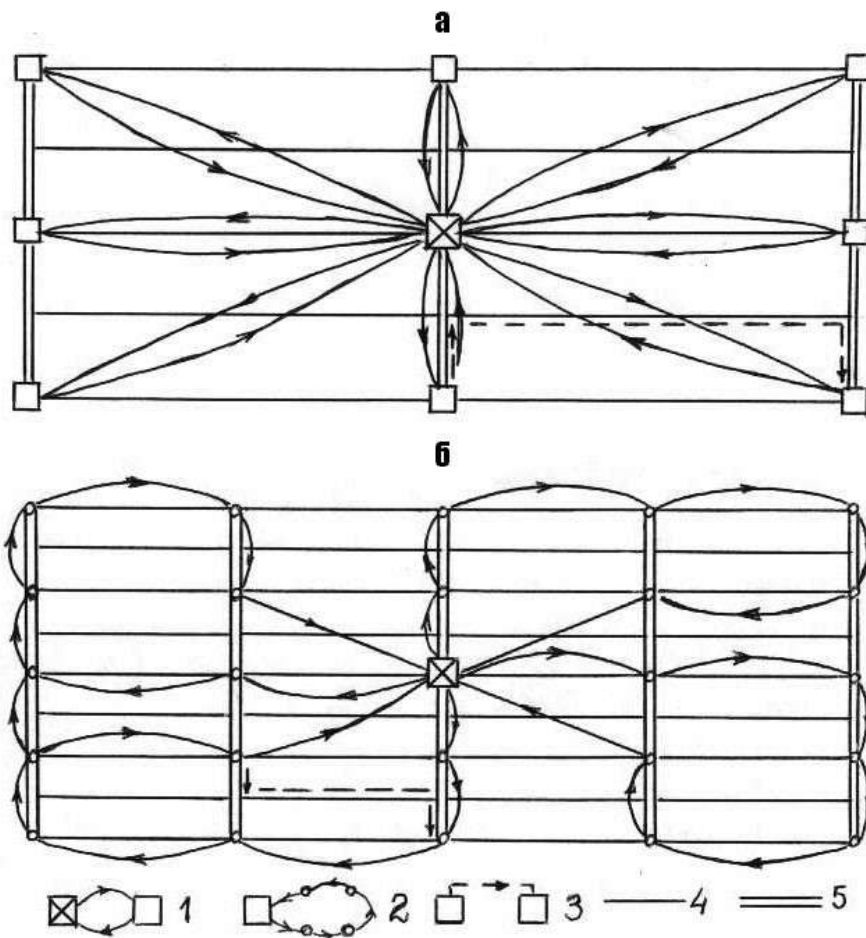


Рис. 2. Центральная система отработки опорной сети:

а – съемка циклами, б – съемка рейсами:

1 – гравиметрический цикл, связывающий опорный пункт с исходным пунктом; 2 – рейс, связывающий опорные пункты с исходным пунктом;

3 – рейс по рядовым пунктам между двумя опорными пунктами; 4 – профиль рядовой съемки; 5 – магистраль

Густота сети пунктов наблюдений, точность измерений, характеристики применяемой техники регламентируются действующей инструкцией.

С целью подтверждения паспортных характеристик гравиметров перед проведением съемки проводят предполетную подготовку:

- а) исследование зависимости показаний прибора от атмосферного давления, температуры, режима транспортировки;
- б) изучение закона смещения нуля-пункта;
- в) определение цены деления;
- г) определение времени становления отсчета;
- д) проверка герметичности;
- е) определение полного диапазона без перестройки;
- ж) определение люфта измерительного устройства;
- и) сопоставление результатов измерений различными приборами.

Приводится расчет объема работ в физическом выражении (погонные километры, физические точки) и приборо-сменах по видам работ (привязка к Государственной гравиметрической сети, опорная сеть, рядовая съемка, контрольные измерения, детализационные работы и т. д.).

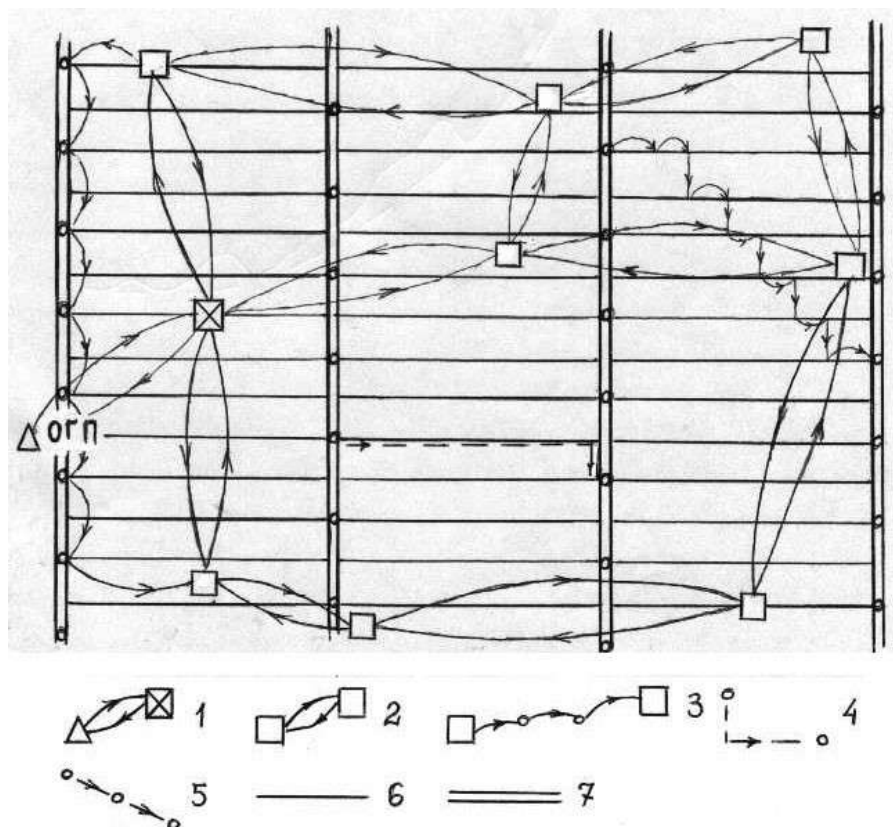


Рис. 3а. Двухступенчатая опорная сеть:

1 - гравиметрический цикл, связывающий опорный государственный пункт и исходный пункт; 2 - гравиметрический цикл, связывающий два каркасных пункта; 3 - рейс по заполняющей опорной сети, опирающийся на каркасные пункты; 4 - рейс по рядовым пунктам между двумя опорными; 5 - диагональный контрольный ход между двумя опорными пунктами; 6 – профиль рядовой съемки; 7 - магистраль

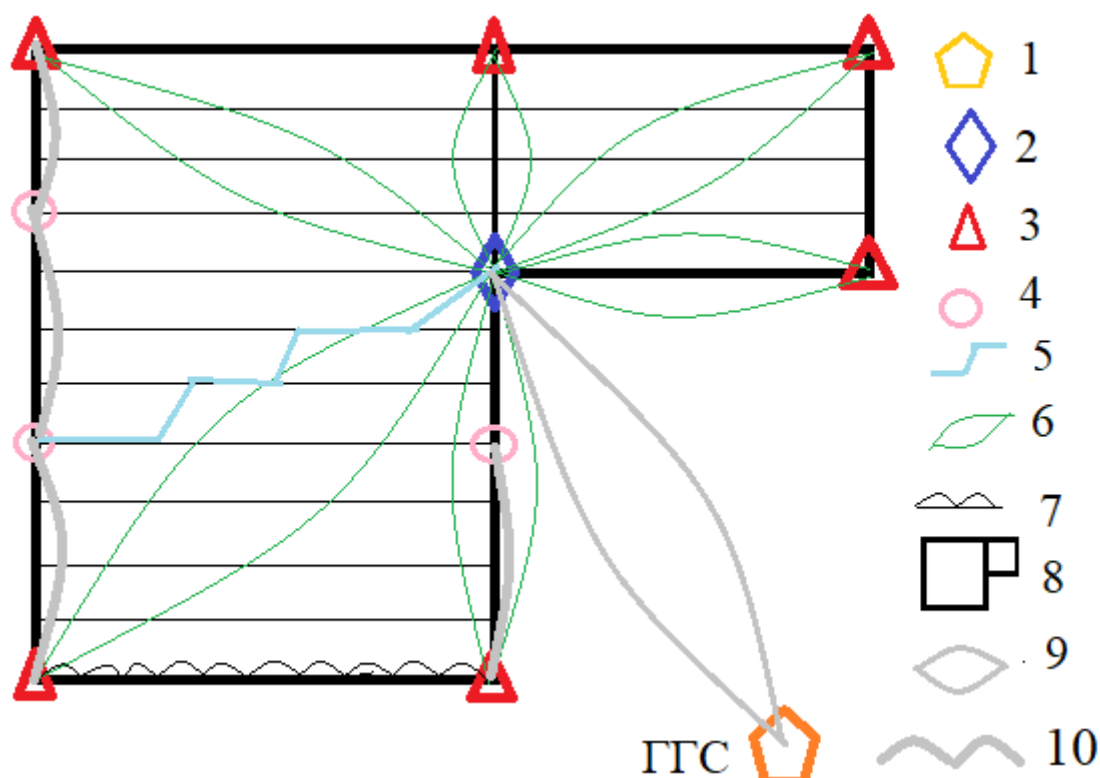


Рис. 3б Схема гравиметрической съемки

Условные обозначения к рис. 3б:

- 1 – пункт Государственной гравиметрической сети (ГГС)
- 2 – исходный пункт на участке съемки, на который передают абсолютное значение силы тяжести,
- 3 – пункты каркасной опорной сети,
- 4 – пункты заполняющей опорной сети,
- 5 – контрольный диагональный ход (показан условно схематически, контрольные пункты выбирают после окончания съемки),
- 6 – циклы передачи абсолютного значения силы тяжести от исходного пункта на пункты каркасной опорной сети (КОС),
- 7 – рейс по пунктам рядовой сети измерений,
- 8 – контур участка съемки,
- 9 – схема передачи по цикловой схеме абсолютного значения силы тяжести с пункта ГГС на исходный пункт участка.
- 10 – рейс по пунктам каркасной сети.

Пример. Для съемки масштаба 1:50000 по сети 500×250 м для местности III категории трудности (залесенная местность), при пешем передвижении норма времени 2.05 приборо-смены на съемку 80 пунктов; $\Delta t_{эф}$ для рядовой съемки равна 3 - 3.5 часа. При 8-часовом рабочем дне норма на 1 час равна $80:(8 \times 2.05) = 5$ пунктов. За $\Delta t_{эф} = 3$ часа нужно выполнить наблюдения на 15 пунктах. Следовательно, расстояние между опорными пунктами в рядовом рейсе равно $250 \times 15 = 3750 \approx 3500$ м. Опорные пункты заполняющей сети обычно располагаются на пересечении профилей с магистралями. Таким образом, расстояние между магистралями в данном примере равно 3 км. Расстояние между опорными пунктами заполняющей сети по магистрали равно $500 \times 2 = 1000$ м. Если местность позволяет, для передвижения следует использовать автомобиль. Тогда норма времени равна 1.36 приборо-смен на съемку 50 пунктов. За $\Delta t_{эф} = 2$ часа можно

выполнить съемку $(50:(8 \times 1.36)) \times 2 = 9$ пунктов. Каркасная опорная сеть создается по цикловой схеме (см. рис. 17.3). Расстояние между каркасными опорными пунктами должно быть таким, чтобы продолжительность цикла не превышала 1.5 часов, т.е. примерно 6-8 км.

Таблица 2
Нормы времени на гравиразведку с наземными гравиметрами.
Летний период. [16]

Рассто- яние между профи- лями,м	Рас- стоя- ние между пунк- тами, м	Коли- чество пунк- тов	Количество приборо-смен						
			Передвижение пешее, оператор с 1 гравиметром				Передвижение на автомобиле		
			Категория трудности						
			I	II	III	IV	I	II	III
100	20	500	4.00	4.90	5.80	7.19	-	-	-
100	100	100	1.11	1.33	1.58	2.06	0.82	1.01	1.24
250	50	80	0.73	0.88	1.05	1.31	-	-	-
500	250	80	1.37	1.56	1.83	2.48	0.77	0.98	1.25
500	500	40	1.13	1.25	1.53	2.13	0.44	0.58	0.76
1000	250	40	0.69	0.78	0.91	1.24	0.39	0.49	0.63
1000	500	20	0.56	0.62	0.76	1.06	0.22	0.29	0.38
2000	500	10	0.28	0.31	0.38	0.53	0.11	0.14	0.19
2000	1000	50	2.50	2.78	3.42	5.04	0.67	0.88	1.17
4000	2000	12.5	1.25	1.34	1.66	2.33	0.25	0.33	0.46
Рассто- яние между профи- лями, км	Рас- стоя- ние между пунк- тами, км	Коли- чество пунк- тов	Передвижение на вертолете (самолете)						
			Категория трудности						
			Ia		IIa		IIIa		IVa
			2	2	250	9.40		12.3	
5	5	40	1.79		2.29		3.57		4.52
8	8	15.62	0.784		0.976		1.50		1.89
10	10	100	5.65		6.81		10.2		12.8
20	20	25	1.81		2.25		3.19		3.85
30	30	11.11	1.09		1.27		1.73		2.05
50	50	4	0.574		0.644		0.834		0.937

5.17. Топографо-геодезические работы

Для обеспечения плановой и высотной привязок пунктов наблюдений Δg предусматриваются следующие виды топогеодезических работ:

- 1) разбивка магистралей и профилей наблюдений с пикетами, соответствующих проектной сети наблюдений;
- 2) закрепление опорных пунктов, концов профилей и магистралей на местности;
- 3) привязка участков съемки к государственной триангуляционной сети;

- 4) определение высот пунктов наблюдений;
- 5) нивелирование или иные методы определения высот для учета рельефа местности в ближней зоне в пунктах гравиметрических наблюдений;
- б) применение спутниковых навигационных систем.

Определение высот (п.4) проводится одним из нижеперечисленных методов (выберите свой вариант):

- а) техническое нивелирование;
- б) геодезическое нивелирование;
- в) гидростатическое нивелирование;
- г) барометрическое нивелирование;
- д) стереофотограмметрические способы определения высот;
- е) снятие высот с топографических карт.

В настоящее время широкое применение получили спутниковые системы позиционирования и навигации (ССП): GPS (NAVSTAR) и ГЛОНАСС. Благодаря своим уникальным возможностям ССП позволяют круглосуточно и практически при любых погодных условиях оперативно и с высокой точностью (в зависимости от класса применяемой аппаратуры - от единиц миллиметров до десятков метров) определить плановое положение и высоты пунктов геофизических наблюдений. По сравнению с традиционными методами спутниковые технологии навигационно-геодезических определений координат обеспечивают высокую производительность труда, автоматизацию полевых и камеральных работ. Но при крупномасштабных съемках (крупнее 1:10000) приходится применять техническое нивелирование

5.22. Камеральные работы

Перечисляются и обосновываются основные этапы текущей и камеральной обработки. В измеренные данные вводятся поправки за влияние лунно-суточных вариаций и смещение нуля гравиметра.

Вычисляют редукцию Буге с фактической и стандартными плотностями промежуточного слоя.

Особое внимание уделяют учету влияния дневного и подземного рельефа. Предпочтительнее использовать компьютерные технологии учета поправок, которые обеспечивают высокую точность и производительность.

Основным критерием оценки качества гравиметрической съемки является среднеквадратическая погрешность определения аномалии силы тяжести в редукции Буге:

$$\varepsilon_a = \pm (\varepsilon_{оп.}^2 + \varepsilon_g^2 + \varepsilon_B^2 + \varepsilon_{\gamma 0}^2 + \varepsilon_p^2)^{1/2},$$

где $\varepsilon_{оп.}$ - среднеквадратическая погрешность привязки полевой опорной сети (исходного пункта) к государственной опорной сети;

ε_g - среднеквадратическая погрешность определения наблюдаемых значений силы тяжести;

ε_B - среднеквадратическая погрешность определения поправки Буге;

$\varepsilon_{\gamma 0}$ - среднеквадратическая погрешность определения нормального значения силы тяжести;

ε_p - среднеквадратическая погрешность определения поправки за влияние рельефа местности.

В проекте необходимо привести вычисленные погрешности ε_g , ε_B , $\varepsilon_{\gamma 0}$, ε_a ;

$$\varepsilon_B = [(0.3086 - 0.0419\sigma_{пр.сл.})^2 \times \varepsilon_H^2 + (0.0419H)^2 \varepsilon_\sigma^2]^{1/2}.$$

Здесь ε_H - в метрах берется из колонки 5 табл. 1. Погрешность $\varepsilon_{\gamma 0}$ определяют по формуле, мГал

$$\varepsilon_{\gamma 0} = \Delta\gamma_0 * \delta x / L = \delta_{\gamma 0} * \delta x,$$

где $\Delta\gamma_0$ - изменение γ_0 на 1° широты в условиях проектного участка съемки,

L - длина дуги меридиана в 1° ;

$\delta\gamma_0$ - нормальный горизонтальный градиент силы тяжести;

δx - среднеквадратическое отклонение фактического положения гравиметрических пунктов от проектного положения в направлении меридиана (для проекта берется из колонки 6 табл.1).

Пример. При съемке масштаба 1:10000 в Свердловской области $\varepsilon_g=0.06$ мГал; $\varepsilon_B=0.2 \times 0.2=0.04$ мГал; $\varepsilon_{\gamma_0}=0.0007 \times 4=0.003$ мГал. Нормальный горизонтальный градиент для Свердловской области вычислен следующим образом; для широты 57° $\gamma_0=981658.2$ мГал, для широты 56° $\gamma_0=981574.2$ мГал. Считая Землю шаром с радиусом 6370 км, $\delta\gamma_0=(981658.2-981574.2):(6.28 \times 6370000/360)=0.0007$ мГал/м, $\varepsilon_a=(0.06^2+0.04^2+0.003^2)^{1/2}=0.072$ мГал.

Согласно табл.1 допустимая $\varepsilon_a=0.08$ мГал. Разность между расчетной и проектной ε_a включает погрешность привязки исходного пункта к государственной опорной сети и погрешность учета влияния рельефа.

Образец выполнения титульного листа пояснительной записки курсового проекта приведен в прил. 3.

Приложение 1

Категории местности по трудности передвижения [18]

I. Местность равнинная степная или лесостепная, крутизна склонов не более 10° , не более 20 % площади участка заболочено, залесено, занято строениями; не более 50 % занято пашней.

Переезд возможен на автомобиле с объездами до 20 % расстояния между пунктами наблюдений.

II. Местность слабовсхолмленная степная, лесостепная с развитой сетью неглубоких оврагов, водостоков при наличии отдельных возвышенностей с крутизной склонов до 20° ; до 40 % площади заболочено, залесено, занято строениями; до 70 % площади занято пашней.

Объезды на транспорте с пониженной скоростью не превышают 20 % расстояний между пунктами и 70 % - при переезде на автомобиле.

III. Местность сильно пересеченная, с развитой сетью оврагов, водостоков, при наличии отдельных возвышенностей с крутизной склонов до 25° ; поймы рек, заросшие кустарником; районы, где более 70 % занято пашней; слегка заболоченная тундра; территория, до 60 % занятая солончаками, заболоченными и залесенными участками или поливными культурами, строениями; пустыня, 40 % площади которой, занято незакрепленными песками; территория вблизи (до 1 км) действующих промышленных предприятий.

Объезды на вездеходах не превышают 50 % расстояния между пунктами наблюдений, на автомобилях повышенной проходимости объезды превышают 70 % расстояния между пунктами наблюдений.

IV. Местность горная, отдельные возвышенности имеют крутизну склонов до 30° ; крупные массивы поливных культур; сплошное распространение барханных песков; таежная местность или полностью покрытая лесом с буреломом и сплошными зарослями кустарника; незамерзающие болота занимают 60 % площади; болотистая тундра и лесотундра.

Перемещение возможно пешком, на лыжах, вьючным транспортом с небольшими объездами; перемещение с помощью вездехода возможно по отдельным маршрутам с объездами более 50 % расстояния между пунктами наблюдений.

Приложение 2 СТАДИИ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ

В целях повышения эффективности геологоразведочных работ их выполняют в определенной последовательности: геологоразведочный процесс делят на этапы и стадии.

При поисках и разведке **месторождений нефти и газа** выделяют три этапа - **региональный, поисковый и разведочный**.

На **региональном** этапе изучают основные закономерности геологического строения слабо изученных осадочных бассейнов и отдельных литолого-стратиграфических комплексов, оценивают нефтегазоносность крупных территорий. Региональный этап делят на две стадии:

1) стадия прогноза нефтегазоносности, на которой выделяют наиболее перспективные, первоочередные объекты;

2) стадия оценки зон нефтегазонакопления, на которой оценивают потенциальные и прогнозные ресурсы этих зон.

На **поисковом** этапе основная задача - обнаружение новых месторождений или новых залежей на ранее открытых месторождениях. Поисковый этап делят на две стадии:

1) стадия выявления и подготовки объектов к поисковому бурению, на которой в пределах перспективных зон выделяют перспективные локальные объекты-ловушки, передают их на поисковое бурение, устанавливают очередность глубокого бурения;

2) стадия поиска месторождений или залежей, на которой локальные объекты подробно изучают; стадия завершается либо получением первого промышленного притока нефти, либо обоснованием бесперспективности объекта.

На **разведочном** этапе выполняют исследования, обеспечивающие возможность разделения месторождений или залежей на промышленные и непромышленные, определить запасы углеводородов, подготовить объекты к разработке.

Этапы и стадии геологоразведочных работ (твердые полезные ископаемые) [13]

Этап, стадия	Объект изучения	Цель работ	Основной конечный результат
1	2	3	4
Этап I. Работы общегеологического минерагенического назначения			
Стадия I. Региональное геологическое изучение недр и прогнозирование полезных ископаемых.	Территория Российской Федерации, ее крупные геолого-структурные, экономические, горнорудные и нефтегазоносные регионы, шельф и ис-	Создание фундаментальной многоцелевой геологической основы прогнозирования полезных ископаемых, обеспечение различных отраслей промышленности и сельского хозяйства систематизированной геологической информацией для решения вопро-	Комплекты обязательных и специальных геологических карт различного назначения масштабов 1:1000000, 1:200000, 1:50000; сводные и обзорные карты геологического содержания масштабов 1:500000 и мельче, комплект карт, схем и разрезов глубинного строения

	ключительная экономическая зона, глубинные части земной коры, районы с напряженной экологической обстановкой, районы интенсивного промышленного и гражданского строительства, мелиоративных и природоохранных работ и др.	сов в области геолого-разведочных работ, горного дела, мелиорации, строительства, обороны, экологии и т.п.	недр Российской Федерации, ее регионов; комплексная оценка минералогического потенциала изученных территорий с выделением перспективных рудных районов и узлов, зон, угленосных бассейнов; определение прогнозных ресурсов категорий P_3 и P_2 ; оценка состояния геологической среды и прогноз ее изменения.
Этап II. Поиски и оценка месторождений.			
Стадия 2. Поисковые работы.	Бассейны, рудные районы, узлы и поля с оцененными прогнозными ресурсами категорий P_3 и P_2 .	Геологическое изучение территории поисков; выявление проявлений и месторождений полезных ископаемых; определение целесообразности их дальнейшего изучения.	Комплексная оценка геологического строения и перспектив исследованных площадей, выявленные проявления и месторождения полезных ископаемых с оценкой их прогнозных ресурсов по категориям P_2 и P_1 ; оценка возможности их освоения на основе укрупненных показателей; обоснование целесообразности и очередности дальнейших работ. Месторождения полезных ископаемых с оценкой их запасов по категориям C_2 и C_1 , а по менее изученным участкам – прогнозных ресурсов категории P_1 ; технико-экономическое обоснование временных кондиций и промышленной ценности месторождения.
Стадия 3. Оценочные работы.	Проявления и месторождения полезных ископаемых с оцененными прогнозными ресурсами категорий P_2 и P_1 .	Геологическое изучение и геолого-экономическая оценка проявлений и месторождений; отбраковка проявлений, не представляющих промышленной ценности.	
Этап III. Разведка и освоение месторождений			

Стадия 4. Разведка месторождения.	Месторождения полезного ископаемого с оцененными запасами по категориям C_2 и C_1 и прогнозными ресурсами категории P_1 .	Изучение геологического строения, технологических свойств полезного ископаемого, гидрогеологических, инженерно-геологических условий отработки месторождения; технико-экономическое обоснование промышленной ценности и освоения месторождения; уточнение геологического строения месторождения в процессе освоения на недостаточно изученных участках (фланги, глубокие горизонты) с переводом запасов из низших в более высокие категории.	Геологические, гидрогеологические, горногеологические, технологические и другие данные, необходимые для составления технико-экономического обоснования постоянных условий и освоения месторождения; подсчитанные запасы по категориям А, В, C_1 , C_2 .
Стадия 5. Эксплуатационная разведка.	Эксплуатационные этажи, горизонты, блоки, уступы, подготавливаемые для очистных работ.	Уточнение полученных при разведке данных для оперативного планирования добычи, контроль за полнотой и качеством отработки запасов	Запасы подготовленных и готовых к выемке блоков; исходные материалы для оценки полноты отработки месторождения, уточнение потерь и разубоживания полезного ископаемого.

Образец выполнения титульного листа объяснительной записки курсового проекта

Министерство образования Российской Федерации
Уральская государственная горная академия

Институт геологии и геофизики

Кафедра структурной геофизики

**ГЕОЛОГО - МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ПРОЕКТА
НА ПРОИЗВОДСТВО ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ И
МАГНИТОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ
МАСШТАБА 1:10000 НА ЮЖНОМ УЧАСТКЕ
САРБАЙСКОГО РАЙОНА С ЦЕЛЬЮ ПОИСКОВ
ЖЕЛЕЗОРУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ В 2023 г.**

Пояснительная записка курсового проекта
по дисциплине «Гравиразведка»

Оценка проекта _____

Руководитель
проф., д - р геол.-минерал. наук
Разработал
студент гр. РФ-18-3

Э.В. Иванов
Д.В. Серебряков

Екатеринбург, 2023

Таблица 2

Нормы времени на гравиразведку с наземными гравиметрами.
Летний период. [16]

Рас- стоя- ние между про- филя- ми,м	Рас- стоя- ние между пунк- тами, м	Ко- личе- ство пунк- тов	Количество приборо-смен						
			Передвижение пешее, оператор с 1 гравимет- ром				Передвижение на автомобиле		
			Категория трудности						
			I	II	III	IV	I	II	III
100	20	500	4.00	4.90	5.80	7.19	-	-	-
100	100	100	1.11	1.33	1.58	2.06	0.82	1.01	1.24
250	50	80	0.73	0.88	1.05	1.31	-	-	-
500	250	80	1.37	1.56	1.83	2.48	0.77	0.98	1.25
500	500	40	1.13	1.25	1.53	2.13	0.44	0.58	0.76
1000	250	40	0.69	0.78	0.91	1.24	0.39	0.49	0.63
1000	500	20	0.56	0.62	0.76	1.06	0.22	0.29	0.38
2000	500	10	0.28	0.31	0.38	0.53	0.11	0.14	0.19
2000	1000	50	2.50	2.78	3.42	5.04	0.67	0.88	1.17
4000	2000	12.5	1.25	1.34	1.66	2.33	0.25	0.33	0.46
Рас- стоя- ние между про- филя- ми, км	Рас- стоя- ние между пунк- тами, км	Ко- личе- ство пунк- тов	Передвижение на вертолете (самолете)						
			Категория трудности						
			Ia		IIa		IIIa		IVa
2	2	250	9.40		12.3		20.0		25.6
5	5	40	1.79		2.29		3.57		4.52
8	8	15.62	0.784		0.976		1.50		1.89
10	10	100	5.65		6.81		10.2		12.8
20	20	25	1.81		2.25		3.19		3.85
30	30	11.11	1.09		1.27		1.73		2.05
50	50	4	0.574		0.644		0.834		0.937

Пример. Для съемки масштаба 1:50000 по сети 500×250 м для местности III категории трудности (залесенная местность), при пешем передвижении норма времени 2.05 приборо-смены на съемку 80 пунктов; $\Delta t_{эф}$ для рядо-

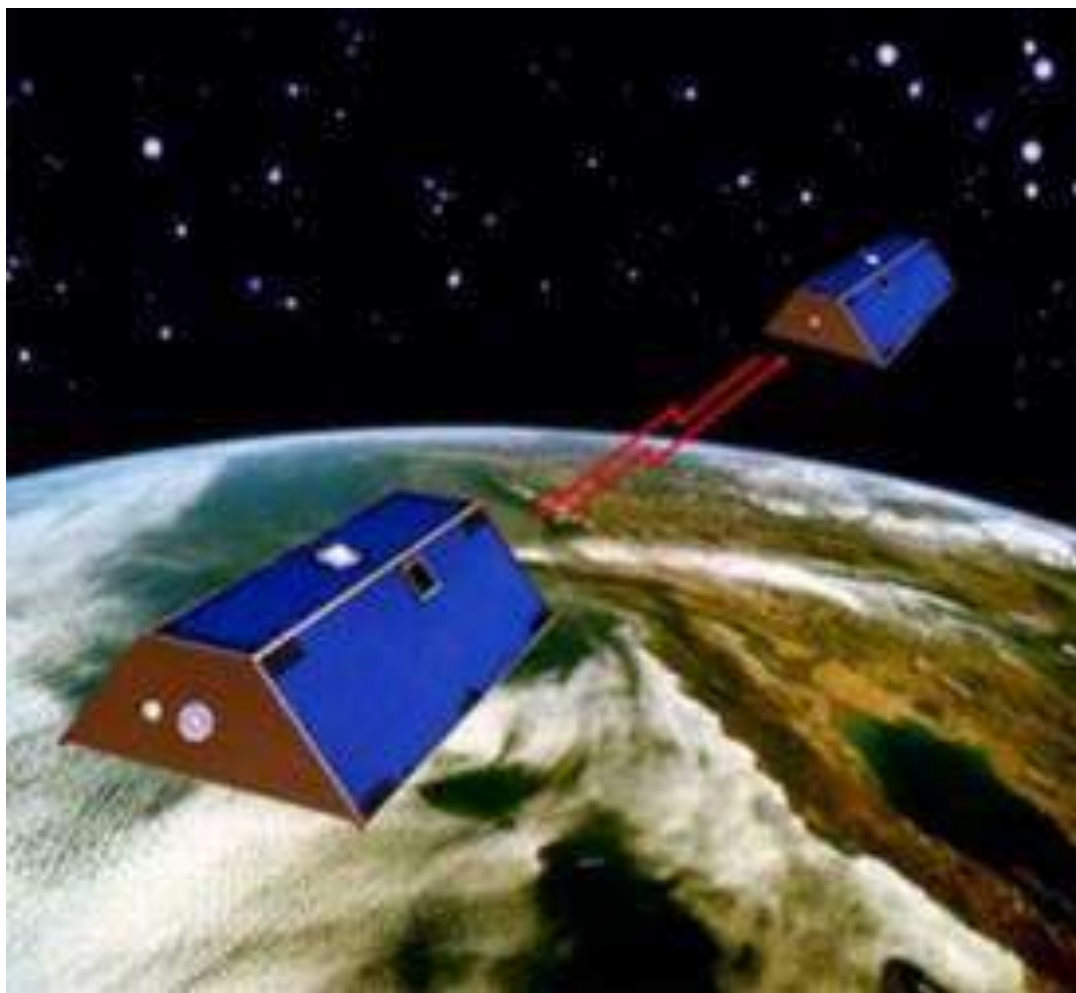
вой съемки равна 3 - 3.5 часа. При 8-часовом рабочем дне норма на 1 час равна $80:(8 \times 2.05) = 5$ пунктов. За $\Delta t_{\text{эф}} = 3$ часа нужно выполнить наблюдения

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Виноградов В.Б. Гравиразведка. Гравитационное поле Земли, аппаратура, методика измерений. Учебное пособие. Ай Пи Ар Медиа. Москва. 153 с. 2023. Текст электронный.
- 2 Виноградов В.Б., Болотнова Л.А. Гравиметры. Учебное пособие. УГГУ. – Екатеринбург. Изд. УГГУ. 2010. 67 с.
3. Гравиметры наземные: Общие технические условия. ГОСТ 13017-83.-М.: Изд-во стандартов, 1987. - 36 с.
4. Гравиметр узкодиапазонный с кварцевой чувствительной системой класса С ГНУ-КС: Техническое описание и инструкция по эксплуатации. 1989. - 46 с.
5. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецов, К.Е. Веселова. - 2-е изд.-М.:Недра, 1990. - 607 с.
6. Инструкция по гравиразведке: Единые технические требования. Часть 5. - М., 1980. - 80 с.
- 8 Долгаль А.С. Гравиметрия и магнитометрия: трансформации геопотенциальных полей. Учебное пособие. ПГНИУ. Пермь. 2022. 140 с.
9. Макет проекта на общие (детальные) поиски твердых полезных ископаемых. - М., 1982.
10. Методические рекомендации по интерпретации геофизических данных при крупномасштабном геологическом картировании. - Свердловск: Изд. УПГО “Уралгеология”, 1983. - 301 с.
11. Петрофизические методы поисков и изучения железорудных месторождений на Урале: Методические рекомендации. - Свердловск: Изд. УПГО “Уралгеология”, 1988.
12. Положение о порядке проведения геологоразведочных работ по этапам и стадиям (твердые полезные ископаемые).- М.: МПР РФ, ВИЭМС, 1999.
13. Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке: Труды конференции / Под ред. В.Н. Страхова. - М.: ОИФЗ РАН, 1997. - 234 с.
14. Справочник сметных норм. Выпуск 3. - М.: Недра, 1993.
15. Суворов В.В. Гравиразведка: Курс лекций для бакалавров. Часть -1.- Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1995. - 124 с.
16. Суворов В.В. Гравиразведка: Курс лекций для бакалавров. Часть 2. –Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1996. - 180 с.
17. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика): Справочник геофизика / Под ред. Н. В. Дортман - М: Недра, 1984.

В.Б. Виноградов, Л.А. Болотнова

ГРАВИМЕТРЫ



Екатеринбург, 2020

Для современных измерений гравитационного поля используются космические технологии. В конце февраля 2002 года российская ракета «Рокот» вывела на околоземную орбиту два одинаковых спутника GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) (рисунок на обложке). Спутники располагаются на одной и той же орбите на расстоянии 180 км друг от друга. Если первый спутник окажется над районом, где гравитационное поле чуть больше, то он немного притянется к Земле и расстояние между спутниками чуть-чуть увеличится. Расстояние между спутниками измеряется с точностью до 1 микрона, что позволяет обнаружить минутную флуктуацию гравитационного поля. На составление полной карты гравитационного поля Земли требуется один месяц. Спутники должны были летать 5 лет.

В результате подъема магмы из нижних частей земной коры к поверхности на поверхности величина ускорения свободного падения изменится. Это вызовет изменение высоты орбиты спутника GRACE. Аналогичные изменения орбиты будут наблюдаться над районами землетрясений. Таким образом, с помощью спутников GRACE осуществляется контроль за геодинамическими процессами, происходящими в недрах Земли.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Историческая справка.....	5.....
1. Гравиметры для абсолютных измерений силы тяжести.....	8
1.1 Маятниковые гравиметры.....	8
1.2 Баллистические гравиметры.....	
2. Гравиметры для относительных измерений силы тяжести.....	
2.1 Маятниковые гравиметры.....	
2.2 Гравиметры с кварцевой чувствительной системой.....	
2.3 Гравиметры с металлической чувствительной системой.....	
2.4 Инерциальные гравиметры.....	
2.5 Криогенные гравиметры.....	
2.6 Струнные гравиметры.....	
3. Скважинные гравиметры.....	
4. Вариометры и градиентометры.....	
Заключение.....	
Библиографический список.....	

Предисловие

В пособии описаны принципы работы маятниковых, баллистических, кварцевых, струнных и криогенных гравиметров, применяемых в настоящее время на производстве и в научных исследованиях. Подробнее чем другие приборы рассмотрены гравиметры ГНУК-С, L&R и CG-5, так как в настоящее время эти приборы чаще всего применяются для измерений на полевых работах. Пособие предназначено для студентов геофизических специальностей, но может использоваться студентами геологических и других специальностей при изучении дисциплин «Разведочная геофизика», «Полевая геофизика», «Прикладная геофизика» и др.

Мы благодарим Ю.М. Зюзина и А.С. Долгаля за помощь в работе и предоставленные материалы, а также В.И. Костицина, чьи замечания и советы способствовали улучшению содержания пособия. Существенную помощь оказали нам студенты геофизических специальностей ФГиГ УГГУ.

Мы сознаем, что идеального ничего в реальной жизни не бывает. Замечания по тексту просим направлять: 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, УГГУ, ФГиГ, кафедра геофизики.

Историческая справка

С начала XX века до нашего времени наша страна занимает одно из ведущих мест в гравиметрии и гравиразведке. Ей принадлежат выдающиеся достижения, которые в ближайшее время не могут быть превзойдены ни кем: мировая морская съемка, гравиметровая съемка масштаба 1:200000 огромной территории Советского Союза и другие. Эти результаты достигнуты благодаря достижениям отечественного приборостроения.

Первым в России измерениями силы тяжести занимался М.В. Ломоносов. В 1764 г. он построил пружинный гравиметр с вращательным перемещением системы. В качестве упругого элемента он использовал стальную спиральную пружину от больших часов. Он же предложил идею газового гравиметра. Первый маятниковый прибор в России был установлен в саду М.В. Ломоносова, который, к сожалению, не успел опубликовать результаты своих исследований.

Первый гравиметрический пункт в России – Петропавловск-Камчатский был определен во время кругосветного путешествия под руководством Федора Петровича Литке в 1828 г. С 1896 по 1917 на территории нашей страны маятниковыми приборами были определены более 400 пунктов. Первые измерения с транспортабельным маятниковым прибором Штернека – Штюкарта проведены в России в 1896 г. (рис. 1). Первые работы с вариометрами проведены П.М. Никифоровым в 1912 г.

Первые гравиразведочные работы в СССР с целью поисков полезных ископаемых проведены в 1921 г. под руководством П.М. Никифорова и А.А. Михайлова. Работы с маятниковыми приборами Штюкарта и вариометрами проведены в районе Курской магнитной аномалии. Истолкованием материалов занимался О.Ю. Шмидт, впоследствии известный полярник и автор гипотезы образования Земли. В 1926 г. начались гравиметрические работы с целью изучения месторождений калийно-магниевых солей в Соликамском районе

Первые отечественные маятниковые гравиметры были созданы в 1927 г. Астрономическом институте (Ленинград). В 1932 г. Постановлением Совета Труда и Оборона было предписано проведение гравиметровой съемки всей страны, инициатором которого был А.А. Михайлов. Всего должно было быть определено 18000 гравиметрических пунктов. Вскоре число пунктов измерения силы тяжести в год в нашей стране превысило число таких пунктов во всех остальных странах вместе взятых. В 1939 г. была закончена гравиметрическая съемка европейской части СССР.

В 1935 г. С.К. Гириным, А.А. Поповым, М.А. Садовским, Д.Г. Успенским опубликован первый в СССР учебник для вузов «Курс гравитационной разведки», в котором был обобщен накопленный к тому времени опыт. В середине 30-х годов в связи с созданием гравиметрической карты страны в ГАИШ (Государственный астрономический институт имени Павла Карловича Штернберга) изготавливали четырехмаятниковые гравиметры по проекту Л.В. Сорокина.

Леонид Васильевич Сорокин (1886 – 1954) наш первый «морской» гравиразведчик. Он является автором второго учебника по гравиразведке в нашей стране (издания 1941, 1950, 1953 гг.). С 1929 по 1939 гг. он проводил измерения на подводной лодке в Черном, Каспийском, Охотском, Японском морях и на Ледовитом океане. Для морских измерений Л. В. Сорокин использовал маятниковый прибор. Измерения на надводном судне впервые в Каспийском море в 1935 г. выполнил В.В. Федынский (1908 -1978), возглавлявший в 60- 70 годы XX века геофизическую службу Советского Союза. Морские гравиметрические работы в 70-е годы XX века стали самостоятельным направлением в геофизике, обеспечивающие, в том числе, космические исследования. Интересной особенностью морской гравиразведки является одновременные комплексные измерения силы тяжести гравиметрами разных типов, что позволяет эффективно избавляться от помех.

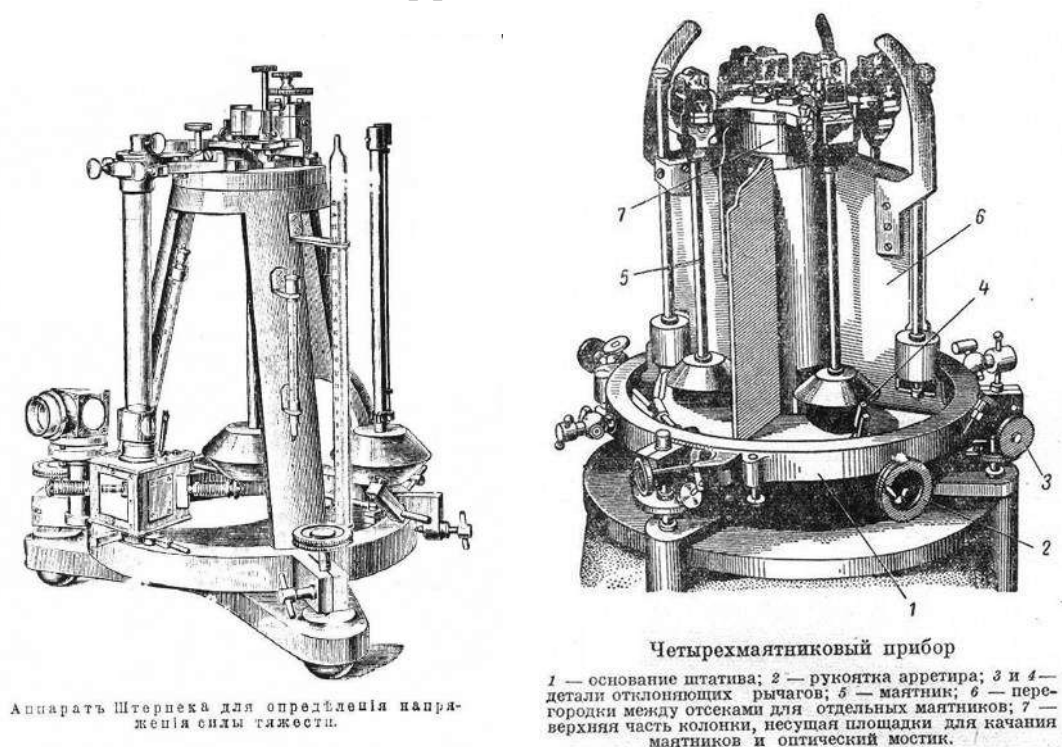


Рис. 1 Маятниковые приборы Штернека (а) и Штюкарта (б)

Только в 1953 г. была решена государственная задача аппаратного обеспечения отечественной гравиметрии и ее независимости от иностранных производителей. Первый серийный гравиметр ГАК-3М создан во ВНИИГеофизике под руководством Константина Евграфовича Веселова (1921 – 2004). Прибор обеспечивал точность измерений 0,2 – 0,3 мГал. В дальнейшем выпускались приборы ГАК-4М, ГАК-ПТ, ГАК-7Т. Гравиметры типа ГАК выпускались на семи заводах в течение 40 лет. К.Е. Веселов обосновал возможность измерений силы тяжести на качающемся корабле и летящем самолете. Он же предложил способ измерения в движении демпфированным гравиметром. К.Е. Веселов автор двух учебников по гравиразведке.

Применение гравиметров существенно упростило процесс измерений и резко повысило производительность, вследствие чего в 1968 г. был прекращен выпуск вариометрической аппаратуры. В 1950 г. за разработку кварцевого гравиметра Поддубному, Самсонову и Серову присуждена Сталинская премия. В 1951 г. За разработку пружинных гравиметров для геофизической разведки была присуждена Сталинская премия (ныне премия Президента) Сорокине Л.В., Молоденскому С.М., Федынскому В.В., Лозинской А.М., Калишевой Л.В., Сажиной Н.Б.

В 1969 г. в Институте автоматики и электрометрии СО АН СССР под руководством Глеба Петровича Арнаутова – специалиста по измерению силы тяжести лазерным интерферометрическим способом, разработан транспортабельный баллистический гравиметр ГАБЛ. Под его руководством в нашей стране и за рубежом созданы гравиметрические пункты для изучения неприливных изменений силы тяжести. Появление гравиметра ГАБЛ и его американского аналога JLLA (разработчики Фаллер и Хэммонд) повлекли поистинне революционные изменения в гравиметрии, например, повсеместное изменение абсолютных значений силы тяжести на 14 мГал в 1971 г., резкое увеличение числа пунктов с известным абсолютным значением силы тяжести.

С 1989 года на производстве появились отечественные и зарубежные компьютеризированные гравиметры. В настоящее время в нашей стране их серийное изготовление не проводится.

Существенный вклад в разработку гравиметров нашей страны внесли Сорокин Л.В., Молоденский С.М., Федынский В.В., Лозинская А.М., Калишева Л.В., Лукавченко П.И., Сажина Н.Б., Петров Л.В., Самсонов Н.Н., Поддубный С.А., Веселов К.Е.. Методика полевых работ с кварцевыми гравиметрами разработана сотрудниками Пермского государственного университета и Свердловского горного института И.К. Маловичко, В.И. Костицыным, А.Я. Ярошем.

В настоящее время лидерами в производстве гравиметров являются фирмы: Scintrex, La Coste Romberg, Sodin.

Гравитационный вариометр, способный регистрировать малые изменения силы тяготения, основан на принципе весов Кулона, с которыми с конца XVIII века в разных странах выполняли определения гравитационной постоянной. Весы Кулона содержат легкое горизонтальное коромысло с одинаковыми грузами (пробными массами) на концах. Коромысло подвешено в середине на тонкой крутильной нити, чувствительной к малым силам закручивания.

В однородном гравитационном поле, когда сила тяжести g постоянна по величине и направлению, равновесие коромысла наступило бы при незакрученной нити. В реальном, неоднородном поле Земли различие силы тяжести в точках, где расположены массы, приводит к возникновению горизонтальной пары сил, и коромысло поворачивается, пока действие пары сил не уравнивается действием упругой силы закрученной нити. Таким образом, угол закручивания (поворот коромысла) будет мерой неоднородности поля силы тяжести. Положение коромысла можно регистрировать с помощью укрепленного на нем зеркала.

В гравитационном вариометре измеряют четыре величины, описывающие неоднородное гравитационное поле Земли (вторые производные потенциала силы тяжести), и находят величину и направление наибольшего изменения силы тяжести на поверхности Земли (вектор горизонтального градиента).

Первый гравитационный вариометр был создан в 1890 г. знаменитым венгерским физиком бароном Роландом фон Этвешем. В нашей стране вариометр был впервые сконструирован в 1924 г. в Физико-математическом институте АН профессором П.М. Никифоровым (1884-1944) по типу вариометра Этвеша. В том же году с ним проведены работы с целью поисков платины в Нижнетагильском округе. В 1925 г. Никифоров провел разведку каменной соли в Оренбургской области. Под руководством П.М. Никифорова в 1925 г. проведены измерения вторых производных гравитационного потенциала для изучения железорудного месторождения. Несколько позднее такие работы проведены на месторождениях хромитов, месторождениях углеводородов, угля и рудных месторождениях.

Партия вариометров Никифорова ИПГ-1930 (институт прикладной геофизики) была изготовлена в 1930 г. В 1928-1929 гг. в Ленинградском астрономическом институте известный астроном, геодезист и геофизик профессор Б.В. Нумеров создал вторую конструкцию с наклонным прямолинейным коромыслом. В 1929 г. в нашей стране началось серийное производство вариометров. В предвоенные годы и во время Великой Отечественной войны объемы работ с вариометрами превышали объемы работ с гравиметрами. Во время Великой отечественной войны объем гравиметрических работ не только не уменьшился, но даже увеличился.

В отечественной и мировой практике наиболее распространенными были вариометры двух типов: приборы Z-40 с крутильной системой в виде повернутой буквы Z, построенный немецким геофизиком В. Швейдаром (1877-1959) в 1924 г., и приборы S-20 с крутильной системой Нумерова. Вариометры Z-40 и S-20 выпускались с 1935 г. заводом "Геологоразведка" в Ленинграде.

Крутильные нити вариометров толщиной всего 30 мкм были изготовлены из сплава платины и иридием или из вольфрама и для придания необходимой прочности и постоянства упругих свойств подвергнуты специальной механической и термической обработке. Коромысло весов сделано из алюминиевой или латунной трубки, грузы - свинцовые позолоченные. Весы защищены от внешней среды тремя футлярами, разделенными воздушной прослойкой. В нерабочем положении коромысла закреплены арретирным устройством и нити не нагружены.

На полевом пункте прибор помещают на подставке высотой 1 м. Работой вариометра управляет часовой механизм. Все наблюдения на пункте занимают 1,5 - 2 часа. Карты, составленные по результатам вариометрических съемок, отражают строение верхних слоев земной коры.

В 1920-1940-х гг. гравитационные вариометры широко применялись для разведки месторождений металлов, нефти, угля, причем расстояние между пунктами съемки составляло иногда всего 5-10 м. Исключительные заслуги в создании приборов и применении вариометров для разведки ископаемых

принадлежала Б.В. Нумерову. Он был инициатором и исполнителем вариометрических съемок в разных районах страны и создал теоретические основы геологического истолкования результатов.

В нашей стране число вариометрических пунктов достигало десятков тысяч ежегодно, и в результате этих работ было открыто много месторождений. С начала 1950-х гг., после появления более производительных приборов гравиметров, разведочные работы с вариометрами были практически прекращены. Современные гравитационные вариометры применяют преимущественно для очень детальных исследований поля силы тяжести малых участков, например для обнаружения подземных помещений на историко-архитектурных территориях. В последние десятилетия в разных странах пытаются создать вариометр для измерений на подвижном носителе (корабль, самолет, искусственный спутник Земли), что является трудной задачей.

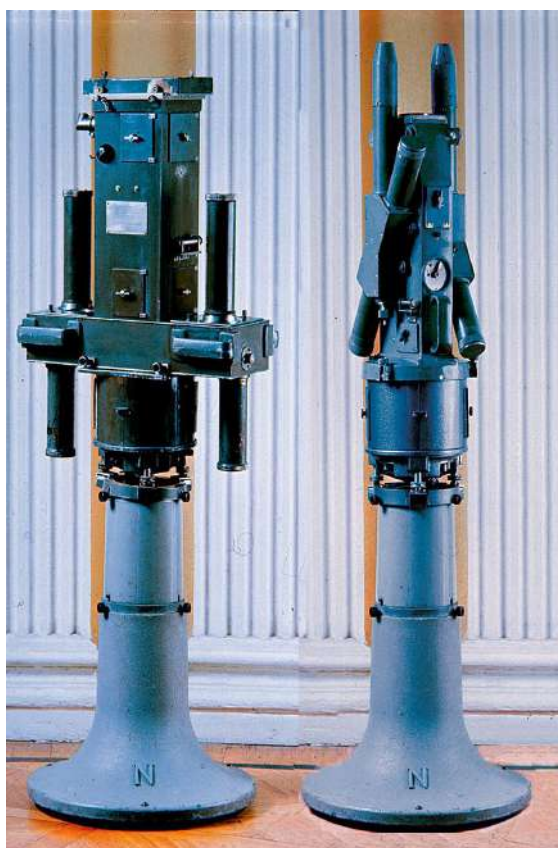


Рис. 2 Вариометр Z-40 (слева) и градиентометр ГРБМ-2 (справа)

1. Гравиметры для абсолютных измерений силы тяжести

Измерение поля силы тяжести осуществляют приборами, называемыми *гравиметрами*. Существует несколько принципиально различающихся конструкций гравиметров. Способы измерения силы тяжести основаны на физических явлениях, на которые она оказывает заметное влияние: свободное падение тел, колебание маятника или нагруженной струны, прецессия тяжелого гироскопа, искривление поверхности вращающейся жидкости, парение проводника с током или заряженной частицы в поле постоянного магнита, подъем жидкости в капилляре, равновесие пружинных или крутильных весов. Методы измерения разделяют на динамические, если проводятся наблюдения движение тела в гравитационном поле, и статические, если наблюдают равновесие пробной массы, на которую действуют сила тяжести и некоторая компенсирующая сила. В зависимости от природы компенсирующей силы статические гравиметры разделяют на жидкостные, газовые, электрические (электростатические, индукционные, пьезоэлектрические, электромагнитные, магнитные), механические. Гравитационный каротаж в Кольской сверхглубокой скважине проведен с гравиметром на базе пленочного акселерометра до глубины 5,5 км.

Измерения называют абсолютными, если измеряется полная величина силы тяжести g , измерения называются относительными, если измеряется приращение силы тяжести между двумя пунктами наблюдения. «Каждое измерение силы тяжести это тонкий физический эксперимент» (К.Е. Веселов).

1.1 Маятниковые гравиметры

Первое измерение силы тяжести было выполнено баллистическим методом Г. Галилеем в 1590 г. Долгое время измерения абсолютной величины силы тяжести (g), проводили маятниковым способом (рис. 1.а). В этом способе измерения основаны на зависимости периода T колебаний маятника от величины поля силы тяжести.

Математическим маятником называют идеальную конструкцию, состоящую из точечной массы m , подвешенной на идеально гибкой, нерастяжимой и невесомой нити длиной l в абсолютном вакууме (рис. 1.б.). Период колебаний математического маятника равен (Гюйгенс):

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} [1 + (1/4)\sin^2(\alpha/2) + (9/64)\sin^4(\alpha/2) + \dots]. \quad (1)$$

где α - амплитуда колебания.

Математический маятник построить нельзя. Математический маятник - идеальное устройство, практически нереализуемое, в действительности пользуются тяжелыми грузами, висящими на металлическом стержне или проволоке. Формулы расчета g при этом усложняются. Для физического маятника период колебаний определяется той же формулой математического маятника, если под длиной l понимать приведенную длину маятника.

Приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и физический маятник. Ее величина определяется выражением:

$$l = J / (aM), \quad (2)$$

где $J = \int r^2 dm$ – момент инерции маятника относительно оси вокруг, которой происходят колебания маятника, a – расстояние от центра тяжести маятника до оси колебаний.

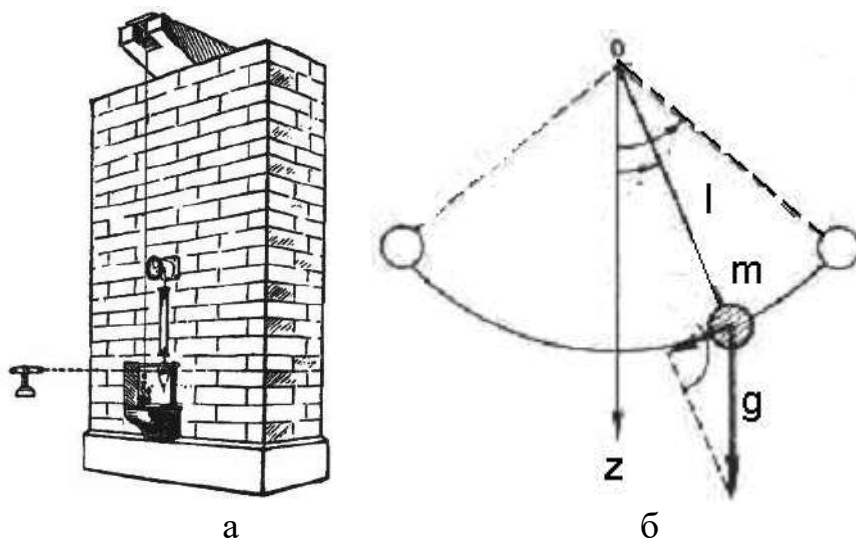


Рис.2 Маятниковый гравиметр Ж. Ш. Борда (1790) - а. К выводу формулы периода колебаний математического маятника - б

При наблюдениях угол α не превышает 0.5° второе слагаемое в (1) не превосходит $7 \cdot 10^{-7}$, поэтому период колебаний можно вычислить по формуле (рис. 1.б):

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (3)$$

Таким образом, измеряя период колебаний маятника T , находят g . Если от оси качания физического маятника через центр тяжести отрезок равный приведенной длине получим точку, которую называют центром качаний. Измеренное значение силы тяжести относят к центру качаний.

В 1818 г. Х Кэтер для определения абсолютных значений силы тяжести предложил пользоваться стержневыми маятниками, которые в ходе измерений переворачивают. В результате получают периоды колебаний T_1 и T_2 , по которым вычисляют T .

Абсолютные маятниковые измерения крайне трудоемки. Одно измерение может проводиться в течение суток. На результаты маятниковых определений влияют ошибки измерения длины маятника и времени. Измерения должны проводиться с точностью 0.025 мкм и 0.05 мкс. Ошибки вносят упругие деформации лезвия опорной призмы маятника, изменения температуры которые приводят к изменению длины маятника, сокачание штатива на котором укреплен маятник, изменения магнитного поля, трение маятника о воздух. Искажения вносит разная амплитуда колебаний. При измерениях на

подвижном основании необходимо учитывать влияние возмущающих горизонтальных и вертикальных ускорений.

Ф.В. Бессель предложил во избежание ошибок определения длины маятника измерять периоды колебаний маятника T_1 и T_2 при разных длинах нити l_1 и l_2 . В этом случае расчетная формула принимает вид:

$$g=4\pi^2(l_1 - l_2)/(T_1^2 - T_2^2) \quad (4)$$

При измерениях по способу Бесселя достаточно знать разность длин маятников, а этот параметр определяется значительно точнее, чем длина маятника. Существенно уменьшаются систематические ошибки, связанные с подвесом маятника.

До 70-х годов XX века существовала сеть физических лабораторий, в которых силу тяжести определяли с помощью стационарных маятниковых приборов. Нитяной маятник Финского геодезического института (1970 г.) представлял собой груз 12×12 см, подвешенный на нити диаметром 0.6 мм на стержне вмурованном в скалу. Регулируемый подвес позволял менять длину маятника с 7.8 м на 3.8 м при неизменной оси качания. Разность длин маятников измерялась интерференционным методом с точностью 1 мкм, единичный период колебаний измеряли с точностью 0.02мс.

Со времен Ф. В. Бесселя до 70 гг. XX века определение абсолютного значения ускорения свободного падения было крайне сложным экспериментом. Всего за этот промежуток времени выполнено несколько десятков таких определений. Точность определений силы тяжести маятниковым способом составила 0,3 мГал. Существенного повышения точности измерений g удалось достичь баллистическим способом.

1.2 Баллистические гравиметры

Создание транспортабельных баллистических гравиметров стало переломным в гравиметрии. С 1967 г. определения силы тяжести на пунктах государственной гравиметрической сети стали абсолютными. Разработки маятниковых приборов прекращены.

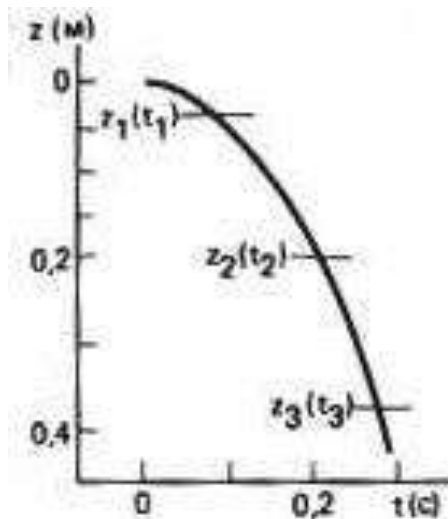


Рис. 2 К выводу формулы определения силы тяжести баллистическим методом

Абсолютное значение поля силы тяжести в настоящее время измеряют с помощью баллистических гравиметров. Метод измерения абсолютных значений силы тяжести основан на регистрации времени свободного падения пробной массы m , свободно падающей в гравитационном поле в вакуумированной камере с известной высоты. Уравнение движения свободно падающего тела за время t определяется формулой (рис. 2):

$$m \cdot d^2z/dt^2 = mg(z) \quad (5)$$

Откуда

$$z = z_0 + V_0 t + gt^2/2 \quad (6)$$

где V_0 - начальная скорость.

Величины z_0 , V_0 точно неизвестны, g можно найти наблюдая тело по крайней мере в трех положениях, т. е. измеряя каждый раз пройденный путь и время (рис. 2):

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + V_0 t_1 + gt_1^2/2 \\ z_2 &= z_0 + V_0 t_2 + gt_2^2/2 \\ z_3 &= z_0 + V_0 t_3 + gt_3^2/2 \end{aligned} \quad (7)$$

Откуда

$$g = \frac{2\{(z_1 - z_2)(t_1 - t_3) - (z_1 - z_3)(t_1 - t_2)\}}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)} \quad (8)$$

С учетом неоднородности гравитационного поля уравнение движения пробной массы имеет вид более сложный вид:

$$z_i = z_0 + V_0 t_i + \frac{1}{2} g t_i^2 + \frac{1}{6} \gamma V_0 t_i^3 + \frac{1}{24} \gamma g t_i^4 + \varepsilon, \quad (9)$$

где γ вертикальный градиент силы тяжести в пункте наблюдения. В результаты вводится поправка за конечность скорости света.

Фактически во время одного броска количество измерений траектории z и t достигает нескольких сотен. После N измерений во время падения пробной массы методом наименьших квадратов получим формулу определения силы тяжести:

$$g = \frac{2}{\Delta} \begin{vmatrix} N & \sum t_i & \sum S_i - \frac{1}{6}\gamma(V_1 t_i^3 + \frac{1}{4}g_1 t_i^4) \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum [S_i - \frac{1}{6}\gamma(V_1 t_i^3 + \frac{1}{4}g_1 t_i^4)]t_i \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum [S_i - \frac{1}{6}\gamma(V_1 t_i^3 + \frac{1}{4}g_1 t_i^4)]t_i^2 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} N & \sum t_i & \sum t_i^2 \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{vmatrix}.$$

Точность определения g зависит от точности измерения пространственных и временных интервалов. При обработке вводят поправки за остаточное давление в вакуумированной камере и неоднородность гравитационного поля. Главным источником погрешности измерений при измерении методом свободного падения оказываются микросейсмы.

Первый баллистический гравиметр JLLA построен в Университете Весли (США) Фаллером и Хэмондом в 1968 г. Его главной частью был лазерный интерферометр для наблюдения свободного падения уголкового отражателя. Конечным результатом измерений были величина силы тяжести и значение ее вертикального градиента. При поддержке ВВС США разработка и совершенствование гравиметра проводились до 1980 г. В настоящее время гравиметр совершенствуется далее. Баллистический гравиметр создан в Объединенном институте астрономических исследований (США, Колорадо). Только в 196 – 1994 гг. построено 10 приборов FG5. В настоящее время число гравиметров FG5 достигает нескольких десятков, он применяется во многих странах – Австрии, Франции, Германии, Испании. В России FG5 установлен в подземной геодинамической Баксанской обсерватории для мониторинга территории Северного Кавказа.

В Европе совместными усилиями Италии, Франции и японского геофизика Сакумы также создан транспортабельный баллистический гравиметр, который в усовершенствованном виде с 1980 г. стал выпускаться под маркой А-40. Транспортабельный баллистический гравиметр создан в Институте метрологии Украины (Харьков). Портативный баллистический гравиметр PBGM-97 создан в Польше. Его вес не превышает 50 кг.

В нашей стране в Институте автоматики и электрометрии СО РАН в Новосибирске под руководством Г. П. Арнаутова создан баллистический гравиметр ГАБЛ, основанный на способе наблюдения свободно падающего тела (рис. 3). Гравиметр состоит из вакуумированной камеры, где происходит падение пробной массы, электронно-счетного блока с кварцевым генератором для измерения времени, лазерного интерферометра для измерения пути,

устройства автоматического управления и регистрации результатов измерений. Мерой длины является длина волны излучения гелий-неонового лазера. Мерой времени является рубидиевый стандарт частоты.

Физически гравиметр состоит из вакуумной камеры цилиндрической формы, в верхней части которой укреплен электромагнит удерживающий пробную массу – уголкового отражателя (рис. 3.а). Уголкового отражателя в верхнем положении удерживается с помощью ферритовой пластины, закрепленной в корпусе отражателя и трех игл, укрепленных в корпусе цилиндра.

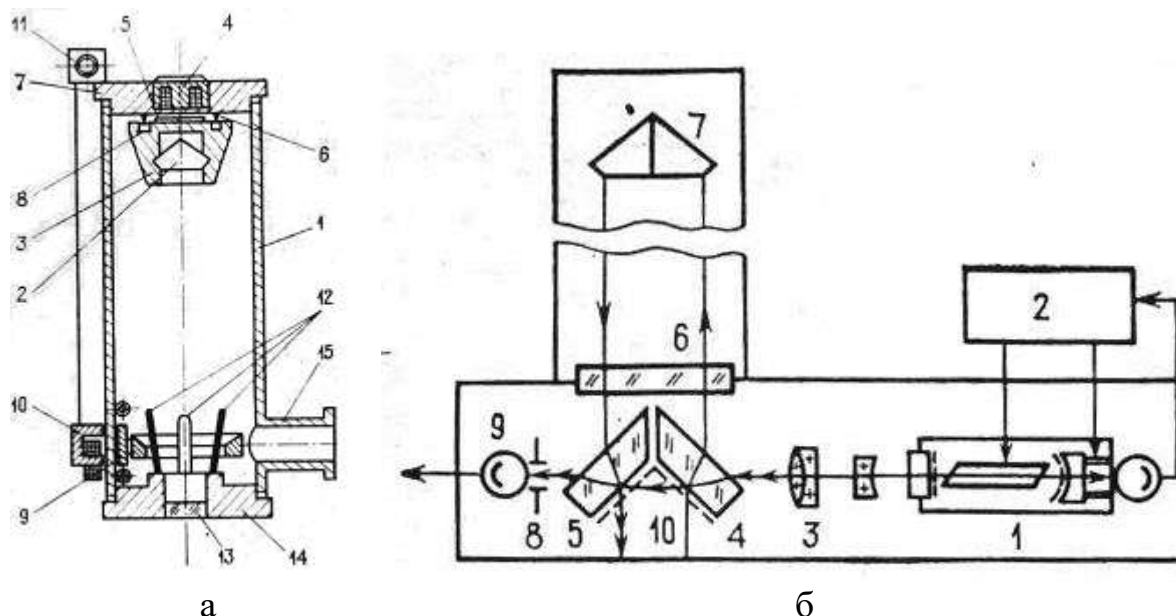


Рис. 3 Схема баллистического гравиметра ГАБЛ (а):

1 – вакуумированная камера, 2 – уголкового отражателя, 3 – корпус, 4 – электромагнит, 5 – ферритовая пластина, 6 – иглы, 7 – цилиндр, 8 – опоры, 9 – каретка, 10 – электромагнит, 11 – электромотор, 12 – трехлепестковый пружинный клин

Регистрирующее устройство гравиметра ГАБЛ (б):

1 – многочастотный гелий-неоновый лазер, 2 – система стабилизации частоты излучения и питания лазера, 3-7 – двухлучевой интерферометр, 8 и 9 – выходное регистрирующее устройство

Корпус прибора изготовлен из немагнитной нержавеющей стали. При размыкании контактов электромагнита уголкового отражателя свободно падает, а в нижней части цилиндра улавливается трехлепестковым пружинным клином. Подъем пробной массы производится с помощью электромагнита, укрепленного с внешней стороны вакуумной камеры. Электромагнит, управляемый электромотором движется по внешней стороне камеры и поднимает пробную массу в исходное положение. Падение регистрируется лазерным двухлучевым интерферометром Майкельсона, который позволяет проводить измерения с точностью до 10^{-9} измеряемой длины (рис. 3.б). Для измерения силы тяжести с требуемой точностью необходимо расстояния

измерить с точностью ± 0.5 нм, - время с точностью 0.2 нс. Искажения, возникающие вследствие взаимодействия с электромагнитными полями, ослабляют экранированием.

Измерения начинаются спустя 0.08 секунды после начала падения. Процесс измерений полностью автоматизирован. Подготовка прибора к измерениям требует 12 часов. При измерениях проводится серия падений пробной массы. Наблюдения проводят не в трех, а в большем числе положений (до 600) и в результате обработки наблюдений методом наименьших квадратов находят наиболее вероятное значение силы тяжести.

Прибор ГАБЛ как транспортабельный используется с 1976 г. Комплект гравиметра ГАБЛ состоит из 18 ящиков общим весом 700 кг, высота прибора 2 м. Его модификация середины 80-х годов ГАБЛ-М обладает весом 250 кг и позволяет проводить измерения с погрешностью ± 10 мкГал.

Одновременные испытания прибора ГАБЛ и его зарубежных аналогов (сличения, ICAG), проведенные в Международном бюро мер и весов (МБМВ, ВМР, г. Севр) в 1981, 1997, 2001, 2005 и другие годы, подтвердили паспортные характеристики приборов. В 2005 г. в сличении участвовали 19 гравиметров из разных стран, 12 из них гравиметры FG5 (рис. 4). В нем принимали участие Украина с прибором TBG, Канада с прибором JILA, США с приборами FGC-1 и A-10, Италия с прибором IMG-2 и другие.



Рис. 4 Баллистические гравиметры ГАБЛ-Э (слева) и FG5 (справа)

Последнее сличение состоялось в сентябре – октябре 2009 г. с участием 25 приборов. К настоящему времени проведено семь таких сличений. Подобные сличения проводятся в нашей стране для отечественных приборов.

Для Федеральной службы геодезии и картографии России изготовлено 6 баллистических приборов. В 1983 – 1994 гг. баллистическими гравиметрами в нашей стране были определены шесть фундаментальных пунктов с точностью

0,01 – 0,005 мГал. Приборы применялись для изучения особенностей лунно-солнечных вариаций поля и непривливаемых изменений силы тяжести.

В настоящее время измерения силы тяжести проводятся с прибором ГАБЛ–Э (гравиметр абсолютный баллистический лазерный эталонный, рис. 4).

Технические характеристики ГАБЛ–Э

1) Погрешность измерения	5 мкГал;
2) Вес	180 кг.
3) Габариты: оптико-механический блок	1200×700×700 мм
Электронный блок	620×560×660 мм
4) Потребляемая мощность	2 кВт

В ЦННИГаК малой серией выпускался гравиметр близкой конструкции под маркой ГБЛ с погрешностью измерений лучше 0.01 мГал. Дальнейшим совершенствованием баллистических гравиметров явилась разработка тем же институтом полевого варианта прибора ГБЛ-П.

Метрологическими сравнениями, проведенными в Международном бюро мер и весов в Париже в подтверждено, что ГАБЛ–Э по точности и надежности измерений находится на уровне лучших мировых аналогов, разработанных в США, Франции и Италии. ГАБЛ–Э по весу и габаритам вдвое превосходит зарубежные аналоги.

В настоящее время в нескольких странах ведется работа по разработке баллистического гравиметра с небольшим весом и габаритами для проведения рядовой съемки.

2. Гравиметры для относительных измерений силы тяжести

2.1 Маятниковые гравиметры

Намного производительнее относительные измерения, при проведении которых один и тот же маятник переносится из одного пункта наблюдения (А) в другой (В) и сравниваются периоды колебаний маятника. Для проведения относительных измерений не нужно знать параметры маятника.

$$T_A = 2\pi(l/g_A)^{1/2}, \quad T_B = 2\pi(l/g_B)^{1/2}, \quad g_A/g_B = T_B^2/T_A^2, \quad (10)$$

Маятниковый прибор Штюкарта был предназначен для относительных измерений. Маятниковые комплексы «Агат», разработанные ЦНИИГАиК, широко применялись при проведении мировой морской съемки. Комплекс состоит из трех комплектов двухмаятниковых приборов, пульта управления, блоков регистрации и питания, вакуумного насоса, стандарта частоты и др. Повышение точности прибора достигается увеличением кратности измерений. Кварцево-металлические полусекундные маятники представляют собой кварцевый стержень, к нижнему концу которого приварен цилиндрический груз из вольфрамо-никелево-медного сплава. Два маятника в одном приборе качаются в противофазе. Корпус прибора герметичен и в нем с помощью сосуда Дьюара и активного термостата поддерживается постоянная температура. Регистрация колебаний маятников осуществляется

фотоэлектронным регистратором. Погрешность измерения 0,1 мГал, вес прибора 8 кг.

В странах, где значительные микросейсмические помехи, например, Японии и Голландии, применялся трехмаятниковый прибор.

2.2 Гравиметры с кварцевой чувствительной системой

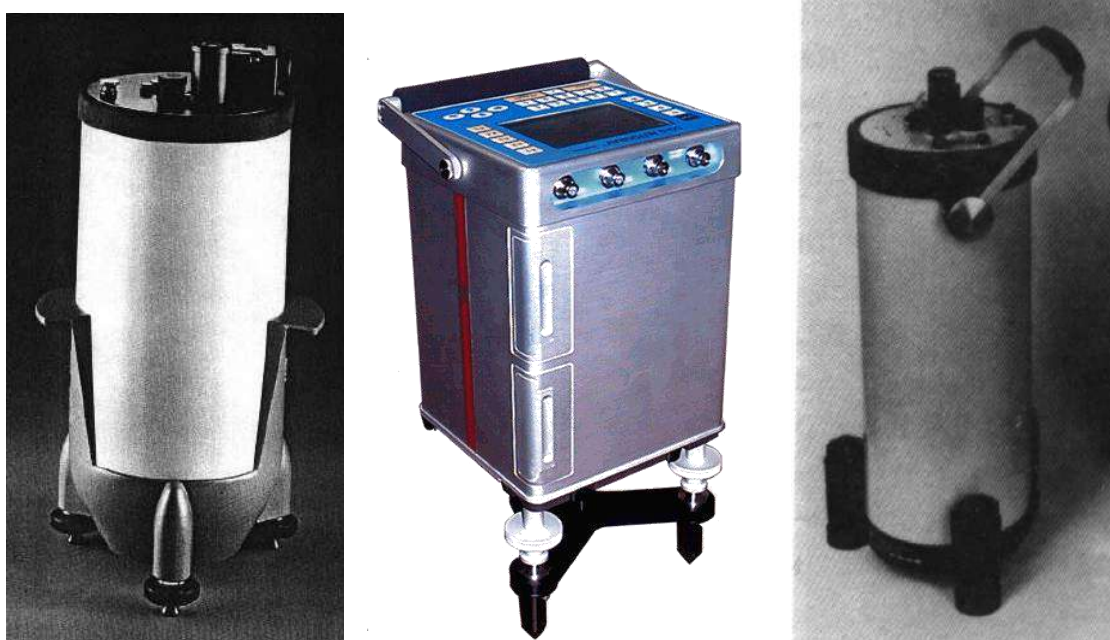


Рис. 5 Гравиметры (слева направо) Содин, CG-5, ГНУК-С

УСТРОЙСТВО ГРАВИМЕТРА ГНУ-КС

Гравиметр наземный узкодиапазонный с кварцевой чувствительной системой класса точности С (ГНУ-КС) предназначен для относительных измерений силы тяжести в наземных и подземных условиях. Измерение силы тяжести основано на принципе пружинных весов; способ измерения - компенсационный. Гравиметр применяется для гравиметрической съемки при поисках и разведке месторождений полезных ископаемых и геологическом картировании (рис. 5).

Технические характеристики гравиметра ГНУ-КС приведены ниже:

Верхний предел измерений без перестройки диапазона, мГал	80
Верхний предел измерений с перестройкой диапазона, мГал	6000
Чувствительность (оценивается по окулярной шкале), дел./мГал	2.5
Смещение нуля-пункта за сутки, не более, мГал	2.0
Длительность переходного процесса, не более, мин.	3
Средняя квадратическая величина погрешности единичного измерения, мГал	± 0.060
Габариты гравиметра (без упаковки):	
а) высота, мм	470
б) диаметр (с треногой), мм	210
Масса гравиметра (без упаковки), кг	5
Цена деления, мГал/об	- (5.0 - 8.5)
Время наблюдения на пункте, мин.	3
Температурный коэффициент, мГал/град.	0.0002 – 0.0015

Гравиметры типа ГНУ-КС характеризуются высокой точностью измерений силы тяжести, компактностью, простотой в обращении, высокой производительностью. Недостатками кварцевых гравиметров являются: отсутствие арретира для основного индикатора кварцевой системы, незакономерное смещение нуля-пункта в зависимости от температуры и условий эксплуатации, главным образом режима транспортировки. Основными элементами гравиметра являются чувствительная система и индикатор малых перемещений.

Устройство чувствительной системы гравиметра ГНУ-КС

Упругая кварцевая система (рис. 6) изготавливается из химически чистого плавленого кварца и состоит из трех основных частей: чувствительного элемента - вертикального сейсмографа Голицына; измерительного устройства и приспособления для температурной компенсации. Князь Борис Борисович Голицын разработал сейсмограф для регистрации упругих колебаний возбуждаемых при землетрясениях в 1913 г. Чувствительный элемент системы - астазированный вертикальный сейсмограф Голицына состоит из маятника (рычага) (5), удерживаемого в равновесии силой закручивания нитей подвеса (9) и упругой силой главной пружины (1).

Основой крепления деталей чувствительной упругой системы является кварцевая рамка сложной формы. На концах рамки крепится тонкая кварцевая нить (9). В центральной части нити крепится маятник с платиновым грузиком массой 0.03 г и тонким кварцевым волоском (индексом) на конце. Маятник с грузиком является основным чувствительным элементом-индикатором, на который действует сила тяжести.

Главная пружина своим верхним концом крепится к основанию прибора, а нижним - к отростку маятника.

Измерительное устройство системы состоит из рамки (8), которая вращается на нитях (9). На конце рамки имеется стержень, к которому прикреплен измерительная пружина (2). Верхний конец пружины (2) прикрепляется к подвижному штоку измерительного устройства. Диапазонная пружина (3) своим нижним концом прикреплена к отростку маятника, верхним - к подвижному штоку диапазонного устройства.

Принцип действия системы заключается в следующем: при изменении силы тяжести маятник (5) будет отклоняться от первоначального положения равновесия до тех пор, пока силы, вызванные деформацией пружины (1) и нитей подвеса маятника (9), не уравновесят силу тяжести. Угол этого отклонения является мерой силы тяжести.

Главная пружина (1) соединена с маятником (5) таким образом, что при изменении силы тяжести возникает дополнительный упругий момент сил главной пружины, знак которого совпадает со знаком изменения силы тяжести. Поэтому малые изменения силы тяжести вызывают относительно большие деформации пружины (1) и, следовательно, большие углы поворота маятника. Такие системы называются **астазированными** (неустойчивыми).

Уравнение равновесия чувствительной системы:

$$M_1(\varphi)g + M_2(\varphi) = 0, \quad (12)$$

где $M_1(\varphi)$ – момент силы тяжести, $M_2(\varphi)$ – момент упругих сил кварцевой чувствительной системы.

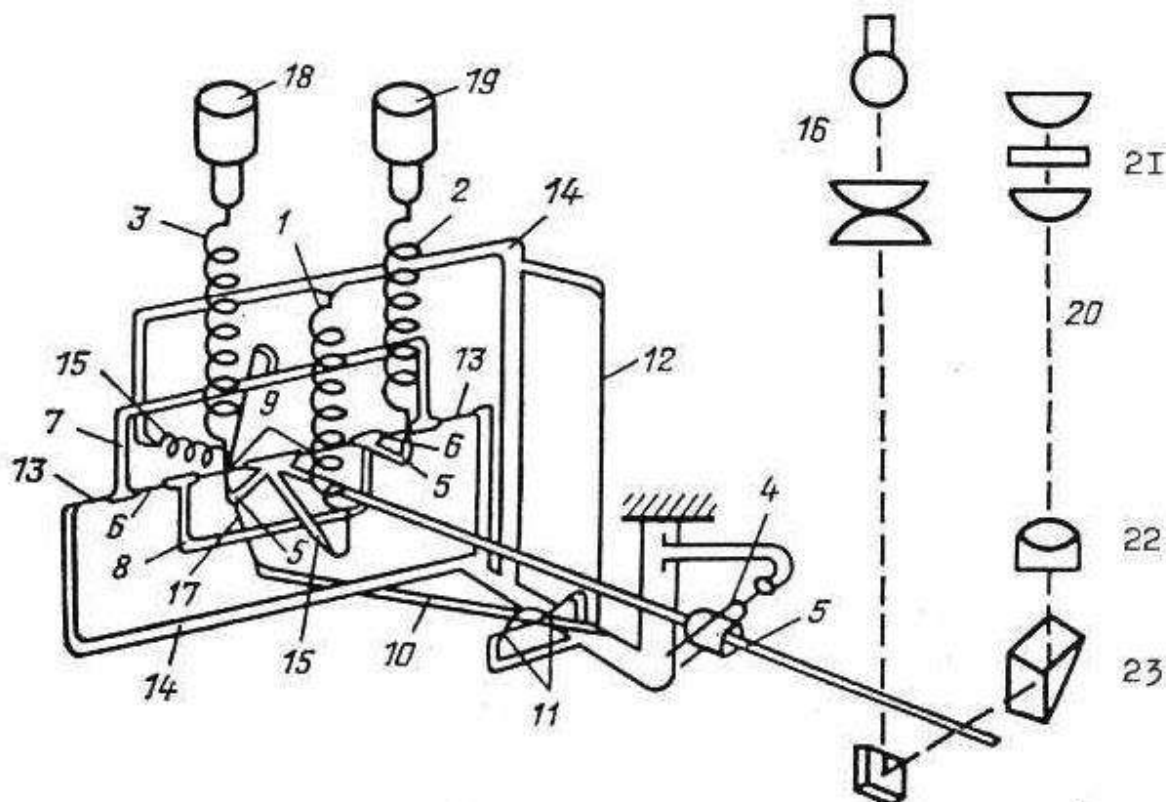


Рис. 6. Схема кварцевой системы гравиметра ГНУ-КС:

1 - главная пружина; 2 - измерительная пружина; 3 - диапазонная пружина; 4 - ограничитель; 5 - рычаг; 6 - нити подвеса измерительной рамки; 7 - подвижная рамка температурного компенсатора (ТК); 8 - измерительная рамка; 9 - нити подвеса рычага; 10 - рычаг ТК; 11 - нити подвеса рычага ТК; 12 - металлическая нить ТК; 13 - нити подвеса подвижной рамки ТК; 14 - каркас кварцевой системы; 15 - пружина компенсатора криволинейности; 16 - осветитель; 17 - лукообразная нить компенсатора криволинейности; 18 - диапазонное устройство; 19 - измерительное устройство; 20 - микроскоп; 21 - стеклянная пластинка со шкалой; 22 - объектив; 23 - трехгранная призма

Кварцевая система гравиметра помещена в корпус цилиндрической формы и тщательно изолирована от внешней среды. Крышка цилиндрического корпуса и выводные отверстия для оптической системы и измерительного механизма изолированы при помощи резиновых прокладок и специальных приспособлений (сильфонов). Из корпуса откачивается воздух. Таким образом, кварцевая система находится в вакууме, что повышает ее

чувствительность и устраняет влияние механических частиц и водяных паров на положение равновесия маятника.

Оптическая система и измерительный механизм

В гравиметрах ГНУ-КС и ГНУ-КВ для измерения угла отклонения маятника применяется так называемый **компенсационный способ**, суть которого заключается в следующем. Допустим, что под действием силы тяжести в точке измерения маятник отклонился от горизонтального положения. Меняя натяжение измерительной пружины (2), можно установить маятник кварцевой системы в горизонтальное «нулевое» положение, которое фиксируется в окуляре зрительной трубы. Мерой угла отклонения маятника от горизонтальной плоскости будет отсчет в оборотах микрометрического винта, при помощи которого меняется натяжение измерительной пружины. Компенсационному способу измерения подчинена конструкция оптической системы и измерительного механизма.

В качестве индикатора малых перемещений в ГНУ-КС используется микроскоп. Детали оптической системы смонтированы в двух трубках, нижние концы которых вставляются в верхнюю крышку корпуса кварцевой системы, а верхние - выведены на внешнюю панель гравиметра. В одной из трубок смонтирован осветитель (27 на рис.7), в другой - микроскоп (30). Осветитель состоит из лампочки 2.5-3.5 В, конденсора (27) и призмы (25). В верхней части микроскопа находится окуляр, состоящий из системы линз и стеклянной пластинки, на которую нанесена шкала с нулевым штрихом посередине (21, см. рис. 8). В нижней части микроскопа имеется объектив (22) и трехгранная призма (21). Индекс рычага кварцевой системы располагается между наклонным зеркалом осветителя и трехгранной призмой.

Определение положения равновесия рычага кварцевой системы осуществляется следующим образом. Луч света от лампочки проходит через конденсор и узким пучком попадает на наклонное зеркало. После отражения от наклонного зеркала, луч света проходит через индекс и попадает на трехгранную призму. Преломляясь в трехгранной призме, луч переносит изображение индекса через объектив в окуляр микроскопа. Вследствие интерференции изображение индекса получается в виде двух широких темных полос, разделенных светлой полосой, в средней части которой расположен узкий темный штрих (рис. 8). При горизонтальном положении рычага темный штрих индекса совпадает с нулевой линией шкалы окуляра, а наклонное положение рычага фиксируется отклонением изображения индекса вправо (если рычаг отклонился вверх) или влево от нулевого деления шкалы. Таким образом, оптическая система позволяет только следить за положением рычага, а угол его отклонения определяется при помощи измерительного механизма.

Управление положением рычага в гравиметрах ГНУ-КС осуществляется при помощи двух кварцевых пружин: диапазонной 3 и измерительной 2 (см. рис. 6). В гравиметрах ГНУ-КС диапазонная пружина нижним концом жестко связана с рычагом, а верхний конец через герметизирующее

устройство (сильфон) выведен к специальным гайкам 2 и 3 (см. рис. 7) и 18 (см. рис. 5). Вращением гаек можно менять натяжение диапазонной пружины и перемещать рычаг.

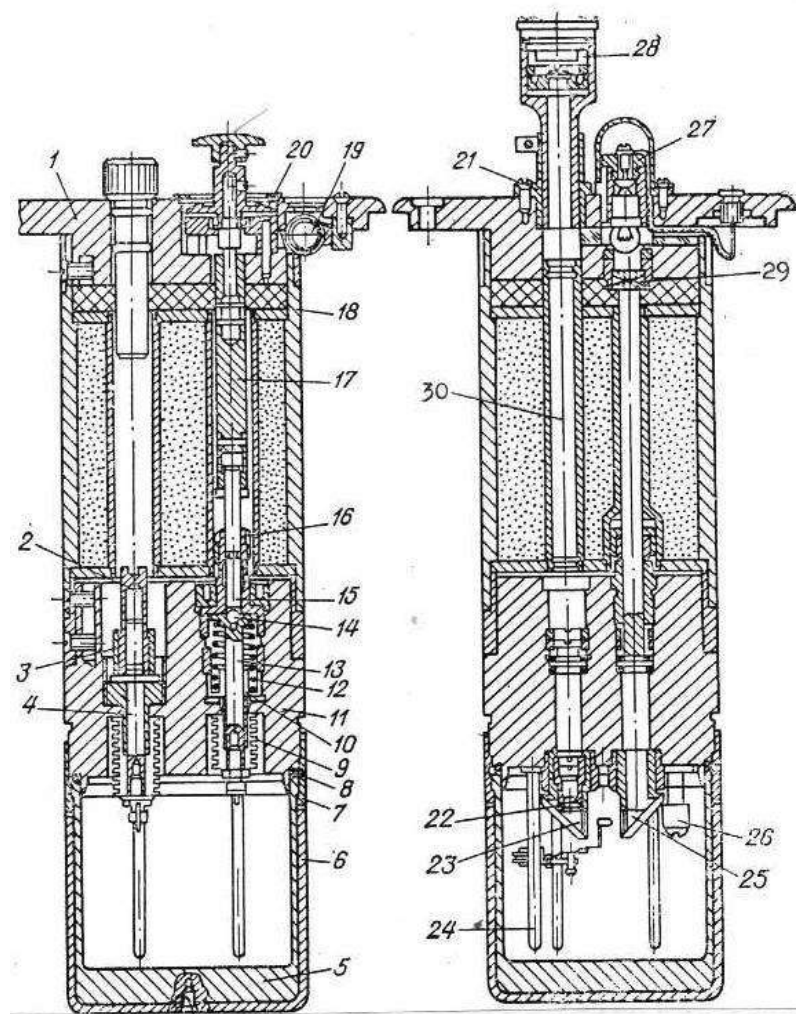


Рис. 7 Разрез средней части гравиметра:

1 - верхняя панель; 2 и 3 - гайки; 4 - шток диапазонного винта; 5 и 6 - защитные металлические цилиндры; 7 - стопорное кольцо; 8 - резиновая прокладка; 9 - сильфон; 10 - втулка; 11 - корпус кварцевой системы; 12 - люфтовывбирающая пружина; 13 - шток; 14 - шарик; 15 - микрометрический винт; 16 - микрометрическая гайка; 17 - стержень микрометрического винта; 18 - текстолитовый цилиндр; 19 - уровень; 20 - отсчетное устройство; 21 - держатель окуляра; 22 - объектив микроскопа; 23 и 25 - призмы осветителя; 24 - защитные стойки; 26 - стойка для крепления кварцевой системы; 27 - осветитель; 28 - окуляр; 29 - конденсор

Герметизирующее устройство (сильфоны 9, см. рис. 7) представляет собой трубку с гофрированными стенками, которая нижним концом соединяется с кварцевой пружиной (диапазонной или измерительной) и вставляется во внешнюю трубку. Между этими трубками закачивается под давлением трансформаторное масло. Нижний конец сильфона приваривается к штоку, к

которому крепится верхний конец кварцевой пружины. Верхний конец сильфона приварен к гайке, которая прочно крепится к корпусу прибора.

Диапазонная пружина служит только для установки диапазона предполагаемых изменений силы тяжести перед началом полевых измерений. С ее помощью индекс рычага выводится в поле зрения окуляра микроскопа (рис. 8), потом диапазонная пружина закрепляется и не участвует в процессе измерения угла наклона рычага.

Измерительная пружина (2, см. рис.6) нижним концом через стержень жестко связана с измерительной рамкой 8, которая крепится на кварцевой нити. Верхний конец измерительной пружины крепится к стержню, который через сильфон и втулку (10, см. рис.7) соединяется со штоком (13). При вращении микрометричного винта, укрепленного на внешней панели гравиметра, поступательное движение винта (15) передается через шарик (14) на шток (13), что приводит к изменению натяжения измерительной пружины. Для исключения люфта измерительного механизма на втулку (10) надета люфтовыбирающая пружина (12), верхний конец которой упирается в головку штока (13).

Отсчетное устройство представляет собой счетчик оборотов микрометричного винта. Оно состоит из двух подвижных дисков с делениями и двух неподвижных индексов, на одном из которых нанесены деления (нониус). С ручкой микрометра (1 на рис. 8) жестко связан диск с делениями от 0 до 99. При вращении микрометра одновременно двигается соседний диск 2, на котором нанесены деления от 0 до 15 с интервалами через 0.5 деления. Отсчет берется следующим образом: против неподвижного индекса (3) отсчитывается число оборотов в целых единицах, по положению 0-штриха нониуса (4) берется отсчет десятых и сотых долей оборота и по нониусу отсчитываются тысячные доли оборота микрометричного винта.

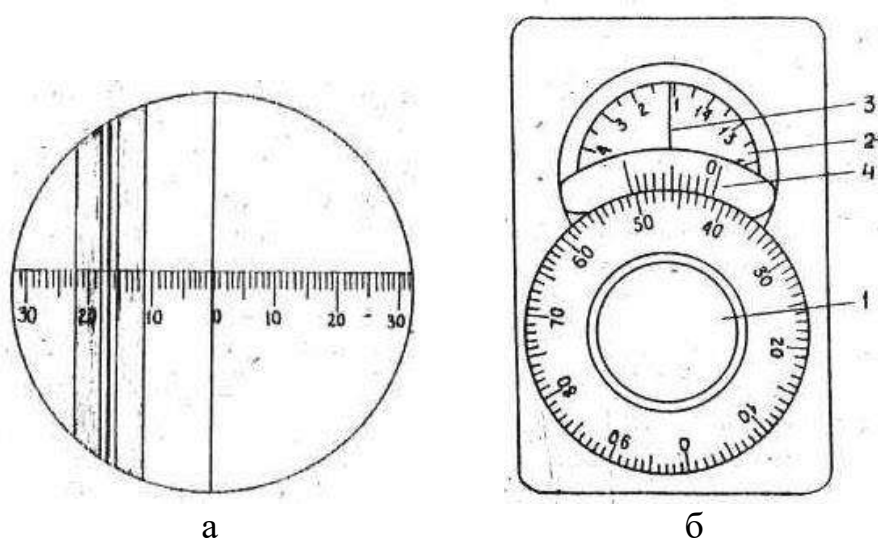


Рис. 8 Поле зрения окуляра и отсчетное устройство гравиметра:

1 - ручка микрометра, 2 - диск целых делений шкалы, 3 - индекс отсчета целых делений, 4 – нониус

Температурная компенсация

Испытания кварцевых систем в специальных термостатах показывают, что наблюдается нелинейная зависимость показаний гравиметра от изменения температуры. Приближенно эту зависимость можно выразить следующим образом:

$$\Delta g_t = C_0 * t + C_1 * t^2 \quad (13),$$

где Δg_t -изменение отсчета в мГал в зависимости от температуры t ; C_0 и C_1 - постоянные коэффициенты, характеризующие тепловые свойства кварца, из которого изготовлена система. Значения этих коэффициентов в среднем составляют:

$$C_0 \approx -120 \text{ мГал на } 1^\circ\text{C}; \quad C_1 \approx 0.15 \text{ мГал на } 1^\circ\text{C}.$$

Для устранения влияния температуры при работе с кварцевым гравиметром используются разные способы термозащиты: термокомпенсатор, сосуд Дьюара, теплоизолирующие средства, вакуумированный сосуд, отражающая солнечные лучи поверхность гравиметра.

Автоматический температурный компенсатор должен обладать температурной характеристикой, соответствующей уравнению (1), но с обратным знаком. Основную роль в температурном компенсаторе играет металлическая нить (12, см. рис. 6). Нить изготавливается из меди, обладающей значительным коэффициентом теплового расширения. Нижний конец металлической нити крепится к рычагу температурной компенсации (10), который может вращаться вокруг оси, представляющей собой укрепленную в рамке кварцевую нить (11). Другой конец рычага температурной компенсации через прогнутую нить (17) и кварцевую пружину (15) связан с подвижной рамкой температурной компенсации (7), которая крепится на основной нити кварцевой системы. Пружина (15) и прогнутая нить (17) обеспечивают нелинейный режим работы температурного компенсатора.

При повышении температуры среды, в которой находится кварцевая система, маятник отклоняется вверх. Повышение температуры среды приводит к удлинению металлической нити (1 на рис. 9), которая отклоняет рычаг температурной компенсации вниз. Рычаг температурной компенсации имеет ось вращения O_1 (см. рис. 2.6) в виде кварцевой нити (11, см. рис.6). Вращение рычага вокруг оси O_1 через упругий элемент (4) и пружину (3) передается на рамку температурной компенсации (6, см. рис. 9), которая закручивает основную кварцевую нить O (см. рис. 9). В результате закручивания нити маятник отклонится вниз. Таким образом, создается вращающий момент противоположного знака по сравнению с моментом, обусловленным влиянием температуры. Типичный график температурного влияния на показания прибора приведен на рис. 10.

Отношение перемещения маятника к вызывающему его изменению силы тяжести называется механической чувствительностью.

Для того, чтобы предохранить кварцевую систему от резких изменений температуры, система тщательно изолируется. На верхнюю часть корпуса

кварцевой системы надевается и крепится текстолитовый полый цилиндр (18, см. рис. 6), внутри которого помещается кран для откачки воздуха из корпуса кварцевой системы, и четыре трубки. В трубках находятся сильфоны, детали диапазонного и измерительного механизмов, осветитель и микроскоп. На текстолитовый цилиндр вместе с корпусом кварцевой системы надеваются шерстяной и пенопластовый чехлы. Все вместе помещается в сосуд Дьюара, который находится во внешнем цилиндрическом корпусе прибора. Пространство внутри текстолитового цилиндра, а также между сосудом Дьюара и внешним металлическим корпусом заполняется слоем ваты или иных теплоизоляционных материалов. Хромированный металлический корпус служит для отражения солнечных лучей, т. е. позволяет избежать нагревания прибора солнечными лучами.

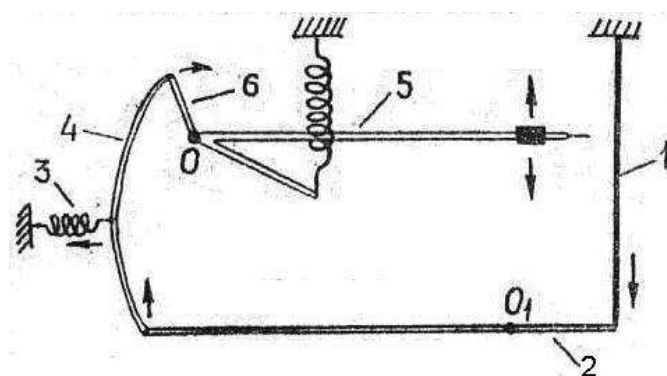


Рис.9. Схема температурного компенсатора гравиметра:

1 - металлическая нить, 2 - рычаг температурного компенсатора, 3 - пружина нелинейного компенсатора, 4 - прогнутая нить, 5 - рычаг, 6 - рамка температурного компенсатора, O_1 - нить подвеса температурного рычага компенсатора, O - нить подвеса рычага и рамок

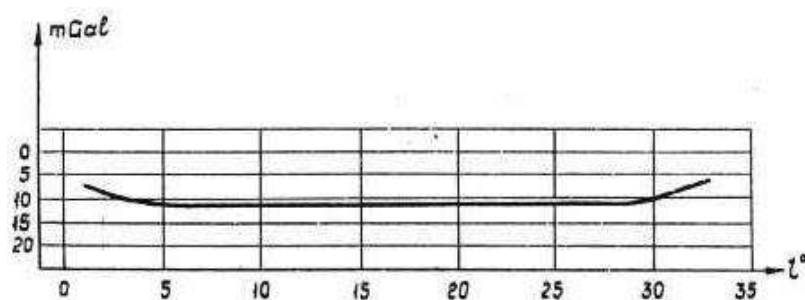


Рис. 10 График температурного влияния

Теплоизоляция позволяет работать с гравиметром в различных температурных условиях, и колебания температуры практически не оказывают влияния на результаты измерений.

ГРАВИМЕТР ГНУК-В

Гравиметр ГНУК-В предназначен для высокоточных измерений. В этом приборе компенсирующий момент термокомпенсатора подается на главную пружину, а не на подвижную рамку. В микроскопе применен объектив с большим увеличением. Уравнение равновесия (4) примет вид (рис. 11):

$$mgl \cos(\alpha + \beta) + \tau_1(\alpha_0 + \alpha) - f_1 r_1 (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \left(1 - \frac{Z_0}{S}\right) = 0, \quad (14)$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + r_1^2 - 2r_1(x \cos \alpha + y \sin \alpha)},$$

где Z_0 - первоначальная длина главной пружины, f_1 - линейная упругость главной пружины, τ_1 - крутильная жесткость нитей подвеса рычага, β - угол наклона системы, α_0 - начальный угол закручивания нитей подвеса рычага, α - угол наклона плоскости, в которой лежит центр тяжести рычага и ось его вращения в исходном положении.

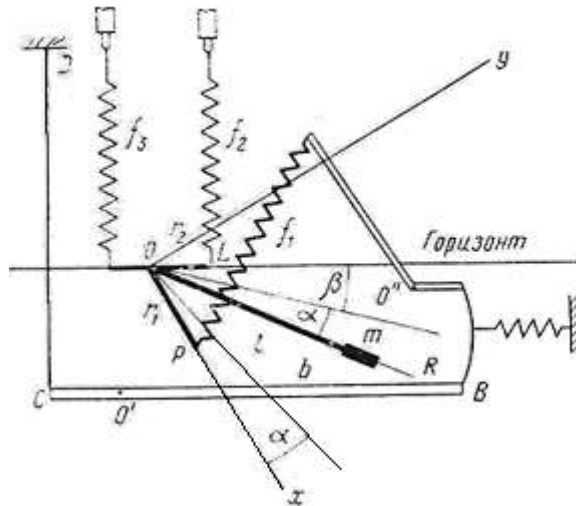


Рис. 11 Схема устройства упругой системы кварцевого астазированного гравиметра (ГНУК-В)

m - пробная масса, f_1 - главная астазирующая пружина, f_2, f_3 - измерительная и диапазонная пружины, l - рычаг.

ГРАВИМЕТР СОДИН

Работа с гравиметром

Для измерений гравиметром возле пикета заранее готовится ровная площадка диаметром 30 см, при этом почвенный слой для улучшения условий измерения снимается. Гравиметр устанавливается либо на эту площадку, либо - если грунт рыхлый - на специальный диск с тремя шипами, вдавливаемыми в почву. Включается освещение, и с помощью подъемных винтов (см. рис. 2.1) пузырьки уровней выводятся на середину. Отклонение пузырьков во время измерения не должно превышать 0.5 деления.

Наблюдая в окуляр гравиметра ГНУК-С

за перемещением индекса, плавным вращением микрометрического винта совмещают блик с нулевым делением шкалы. Совмещение производят так, чтобы нулевой штрих шкалы был как раз в середине световой полосы. Для устранения погрешностей за счет люфта в соединениях микрометрического винта совмещение следует производить при одинаковом направлении вращения винта.

На каждом пункте необходимо делать несколько совмещений, записывая каждый раз показания счетчика. В журнал, кроме показаний счетчика, записывают время наблюдений.

Гравиметры с кварцевой чувствительной системой применяют при съемке на море и в скважинах. Например, морской гравиметрический комплекс ГМН «Флагман» состоит из 3 гиросtabilизированных гравиметров с кварцевой чувствительной системой и автоматизированного компенсационного устройства. Комплекс предназначен для проведения гравиметрической съемки масштаба 1:200000 и 1:50000 на шельфе, озерах, лиманах на судах водоизмещением 500 т. и более. Погрешность измерений с комплексом 0,3 – 0,5 мГал.

Гравиметр CG-5

В настоящее время широкое распространение получили автоматизированные гравиметры, использующие микропроцессорную технологию отечественного и зарубежного производства. В нашей стране к 2010 г. насчитывается более 60 гравиметров CG-3, CG-3М, CG-5 фирмы Scintrex. Модернизация прибора сопровождалась уменьшением веса, размеров, энергопотребления, совершенствованием программного обеспечения. Чувствительный элемент автоматизированного гравиметра CG-5 - та же упругая система из плавленого кварца. Автоматизированный гравиметр состоит из кварцевой чувствительной системы и индикатора малых перемещений с электростатической компенсационной системой измерений, размещенных в термозащитном корпусе, и электронного блока, на базе микро-ЭВМ, для управления гравиметром и предварительной обработки данных. Нивелирование прибора осуществляется по двум электронным уровням. Автоматически компенсируются изменения наклона до 200 секунд, в том числе обусловленные микросейсами..

В автоматизированном гравиметре CG-5 сила тяжести, действующая на пробную массу, уравнивается кварцевой пружиной и небольшим по величине электростатическим полем (рис. 2.8). Смещение пробной массы под действием силы тяжести фиксируется емкостным преобразователем смещения. Через цепь обратной связи напряжение подается на пластины конденсатора, электрическое поле которого действует на пробную массу, возвращая ее в нулевое положение. Напряжение в цепи обратной связи является мерой поля силы тяжести. Оно преобразуется в цифровой сигнал, передается в систему сбора данных прибора для обработки, вывода на дисплей и сохранения. Гравиметр CG-5 позволяет измерить изменение силы тяжести 0.005 мГал, которое вызывает смещение пробной массы по вертикали на 10^{-10} м. Диапазон работы гравиметра без перестройки 8000 мГал. Остаточный долговременный дрейф нуля-пункта после автоматической коррекции не превышает 0.02 мГал/сутки. Во внутренней твердотельной памяти гравиметра CG-3М записывается данные 1290 результатов наблюдений.

После включения гравиметра проводится автоматическая диагностика прибора. Отсчеты берут нажатием клавиши, они получаются как среднее из показаний по секундным интервалам; время усреднения выбирается в зависимости от местных микросейсмических условий (обычно 20 сек.). Хранимая информация содержит показания гравиметра, исправленные за влияние приливов, величины наклона, внутреннюю температуру прибора, дату, время, длительность измерений, данные о пункте наблюдений.

Автоматический гравиметр CG-5 обладает высокой разрешающей способностью (0.01 - 0.005 мГал), небольшим временем измерения на точке (2 - 5 мин.), полной автоматизацией процесса измерения. Масса гравиметра с аккумуляторами 8 кг. Вся информация отображается на жидкокристаллическом дисплее (80 символов, 4 строки, для CG-3М), одновременно обеспечивается сохранение данных в памяти, что позволяет

впоследствии вывести их на печать, модем или компьютер. Вместе с прибором изготовитель поставляет программное обеспечение для обработки результатов измерений. В России аналогичные автоматизированные гравиметрические комплексы созданы для морских и аэрогравиметрических измерений.

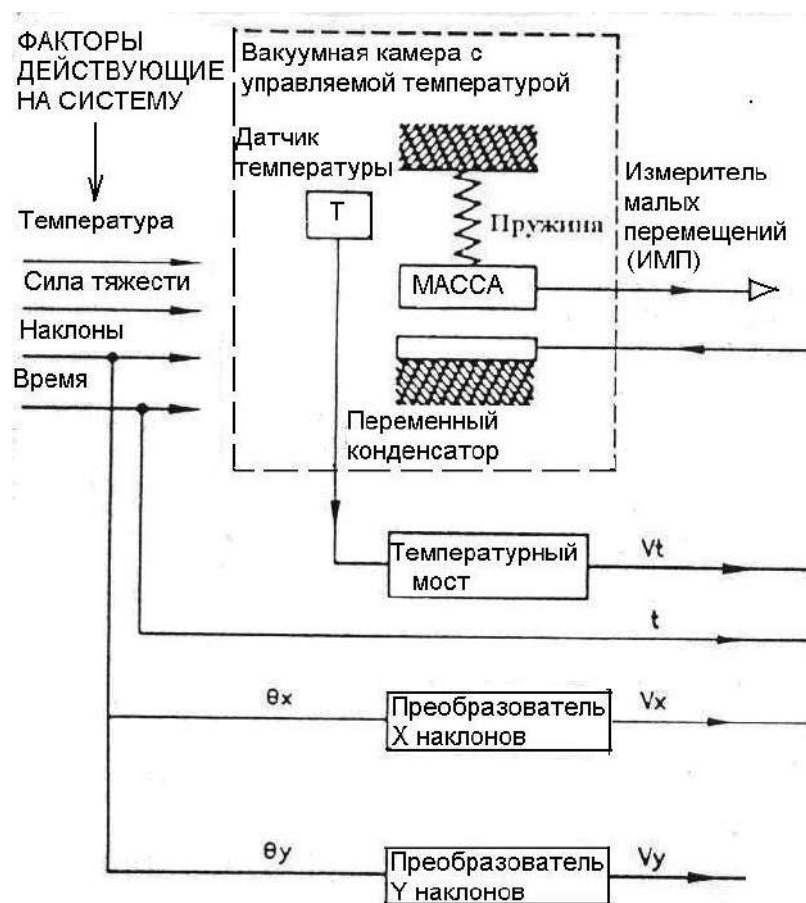


Рис. 12. Схема чувствительной системы автоматического гравиметра.

Техническая характеристика гравиметра CG-5 AutoGrav:

Чувствительная система помещена в двойной вакуумированный отсек стабилизированный по температуре

Точность измерения	1 мкГал
Размеры, см	30×21×22
Вес с аккумуляторами, кг	8
Энергопотребление, Вт	4,5
Емкость литиевых аккумуляторов, А·ч	2×6 (10,8 В)
Рабочая температура, град.	от -40 до + 45
Внутренние часы фиксируют день, месяц, год, час, минута, секунда	
Ленточный регистратор	
Дисплей	¼ VGA 320×240
Клавиатура	27 клавиш
Память	Flash. 1МБ, (до 12 МБ)

Прибор фиксирует: измеренные значения силы тяжести, исправленные значения силы тяжести, наклоны чувствительной системы относительно осей X и Y, температуру чувствительной системы, время, поправки за лунно-солнечные вариации, координаты точки наблюдения. Гравиметры применяют в качестве набортных приборов при морской и воздушной съемке. После удара равносильного 20g изменение отсчета не превышает 5 мкГал.



Рис. Подготовка гравиметров CG-5 к измерениям

2.3 Гравиметры с металлической чувствительной системой

1. Устройство гравиметров Ла Коста Ромберг



Рис. Внешний вид и верхней панели гравиметра Ла Коста Ромберг

Главным отличием гравиметров Ла Коста Ромберг (La Coste&Romberg, L&R) от многих распространенных моделей отечественных и зарубежных приборов является то, что их чувствительная система изготовлена из металлических сплавов. Это обстоятельство определяет многие особенности

как свойств аппаратуры так и работы с ней., в первую очередь значительно более высокую в сравнении с кварцевыми гравиметрами механическую прочность, В основу устройства гравиметра L&R положен принцип вертикального сейсмографа Голицына.

Принципиальная схема гравиметра относительно проста и отличается высокой надежностью. Коромысло с пробной массой около 10 г удерживается в горизонтальном положении металлической пружиной нулевой начальной длины, расположенной под углом примерно 45° к горизонтали. Сила натяжения пружины пропорциональна ее длине. Осью подвеса коромысла служат две симметричные расположенные горизонтальные пружины, связанные с корпусом прибора.

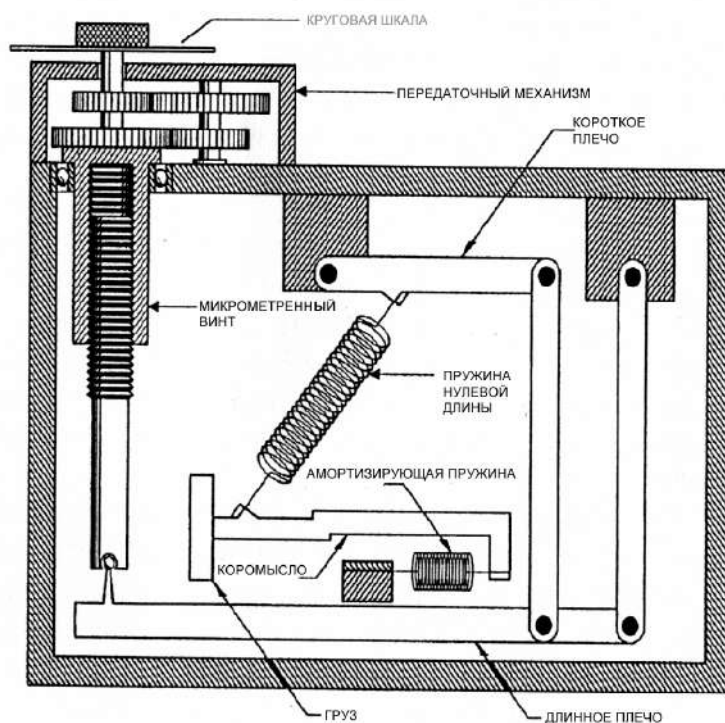


Рис. . Принципиальная схема устройства гравиметров L&R

Измерение силы тяжести выполняется компенсационным способом и заключается в приведении коромысла в горизонтальное положение. Компенсация достигается перемещением верхней точки подвеса удерживающей пружины, но не посредством измерительной и диапазонной пружин, как у кварцевых гравиметров, а при помощи присущей только приборам L&R рычажной системы. Рычаги перемещаются с помощью высокоточного винта, который в свою очередь приводится во вращение от микрометрического винта передаточным механизмом. В результате такого устройства чувствительной системы цена деления, зависит главным образом не от механических качеств измерительных пружин, а от свойств и точности исполнения деталей рычажной системы и микрометрического винта. Благодаря этому коэффициенты калибровки гравиметров L&R изменяются со временем незначительно. Амплитуда свободного хода рабочих элементов гравиметра

не превышает 0.1 мм, и при ударах, толчках, сотрясениях они не могут набрать инерцию, достаточную для возможного их повреждения. Чувствительная система прибора во время его хранения и транспортировки до места работы и между пунктами наблюдений арретируется, что является существенным преимуществом по сравнению с кварцевыми приборами. Фиксация системы происходит таким образом, что основная пружина не растягивается; вследствие чего не происходит значительного изменения физико-механических свойств ее металла, что также способствует стабильности характеристик прибора.

Для защиты от воздействия перепадов атмосферного давления чувствительная система гравиметра изолирована от внешней воздушной среды, кроме того, в качестве дополнительной меры на рычаге установлен барометрический компенсатор.

Изготовленная из металла с большим коэффициентом температурного расширения, чувствительная система гравиметра требует поддержания постоянной температуры внутри прибора. Это достигается с помощью встроенного термостата. Температура термостатирования прибора не регулируется, а остается постоянной для каждого прибора, установленной на заводе-изготовителе, и составляет, как правило, 50-54°C.

Внешне гравиметр L&R моделей D и G представляет собой параллелепипед с размерами 18×20×25 см, весом 3.2 кг. На верхней панели расположены микрометрический винт (круговая шкала), счетчик оборотов, жидкостные и (если установлены) электронные уровни, окуляр микроскопа, винт перестройки диапазона измерений, выключатель подсветки микроскопа и индикации напряжения аккумулятора и температуры прибора, винт арретира чувствительной системы, шнур подключения внешнего электропитания. Головки нивелировочных винтов прибора в отличие от многих других типов гравиметров расположены над верхней панелью. Внизу лапки заканчиваются остриями, поэтому работа с прибором возможна только при установке на твердую подставку – металлическую или деревянную.

В дополнение к обычным жидкостным уровням гравиметры могут оборудоваться электронными уровнями. Точность установки жидкостных уровней порядка 10 секунд, электронных – около 0.5 секунды дуги. Последние предпочтительнее не только в силу высокой точности установки прибора, но еще и тем, что на электронные уровни значительно более устойчивы к влиянию низких температур.

Подготовка приборов к работе.

Температурный режим. Соблюдение температурного режима следует считать одним из важнейших залогов достижения высокого качества измерений. В инструкции фирмы-изготовителя по эксплуатации гравиметра указано, что прибор должен быть подключен к электрическому питанию для прогрева до рабочей температуры не менее, чем за 4 часа до начала работы. Опыт доказывает необходимо, чтобы приборы в течение всего полевого сезона вообще не отключались от источников питания и всегда были в состоянии рабочей температуры, даже в период переездов. Данное условие

определяет линейность смещения нуль-пункта (и, в конечном итоге, качество съемки) на период всего полевого сезона.

В холодное время года прибор не менее, чем за 1 час до начала работы должен быть вынесен из помещения для адаптации к температуре внешнего воздуха.

Производство измерений на пункте. Гравиметр устанавливается на подставке, выводится в горизонт. Разарретировать прибор (для L&R), повернув закрепительный винт арретира против часовой стрелки до упора). Световой индекс вращением круговой шкалы (микрометричного винта) выводится в нулевое положение. Для гравиметров это L&R - своя характерная линия отсчёта, которая обозначена на этикетке, расположенной на верхней панели прибора.

На каждом пункте при работе с гравиметрами L&R с механической системой и гравиметрами ГНУ берутся и записываются три отсчета с точностью 0.1 наименьшего деления шкалы, т.е. до третьего знака после запятой целого оборота (по образцу 67.486 для гравиметров L&R или 9.478 для гравиметров ГНУ). Третья значащая цифра после запятой определяется по нониусу (гравиметр ГНУ) или по круговой шкале (L&R). Расхождение между отдельными отсчетами не должно превышать наименьшего деления шкалы; из трех отсчетов выводится среднее значение с записью в журнал, в соответствующую графу. Кроме того, записывается номер пикета, время, температура прибора.

При взятии отсчетов вследствие возможного люфта механических деталей отсчетной системы окончательное подведение индекса к нулевой риски необходимо выполнять всегда с одной стороны. При работе с гравиметрами L&R с системой Aliod записывается один отсчет с дисплея прибора после окончательной стабилизации отсчета.



Рис. Измерение с гравиметром CG-5 и подготовка приборов L&R к работе

При подготовке гравиметра к процессу измерений следует настроить прибор на диапазон, соответствующий измеряемым величинам силы тяжести. Ожидаемые значения рассчитываются с учетом расположения участка по широте (т. е. по нормальному полю), высот измеряемых пунктов (приблизленно, по топографической карте), возможных амплитуд

предполагаемых аномалий. Для гравиметров L&R с механической системой осложнений практически не должно быть, так как диапазон измерений у них порядка 200 мГал, что более чем достаточно при детальной съемке. Для настройки рабочего диапазона на пункте по счетчику выставляется необходимый отсчет с помощью круговой шкалы (микрометричного винта), затем вращением диапазонного винта отверткой индекс выводится в нулевое положение. Один полный оборот диапазонного винта соответствует приблизительно 74 мГал. После перестройки диапазона необходимо провести ввод прибора в динамический режим.

Все приборы ежегодно должны проходить поверку и калибровку на полигоне одного из действующих специализированных гравиметрических предприятий (СГП), которые по результатам эталонирования выдают на каждый прибор сертификат. К 2010 г. В нашей стране существует единственный аттестованный полигон в России. Он расположен в Свердловской области (Нижнетагильский гравиметрический полигон, Баженовская экспедиция, СГП № 4).

Оператор должен помнить!

Перед началом работы (снятием отсчёта) аппаратура должна быть введена в температурный и динамический режимы; уровни должны быть поверены и отъюстированы в соответствии с моделью прибора. Поверки уровней выполняются в начале и по окончании рейса с обязательной записью в журнал.

Гравиметрические измерения выполняются отдельными рейсами, представляющими собой совокупность последовательных наблюдений, объединенных общим учетом смещения нуль-пункта гравиметра, полученного по результатам измерений на опорных точках. Отрезки гравиметрического рейса, заключенные между двумя опорными пунктами, называются звеньями. Так как общее смещение нуль-пункта по всему рейсу практически никогда не является линейным, учет нуль-пункта производится по отдельным звеньям.

Гравиметрический рейс начинается и заканчивается на пунктах опорной сети. При ударе или сотрясении гравиметра необходимо вернуться на 3 пункта назад и повторить измерения с соответствующими отметками в полевом журнале.

Во время производства наблюдений запрещается любая регулировка оптической системы – фокусировка шкалы окуляра, а также замена лампочки (у гравиметров ГНУ), так как любые действия подобного рода изменяют характер взаиморасположения светового индекса и шкалы и ведут к искажению отсчетов. Поэтому при необходимости регулировки следует выполнять или перед началом рейса, или на опорных пунктах с обязательным повторением отсчета.

Необходимо тщательно исследовать и учитывать при обработке данных гравиметрических измерений смещение нуль-пункта. Подготовка приборов к работе и процесс полевых измерений должны быть всецело направлены на

то, чтобы смещение нуля-пункта было минимальным по величине и максимально приближенным к линейному в течение всего рейса.

На основе наземного гравиметра «Ла Коста-Ромберг» построен лунный стационарный гравиметр. В декабре 1972 г. гравиметр доставлен на Луну экспедицией «Аполлон-17» для изучения приливных явлений на Луне.

Современные гравиметры для наземной съемки позволяют определять аномалии 0,005 мГал и на первый взгляд исчерпаны возможности дальнейшего повышения точности, поскольку такие же по интенсивности помехи, создаются неоднородностями приповерхностного слоя. С нашей точки зрения именно для изучения поверхностного слоя следует добиваться дальнейшего повышения точности гравиметров, что позволит применять гравиразведку для решения инженерно-геологических задач. В современной гравиразведке применяются навигаторы для вынесения проектных пунктов наблюдения на местность и мобильные спутниковые средства определения координат (рис.). Современные гравиметры обладают малым смещением нуля, что влечет значительное сокращение затрат на создание опорных сетей. Это сделало гравиразведку высокопроизводительным методом, который может применяться для решения задач гидрогеологии геологии и горно-технических задач.



Рис. Измерения с гравиметром Седин. Прибор установлен на подставку, которая обеспечивает уменьшение влияния микросейсм.

2.4 Инерциальные гравиметры

Инерциальной гравиметрией называется определение вектора ускорения силы тяжести по результатам измерений с инерциальной системой на подвижном носителе. В качестве инерциальных датчиков используются прецизионные весы, акселерометры, гироскопические устройства. Инерциальная гравиметрия базируется на том же уравнении, что и инерциальная навигация:

$$m \cdot d^2 \mathbf{r} / dt^2 = m \mathbf{g}_1 + \mathbf{F}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точечной пробной массы m , $m \mathbf{g}_1$ – вектор силы тяготения, $\mathbf{F}$ – вектор-сила, с которой опора действует на пробную массу.

Основная задача инерциальной навигации – определение вектора $\mathbf{r}$ по заданному вектору тяготения $m \mathbf{g}_1$ и измеренному вектору $\mathbf{F}$. Задача инерциальной гравиметрии – определение силы тяжести (суммы силы тяготения и центробежной силы, обусловленной вращением Земли) по траекторным измерениям вектора $\mathbf{r}$ и измеренному вектору $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{g}_1 = d^2 \mathbf{r} / dt^2 - \mathbf{F} / m.$$

$\mathbf{F} / m$ – удельная негравитационная сила, действующая на точечную пробную массу, имеет размерность ускорения. Поэтому удельную силу $\mathbf{F} / m = \mathbf{w}_k$, измеряемую акселерометрами, называют кажущимся ускорением, а $\mathbf{g}_1$ – ускорением силы тяготения. $\mathbf{w}_k$ – удельная упругая сила, действующая со стороны корпуса прибора на пробную массу. Величину $\mathbf{w}_a = \mathbf{g}_1 + \mathbf{w}_k$ называют абсолютным ускорением

Обозначим угловую скорость вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$. Если пробная масса неподвижна на поверхности Земли и совершает с ней суточное вращение вокруг оси, абсолютное ускорение $\mathbf{w}_a$ есть центростремительное ускорение. Тогда

$$\mathbf{w}_a = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{g}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{w}_k.$$

Векторную величину $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ называют силой тяжести (удельной силой тяжести).

Для неподвижного относительно Земли тела $\mathbf{g} + \mathbf{w}_k = 0$. Обозначим $\mathbf{g}_k = -\mathbf{w}_k$, получим **основное уравнение навигации**:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{g}_1 + \mathbf{w}_k = \mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \mathbf{g}_k.$$

Тиль А.В. предложил использовать гравитационное поле Земли для определения координат подводных лодок. Для этого он разработал высокоточный быстродействующий морской гравиметр «Стен» с магнитным подвесом инерциального тела. Прибор прошел испытания в 1982 г. и был включен в состав навигационного комплекса подводных лодок «Тайфун».

Основное уравнение инерциальной гравиметрии:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_k + \mathbf{w}_a - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

В ходе проведенных испытаний Тиль А.В. выполнил попутную гравиметровую съемку акватории Белого моря, в ходе которой выявил аномалии перспективные на наличие полезных ископаемых.

Абсолютное ускорение w_a заменим относительным, поскольку все траекторные измерения выполняются относительно Земли.

$$w_a = w + 2(\omega \times v) + (\omega \times r),$$

где v и w – скорость и ускорение пробной массы во вращающейся с угловой скоростью системе координат.

Основное уравнение инерциальной гравиметрии в векторной форме примет вид:

$$g = g_k + w + 2(\omega \times v).$$

Совместим начало системы отсчета с подвижной точкой наблюдения – положением центра пробной массы. Вертикальная ось направлена по внутренней нормали к поверхности земного эллипсоида (Z), горизонтальные оси направлены на север (N) и восток (E). Уравнение инерциальной гравиметрии в координатах примет вид:

$$g_N = g_{kN} + 2\omega v_E \sin B$$

$$g_E = g_{kE} + w_E + 2\omega(v_N \sin B + v_Z \cos B)$$

$$g_Z = g_{kZ} + w_Z + 2\omega v_E \cos B,$$

где B – геодезическая широта точки наблюдения.

Инерционное измерительное устройство состоит из трех ортогональных акселерометров, ориентация которых непрерывно контролируется системой гироскопов. Измерительное устройство снабжено компьютером, источником питания, блоками хранения, контроля и вывода данных.

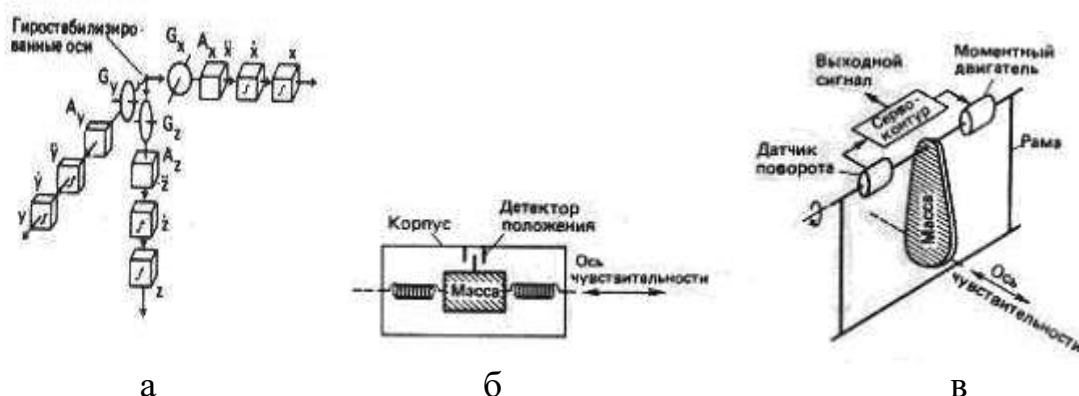


Рис. 11.1 Инерциальная система, состоящая из гироскопов, акселерометров, и интеграторов (а). Инерциальные системы с поступательным перемещением массы (б) и вращательным движением массы (в)

Акселерометры измеряют составляющие вектора удельной силы, действующие на пробную массу в направлении измерительных осей. Они могут быть выполнены в виде систем с поступательным или вращательным перемещением массы. Выходной сигнал акселерометра содержит информацию о местоположении носителя в гравитационном поле. Из-за эквивалентности инерциального и гравитационного ускорений их разделение возможно лишь с привлечением дополнительной информации. Учет гравитационного поля и двойное интегрирование позволяют определить местоположение инерционным способом.

Чтобы оценить величины измеряемых ускорений, необходимо знать в любой момент времени соотношение между тремя системами координат:

- инерциальной системой отсчета, положение координатных осей в которой определяется осью вращения Земли и направлением на точку весеннего равноденствия;

- приборной системой координат фиксированной относительно носителя;

фиксированной относительно Земли местной топоцентрической системой.



Рис. Гравиметр ГИ-1 (а). Аэрогравиметрический комплекс фирмы Scintrex (б)

В зависимости от вида измерительной системы и способа сохранения ориентировки различают следующие системы:

- систему (связанную с носителем), ориентировка осей которой рассчитывается аналитически на основе сигналов, полученных в результате обработки некоторой исходной информации;

- систему, находящуюся на карданной платформе, положение которой стабилизировано в пространстве или же сохраняется неизменная ориентировка в локально-уровенной системе координат.

Измерения с инерциальной системой, установленной на вертолете или автомобиле, проводятся в следующем порядке:

- прогрев измерительного блока до рабочей температуры и ориентирование платформы в начальной точке маршрута;

- переезд на новую точку с определением ускорений и углов поворота не реже чем через 20 мс, интегрирование для определения скорости на интервалах времени не более 10 сек;

- остановка на новой точке, определение координат, возмущения силы тяжести и отклонения отвеса с одновременным измерением на контрольном пункте;
- дальнейшее следование по маршруту;
- привязка к опорным пунктам через 1 – 2 часа;
- в некоторых случаях повторное прохождение маршрута.

2.5 Криогенные гравиметры

Сверхпроводящий (криогенный) гравиметр. Явление сверхпроводимости заключается в том, что при температуре ниже критической сопротивление материала резко падает до величины, которую не удастся измерить. В настоящее время интенсивно ведутся работы по созданию высокотемпературных сверхпроводников с критической температурой близкой к температуре жидкого азота.

Если сверхпроводящий объект поместить в магнитное поле, то в его поверхностном слое возникает электрический ток, магнитное поле которого противоположно приложенному полю. Если над кольцом, в котором циркулирует ток, поместить сверхпроводящую сферу, то на ее поверхности индуцирует ток. Это приводит к появлению сил отталкивания между сферой и кольцом. В результате сфера повисает (левитирует) над кольцом на высоте зависящей от величины силы тяжести.

Пробная масса представляет собой алюминиевую сферу диаметром 25 мм покрытую тонким слоем свинцом. Критическая температура алюминия 1.2 К, свинца – 7.2 К. В отличие от ранее рассмотренных гравиметров в данном случае пробная масса удерживается в положении равновесия магнитной силой. Сила, действующая на единицу поверхности пробной массы, охлажденной до температуры ниже критической равна

$$F = -B_{\text{эфф.}}^2 \cdot n / 8\pi$$

где $B_{\text{эфф.}}$ сумма приложенного магнитного поля и поля, возбуждаемого во внешнем пространстве циркулирующими по поверхности сверхпроводника токами.

Пробная масса представляет собой сверхпроводящую сферу, подвешенную в поле двух соосных соленоидов. Уравнение равновесия пробной массы

$$Mg_z \leq -1/8\pi \int B_{\text{эфф.}}^2 \cdot n_z ds$$

где M – масса сферы.

Первый сверхпроводящий гравиметр построен в конце 60-х годов XX века. Чувствительная система такого гравиметра представляет собой камеру внутри которой поддерживается температура ниже критической, внутри камеры находятся сверхпроводящая сфера и сверхпроводящие катушки. Магнитное поле сверхпроводящих катушек электромагнита поддерживается без внешнего источника энергии и стабильно во времени (см. рис. 2.5).

При сверхпроводящем состоянии пробной массы и катушек с током, прибор приобретает долговременную стабильность. Магнитное поле соленоидов поддерживает массу в состоянии левитации. Изменения g

вызывают смещения пробной массы от исходного положения. Эти смещения регистрируются емкостным индикатором малых перемещений и с помощью контура обратной связи компенсируются. Компенсирующий ток в цепи обратной связи создает дополнительное магнитное поле, которое непрерывно удерживает сферу в исходном положении. Величина компенсирующего тока в управляющей катушке является мерой силы тяжести.

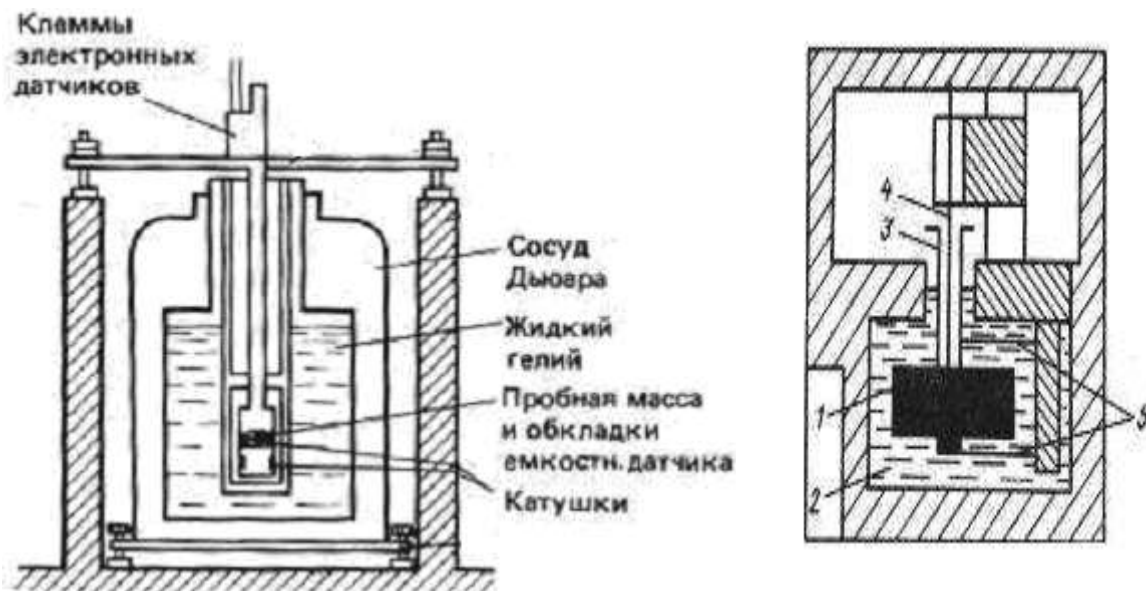


Рис. 2.5 Схема сверхпроводящего гравиметра GWR (слева). Схема струнного гравиметра (справа):

1 – груз, 2 – вязкая жидкость, 3 – трубка, 4 – струна, 5 – пружины, ограничивающие горизонтальные перемещения груза.

Температура внутри камеры с пробной массой поддерживается неизменной до нескольких милikelвинов. Эта камера помещена в медный контейнер с дополнительным магнитным экраном. Наклон прибора контролируется криогенными наклономерами. Градуировку прибора проводят с помощью стального шара наполненного ртутью (325 кг), помещаемого на расстоянии 25 – 50 см от гравиметра. Гравиметр не имеет смещения нуля.

Сверхпроводящие гравиметры используются для изучения долгопериодических изменений силы тяжести в Калифорнийском университете, Институте прикладной геодезии во Франкфурте-на-Майне, Бельгийской королевской обсерватории в Брюсселе.

Сверхпроводящий гравиметр SG C024 установлен в гравиметрической обсерватории Тейбл – Маунтин в Боудлере (шт. Колорадо, США). В результате испытаний из 208100 бросков точность гравиметрических измерений оказалась равной 2 нГал за 3 часа наблюдений. В Боудлере проводятся непрерывные измерения временных изменений силы тяжести.

Сверхпроводящий гравиметр GWR выпускается фирмой GWR-Instrumentnts (Сан-Диего, Калифорния, США). В Мацусиро (Япония) сверхпроводящий гравиметр GWR TT70 установлен в старом туннеле, пробитом в скальных породах. Показания гравиметра, GPS-приемника, атмосферное давление,

температура и дру Сверхпроводящий (криогенный) гравиметр. Явление сверхпроводимости заключается в том, что при температуре ниже критической электрическое сопротивление материала резко падает до величины, которую не удастся измерить. Критическая температура алюминия 1.2 К, свинца – 7.2 К. В настоящее время интенсивно ведутся работы по созданию высокотемпературных сверхпроводников с критической температурой близкой к температуре жидкого азота.



Рис. Криогенный гравиметр GWR

В отличие от ранее рассмотренных гравиметров в данном случае пробная масса удерживается в положении равновесия магнитом. В криогенных гравиметрах в качестве чувствительного элемента используется сверхпроводящая сфера, находящаяся во внешнем постоянном магнитном поле двух соосных соленоидов. Сверхпроводящая масса m удерживается в воздухе, если выполняется условие:

$$mg < -\frac{1}{8\pi} \int_S T_n ds', \quad (4.14)$$

где n - проекция единичного вектора к поверхности сверхпроводящей сферы на вертикальную ось, T - индукция магнитного поля.

Первый сверхпроводящий гравиметр построен в конце 60-х годов XX века. Сверхпроводящие гравиметры используются для изучения долгопериодических изменений силы тяжести в Калифорнийском университете, Институте прикладной геодезии во Франкфурте-на-Майне, Бельгийской королевской обсерватории в Брюсселе и в других обсерваториях.

2.6 Струнные гравиметры

Идея струнного гравиметра высказана советским физиком Л.Н. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси. Струнные гравиметры применяют при измерениях в движении, так как они практически безинерционные. Преимущество струнных гравиметров по сравнению с другими в том, что у них малое смещение ноля, высокая помехоустойчивость и острая направленность оси чувствительности.

Первый струнный гравиметр испытан на английской подводной лодке в 1949 г. В нашей стране первый струнный гравиметр, разработанный А.М. Лозинской в ВНИИГеофизике, испытан на надводном судне в 1956 г. Ею же создан гравиметр ГСД (гравиметр струнный с сильным демпфированием) в 1969 г. также для морских измерений. Рабочий диапазон ГСД 1,5 Гал, точность измерений 1,2 мГал.

Схема струнного гравиметра приведена на рис. 9.2. Масса 1 подвешена на струне 2. Струна, изготовленная из специального сплава, помещена между полюсами постоянного магнита и включена в колебательный контур с положительной обратной связью. Если на конец струны подать переменное напряжение, то струна начинает колебаться. Уравнение движения имеет вид:

$$Mgd\alpha - \sigma dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

где M – масса груза, σ – плотность, α – угол между вектором силы натяжения и вектором силы тяжести. В силу малости угла α :

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

Частота колебаний f идеально гибкой струны:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\sigma S}},$$

где S – площадь поперечного сечения струны, m – масса груза, σ – объемная плотность струны.

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g}$$

Для реальной струны в формулу вводится поправочный коэффициент. Для подавления колебаний инертной массы используется магнитоиндукционный демпфер.

Преимущества струнного гравиметра – удобство для дистанционных измерений, неограниченный диапазон измерений и независимость результатов измерений от температуры, поскольку частота колебаний струны практически не зависит от упругих свойств материала, из которого она изготовлена. Недостаток струнных гравиметров – слабая устойчивость к вибрациям и другим возмущающим ускорениям.

В приборе Томоды длина струны 25 мм, ширина 0,1 мм, толщина 0,01 мм изготовлена из сплава меди с бериллием. Масса груза 20 г, частота колебаний струны 1,5 КГц.

Струнный гравиметрический комплекс «МАГИСТР» создан во ВНИИГеофизике для морской съемки. Он обеспечивает точность измерений 0,5 мГал.

Отечественный аэрогравиметрический комплекс «Гравитон – М» включает струнные гравиметры ГСД с жидкостным демпфированием, инерциальную систему для стабилизации гравиметров, систему радиовысотомеров и барометров, спутниковые системы для точных траекторных определений с дифференциальными фазовыми измерениями. Совместное использование гравиинерциальной измерительной системы, радиовысотомерных систем, современных ИНС и СНС, интегрированных в единый комплекс, позволяет получить поправку за вертикальные ускорения с погрешностью 0.4 – 0.5 мГал и проводить измерения с погрешностью 0.7 мГал в интервале осреднения 1 – 2 мин. Комплекс устанавливается на вертолеты Ми – 8 и Ка – 32 и самолет Ан – 12. Завершение Государственной гравиметрической съемки масштаба 1:200000 в труднодоступных районах нашей страны планируется с применением этого комплекса.

При выполнении программы полета Космического аппарата «Апполон-17» с помощью струнного гравиметра были выполнены измерения на гравиметрическом профиле протяженностью 12 км насчитывающем 11 пунктов.

Струнные чувствительные системы использовались в гравиметрических комплексах «Чита», «ГМН», «Флагман», «Чекан», «Скалочник», «Гамс», «Гравитон» предназначенных для проведения для измерений на море и аэросъемки.

3. Скважинные гравиметры

в 1943 г. П.И. Лукавченко впервые в мире предложил проводить измерения силы тяжести в скважинах. Результаты своих теоретических исследований П.И. Лукавченко опубликовал в 1948 г. не смотря на то, что скважинные гравиметры еще не были созданы. Первые измерения были проведены только в 1954 г. С тех пор интерес к скважинной гравиметрии то иссякал, то возобновлялся вновь. В 1966 – 1967 гг. был проведен гравитационный каротаж (ГрК) в скважинах нефтяного месторождения Узень Южного Мангышлака. В 1970 г. гравитационный каротаж проводился на Краснокамском месторождении (Пермское Прикамье).

Гравитационный каротаж может применяться для решения следующих задач (Лукавченко П.И., 1975):

- определения плотности горных пород в условиях их естественного залегания,
- решения вопросов структурной и региональной геологии (выявление разломов, прослеживание геологических границ и др.),
- поиска рудных тел,
- контроль за смещением водонефтяного и водогазового контакта,
- определения плотности промежуточного слоя для наземной гравиразведки,

- определения аномального вертикального градиента поля силы тяжести,
- определения механических свойств горных пород.

Первые скважинные гравиметры ГСА-110 и ГСЭ-110 были разработаны во ВНИИгеофизике для скважин диаметром 110 мм. Точность измерений составляла 0.03 – 0.05 мГал. Кварцевая система помещалась в металлический герметический корпус, который в свою очередь находился в сосуде Дьюара. Для сохранения вертикальной ориентации система помещается на корданном подвесе. Контроль за смещением нуля-пункта проводился путем повторных измерений в одних и тех же точках. Гравиметр ГС-110 имел диаметр 110 мм, высоту 1445 мм, массу около 60 кг. С прибором можно было проводить измерения в скважинах глубиной до 2500 м, при температуре до 100° С. Диапазон измерений 200 мГал, с перестройкой 5000 мГал. Погрешность измерения 0,1 мГал.

Скважинные гравиметры должны быть телеуправляемыми, иметь небольшие размеры для спуска в скважину небольшого диаметра, сохранять работоспособность при давлении до 1 КПа и температуре до 300° С. Прибор должен обеспечивать измерения при наклоне скважины до 20° в диапазоне 500 мГал без перестройки. Результаты гравитационного каротажа позволяют определить кажущуюся плотность пластов пород пересекаемых скважиной. Для ее определения можно воспользоваться формулой:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{1}{4\pi k \cos \beta} (g_i - g_j + \frac{\partial g}{\partial z} h + g_i^p - g_j^p + \delta g)$$

β – угол наклона пласта, i, j – индексы точки измерения.

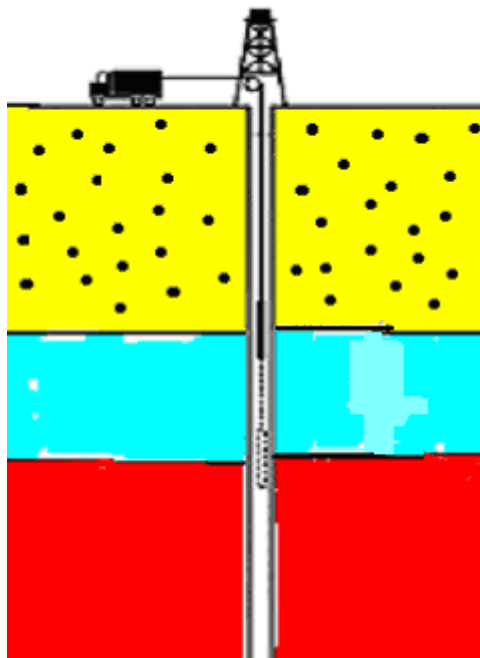


Рис. Схема проведения гравитационного каротажа

Для определения плотности пород в скважинах применяют гамма-гамма каротаж. Данные ГГК- П позволяют определить плотность пород в радиусе 15 см, гравитационный каротаж характеризует породы в блоке радиусом больше чем расстояние между точками наблюдениями. Принято считать, что

дальность исследования в 5 раз превышает расстояние между пунктами наблюдения. При погрешности измерения силы тяжести 0,1 мГал и расстоянии между точками измерения 100 м погрешность определения плотности составит 0,015 г/см³.

В настоящее время ведется интенсивная разработка скважинных гравиметров фирмами LaCoste&Romberg и Scintrex. Фирма Scintrex в 2009 г. объявила о создании скважинного гравиметра Gravilog и его серийном производстве в 2010 г. В качестве датчика используется кварцевая система. Технические характеристики гравиметра Gravilog:

Погрешность при измерении длительностью 1 мин.	0,005 мГал
Диапазон	7000 мГал
Диаметр зонда	48 мм
Длина зонда	2 м
Максимальная глубина скважины	2000 м
Диаметр скважины	не более 57,2 см
Рабочая температура	от 0° до 70° С
Точность привязки	± 5 см



Рис. Корпус датчика скважинного гравиметра Gravilog

Гравиметрический датчик и его электронный блок располагаются ниже скользящего кольца, которое позволяет этой части системы вращаться вокруг вертикальной оси прибора. Остальная часть электронных компонентов и вспомогательные устройства расположены выше скользящего кольца. Наружный диаметр системы Gravilog составляет 48 мм. На Рисунке 5 изображен корпус гравиметрического датчика (гравиметрический шарик), в котором помещается кварцевый чувствительная система. По размеру он меньше мяча для гольфа.

Гравиметрический датчик помещен в шар диаметром 43 мм (рис.), который подвешен на кронштейне с электродвигателями наклона, которые, соединяясь с поворотным кольцом, образуют механизм выравнивания. Управление этим механизмом выравнивания осуществляется оператором, находящимся на поверхности. Углы наклона, измеряемые специально сконструированными

пузырьковыми уровнемерами, установленными на шарике, должны быть известны с точностью до двух угловых секунд. Регулирование температуры внутри шарика осуществляется на уровне микроскопических долей градуса. Для этого предусмотрены обогреватели, установленные по окружности шарика.

Связь прибора Gravilog с поверхностью осуществляется непрерывно с помощью модема. Оператор на поверхности управляет системой с помощью компактного ПК, на котором установлено программное обеспечение Scintrex Gravilog. Экран с графическим пользовательским интерфейсом, на котором отображаются данные моделирования, изображен на рис. 6.

Гравиметрический шарик подвешен на кронштейне с электродвигателями наклона, которые, соединяясь с поворотным кольцом, образуют механизм выравнивания. Управление этим механизмом выравнивания осуществляется оператором, находящимся на поверхности. Углы наклона, измеряемые специально сконструированными пузырьковыми уровнемерами, установленными на шарике, должны быть известны с точностью до двух угловых секунд. Регулирование температуры внутри шарика осуществляется на уровне микронных долей градуса. Для этого предусмотрены обогреватели, установленные по окружности шарика.

Связь прибора Gravilog с поверхностью осуществляется непрерывно с помощью модема. Оператор на поверхности управляет системой с помощью компактного ПК, на котором установлено программное обеспечение Scintrex Gravilog. Экран с графическим пользовательским интерфейсом, на котором отображаются данные моделирования, изображен на рис. 6. Программное обеспечение не соответствует современным достижениям гравиразведки, алгоритмы обработки практически совпадают с содержанием работ П.И. Лукавченко 1948 г.

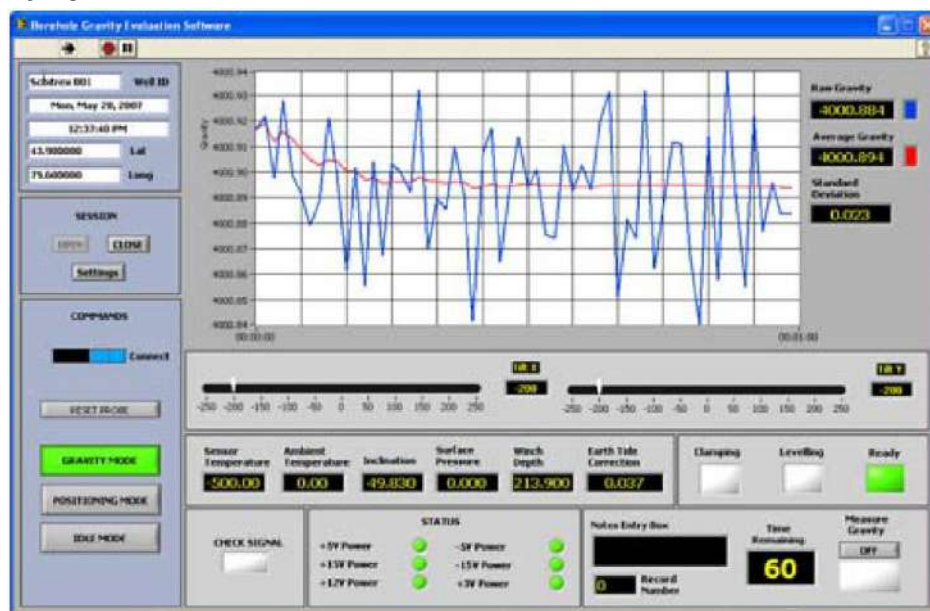


Рис. 6 Графический пользовательский интерфейс программы Scintrex Gravilog

Система Gravilog должна быть объединена с несколькими вспомогательными устройствами. Для эффективной работы гравиметра требуется датчик давления, инклинометр, гамма-локатор муфтовых соединений обсадной колонны, и боковой зажим. Часть системы, которая находится на поверхности, включает в себя барометр и каротажную систему (компактный ПК). Существенным достижением является резкое уменьшение времени измерений на точке. Прибор обладает высокой точностью определения местоположения точки измерения, что обеспечивается применением системы спутниковой привязки.

В 2008 – 2009 гг. разработчики провели успешные испытания прибора на нефтяных месторождениях в Северном море и в штате Мичиган. Проведены работы с целью контроля за изменением положения ВНК и ГНК. Прибор испытан на колчеданном месторождении вблизи г. Садбери (провинция Онтарио) в интервале 1200 – 1800 м с шагом 50 м в безрудной части и 10 м в рудном интервале. Погрешность измерений составила 0,006 мГал. Амплитуда выявленной аномалии силы тяжести 1,5 мГал. К сожалению, при проведении ГрК не проводилась регистрация суточных вариаций поля силы тяжести, не измерен вертикальный градиент силы тяжести. Главным недостатком прибора остается относительно низкая производительность.

Разработки в области гравитационного каротажа (ГрК) поддерживаются нефтедобывающими предприятиями для исследований осадочных разрезов. Результаты ГК традиционно представляют в виде графиков плотности вдоль оси скважины и увязки разрезов. Однако современные вычислительные средства позволяют совместно обрабатывать результаты ГрК по скважинам и результаты наземных измерений силы тяжести. Результатом истолкования комплекса гравиметрических наблюдений должна быть пространственная плотностная модель. Это позволит осуществлять контроль за разработкой месторождений нефти и газа. Наблюдение за перемещением газонефтяного контакта такие экспериментальные работы уже проводились в Омане, Аляске и в Северном море. Комплексное применение наземных и скважинных наблюдений имеет большие перспективы в рудной геофизике.

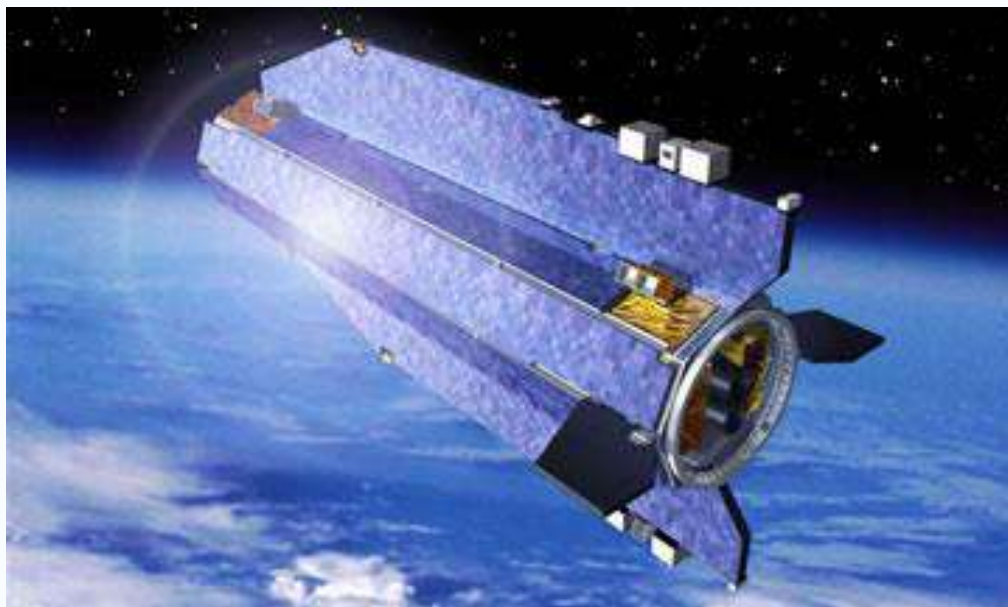
Заключение

Совершенствование гравиметрической аппаратуры продолжается. Совершенствование аппаратуры ведется и по пути разработки высокоточных индикаторов малых перемещений по пути использования иных физических эффектов. Усилия разработчиков направлены на создание переносных баллистических гравиметров для наземной гравиразведки, создание скважинных гравитационных градиентометров, на достижение более высокой точности измерений. Это приведет к увеличению объемов микрогравиразведочных работ, в том числе, для решения задач инженерной геологии.

Широкие перспективы открываются для комплексных высокоточных наземных гравиметрических работ и гравитационного каротажа. По-видимому, следует ожидать появления скважинных гравиметров с непрерывной регистрацией. Крайне необходимо создание пакетов обработки комплексных наземных и скважинных гравиметрических измерений, совершенствование методики исследований.

Большие перспективы в гравиразведке связаны с инерциальными гравиметрами, которые позволяют измерять три компоненты вектора силы тяжести и получить более полную характеристику измеряемых полей. По тем же причинам возможно возобновление производства вариометров, если будет преодолен их главный недостаток – низкая производительность.

Научно-исследовательский спутник **GOCE** (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer — «исследователь гравитационного поля и установившихся океанских течений» запущен в марте 2009 г. Главной полезной нагрузкой спутника является электростатический гравитационный градиентометр состоящий из 6 акселерометров и предназначенный для измерения гравитационного поля Земли.



Низкая орбита спутника и высокая точность акселерометров в 10^{-12} м/с² позволят улучшить точность определения геоида до 1-2 см. С этой целью спутник помещён на исключительно низкую орбиту. Для коррекции орбиты торможения на спутнике установлен ионный двигатель.



**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации**

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный
университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению контрольной работы
по дисциплине «Магниторазведка»
для студентов всех форм обучения специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
специализации «Геофизические методы
поисков и разведки МПИ (РФ)»**

Екатеринбург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Задания контрольной работы
2. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы
 - 2.1 Оформление контрольной работы
 - 2.2 Критерии оценки контрольной работы
3. Методические рекомендации по составлению глоссария
4. Рекомендуемая литературы для выполнения контрольной работы

Введение

Данные методические указания разработаны в помощь для выполнения контрольной работы по курсу «Магниторазведка».

В методических рекомендациях содержится: перечень вопросов контрольной работы, методические рекомендации по выполнению контрольной работы, перечень рекомендуемых учебных изданий, интернет-ресурсов, дополнительной литературы.

Внимательно прочитайте задание контрольной работы, подготовьте рекомендуемую вам литературу (при необходимости), ознакомьтесь с рекомендациями по выполнению работы, с критериями оценивания работы.

Прежде чем сдать выполненную контрольную работу преподавателю на проверку, выполните самооценку по заданным критериям.

Контрольная работа является обязательной для каждого обучающегося и определяется учебным планом. Наличие положительной оценки по контрольной работе необходимо для получения промежуточной аттестации по дисциплине «Магниторазведка».

1. Задания для контрольной работы

Вариант № 1

1. История возникновения теории земного магнетизма.
2. Нормальное магнитное поле Земли и гипотезы его происхождения.

Вариант № 2

1. Инверсии магнитных полюсов Земли. Опишите в чем отличие магнитного полюса Земли от геомагнитного?
2. Применение исследований магнитного поля Земли в археологии.

Вариант № 3

1. Роль отечественных ученых в развитии метода магниторазведки.

2. Вариации магнитного поля Земли и их причины. Способы учета вариаций при проведении магниторазведочных работ.

Вариант № 4

1. Природа магнитного поля Земли (рассмотреть гипотезы, в том числе теории гидромагнитного динамо).
2. Палеомагнетизм и археомагнетизм.

Вариант № 5

1. История изучения Курской магнитной аномалии (КМА).
2. Современное состояние развития магниторазведочной аппаратуры и оборудования.

Вариант № 6

1. Магнитные свойства горных пород.
2. Вариации магнитного поля Земли и методы их учета.

Вариант № 7

1. Прямая и обратная задачи магниторазведки.
2. Нормальное магнитное поле Земли и гипотезы его происхождения.

Вариант № 8

1. Единицы измерения магнитных величин в системах СГС и СИ. Напряженность магнитного поля и магнитная индукция.
2. Структура магнитного поля Земли (нормальное и аномальное поля).

Вариант № 9

1. Палеомагнетизм и археомагнетизм. Физическая основа применения этих методов и решаемые задачи.
2. Региональные и локальные магнитные аномалии. Понятие положительной и отрицательной аномалий.

Вариант № 10

1. Применение исследований магнитного поля Земли в археологии.
2. Современное состояние развития магниторазведочной аппаратуры и оборудования.

Вариант № 11

1. Назначение, устройство, принцип действия и область применения протонных магнитометров
2. Магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость горных пород.

Вариант № 12

1. Назначение, устройство, принцип действия и область применения квантовых магнитометров
2. Индукционная и остаточная намагниченность пород и причина их образования. Виды остаточной намагниченности.

Вариант № 13

1. Назначение, устройство, принцип действия и область применения феррозондовых магнитометров
2. Региональные и локальные магнитные аномалии. Понятие положительной и отрицательной аномалий.

Вариант № 14

1. Магнитосфера и радиационные пояса Земли. Способы их изучения.
2. Аналитическое выражение магнитного поля Земли как поля диполя.

Вариант № 15

1. Коэффициент размагничения и его роль в формировании индукционной намагниченности пород.
2. Рассчитать магнитное поле Z_0 , H_0 и T_0 для Екатеринбурга.

2. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

Контрольная работа является индивидуальной самостоятельно выполненной работой студента.

Контрольная работа должна содержать следующие структурные элементы:

1. титульный лист;
2. содержание;
3. ответы на контрольные вопросы;
4. список использованных источников;
5. приложения (при необходимости).

Количество источников в списке определяется студентом самостоятельно, рекомендуемое количество от 5 до 10. При этом в списке обязательно должны присутствовать источники, изданные в последние 5 лет.

2.1 Оформление контрольной работы

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

- текст располагается на одной стороне листа белой бумаги формата А-4;
- размер шрифта - 14 Times New Roman, цвет – черный;
- междустрочный интервал – полуторный;
- поля на странице – размер левого поля – 2 см, правого – 1 см, верхнего - 2 см, нижнего – 2 см;
- текст должен быть отформатирован по ширине листа;
- на первой странице необходимо изложить план (содержание) реферата;
- в конце работы необходимо указать источники использованной литературы.

Список использованных источников должен формироваться в алфавитном порядке по фамилии авторов.

Включенная в список литература нумеруется сплошным порядком от первого до последнего названия. По каждому литературному источнику указывается: автор (или группа авторов), полное название книги или статьи, место и наименование издательства (для книг и брошюр), год издания; для журнальных статей указывается наименование журнала, год выпуска и номер. По сборникам трудов (статей) указывается автор статьи, ее название и далее название книги (сборника) и ее выходные данные. На использованные источники в тексте работы должны быть ссылки

2.2 Критерии оценки контрольной работы

Срок сдачи готовой контрольной работы определяется утвержденным графиком. В случае отрицательного заключения преподавателя студент обязан доработать или переработать контрольную работу. Срок доработки контрольной работы устанавливается преподавателем с учетом сущности замечаний и объема необходимой доработки.

Контрольная работа оценивается по системе:

Оценка "отлично" выставляется за контрольную работу, которая носит исследовательский характер, содержит грамотно изложенный материал, с соответствующими обоснованными выводами.

Оценка "хорошо" выставляется за грамотно выполненную во всех отношениях контрольную работу при наличии небольших недочетов в его содержании или оформлении.

Оценка "удовлетворительно" выставляется за контрольную работу, которая удовлетворяет всем предъявляемым требованиям, но отличается поверхностностью, в ней просматривается непоследовательность изложения материала, представлены необоснованные выводы.

Оценка "неудовлетворительно" выставляется за контрольную работу, которая не носит исследовательского характера, не содержит анализа источников и подходов по выбранной теме, выводы носят декларативный характер.

Обучающийся, не представивший в установленный срок готовую контрольную работу, которая была оценена на «неудовлетворительно», считается имеющим академическую задолженность и не допускается к сдаче экзамена или зачета.

3. Составление глоссария

Выполнить подбор и систематизации терминов, непонятных слов и выражений, встречающихся при выполнении контрольной работы. Расположить после основной части контрольной работы название и значение терминов, слов и понятий в алфавитном порядке.

Роль студента: прочитать материал источника, выбрать главные термины, непонятные слова; подобрать к ним и записать основные определения или расшифровку понятий; критически осмыслить подобранные определения и попытаться их модифицировать (упростить в плане устранения избыточности и повторений).

4.Рекомендуемая литературы для выполнения контрольной работы

Основная литература

1. Виноградов В.Б., Болотнова Л.А. Магниторазведка: Практикум, Часть I. Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2012.- 100 с.
2. Инструкция по магниторазведке: наземная магнитная съемка, аэромагнитная съемка, гидромагнитная съемка /Под ред. Ю.С.Глебовского и В.Е.Никитского. Л.: Недра, 1981. 364 с.
3. Логачев А.А., Захаров В.П. Магниторазведка. Изд. 5-е, перераб. и доп. – Л.: Недра, 1979. 351 с.
4. Магниторазведка: Справочник геофизика/ Под ред. В.Е. Никитского и Ю.С. Глебовского. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. 470 с.
5. Соколов, А. Г. Полевая геофизика [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. Г. Соколов, О. В. Попова, Т. М. Кечина. - Электрон. текстовые данные. - Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2015. - 160 с. - 978-5-7410-1182-9. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/33649.html>

Дополнительная литература

1. Гринкевич Г.И. Магниторазведка: Учебник. – Екатеринбург: УГГГА, 2001. – 308 с.

2. Гордин В.М., Розе Е.Н., Углов Б.Д. Морская магниторазведка. М.: Недра, 1986. -232 с.
3. Магнетизм горных пород / Т. Нагата; Пер. с англ. В. П. Августиновича и др. ; Под ред. д-ра физ.-мат. наук Г. Н. Петровой. - М. : Мир, 1965. - 347 с.
4. Миков Д.С. Методы интерпретации магнитных аномалий. Томск.: изд. ТПИ, 1975. -180с.
5. Ревякин П.С. Бредовой В.В., Ревякина Э.А. Высокоточная магниторазведка. М.: Недра, 1986. 275 с.
6. Скважинная магниторазведка: Методические рекомендации в двух частях. Под ред. В.Н.Пономарева, А.Н.Авдониной.-Свердловск:ПГО «Уралгеология», 1984.-240 с.
7. Стадухин В.Д.,Туранов В.М., ШабановаН.Н. и др. Метод искусственного подмагничивания при поисках магнетитовых месторождений: Методические рекомендации.-Свердловск: УНЦ АН СССР.1982.
8. Тафеев Г.П., Соколов К.П. Геологическая интерпретация магнитных аномалий. Л.: Недра, 1981. 327 с.
9. Трухин В.И. Введение в магнетизм горных пород.-М.: Изд МГУ, 1973.
10. Храмов А.Н., Шолпо Л.Е. Палеомагнетизм: Принципы, методы и геологические приложения палеомагнитологии. Труды Всесоюзного нефтяного научно-исследовательского геологоразведочного института (ВНИГРИ). Выпуск 256., 1967.- 224 с.
11. Хасанов Д.И. Магниторазведка. Казань: Казанский государственный университет, 2009г.
12. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 592 с.

Единое окно доступа к образовательным ресурсам - Режим доступа:
<http://window.edu.ru>

Составитель: _____ Л.А. Болотнова, доцент, к.г.-м.н.
подпись

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный горный университет»

Г. С. Возжеников, Ю. В. Бельшев

РАДИОМЕТРИЯ
И
ЯДЕРНАЯ ГЕОФИЗИКА

Екатеринбург – 2020

Ядерные методы в разведочной геофизике

Радиометрия и ядерная геофизика – научные дисциплины, входящие составными разделами в современную область знаний среди наук о земле – «разведочную геофизику».

В отличие от «большой геофизики», которая имеет отношение к физическим процессам глобальных масштабов, протекающим в околоземном пространстве или на значительных глубинах внутри Земли, – **объектом** исследований разведочной геофизики является земная кора и скрытые в ней минеральные ресурсы.

Предметом исследований разведочной геофизики являются физические поля, в особенности их деформации (аномалии), вызываемые присутствием в природных средах объектов, отличающихся по физическим свойствам от вмещающих пород.

Радиометрия объединяет в своем составе методы, основанные на изучении *естественной* радиоактивности природных сред, а **ядерная геофизика** имеет дело с *искусственно*-радиоактивными полями.

Несмотря на очевидную общность радиометрических и ядерно-геофизических методов, в основе которых лежит явление радиоактивности, существует различие в областях применения и характере решаемых задач с использованием естественной и искусственной радиоактивности.

Главной **задачей** радиометрических исследований является получение сведений, которые могут оказаться полезными (или решающими) при поисках, разведке и добыче радиоактивных руд и полезных ископаемых, генетически или парагенетически связанных с естественно-радиоактивными элементами (ЕРЭ). Радиометрические измерения при этом настолько же целесообразны, насколько необходимы, например измерения напряженности магнитного поля при поисках и разведке магнетитовых руд. Кроме главной, существуют и другие задачи, решение которых облегчается при наличии данных об особенностях поведения естественной радиоактивности природных сред в изучаемом регионе.

Хорошо известна высокая эффективность воздушной или автомобильной γ -спектрометрии для геологического картирования горных пород (например гранитов), отличающихся повышенными величинами кларков ЕРЭ. Минимальными значениями γ -полей характеризуются ультрабазиты, а также отложения известняков и некоторых других пород. Радиометрические

исследования широко используются при разведке и эксплуатации месторождений калийных солей, горючих сланцев, углей, фосфоритов, бокситов, редкометальной минерализации и других месторождений, связанных с аномальными проявлениями естественной радиоактивности.

Применение методов, основанных на использовании искусственной радиоактивности, оказалось эффективным на разных стадиях геологоразведочных работ (съемка, поиски, разведка и эксплуатация) применительно к очень широкому перечню полезных ископаемых.

Топливо (нефть, газ, уголь, уран), руды черных, цветных, редких и благородных металлов, месторождения нерудных полезных ископаемых (фосфориты, флюориты, сырье для керамической промышленности, асбест, пьезооптическое сырье), другие виды минерального сырья – объекты, поиски, разведку и эксплуатацию которых в настоящее время трудно проводить без привлечения ядерно-геофизических методов.

Останавливаясь на областях применения радиометрических и ядерно-геофизических методов, следует подчеркнуть, что получаемые с их помощью сведения об особенностях состава и свойств природных сред носят дистанционный характер. Речь идет об *изучении вещества на расстоянии*, что важно не только в практике геологоразведочных работ, но и для других целей. Так, с помощью γ - γ -плотномера, установленного на автоматической станции «Луна-13», были впервые получены сведения о плотности лунного грунта, а с помощью рентгенорадиометрического анализатора «РИФМА» (радиоизотопный флуоресцентный метод анализа) – сведения о составе лунных пород по трассам перемещения луноходов.

Существенным недостатком практически каждого из радиометрических методов является малая представительность получаемой информации, что объясняется большой поглощающей способностью твердых веществ по отношению к ядерным излучениям. По этой причине имеется отличие эффективности ядерных методов на разных стадиях геологоразведочных работ. Известно, что их поисковые возможности заметно уступают по эффективности результатам, получаемым на разведочной и, особенно, на эксплуатационной стадии, где ядерные методы практически незаменимы при контроле и управлении качеством минерального сырья.

В последние годы развивается новое направление в ядерно-геофизических исследованиях, связанное с дистанционным изучением особенностей состава околорудных гидротермально-измененных пород. Известно, что наличие ореолов гидротермального метасоматоза является

необходимой (хотя и недостаточной) предпосылкой для локализации оруденений гидротермального типа. Значительные размеры метасоматических ореолов, обычно во много раз превышающие размеры рудных тел, многократно увеличивают геохимическую «глубинность» ядерных методов, ориентированных на обнаружение и оконтуривание околорудных изменений.

Конечно, главная отдача от использования ядерных методов связана с *разведкой* месторождений, где они особенно широко используются для бескернавого определения границ коллекторов нефти и газа, мощности угольных, рудных подсечений и других целей, включая решение проблемы дистанционной оценки линейных запасов полезной компоненты в рудных интервалах разведочных скважин. Несмотря на значительную отдачу в использовании ядерных методов при поисках и разведке, их применение на стадиях *добычи* и *переработки* минерального сырья рассматривается как не менее перспективное.

Известно, что совершенствование технологических процессов на добывающих и перерабатывающих предприятиях во многом зависит от достоверной и оперативной информации о качестве минерального сырья. Широко используемые для этой цели традиционные методы опробования и химического анализа во многих случаях не в состоянии удовлетворить требованиям современного производства в основном из-за низкой оперативности. Именно по этой причине на добывающих и перерабатывающих предприятиях все шире и с возрастающими масштабами используются геофизические, и в первую очередь ядерно-геофизические методы экспрессного контроля качества минерального сырья [15,33,38,75].

Помимо предприятий по добыче урановых руд, опыт радиометрического и ядерно-геофизического контроля и обогащения сырья имеется и на объектах других отраслей. Например, на предприятиях цветной металлургии для контроля и управления качеством оловосодержащего сырья широко используется рентгенорадиометрический метод (РРМ), основанный на явлении фотопоглощения γ -лучей и на законе Мозли. На основе этого метода разработаны эффективные технологии контроля качества полиметаллических руд на Pb и Zn, W и Mo, Ti в ильменитовом концентрате, Nb и Ta в редкометалльных карбонатитах, другие полезные ископаемые, включая Sb, As и Ag. Для контроля качества руд легких элементов (Li, Be, B) высокоэффективными оказались методы нейтронной геофизики из-за высоких сечений захвата тепловых нейтронов ядрами лития и бора и благоприятной предпосылки для фотонейтронного расщепления бериллия.

На горнорудных предприятиях черной металлургии в последнее время начал применяться γ -абсорбционный метод, позволяющий получать оперативные сведения о содержании полезной компоненты в исследуемом материале так называемого квазибинарного состава. Наиболее подробно этот метод разработан применительно к хромитовым рудам Донского горно-обогатительного комбината (ГОКа), где использовался в различных вариантах, включая непрерывный анализ на конвейерной ленте.

Предложенная и разработанная уральскими геофизиками (Институт горного дела УрО РАН и кафедра ядерной геофизики УГГГА) технология γ -абсорбционных измерений на Сг оказалась универсальной, принципиально пригодной для квалитетических целей при эксплуатации месторождений, руды которых по γ -лучевым свойствам могут быть отнесены к квазибинарным. Можно показать, что кроме хромитов к таким рудам относятся также марганцевые, железные и некоторые другие, например целестиновые, а также бруситы (если оценивать их качество по содержанию СаО).

Применительно к железным рудам γ -абсорбционный метод (ГАМ) может оказаться полезным при необходимости получения сведений о содержании так называемого общего Fe или когда связь между магнитной восприимчивостью и массовой долей железа оказывается неустойчивой.

При благоприятном поведении элементного состава матрицы γ -абсорбционный метод оказывается весьма эффективным при контроле и управлении качеством Mn-содержащего минерального сырья. В последнее время уже получены положительные результаты по использованию γ -просвечивания в условиях ферросплавного производства для целей дозирования марганцевого агломерата. Интересные результаты получены с помощью γ -абсорбционных измерений при оценке качества огнеупорного сырья (бруситы и продукты их переработки – периклазовый порошок).

В отличие от многочисленных разновидностей γ - γ -метода, работающих в режиме «отражения», γ -просвечивание позволяет получать экспрессную и достоверную информацию о *количестве* дробленого материала, прошедшего через рудоконтрольный пункт за произвольное время. Имеются и другие примеры эффективного использования методов ядерной геофизики в практике горнодобывающих работ, однако подлинные возможности ядерных и других геофизических методов для контроля и управления качеством минерального сырья еще далеко не исчерпаны.

Главным препятствием для более широкого использования прогрессивных «горно-геофизических» технологий является практическое

отсутствие геофизической службы на горно-обогатительных комбинатах ряда отраслей. Но даже и там, где такие службы в свое время были сформированы (урановое и редкометальное сырье, некоторые предприятия цветной и черной металлургии), ощущается острый недостаток геофизиков «горного профиля», поскольку отсутствует целенаправленная подготовка таких специалистов. В технических вузах горно-геологического профиля отсутствуют выпускающие кафедры горной геофизики, хотя необходимость в геофизиках для горно-металлургических предприятий является очевидной.

Важной областью применения ядерных методов является их использование для аналитических целей, особенно для надежного и экспрессного определения массовых долей редких и драгоценных металлов. Например, с помощью γ -активационного метода присутствие Au в геологических пробах определяется практически немедленно по интенсивности аналитической линии γ -излучения изомера Au^{197m} , образующегося в результате ядерной реакции (γ, γ') за счет материнского изотопа Au^{197} . Для количественных определений Au широко используется также нейтронно-активационный анализ (НАА). В этом случае оказывается возможным определение Au в активированных пробах по искусственно-радиоактивному изотопу Au^{198} , который образуется в результате ядерной реакции (n, γ), идущей на тепловых нейтронах. При наличии достаточно мощных потоков нейтронного излучения, например с использованием нейтронных каналов реакторов атомных станций, оказывается возможным количественное определение содержания Au в пробах на кларковом уровне.

Нейтронный активационный анализ успешно используется в аналитических целях не только на Au, но и на другие элементы, включая редкоземельные. При этом в ряде случаев отсутствует необходимость «нейтронной накачки» исследуемых проб с помощью нейтронных каналов АЭС. К настоящему времени на вооружении геофизиков имеются полевые лаборатории с γ -спектрометрической аппаратурой и источниками нейтронов с выходом до 10^{11} н/с. Гамма-спектры активированных проб регистрируются с помощью полупроводниковых детекторов, а для расшифровки и интерпретации спектров применяется бортовая ЭВМ. Такая лаборатория для экспрессного многоэлементного анализа геологических проб создана, например, в Канаде [35]. Применение детекторов с высоким энергетическим разрешением позволяет идентифицировать одновременно более 20 редких элементов с пределом обнаружения 10^{-4} %. В полевых условиях используется также малогабаритная установка для многоэлементного нейтронно-активационного анализа, разработанная в США. В установке применяется калифорниевый

источник нейтронов с выходом $3 \cdot 10^7$ н/с (масса Cf^{252} – 12 мкг). Анализ ведется по короткоживущим радионуклидам, образующимся в результате ядерной реакции (n, γ). С помощью этой установки оказывается возможным экспрессное количественное определение Al и 12 редких элементов. Предел обнаружения Sc, V, Co, Se, Br, Ag и Dy – менее 1 мкг; Al, Ti, Cu и Gd – от 1 до 10 мкг; Ro и Ir – от 10 до 100 мкг [35].

Кроме отмеченных, имеются и другие варианты полевых ядерно-геофизических лабораторий, предназначенных для получения достоверной и экспрессной информации относительно особенностей элементного состава исследуемых природных сред. Например, на основе узкополосного дифференциального детектора (УДД) в НПО «Буревестник» разработана серия отечественных портативных рентгеновских приборов, обеспечивающих экспрессное определение ряда элементов, включая раздельное определение элементов со смежными атомными номерами, например Cr, Mn, Fe.

Особую роль в геологии и других отраслях знаний (археология, биология) играют способы датировки природных сред и живых организмов, в основе которых лежит постоянство скорости «остывания» любых, в том числе долгоживущих радионуклидов. К настоящему времени детально разработаны K-Ar, Rb-Sr, радиоуглеродный, U-Pb и другие методы определения абсолютного возраста самых разнообразных объектов.

Краткая история развития ядерных методов

Ядерная геохронология – это, пожалуй, первое приложение явления радиоактивности в геологии. Уже в 1902 г. П. Кюри, а вслед за ним Э. Резерфорд высказали мысль о том, что скорость радиоактивного распада элементов может быть использована в качестве эталона времени для определения абсолютного возраста горных пород. В 1907 г. эта идея получила практическое осуществление. Английский физик Б. Болтвуд по содержанию в горных породах U и конечного продукта его распада – Pb впервые определил абсолютный возраст урансодержащих минералов. В дальнейшем радиологические методы датировки минералов непрерывно совершенствуются и расширяются.

Кроме U-Pb-метода, разрабатываются U-He-, K-Ar-, Rb-Sr- и другие методы. В США в 1923 г. была организована специальная комиссия по измерению геологического возраста радиоактивными методами. В нашей стране такие измерения начали проводиться в Радиевом институте с 1924 г. Отечественные специалисты В. Г. Хлопин, К. А. Ненадкевич, Э. К. Герлинг, Л. В. Комлев, И. Е. Старик и др. внесли большой вклад в разработку радиоактивных способов датировки горных пород.

Параллельно с разработкой ядерных методов непрерывно исследуются особенности распределения радиоактивных элементов в земной коре и изучается тепло, выделяющееся при распаде ЕРЭ. Ведущую роль в изучении распределения радиоактивных элементов в земной коре играли отечественные ученые. В 1912 г. по инициативе и под руководством академика В. И. Вернадского в России была организована Радиовая экспедиция Академии наук. В начале 30-х годов проблемы ядерной геохронологии и радиотермии определились настолько отчетливо, что появилась самостоятельная отрасль геологии – радиогеология. Основоположником радиогеологии как самостоятельной ветви наук о Земле является В. И. Вернадский. Большой вклад в развитие радиологии внесли А. Е. Ферсман, В. Г. Хлопин, К. А. Ненадкевич, А. П. Соколов, И. Е. Старик, Г. В. Войткевич, В. И. Баранов и др.

С открытием явления радиоактивности (А. Беккерель, 1896 г., М. Кюри, 1898 г.) непрерывно разрабатываются методы исследования этого фундаментального явления. Разрабатываются также методы поисков и разведки месторождений радиоактивных руд, других полезных ископаемых, связанных с радиоактивностью.

Первые полевые работы, связанные с изучением радиоактивности, были выполнены отечественными геофизиками на урановом месторождении Тюя-Муюн (Средняя Азия). Здесь в 1923 г. А. П. Кириковым впервые был применен эманационный радоновый метод с целью поисков рудных тел на площадях, перекрытых чехлом четвертичных отложений. Несколько позже (1923-1925) Л. Н. Богоявленским были выполнены первые измерения естественного γ -излучения с целью поисков полезных ископаемых.

Эманационная съемка, разновидности γ -измерений (включая γ - γ -каротаж скважин), некоторые виды радиометрического анализа геологических проб, γ -опробование руд в условиях естественного залегания впервые возникли в нашей стране. Некоторые из этих методов параллельно развивались в Германии; в США они начали применяться на несколько лет позже.

В 1924-1925 гг. были организованы радиометрические комитеты при Геолкоме (А. П. Кириков) и при Институте прикладной геофизики (Л. Н. Богоявленский). Исследования велись как по линии полевых радиометрических измерений, так и по линии исследования радиоактивности геологических коллекций образцов горных пород. Уже в 1925 г. в результате радиометрического изучения коллекций геолога С. Ф. Машковцева было открыто Табошарское месторождение урановых руд в Средней Азии. В 1926-1927 гг. на этом месторождении были выполнены эманационные и γ -измерения, позволяющие обнаружить новые рудные тела.

Существенную роль в разработке радиометрических методов как методов разведочной геофизики сыграл радиометрический кабинет при Ленинградском центральном научно-исследовательском геологоразведочном институте (А. П. Кириков, А. Г. Граммаков, Г. В. Горшков, Б. С. Айдаркин, П. Н. Тверской) и радиометрический кабинет при лаборатории ЦНИГРИ в Москве (В. И. Баранов, Е. Г. Грачева).

Курс лекций по радиометрии впервые прочитан Л. Н. Богоявленским в 1923-1924 гг. в Петроградском горном институте. В 1930 г. в Московском геологоразведочном институте создана первая в стране кафедра радиометрии во главе с В. И. Барановым (в настоящее время – кафедра ядерной геофизики и геоинформатики, зав. кафедрой – проф. А. А. Ники-тин).

Мощным толчком к дальнейшему развитию ядерно-геофизических методов послужила проблема поисков, разведки и эксплуатации месторождений нового вида энергетического и стратегического сырья – урана. С этой целью уже в первые послевоенные годы совершенствуется техника и методика радиометрических измерений. Появляются автомобильный и воздушный варианты γ -съемки. Развивается теория этих методов, методика измерений и способы интерпретации результатов. Создается и внедряется в практику γ -спектрометрическая аппаратура, позволяющая получать сведения о долях К, U и Th в суммарной γ -активности пород. А. Г. Граммаков, В. Л. Шашкин и др. разработали метод анализа радиоактивности горных пород в условиях естественного залегания (*in situ*) и в лабораториях. Полевые методы измерений естественной радиоактивности к настоящему времени достигли высокой степени развития. Эти методы в разных модификациях, от аэро- γ -спектрометрии до γ -измерений в скважинах (приоритет в изобретении γ -каротажа принадлежит отечественным геофизикам: Г. В. Горшков, Л. М. Курбатов, В. А. Шпак – 1935 г.) стали неотъемлемой частью геолого-съемочных, поисковых, разведочных и эксплуатационных работ.

Собственно ядерно-геофизические методы, составляющие арсенал современных средств ядерной геофизики и основанные на эффектах взаимодействия ядерных излучений с веществом, появились позже радиометрических методов. Их появление связано с потребностями отраслей хозяйства в различных видах минерального сырья: от нефти, газа и угля до редких и драгоценных металлов. Возможности ядерных методов заметно расширились благодаря развитию атомной энергетики, когда оказалось возможным получение в широких масштабах источников α -, β -, γ - и n -излучений.

Среди ядерно-геофизических методов важное значение принадлежит методам нейтронной геофизики, среди которых выделяется нейтронный активационный анализ. В его основе лежит явление искусственной радиоактивности, за открытие которого в 1934 г. французские физики Ирен и Фредерик Жолио-Кюри были удостоены Нобелевской премии. Несколько позже итальянский физик Э. Ферми предложил использовать нейтронное излучение для изучения состава вещества. Образующиеся в результате взаимодействия нейтронов с ядрами вещества искусственно-радиоактивные продукты являются объектом изучения в активационном анализе.

Вслед за фундаментальным открытием явления искусственной радиоактивности были предприняты успешные попытки использовать его для прикладных целей в различных областях науки и техники, в том числе и в геологии. В 1935 г. венгерские ученые Хевизи и Леви исследовали искусственно-радиоактивные изотопы, образующиеся при облучении нейтронами редкоземельных элементов. Эти работы положили начало развитию нейтронного активационного анализа. В 1940 г. Р. Е. Фирон предложил использовать активацию нейтронами Al для расчленения горных пород в скважинах при поисках бокситов. В патентной заявке содержалась схема глубинного зонда, в котором источник нейтронов заключался между двумя детекторами γ -лучей. При подъеме снаряда по скважине верхний детектор регистрировал интенсивность естественного γ -излучения, а нижний – суммарное γ -излучение (естественное и искусственно созданное).

В нашей стране предложение об использовании искусственной радиоактивности для литологического расчленения горных пород в скважинах было впервые высказано в 1946 г. А. А. Коржевым. Реализация этого предложения была начата в 1950 г. в Московском институте нефтяного хозяйства по инициативе проф. В. Б. Лапука, а с 1953 г. в Институте нефти АН СССР под руководством академика Г. Н. Флерова и проф. Ф. А. Алексеева.

Важным достижением в совершенствовании технологии геофизических исследований скважин следует считать предложенный в 1942 г. физиком-ядерщиком Б. Понтекорво нейтронный γ -метод, который позволил получать информацию о распределении Н по оси скважин. Появление этого метода по праву считается крупным «подарком» геологии со стороны физиков, поскольку благодаря возможности получения дистанционной информации о распределении водорода по разрезу скважины геологи оказались в состоянии перейти на бескерновое бурение нефтяных скважин.

В 1947 г. Холленбах предложил γ - γ -метод, основанный на регистрации рассеянного γ -излучения. Физической основой этого метода является эффект

Комптона, названный так в честь лауреата Нобелевской премии, исследовавшего процессы взаимодействия γ -квантов с электронами.

Период с 1950 г. характеризовался исследованиями по усовершенствованию γ - γ -метода. В 1954 г. метод впервые был успешно испытан для выделения рудных (М. М. Соколов, А. П. Очкур) и угольных подсечений в скважинах (Ю. П. Булашевич, Г. М. Воскобойников, 1955-1957 гг.). В 1957 г. Г. М. Воскобойников предложил модификацию γ - γ -каротажа с источниками мягких γ -лучей, названную им селективным γ - γ -каротажем (ГГК-С). Этот метод обладает высокой чувствительностью даже к небольшим изменениям эффективного атомного номера природных сред. В определенных условиях с помощью ГГК-С оказалось возможным определение концентрации тяжелых металлов в рудах (Г. М. Воскобойников) и зольности каменных углей (В. И. Уткин, 1966 г.). Значительный вклад в теорию и практику γ - γ -измерений внесли Е. М. Филиппов, И. Г. Дядькин, В. А. Арцыбашев и др.

В качестве важного этапа развития методов, основанных на взаимодействии γ -лучей с веществом, следует отметить исследования Л. Рейфела и Р. Хемфриса по рентгенофлуоресцентному анализу вещества с использованием источников γ -лучей. В 1958 г. А. Л. Якубович и В. Ю. Залесский разработали методику и аппаратуру для количественных определений металлов в геологических пробах, доказав реальную возможность применения метода, названного ими рентгенорадиометрическим (РРМ). Важным этапом в развитии этого метода были работы специалистов кафедры ядерной геофизики Ленинградского университета (В. А. Мейер, В. С. Нахабцев и др.) по созданию скважинного варианта РРМ. Разработка РРМ послужила основой для широкого использования рентгенофлуоресцентного метода при исследовании состава руд в горных выработках (Е. П. Леман и др.), на обнажениях, т. е. в естественном залегании. В дальнейшем РРМ стал использоваться также как средство контроля и сортировки минерального сырья на ГОКах при добыче и обогащении руд цветных металлов.

Для контроля и управления качеством минерального сырья и продуктов переработки руд черных металлов весьма эффективным оказался также γ -абсорбционный метод, в разработке которого большую роль сыграли уральские геофизики (С. Г. Возжеников, Ю. В. Белыйшев и др.).

В начале 60-х годов появились работы геофизиков Московского геологоразведочного института (В. М. Бондаренко, Г. Г. Викторов и др.), связанные с разработкой нового способа подземных геофизических исследований, основанного на регистрации проникающего космического излучения.

В середине 50-х годов заметно усилилось внимание к методам нейтронной геофизики. В 1956 г. академик Г. Н. Флеров обосновал применение так называемого импульсного варианта нейтрон-нейтронного каротажа (ННК) для решения ряда проблем нефтяной геофизики, например установление положения водонефтяного контакта в скважине. Появление импульсного нейтрон-нейтронного каротажа (ИННК), разработка которого была выполнена С. А. Кантором, Ю. С. Шимилевичем, Б. Г. Ерозолиским, А. С. Школьниковым, Д. Ф. Беспаловым (ВНИИ ядерной геофизики и геохимии), ознаменовало начало внедрения скважинных генераторов нейтронов.

В рудной геофизике ядерные методы появились несколько позже, чем в нефтяной отрасли. В начале 60-х годов появились первые технологии дистанционного определения линейных запасов полезных ископаемых в рудных подсечениях разведочных скважин, пройденных с недостаточным выходом керна или его отсутствием: Си в медных колчеданах (Г. С. Возжеников, 1961 г.), Al в бокситах (И. Н. Сенько-Булатный, 1963 г.), черные металлы (К. И. Якубсон, 1964 г.), F во флюоритовых рудах (В. Я. Бардовский, 1965 г.). Бериллий в редкометальных рудах – И. П. Кошелев, А. К. Сенько, Е. М. Филиппов, В. В. Шестаков и др., 1959-1966 гг.

С появлением полупроводниковых детекторов были решены задачи о редкометальных ассоциациях в связи с прогнозированием рудных месторождений (Au в черных сланцах Средней Азии – П. А. Ваганов, 1981 г.).

Историю развития методов ядерной геофизики невозможно с необходимыми подробностями изложить в вводном разделе курса лекций. Перечислим лишь основные организации, без упоминания которых невозможно осветить даже ключевые моменты развития ядерно-геофизических методов в нашей стране. В дополнение к уже упоминавшимся учреждениям или лабораториям, сыгравшим основополагающую роль в формировании ядерного направления в разведочной геофизике, отметим, что некоторые лаборатории или научные группы в разное время вошли в состав крупных научно-исследовательских центров – ВНИИ ядерной геофизики и геохимии, ВНИИ разведочной геофизики, ВНИИ минерального сырья, ВНИИ радиационной техники, ВНИИ геофизических исследований скважин и др.

Были созданы ядерно-геофизические лаборатории при Институте геофизики Уральского научного центра АН (Ю. П. Булашевич), при Институте геологии и геофизики Сибирского отделения АН (Е. М. Филиппов) и др.

Еще на рубеже 40-50-х годов по инициативе академика И. В. Курчатова для обеспечения специалистами научных и производственных организаций в ряде вузов страны была организована подготовка инженеров выпускающими

кафедрами ядерно-геофизического профиля: в Московском геологоразведочном институте – МГРИ (В. И. Баранов, А. С. Сердюкова, Д. Ф. Зимин), Ленинградском университете – ЛГУ (В. А. Мейер, А. А. Са-турин, П. А. Ваганов), Ленинградском горном институте – ЛГИ (Г. Ф. Новиков, Ю. Н. Капков, А. Я. Синицын), Московском институте нефтехимической и газовой промышленности – МИНХиГП (В. Н. Дахнов, В. В. Ларионов, Д. А. Кожевников), Свердловском горном институте – СГИ (Н. А. Иванов, Ю. П. Булашевич, Г. С. Возжеников).

Из названия учебного пособия следует, что его основу составляет одноименный курс лекций, который преподается студентам геофизического факультета СГИ (ныне Уральский государственный горный университет) с 1952 г. Формирование и развитие курса, особенно разделов книги 1 и 2, происходило в значительной степени под влиянием профессоров Н. А. Иванова и Ю. П. Булашевича, которые в свое время (1952-1959) начинали преподавание этой дисциплины на геофизическом факультете СГИ. Наряду с отмеченным в книгу включены сведения, заимствованные из литературных источников (учебные пособия, монографии, справочники), а также оригинальные материалы из работ авторов.

Третий раздел книги составлен на основе спецкурса «Ядерная геофизика», который был подготовлен и впервые прочитан Г. С. Возжениковым в 1970 г. на геофизическом факультете СГИ для студентов старших курсов специализации ядерно-геофизического профиля.

Авторы будут признательны всем, кто сочтет возможным прислать замечания и пожелания по изложенному в курсе материалу по адресу: 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет, факультет геологии и геофизики, кафедра геофизики.

1. ОСНОВЫ УЧЕНИЯ О РАДИОАКТИВНОСТИ

1.1. Общие сведения

Радиоактивность – физическое явление, заключающееся в способности ядер некоторых элементов самопроизвольно распадаться с испусканием ядерных излучений. При этом исходное (*материнское*) ядро превращается в *дочернее* ядро – продукт распада. Явление радиоактивности связывают также со взаимным превращением одних элементарных частиц в другие (например, нейтронов в протоны).

Различают *естественную* и *искусственную* радиоактивность. Естественная радиоактивность наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе. Искусственная радиоактивность – радиоактивность нуклидов, полученных с помощью ядерных реакций. При этом ядерные свойства данного радионуклида не зависят от способа его получения.

История открытия естественной радиоактивности связывается с именем немецкого физика Рентгена, который в 1895 г. открыл лучи, впоследствии названные его именем. В первых опытах испускание так называемых *X*-лучей сопровождалось флуоресценцией стеклянных стенок рентгеновской трубки. Вскоре были выполнены исследования флуоресценции, чтобы выяснить, всегда ли она сопровождается испусканием рентгеновского излучения. Опыты проводились с завернутыми в черную бумагу фотопластинками, на которые накладывались разные вещества, флуоресцирующие под действием яркого света. Если флуоресценция сопровождается испусканием рентгеновских лучей, то фотопластинки должны почернеть.

При испытании большого количества флуоресцирующих веществ французский ученый Беккерель в 1896 г. обнаружил, что ожидаемый эффект дают урансодержащие вещества. Однако дополнительные опыты показали, что почернение фотопластинки не было связано с флуоресценцией, так как почернение наблюдалось даже в том случае, когда соли *U* не освещались. В дальнейшем было установлено, что наблюдаемое излучение характерно для всех соединений *U*, а наиболее эффективным был металлический *U*. Оказалось, что интенсивность излучения не зависит от внешних условий и не меняется со временем. Таким образом было установлено, что наблюдаемый эффект является внутренним свойством атомов *U*.

Свойство атомов (в то время еще не существовало представления об атомном ядре) урана испускать излучение Пьер и Мария Кюри назвали радиоактивностью. Вскоре супруги Кюри открыли радиоактивность другого тяжелого элемента – тория. Как и в случае с ураном, оказалось, что это явление

не связано с физико-химическим состоянием вещества, а является свойством элемента. Позднее анализ урансодержащих руд привел к открытию полония и радия, удельная радиоактивность которых оказалась значительно выше, чем у U и Th.

Впервые радиоактивное излучение было проанализировано Резерфордом при помощи опытов по наблюдению за его поведением в электрическом и магнитных полях и поглощению в веществе. В результате этих опытов установлено, что радиоактивные вещества испускают 3 вида лучей:

1. α -лучи – тяжелые положительно заряженные частицы, двигающиеся со скоростью $\sim 10^9$ см/с и поглощающиеся алюминиевой фольгой. Впоследствии было установлено, что этими частицами являются ядра ${}^4_2\text{He}$.

2. β -лучи – легкие заряженные частицы, двигающиеся со скоростью, близкой к скорости света и поглощаемые слоем алюминия толщиной в несколько мм. Этими частицами оказались электроны (в дальнейшем были обнаружены и положительно заряженные β -частицы – позитроны).

3. γ -лучи – сильно проникающее излучение, не отклоняющееся ни в электрическом, ни в магнитном полях. Природа γ -лучей – жесткое электромагнитное излучение с длиной волны менее 10 нм ($< 10^{-9}$ м). Гамма-излучение связано с энергетической перестройкой ядер, испытывающих то или иное ядерное превращение.

1.2. Элементы строения атомных ядер

Атомное ядро представляет собою систему, состоящую из некоторого числа сильно связанных между собой частиц – протонов и нейтронов, которые обычно называют *нуклонами* (от лат. *nucleos* – ядро). Идея о протонно-нейтронном составе ядра была впервые высказана академиками Д. Иваненко и А. Амбарцумяном в 1930 г.

Протон (p) – элементарная частица, имеющая единичный положительный заряд, равный по абсолютной величине заряду электрона, представляет собою ядро основного изотопа водорода ${}^1_1\text{H}$. Таким образом, масса протона равна массе атома водорода за вычетом массы электрона. Так как масса атома H составляет 1,00814 атомных единицы массы (а.е.м.), а масса электрона составляет 0,00055 а.е.м., то масса протона равна 1,00759 а.е.м. ($1,672 \cdot 10^{-24}$ г.).

Нейтрон (n) – электрически нейтральная частица с массой, близкой и немного большей, чем у протона (1,00893 а.е.м., $1,674 \cdot 10^{-24}$ г.).

Количество протонов в ядре равно порядковому (атомному) номеру элемента в периодической системе Менделеева и обозначается Z . Общее количество протонов и нейтронов в ядре определяет его массовое число (атомный вес) и обозначается A . Число нейтронов в ядре равно $A-Z$.

Разновидности одного и того же химического элемента с одинаковыми значениями Z и разными массовыми числами называются *изотопами* (равноместными). Элементы с нечетными атомными номерами являются либо моноизотопными, либо состоят не более чем из двух изотопов. Четные элементы, как правило, являются полиизотопными.

Атомы с одинаковыми A , но разными Z (принадлежащим разным химическим элементам) называются *изобарами* (барос - вес).

Атомы с одинаковым числом нейтронов $A-Z$ называют *изотонами*.

В легких ядрах (с малым Z) обычно содержится равное или примерно равное количество протонов и нейтронов, в тяжелых ядрах нейтронов примерно в 1,5 раза больше, чем протонов. Связь Z с A для стабильных ядер описывается эмпирической формулой [41]

$$Z = \frac{A}{1,98 + 0,015A^{2/3}},$$

следовательно, для легких ядер отношение $Z/A \approx 0,5$.

Нуклоны, входящие в состав атомных ядер, испытывают конкуренцию кулоновских сил отталкивания и ядерных сил сцепления. Преобладание первых приводит к распаду ядра, вторых – к его устойчивому состоянию.

Сравнение массы атомного ядра с суммой масс входящих в его состав нуклонов показывает, что масса ядра всегда меньше суммы масс всех составляющих его протонов и нейтронов. Разность между суммой масс нуклонов и массой ядра называется *дефектом массы* Δm , определяет *энергию связи* ядра относительно составляющих его нуклидов. Если обозначить через m_p , m_n и $M_{\text{я}}$ соответственно массы p , n и ядра, то

$$\Delta m = [m_p Z + m_n (A - Z)] - M_{\text{я}}. \quad (1.1)^*$$

Согласно формуле Эйнштейна, каждому значению массы соответствует определенная энергия $E = mc^2$, так что энергию связи ядра W можно выразить следующим образом:

$$W = \Delta m c^2. \quad (1.2)$$

Энергия связи представляет собою ту энергию, которую надо затратить, чтобы разделить нуклоны, «упакованные» в ядре с плотностью порядка 10^8

* Здесь и далее для широко известных формул и определений ссылки не приводятся.

т/см³. Таким образом, энергия связи является мерой прочности ядра. Особенно велика энергия связи у четно-четных ядер, т. е. у ядер с четным числом протонов и нейтронов, например у ${}^2\text{He}^4$, ${}^6\text{C}^{12}$, ${}^8\text{O}^{16}$ и др.

Энергия связи, отнесенная к массовому числу, называется *удельной энергией связи*, или средней энергией связи нуклона в ядре, $\varepsilon = W/A$. Средняя энергия связи нуклона в ядре изменяется от ядру к ядру. На рис. 1.1 приводится зависимость ε от массового числа A .

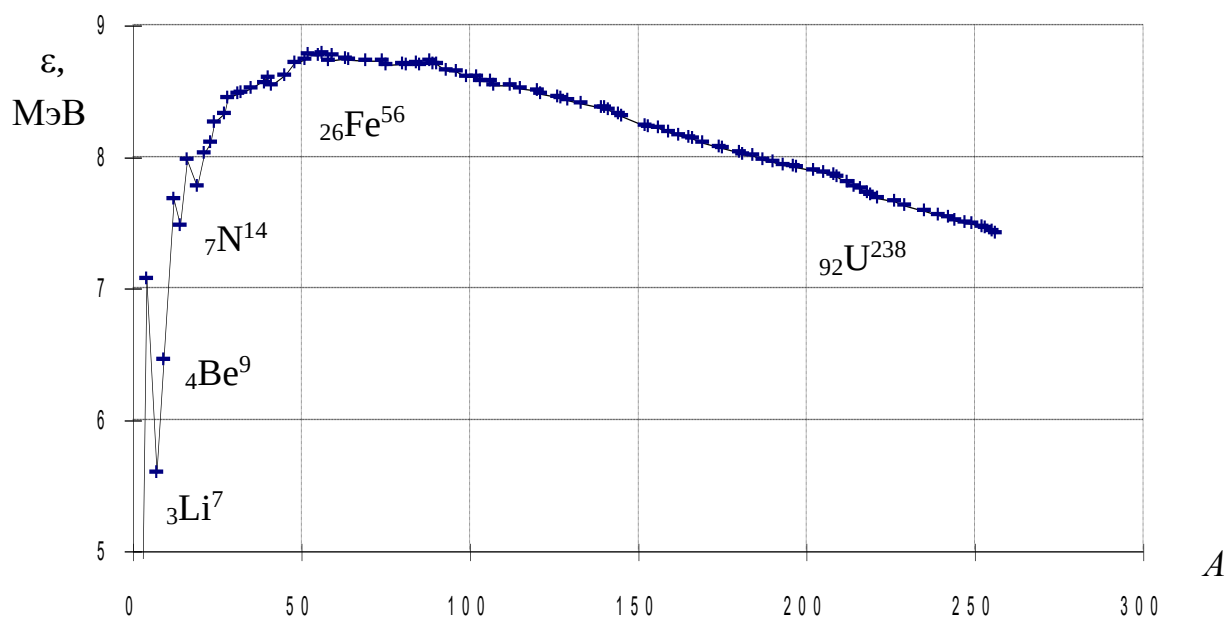


Рис. 1.1

Наименьшее значение энергии связи нейтрона имеет место для изотопа ${}^4\text{Be}^9$. В случае распада ${}^4\text{Be}^9$ на две α -частицы и нейтрон она составляет 1,67 МэВ, хотя энергия связи ядра ${}^4\text{Be}^9$, отнесенная ко всем девяти составляющим его нуклонам, равна 6,46 МэВ.

Ядра тяжелых элементов имеют очень большую энергию связи относительно всех составляющих его нуклонов, однако, например, для ${}^{92}\text{U}^{238}$ энергия связи в случае распада этого ядра на ${}^2\text{He}^4$ и ${}^{90}\text{Th}^{234}$ оказывается отрицательной (-4,25 МэВ). Это означает, что ядро урана является неустойчивым и распадается на α -частицу и ядро ${}^{90}\text{Th}^{234}$ с выделением избытка энергии. Точно так же U обладает отрицательной энергией связи для двух примерно равных по массе осколков деления, что определяет спонтанное (самопроизвольное) деление ядер U на два примерно равных по массе осколка деления.

Нуклоны, находящиеся на периферии атомных ядер, окружены не со всех сторон другими нуклонами, поэтому они связаны ядерными силами слабее

внутренних. Кроме того, ядерные силы начинают проявлять себя лишь на расстоянии, сравнимом с размером нуклона, в результате чего нуклоны в ядре сцеплены фактически лишь со своим ближайшим окружением. Следовательно, ядерные силы в отличие от кулоновских обладают свойством насыщения. По мере роста массового числа A уменьшается доля поверхностных нуклонов, и средняя энергия связи, приходящаяся на нуклон, сначала растет (рис. 1.1). По мере увеличения Z кулоновское отталкивание нуклонов непрерывно растет, поскольку эти силы имеют радиус действия порядка атомных размеров, и, следовательно, каждый протон взаимодействует со всеми другими протонами ядра.

Для сохранения устойчивости тяжелые ядра содержат большее количество нейтронов, чем протонов: с ростом числа нейтронов увеличивается среднее расстояние между протонами и уменьшаются кулоновские силы отталкивания. Однако эти «меры» лишь частично компенсируют рост сил отталкивания в ядре по мере увеличения A , в связи с чем удельная энергии связи ϵ начинает уменьшаться уже при $A > 60$. Ядра с $A > 230$ становятся неустойчивыми.

1.3. Виды ядерных превращений

Ядерные (или *радиоактивные превращения*) происходят с изменением строения и энергетического состояния ядра атома и сопровождаются испусканием или захватом заряженных частиц, делением ядра или испусканием коротковолнового γ -излучения электромагнитной природы.

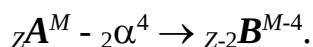
Различают следующие основные виды *ядерных превращений*: α -распад, β -распад (электронный β^- -распад, позитронный β^+ -распад и электронный захват), изомерный переход (ИП) и деление ядер (f -распад).

1.3.1. Альфа-распад

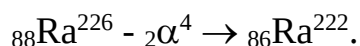
Заключается в превращении материнского ядра A в дочерний продукт B путем испускания α -частицы, представляющей собою ядро ${}^4_2\text{He}$. Альфа-частицы имеют массу, равную 4,002264 а.е.м. ($6,598 \cdot 10^{-24}$ г.), и несут двойной электрический заряд, равный $3,2044 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Радиоактивные элементы испускают α -частицы разной энергии (2-10 МэВ), однако для каждого элемента начальная энергия α -частиц постоянна и является характеристической величиной, если не учитывать особенности, связанные с так называемой «тонкой структурой» α -спектров.

Вылет α -частицы с кинетической энергией E_α из ядра радиусом R_0 с потенциальным барьером $U_0 > E_\alpha$ представляет случай *туннельного перехода* частицы через кулоновский барьер (в силу соотношения неопределенности $\Delta E \Delta t \sim h$). Схема α -распада записывается следующим образом:



Другими словами, заряд дочернего ядра в случае α -распада уменьшается на 2, а массовое число на 4 соответствующие единицы. Дочерний продукт α -распада перемещается в таблице Менделеева на 2 клетки влево. Примером α -распада может служить превращение Ra в Rn (эманация Ra):



Альфа-распад часто сопровождается γ -излучением с энергией E_γ от десятков до первых сотен кэВ. Возникновение γ -лучей связано с *тонкой структурой* α -спектра, сущность которого заключается в том, что часть материнских ядер испускает α -частицы с энергией $E_\alpha < E_\alpha^{\max}$. Дочерние ядра при этом оказываются в состоянии возбуждения и переходят в *основное энергетическое состояние* (уровень, при котором ядро обладает наименьшей эквивалентной массой) путем высвечивания избыточной энергии в виде γ -излучения сравнительно небольшой энергии и интенсивности.

При прохождении через вещество энергия α -частицы расходуется в основном на ионизацию и возбуждение атомов. Вследствие большой начальной энергии при столкновении с молекулами поглощающей среды α -частица образует на длине своего пробега (трека) сотни тысяч пар ионов. В этом смысле говорят о большой ионизирующей способности α -частиц. Оценим количество пар ионов, которые образуются на длине трека α -частицы при распаде ядер ${}_{84} \text{Po}^{210}$. Имея в виду, что $E_\alpha^{\text{Po}} = 5,3$ МэВ, а энергия, затрачиваемая на образование одной пары ионов, составляет ~ 30 эВ, имеем около 175 тысяч эффектов ионизации. Из-за относительно малой величины энергии, затрачиваемой α -частицей на один акт ионизации, α -частица после взаимодействия с атомом не меняет направления своего переноса, ее траектория движения в веществе является прямолинейной.

Отличительной способностью α -частиц является их малая проникающая способность. В зависимости от начальной энергии пробег α -частиц в воздухе составляет несколько сантиметров и может быть найден из следующей эмпирической формулы:

$$R_\alpha(E) = 0,316 E_\alpha^{3/2}, \quad (1.3)$$

где E_α - энергия α -частицы, МэВ;

$R_\alpha(E)$ - пробег α -частицы в воздухе, см.

В твердом веществе пробег еще меньше, измеряется микронами и может быть найден с помощью эмпирической формулы Брегга-Климэна:

$$L_\alpha(E) = 3,2 \cdot 10^{-4} R_\alpha(E) \frac{\sqrt{A}}{\rho}, \quad (1.4)$$

где A и ρ - соответственно атомный вес и плотность среды переноса α -частицы с энергией E .

Поскольку начальная энергия вылета α -частиц для данного типа α -излучателя постоянна, то длина их пробега в каждом конкретном веществе является также постоянной величиной. Между длиной пробега α -частиц (их энергией) и постоянной распада α -излучателей λ существует тесная связь. Согласно правилу (закону) Гейгера-Неттола эта связь выражается следующим образом:

$$\lg \lambda = A \lg R_\alpha + B, \quad (1.5)$$

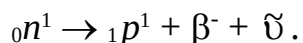
где A и B - коэффициенты, несколько отличающиеся для α -излучателей семейств урана и тория.

Ионизация и возбуждение α -частицами атомов различных веществ сопровождаются их химическими изменениями, нарушением кристаллической структуры твердых тел, выделением тепла, почернением фотопластинок, люминесценцией ряда веществ и другими физико-химическими явлениями. Явление люминесценции используется для регистрации ядерных частиц. Хорошим люминофором для регистрации α -частиц является сернистый цинк, активированный серебром $\text{ZnS}(\text{Ag})$.

1.3.2. Бета-распад

Различают три разновидности β -распада: электронный, позитронный и электронный захват (K -захват).

Электронный β -распад (β^- -распад). Заключается в ядерном превращении нейтрона в протон по следующей схеме:



Энергия β^- -распада ($E_\beta^{\max}$) распределяется сложным (случайным) образом между электроном и антинейтрино, поэтому энергетический спектр β -излучения в отличие от α -спектра, является непрерывным (рис. 1.2), причем

максимум кривой распределения β -частиц по энергиям приходится на энергию, составляющую примерно треть от $E_{\beta}^{\max}$.

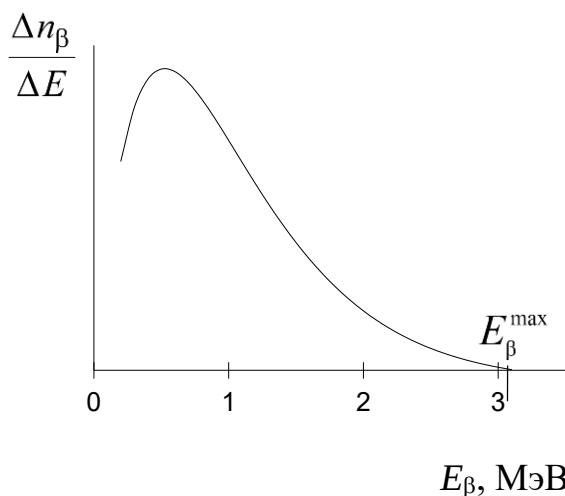
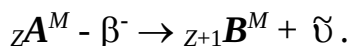


Рис. 1.2

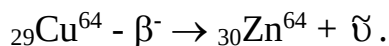
Часть дочерних ядер при своем образовании оказывается на промежуточных энергетических уровнях и при переходе на основной уровень испускают γ -лучи квантованных линий.

В результате электронного β^- -распада образуется дочернее ядро с тем же массовым числом, но его порядковый номер будет на единицу больше.

Схему β^- -распада можно представить следующим образом:



По этой схеме распадаются не только естественные радионуклиды, но и искусственно-радиоактивные изотопы, например:



Представление о частицах, не обладающих ни зарядом, ни массой покоя, было введено в 1930 г. Паули для объяснения непрерывности β -спектра; для таких частиц Ферми предложил термин «нейтрино» («маленький нейтрон», «нейтрончик»). Впоследствии была предложена концепция антинейтрино $\bar{\nu}$, согласно которой нейтрино ν испускается при β -распаде одновременно с позитроном, а $\bar{\nu}$ — вместе с электроном. Нейтрино и $\bar{\nu}$ отличаются противоположными направлениями спинов.

Специфические свойства нейтрино (отсутствие заряда и практическое отсутствие массы) делают чрезвычайно трудными опыт по их обнаружению. Оценка сечения взаимодействия нейтрино с ядром приводит к величине $\sigma \approx 10^{-44} \text{ см}^2$, что соответствует среднему пробегу в концентрированной среде ($n_a \sim 10^{22} \text{ атомов/см}^3$), равному $n_a \sigma \approx 10^{17} \text{ км}$.

Очевидно, что столь малый эффект взаимодействия нейтрино с веществом можно обнаружить лишь при наличии мощных потоков этих частиц. В последние годы уже возникал вопрос об использовании мощных потоков нейтрино подземных ядерных взрывов для нейтринного «просвечивания» Земли как планеты. Главной трудностью для реализации такого проекта является его большая стоимость.

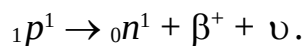
При прохождении электронов через вещество их энергия в основном расходуется на ионизацию и на возбуждение атомов. При больших энергиях электронов значительная ее часть затрачивается на образование электромагнитного излучения, называемого *тормозным*. Последнее связано с тем, что, в отличие от α -частиц, электроны взаимодействуют как с электронными оболочками атомов, так и с их ядрами. Так как массы взаимодействующих β -частиц и атомных электронов равны, то, помимо потерь энергии, электроны отклоняются от своего первоначального направления, т. е. рассеиваются. Траектории электронов не прямолинейны, а суммарная длина их пробега существенно превышает толщину слоя вещества, через который они могут пройти.

Между пробегом электронов и максимальной энергией β -спектра $E_{\max}$ существуют следующие эмпирические зависимости:

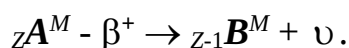
$$\begin{cases} R_m = 0,407 E_{\max}^{1,38}, & E_{\max} \leq 0,8 \text{ МэВ} \\ R_m = 0,54 E_{\max}, & E_{\max} > 0,8 \text{ МэВ}, \end{cases} \quad (1.6)$$

где R_m - массовый пробег, г/см²;
 $E_{\max}$ - энергия электронов, МэВ.

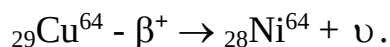
Позитронный β -распад (β^+ -распад). Заключается в ядерном превращении протона в нейтрон по следующей схеме:



В результате позитронного β -распада образуется дочернее ядро с тем же массовым числом, но с порядковым номером на единицу меньше:



Пример β^+ -распада для искусственно-радиоактивного изотопа ${}_{29}\text{Cu}^{64}$:



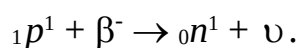
Так же, как и в случае β^- -распада, энергия позитронного распада $E_{\max}$ распределяется случайным образом между позитроном и нейтрино, поэтому энергетический спектр позитронного распада непрерывен.

Следует заметить, что превращение ${}_1p^1$ в ${}_0n^1$ надо понимать в условном смысле. Поскольку масса протона несколько меньше, чем масса нейтрона, то позитронный распад свободного протона невозможен. Однако для протона, связанного в ядре, подобное превращение возможно, так как недостающая энергия восполняется (дотируется) ядром.

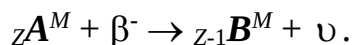
Позитрон, как и все античастицы, недолговечен. При взаимодействии позитрона с электроном возможно взаимное «уничтожение» этих частиц. В этом смысле говорят об *аннигиляции* позитрона. При аннигиляции позитрона и электрона возникают кванты электромагнитного поля. Число γ -квантов при аннигиляции определяется законами сохранения энергии и импульса. Наиболее распространена аннигиляция, в результате которой за счет античастицы образуется фотонная пара с энергией каждого из аннигиляционных квантов, равной энергии покоящегося электрона. Поскольку энергия электрона, находящегося в покое, равна $m_e c^2$, то β^+ -распад обычно сопровождается так называемого аннигиляционным γ -излучением с энергией 511 кэВ. Таким образом, позитронные излучатели возможно принципиально обнаружить по наличию аннигиляционного излучения.

В качестве примера можно сослаться на возможность дистанционного определения Cu по искусственно-радиоактивному изотопу $^{64}_{29}\text{Cu}$. В схеме его распада имеется позитронное излучение, поэтому присутствие меди обнаруживается по γ -лучам с энергией 511 кэВ.

Электронный захват (K -захват). Третья разновидность β -распада – электронный захват (ϵ) был открыт американским физиком Альварецом в 1938 г. Сущность электронного захвата заключается в захвате ядром электрона из внутренней оболочки собственного атома. При этом один из протонов внутри ядра трансформируется в нейтрон, а за пределы ядра выбрасывается нейтрино:



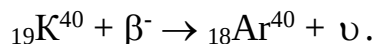
В результате электронного захвата образуется дочернее ядро с тем же массовым числом, но с порядковым номером на единицу меньше:



Природа электронного захвата была раскрыта при изучении сопровождающего его рентгеновского излучения. Оказалось, что оно соответствует переходу электронов на освободившееся место в электронной оболочке, образовавшееся после электронного захвата. Электронный захват имеет существенное значение для тяжелых ядер, у которых K -оболочка расположена близко к ядру. Наряду с захватом электрона из K -оболочки (K -захват) значительно реже наблюдается захват электрона из L -оболочки (L -захват), M -оболочки (M -захват) и т. д.

Своеобразный характер процесса ЭЗ (не испускание, а захват электрона атомом) приводит к тому, что в случае ЭЗ постоянная распада λ оказывается в некоторой зависимости от внешних условий.

Примером K -радиоактивного ядра является изотоп ${}_{19}\text{K}^{40}$, захватывающий K -электрон и превращающийся в ядро ${}_{18}\text{Ar}^{40}$ по схеме:



Нейтрино, образующееся по этой схеме, отличается от нейтрино, связанного с позитронным излучением (β^{+} -распадом) своей монохроматичностью (моноэнергетичностью).

Ядерное превращение калия в аргон лежит в основе так называемого K - Ar -метода, который используется для определения абсолютного возраста калийсодержащих горных пород по количеству накопившегося аргона.

1.3.3. Изомерный переход

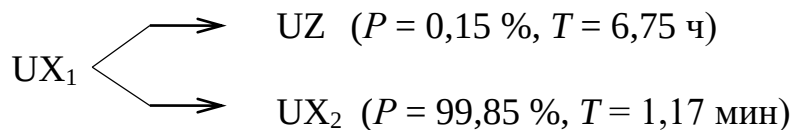
Один из видов ядерных превращений, представляющий собою переход ядра из *метастабильного* состояния в *основное*. Под метастабильным состоянием понимается такое возбужденное состояние ядра, период «высвечивания» которого по крайней мере на несколько порядков больше периода высвечивания при простом возбуждении ядра. Таким образом, состояние ядра будет метастабильным, если вероятность перехода его на основной уровень очень мала. Периоды полураспада *изомеров* (ядер в метастабильном состоянии) колеблются от 10^{-4} с до нескольких месяцев.

Переход ядер в метастабильное состояние осуществляется после ядерных превращений, происходящих в результате захвата тепловых нейтронов, фотонейтронного процесса, бомбардировки ядер тяжелыми частицами и т. д. Изомерный переход всегда сопровождается γ -излучением. В отдельных случаях, кроме γ -излучения при «успокоении» метастабильного ядра, имеет место испускание электронов или позитронов, а также электронов *конверсии*, возникающих в процессе прямой передачи энергии от возбужденного ядра к электронной оболочке.

Изомерный переход связан с явлением ядерной изомерии, проявляющейся в существовании радиоактивных ядер, одинаковых по числу Менделеева Z и по атомному весу A , но находящихся в разном энергетическом состоянии и отличающихся между собою по периоду полураспада.

Первая пара изомерных ядер была открыта в 1921 г. Ганом. Он обнаружил радиоактивное вещество UZ (${}_{91}\text{Pa}^{234}$), в точности совпадающее по номеру и массе с изотопом UX_2 , но отличающееся от него радиоактивными

свойствами. Оба изомера получаются с разной вероятностью P в результате β^- -распада одного и того элемента UX_1 (${}_{90}\text{Th}^{234}$):



и состоят из одинаковых ядер, но имеют разные периоды полураспада.

Разобраться в природе этого явления помогли опыты Курчатова и его сотрудников, открывших в 1935 г. существование изомерии у искусственно-радиоактивных ядер. В частности, искусственно-радиоактивный изотоп брома ${}_{35}\text{Br}^{80}$ характеризуется двумя периодами полураспада: 18 мин и 4,4 ч. Существование у одного ядра двух периодов полураспада можно понять, если предположить, что ядро ${}_{35}\text{Br}^{80}$ может возникать в двух изомерных состояниях: основном и возбужденном долгоживущем (метастабильном).

Стабильный (материнский) изотоп золота ${}_{79}\text{Au}^{197}$ в результате бомбардировки γ -квантами образует по ядерной реакции (γ , γ') дочерний продукт ${}_{79}\text{Au}^{197m}$ (метастабильный), который в отличие от материнского является радиоактивным с периодом полураспада 7,2 с. Изомерный переход ядер ${}_{79}\text{Au}^{197m}$ в основное состояние происходит путем испускания γ -квантов с энергий 279 кэВ. Регистрируя интенсивность γ -излучения, связанного с изомером ${}_{79}\text{Au}^{197m}$, оказывается возможной быстрая и надежная идентификация золота в исследуемых пробах.

1.3.4. Деление ядер

Термин «деление» (*f-распад*) применяется к процессам, когда атомное ядро, захватив нейтрон, расщепляется (делится) на две части (осколки деления), между которыми распределяются нуклоны исходного ядра (например, ${}_{92}\text{U}^{235}$): $Z_U = Z_1 + Z_2$; $A_U \cong A_1 + A_2$. Соотношение масс осколков деления может варьировать в широких пределах, но наиболее вероятное значение A_1/A_2 (или A_2/A_1) близко к 2 (0,5).

При делении тяжелого ядра высвобождается большая энергия. Этот вывод следует из сравнения масс делящегося ядра A_U и масс образующихся осколков A_1 и A_2 . Величину выделяющейся энергии Q_U можно оценить, имея в виду удельную энергию связи осколков $\bar{\epsilon}$ и параметр ϵ для урана:

$$Q_U = \Delta \epsilon A,$$

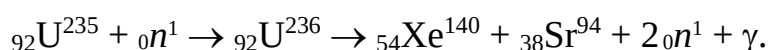
где $\Delta \epsilon = \bar{\epsilon} - \epsilon$; A – массовое число делящегося ядра.

Так как ϵ для ядер середины периодической системы примерно на 0,8 МэВ больше, чем $\bar{\epsilon}$ для ${}_{92}\text{U}^{235}$, получим: $Q_U = 235 \cdot 0,8 \approx 200$ МэВ.

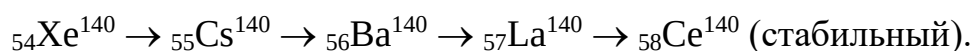
Подавляющая часть энергии деления проявляется в виде кинетической энергии осколков деления Q_f . Образующиеся при делении осколки являются радиоактивными (β -излучателями) и могут испускать *нейтроны деления*. Последнее обстоятельство определяет то, что процесс деления при определенных условиях может стать самоподдерживающимся с непрерывным выделением энергии. В этом и состоит основной принцип получения атомной энергии. Важнейшими материалами, испытывающими деление, являются: ${}_{92}\text{U}^{235}$, ${}_{92}\text{U}^{233}$ и ${}_{94}\text{Pu}^{239}$. Частицы с очень высокими энергиями могут вызывать деление и в других материалах (например, ядра ${}_{92}\text{U}^{238}$ делятся при их облучении быстрыми нейтронами).

В результате деления ядра испускаются *мгновенные* и *запаздывающие* нейтроны. Первые из них составляют ~99 % всех нейтронов деления и испускаются в течение 10^{-14} с за пределы ядра после акта деления. Большая часть мгновенных нейтронов имеет энергию от 1 до 2 МэВ, а распределение их по энергиям называется *спектром нейтронов деления*. Запаздывающие нейтроны испускаются с задержкой до нескольких секунд со спадающей интенсивностью. Запаздывающие нейтроны представляют особый интерес с точки зрения управления цепной реакцией. Регистрация запаздывающих нейтронов лежит в основе одного из методов количественного определения ${}_{92}\text{U}^{235}$ в природных средах.

Механизм деления обычно объясняется с помощью *капельной модели* ядра [41]. Схема деления ядра ${}_{92}\text{U}^{235}$ может быть представлена следующим образом:



Осколки деления являются β -излучателями. В частности, ${}_{54}\text{Xe}^{140}$ испытывает следующую цепочку β -превращений:



Как впервые показали Петржак и Флеров, ядра урана способны делиться не только под действием нейтронов, но и сами по себе, самопроизвольно, без внешнего воздействия (так называемого *спонтанное* деление).

Основные закономерности распространения изотопов

Большинство известных изотопов неустойчиво, но из 340 ядер, находящихся в природе, 273 относятся к стабильным, из которых очень небольшая часть обладает крайне слабой радиоактивностью.

Все известные нуклиды могут быть разделены на четыре типа в зависимости от четного или нечетного числа протонов и нейтронов в их

составе: четно-четный ${}^8\text{O}^{16}$ (известно 166 нуклидов), четно-нечетный ${}^4\text{Be}^9$ (55), нечетно-четный ${}^3\text{Li}^7$ (47), нечетно-нечетный ${}^5\text{B}^{10}$ (5). Из этих данных видно, что изотопы с четным Z и $N = A - Z$ преобладают над изотопами с нечетными Z и N . В то же время четно-четные ядра в природе наиболее распространены и наиболее стабильны. К ним относятся шесть изотопов: ${}^2\text{He}^4$, ${}^8\text{O}^{16}$, ${}^{12}\text{Mg}^{16}$, ${}^{14}\text{Si}^{28}$, ${}^{20}\text{Ca}^{40}$, ${}^{26}\text{Fe}^{56}$, пять из которых входят в число восьми главных химических элементов, слагающих верхнюю часть литосферы. Ядра с четным A более многочисленны, чем с нечетным A . Всего известно пять стабильных изотопов нечетно-нечетного типа: ${}^1\text{H}^2$, ${}^3\text{Li}^6$, ${}^5\text{B}^{10}$, ${}^7\text{N}^{14}$, ${}^{25}\text{V}^{50}$. Все остальные известные нечетно-нечетные ядра с $A > 14$ (включая ${}^{19}\text{K}^{40}$) β -радиоактивны.

Все тяжелые изотопы с $Z > 83$ радиоактивны, многие из них испытывают α -распад. Они группируются в четыре радиоактивных ряда: ториевый, нептуниевый, урановый и актиноурановый (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Четыре типа радиоактивных рядов

Ряд	Родоначалник ряда	Конечный продукт	Признак делимости на 4	Тип ядра
Ториевый	${}_{90}\text{Th}^{232}$	${}_{82}\text{Pb}^{208}$	$4n$	Четно-четный
Нептуниевый	${}_{93}\text{Np}^{237}$	${}_{83}\text{Bi}^{209}$	$4n + 1$	Нечетно-четный
Урановый	${}_{92}\text{U}^{238}$	${}_{82}\text{Pb}^{206}$	$4n + 2$	Четно-четный
Актиниоурановый	${}_{92}\text{U}^{235}$	${}_{82}\text{Pb}^{207}$	$4n + 3$	Четно-нечетный

В современную эпоху на Земле отсутствует нептуниевый ряд. Родоначалник этого ряда ${}_{93}\text{Np}^{237}$ получен искусственным путем.

На основании астрофизических данных по составу звездных атмосфер были получены данные о космическом (галактическом) распространении элементов и их изотопов [60] (рис. 1.3). Зависимость между распространением элемента и Z выражается следующими закономерностями:

1. Распространенность химических элементов с четным Z в общем более высокая, чем у элементов с нечетным Z . Эта закономерность получила название *правила Оддо-Гаркинса*.

2. Распространенность легких элементов с атомным номером $Z < 28$ резко преобладает над распространенностью остальных, более тяжелых элементов, за исключением Li, Be, B.

3. Существуют так называемые *магические числа*: 2, 8, 20, 50, 82, 126, относящиеся как к числу нейтронов, так и протонов в ядре.

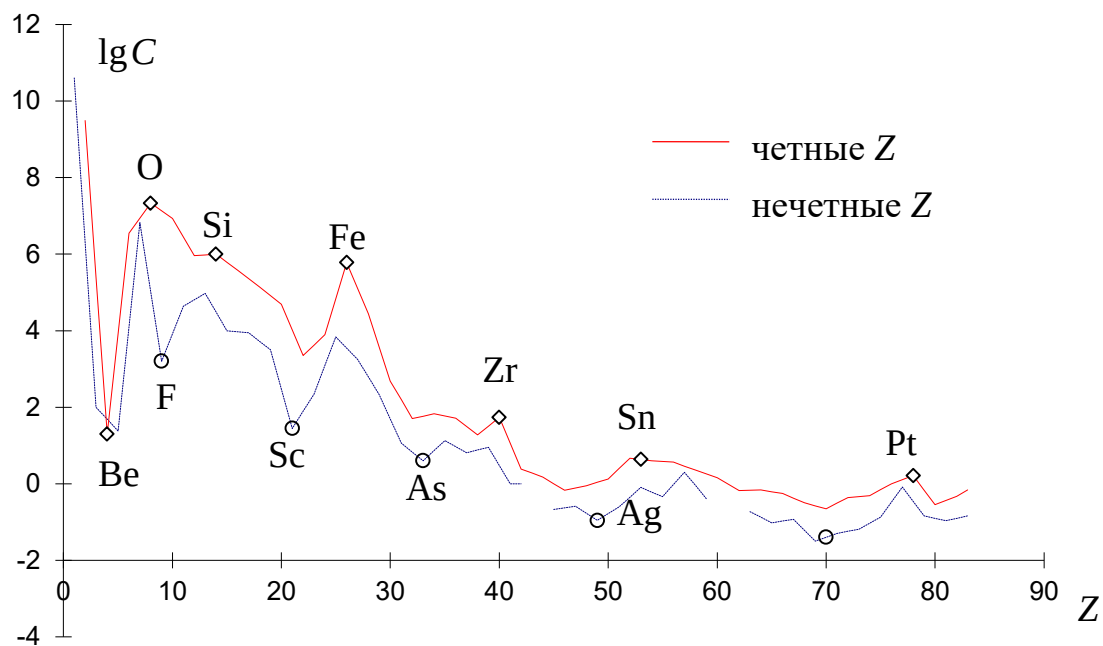


Рис. 1.3

Нуклиды с этими характеристиками обладают наибольшей прочностью (удельной энергией связи нуклонов в ядре) и повышенным распространением.

1.4. Законы радиоактивных превращений

1.4.1. Закон распада

На основании экспериментальных исследований Резерфорд и Содди в 1903 г. показали, что при радиоактивном распаде проявляется общая для всех радионуклидов закономерность, заключающаяся в том, что *количество атомов данного радиоактивного изотопа, распадающихся в среднем в единицу времени, всегда составляет определенную, характерную для данного радионуклида долю от полного числа еще не распавшихся ядер*. Математически это записывается следующим образом:

$$-\Delta N = \lambda N \Delta t, \quad (1.7)$$

где ΔN — число атомов, распадающихся за время между t и Δt ;

N — число атомов еще не распавшихся к моменту времени t ;

λ — *постоянная распада*, характеризующая вероятность ядерного превращения, отнесенная к одному ядру в единицу времени.

В форме дифференциального уравнения выражение (1.7) записывается так:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (1.8)$$

Из соотношения (1.8) видно, что количество ядерных превращений, происходящих в активном препарате, пропорционально начальному количеству радиоактивных ядер. Перепишем (1.8) в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0, \text{ или } \frac{dN}{N} + \lambda dt = 0. \quad (1.9)$$

Интегрируя (1.9), имеем:

$$\ln N + \lambda t = A.$$

Постоянную интегрирования A найдем из начального условия: $t = 0$, $N(0) = N_0$. С учетом отмеченного, получим:

$$\ln N + \lambda t = \ln N_0, \text{ откуда}$$

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t). \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) носит название *закона радиоактивного распада*.

Найдем время T , по истечении которого распадается половина от исходного количества ядер N_0 . Полагая $N(t)/N_0 = 0,5$, имеем:

$$0,5 = e^{-\lambda T}, \text{ откуда } T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Параметр T имеет размерность времени и носит название *периода полураспада*. Отношение $N(t)/N_0$ часто называют *функцией выживания*. Учитывая связь между λ и T , запишем для функции выживания:

$$\frac{N(t)}{N_0} = \exp\left(-\ln 2 \frac{t}{T}\right).$$

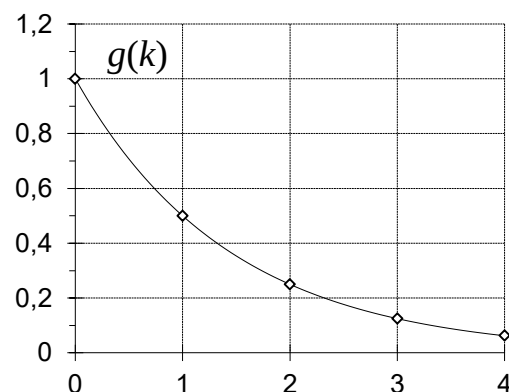
Обозначим $k = t/T$, тогда

$$g(k) = \frac{N(k)}{N_0} = 2^{-k}. \quad (1.11)$$

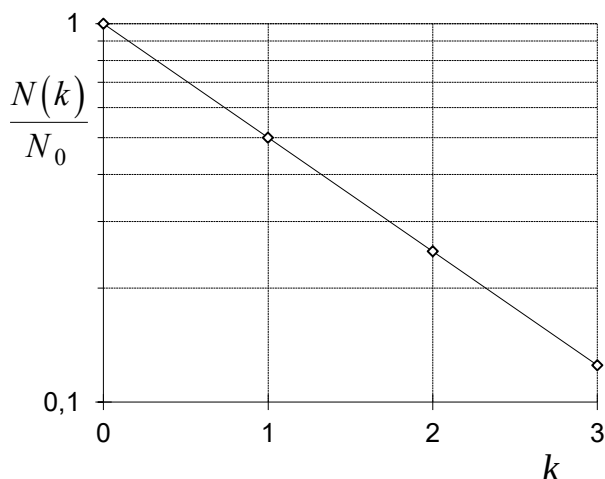
Выражение (1.11) представляет одну из форм записи закона распада. На рис. 1.4 представлено поведение функции выживания в зависимости от параметра k , представляющего собою время распада в нормировке к периоду полураспада данного радионуклида.

Если зависимость (1.11) построить в полулогарифмическом мас-

Рис. 1.4



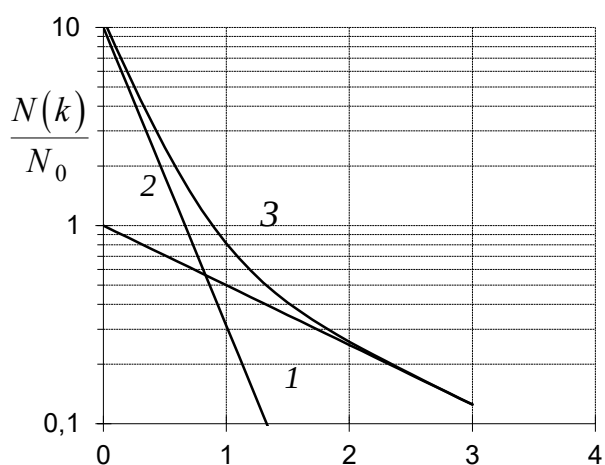
k



штабе, откладывая по ординате функцию выживания N/N_0 , а по оси абсцисс – время в линейном масштабе, то будем иметь дело с линейной зависимостью (рис. 1.5). Угловой коэффициент функции $f(k) = \ln(N/N_0)$ зависит от T . Если в радиоактивном препарате присутствуют не один, а несколько радио-

Рис. 1.5

нуклидов, например 1 и 2, отличаю-



щихся между собою по периоду полураспада T , то результирующая функция 3 в полулогарифмическом масштабе будет отличаться от прямой (рис. 1.6). Получение отдельных (парциальных) зависимостей в таких случаях возможно графическим путем лишь для двух, иногда трех изотопов с контрастными периодами полураспада (отличающихся в нес-

Рис. 1.6

сколько

Если функция $N(t)$ известна, например, получена по данным измерений активности радионуклида во времени, то его период полураспада может быть найден из следующей зависимости:

$$T = \ln 2 (\ln a_1 - \ln a_2)^{-1} \Delta t, \quad (1.12)$$

где a_1 , a_2 - активности (или аппаратные параметры), соответствующие моментам времени t_1 и t_2 , а $\Delta t = t_2 - t_1$.

Численные значения периодов полураспада для естественно-радиоактивных элементов изменяются в очень больших пределах – от $1,40 \cdot 10^{10}$ лет для ${}_{90}\text{Th}^{232}$ до $2,09 \cdot 10^{-7}$ с для ThC' (${}_{84}\text{Po}^{212}$).

Понятие о средней продолжительности жизни атомов

Ядра радионуклидов распадаются стохастически (случайно), независимо друг от друга, поэтому о времени жизни каждого отдельного ядра любого изотопа можно сказать, что это время меняется от нуля до бесконечности. Однако средняя продолжительность жизни большой группы атомов любого из

радионуклидов является определенной и устойчивой величиной, связанной с постоянной распада.

Допустим, что на некотором отрезке времени dt распалось dN ядер данного радионуклида. Тогда произведение $t dN$ будет представлять собою суммарное время жизни всех ядер некоторой выборки dN , существующих в течение времени t , вплоть до отрезка $t + dt$. Если исходное количество ядер обозначить через N_0 и предположить, что любая сколь угодно малая выборка ядер может существовать неограниченное время от 0 до ∞ , то для среднего времени жизни τ группы атомов N_0 можно записать:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{N_0} t dN, \text{ или} \quad (1.13)$$

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (1.14)$$

Интеграл (1.14) легко берется по частям, поэтому, опуская промежуток, запишем:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} \cong 1,44T. \quad (1.15)$$

Из-за статистического характера радиоактивного распада законы радиоактивных превращений выполняются строго лишь для очень большого количества распадающихся ядер N . При малых N наблюдаются отклонения от этих законов, называемые (статистическими) *флуктуациями*. Отклонение числа распадов n от среднего значения $\bar{N}$ подчиняется закону *распределения Пуассона*, согласно которому при большом количестве наблюдений распределение вероятностей $p(n)$ того, что за определенный промежуток времени будет зарегистрировано n распадов, описывается выражением

$$p(n) = \frac{\bar{N}^n}{n!} e^{-\bar{N}}. \quad (1.16)$$

При достаточно большом количестве ядер (на практике для $n \geq 30$), распадающихся за данный промежуток времени, пуассоновское дискретное распределение вероятностей $p(n)$ может быть описано через непрерывное *распределение Гаусса* с дисперсией $\bar{N}$:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} \exp \left[-\frac{(n - \bar{N})^2}{2\bar{N}} \right]. \quad (1.17)$$

Величина среднеквадратического отклонения σ_n , характеризующая разброс значений n относительно среднего $\bar{N}$, рассчитывается по формуле

$$\sigma_n = \pm \sqrt{N}. \quad (1.18)$$

В соответствии с этим относительное среднеквадратическое отклонение δ_n определяется выражением

$$\delta_n = \frac{\sigma_n}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (1.19)$$

При использовании формул (1.18) и (1.19) следует иметь в виду, что они определяют лишь вероятность, а не возможность флуктуации. Около 30 % от числа распавшихся атомов отклоняются от среднего значения на величину, большую, чем σ_n , причем 4,5 % их них на величину $2\sigma_n$, а 0,3 % – на величину $3\sigma_n$.

Закономерности (1.16) - (1.19) справедливы как для распадающихся ядер, так и для аппаратурных параметров (например скорость счета импульсов), зарегистрированных любым детектором ядерных частиц.

1.4.2. Последовательные ядерные превращения

В ряде случаев при распаде ядер исходного (материнского) элемента, родоначальника радиоактивного семейства, образуются атомы другого (дочернего) элемента, которые также являются радиоактивными и при ядерном превращении дают начало третьему элементу и т. д. Другими словами, образуется цепочка последовательных превращений типа

$$N_1(t) \rightarrow N_2(t) \rightarrow \dots \rightarrow N_{n-1}(t) \rightarrow N_n(t),$$

которая заканчивается образованием стабильных ядер. Если известно исходное количество ядер материнского элемента N_{01} , а также постоянные распада радионуклидов цепочки, то можно найти количество любого из дочерних продуктов в любой момент времени.

Вначале рассмотрим **случай двух веществ**. Допустим, что мы имеем дело с бинарной цепочкой

$$N_1(t) \rightarrow N_2(t).$$

Если обозначить через λ_1 и λ_2 постоянные распада материнского и дочернего радионуклида, то прирост дочерних ядер dN_2 за время dt составит

$$dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt, \quad (1.20)$$

откуда скорость прироста составит

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \quad (1.21)$$

Перепишем (1.21) с учетом того, что $N_1(t) = N_{01} \exp(-\lambda_1 t)$:

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{01} \exp(-\lambda_1 t). \quad (1.22)$$

Будем искать функцию $N_2(t)$, имея в виду, что при $t = 0$, $N_1(0) = N_{01}$. Обычным приемом при решении уравнений типа (1.22) является нахождение решения в виде суммы

$$N_2(t) = N_2'(t) + N_2''(t), \quad (1.23)$$

где $N_2'(t)$ – общее, $N_2''(t)$ – частное решение уравнения (1.22).

Полагая нулю правую часть (1.22), имеем для общего решения:

$$N_2'(t) = A \exp(-\lambda_2 t).$$

Частное решение обычно ищется в соответствии со структурой правой части дифференциального уравнения. В нашем случае:

$$N_2''(t) = B \exp(-\lambda_1 t).$$

Будем искать постоянные интегрирования A и B . Поскольку частное решение обязано удовлетворять исходному дифференциальному уравнению (1.22), то можно записать:

$$-\lambda_1 B \exp(-\lambda_1 t) + \lambda_2 B \exp(-\lambda_1 t) = \lambda_1 N_{01} \exp(-\lambda_1 t). \quad (1.24)$$

Из (1.24) легко находится постоянная интегрирования:

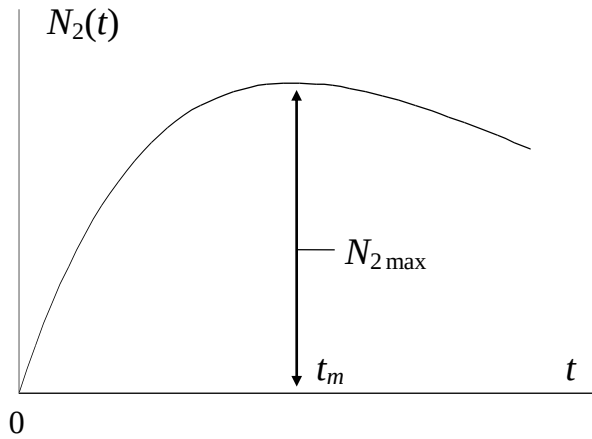
$$B = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01}.$$

Постоянную A найдем из начального условия. Поскольку при $t = 0$ $N_2(0) = 0$ (процесс распада материнских ядер еще не начался), то, имея в виду (1.23), получим:

$$A + B = 0, \text{ откуда } A = -B = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01}.$$

С учетом полученного запишем выражение для искомой функции $N_2(t)$:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]. \quad (1.25)$$



Элементарный анализ формулы (1.25) убеждает, что функция $N_2(t)$ в нуле и в бесконечности оказывается равной нулю, поэтому в соответствии с теоремой Ролля она должна иметь экстремум (максимум), рис. 1.7. Решая задачу на максимум, имеем:

Рис. 1.7

$$\frac{d}{dt}[N_2(t)] = 0, \text{ откуда}$$

$$-\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t_m) + \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t_m) = 0, \text{ и}$$

$$t_m = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (1.26)$$

Рассмотрим поведение $N_2(t)$ для частного случая, когда период полураспада материнского изотопа оказывается много больше периода полураспада дочернего продукта, т. е. $\lambda_1 \ll \lambda_2$. С учетом отмеченного неравенства формулу (1.25) можно переписать:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{01} \exp(-\lambda_1 t) [1 - \exp(-\lambda_2 t)], \text{ или} \quad (1.27)$$

$$\lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_1(t) [1 - \exp(-\lambda_2 t)], \lambda_1 \ll \lambda_2. \quad (1.28)$$

Произведение $A = \lambda N$ определяет абсолютную активность данного радиоактивного препарата или количество ядерных превращений, происходящих в нем за единицу времени. Обозначив активность материнского и дочернего продуктов через $A_1(t)$ и $A_2(t)$, получим:

$$A_2(t) = A_1(t) [1 - \exp(-\lambda_2 t)]. \quad (1.29)$$

Рассмотрим поведение функции $A_2(t)$ в начальные моменты времени (до достижения t_m), например, когда $t < T_2$ или $t \ll T_1$. В этом случае произведение $N_{01} \exp(-t \ln 2 / T_1) \approx N_{01}$, т. е. количество ядер материнского изотопа за промежуток времени, много меньший, чем его период полураспада, практически не изменяется. Обозначим через $A_0 = \lambda_1 N_{01}$ начальную активность материнского вещества, тогда

$$\frac{A_2(t)}{A_0} = 1 - \exp(-\lambda_2 t). \quad (1.30)$$

Другими словами, в начальные моменты времени (до достижения максимума) накопление дочерних ядер происходит пропорционально *функции накопления* $f(t) = 1 - \exp(-\lambda_2 t)$ с постоянной распада короткоживущего дочернего продукта, т. е. накопление дочернего вещества происходит достаточно быстро.

В моменты времени после достижения $N_2(t)$ максимума, например, когда $t > T_1$ или $t \gg T_2$, непосредственно из (1.27) вытекает, что

$$A_2(t) = \lambda_1 N_{01} \exp(-\lambda_1 t). \quad (1.31)$$

Другими словами, уменьшение активности дочернего продукта (после достижения максимума) происходит пропорционально *функции остывания* $f(t) = \exp(-\lambda_1 t)$ с постоянной распада долгоживущего материнского вещества, т. е. относительно медленно.

Можно показать, что процесс накопления дочерних ядер всегда происходит быстро (с постоянной распада короткоживущего нуклида), а уменьшение идет медленно, т. е. с постоянной распада долгоживущего нуклида, вне зависимости от того, материнский это изотоп или дочерний.

Понятие о радиоактивном равновесии

Если в дифференциальном уравнении (1.21) левую часть принять равной нулю, то получим следующее равенство:

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t). \quad (1.32)$$

Соотношение (1.32) характеризует состояние *радиоактивного равновесия*, наступающего по достижении максимума функции $N_2(t)$. Радиоактивное равновесие свидетельствует о равенстве активностей материнского и дочернего продуктов, при этом количество тех и других ядер меняется во времени, сохраняется постоянным лишь их отношение

$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \text{const}. \quad (1.33)$$

Различают *подвижное* и *устойчивое (вековое)* состояния радиоактивного равновесия. Допустим, что продолжительность жизни материнского вещества больше времени жизни любого из дочерних продуктов цепочки последовательных превращений, но пренебречь распадом («остыванием») материнского вещества нельзя. В этом случае по истечении достаточно длительного промежутка времени количество каждого из последующих продуктов превращения изменится по закону распада материнского вещества и отношение между количеством материнского изотопа и количеством

последующих продуктов распада будет приближаться к постоянному предельному значению.

Рассмотренный выше случай относится к так называемому подвижному равновесию, что имеет место, например, при установлении равновесия между Rn ($T = 3,825$ суток) и его дочерними продуктами распада RaA , RaB и RaC . При малых периодах полураспада указанные продукты быстро достигают состояния радиоактивного равновесия с материнским веществом. Так, RaA ($T = 3,05$ мин.) приходит в состояние равновесия с Rn практически через 12-15 минут, а ThA ($T = 0,16$ с) практически всегда находится в равновесии с торием ($T = 54,5$ с). То же самое относится к AcA ($T = 1,08 \cdot 10^{-3}$ с), находящемуся в равновесии с актиноном ($T = 3,9$ с).

Если материнское вещество распадается настолько медленно, что его остыванием можно пренебречь, то во всей цепочке последовательных превращений по истечении достаточного времени наступит состояние, называемое устойчивым (вековым) равновесием. Накопление любого продукта цепочки будет происходить до тех пор, пока число его распадающихся ядер в единицу времени не окажется равным числу распадающихся в единицу времени ядер материнского вещества. Теоретически такое состояние может быть достигнуто через бесконечно большой промежуток времени, практически же он достигается за такой конечный отрезок, когда прирост ядер дочернего продукта уже нельзя заметить опытом. По достижении в радиоактивном ряду состояния устойчивого равновесия количество распадающихся в единицу времени атомов любого радионуклида цепочки становится одинаковым, т. е.

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_n N_n = \text{const} . \quad (1.34)$$

Из (1.34) видно, что при устойчивом радиоактивном равновесии число атомов $N_1, N_2, \dots, N_n$ пропорционально их периодам полураспада.

Число ядер радионуклида, соответствующее активности 1 расп/с, можно оценить как $N = 1/\lambda$, а масса вещества в грамм, излучающая эту активность, составляет:

$$m = N \frac{A}{N_A} = \frac{A}{\lambda N_A} = \frac{A}{N_A} \frac{T}{\ln 2} ,$$

где N_A – число Авогадро; A – атомный вес радионуклида.

О радиоактивном равновесии между U и Ra

Радиоактивное равновесие между ураном и радием наступает по истечении длительного промежутка времени и наблюдается в древних хорошо сохранившихся породах и минералах. Имея в виду (1.32), оценим количество Ra , находящегося в равновесии с одним граммом U . Полагая массу урана

равной 1 г, а периоды полураспада ${}_{92}\text{U}^{238}$ и ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ равными $4,47 \cdot 10^9$ и 1602 лет, соответственно, получим:

$$m_{\text{Ra}} = m_{\text{U}} \frac{\lambda_{\text{U}}}{\lambda_{\text{Ra}}} \frac{A_{\text{Ra}}}{A_{\text{U}}}, \quad (1.35)$$

где $A_{\text{Ra}}, A_{\text{U}}$ – массовые числа радия и урана.

Из (1.35) следует, что один грамм U соответствует активности (количеству распадов в единицу времени) $3,4 \cdot 10^{-7}$ г Ra, т. е. из трех тонн равновесного U можно извлечь примерно один грамм Ra.

Происходящие в природе процессы растворения и выщелачивания радиоактивных элементов из горных пород и минералов приводят к нарушениям радиоактивного равновесия и, в частности, вызывают смещение равновесия между Ra и U. В этом случае степень смещения равновесия выражается в % и определяется соотношением

$$K_{\text{pp}} = \frac{\alpha}{\alpha_0} 100 \%, \text{ или} \quad (1.36)$$

$$K_{\text{pp}} = \frac{Q_{\text{Ra}}}{Q_{\text{U}}} \frac{100 \%}{3,4 \cdot 10^{-7}},$$

где α – отношение Ra к U в исследуемом образце;

α_0 – равновесное соотношение между Ra и U ($3,4 \cdot 10^{-7}$);

$Q_{\text{Ra}}, Q_{\text{U}}$ – содержания Ra и U в исследуемом образце.

Если $\alpha > \alpha_0$, то говорят о смещении равновесия в сторону Ra; при $\alpha < \alpha_0$ – в сторону U; если $\alpha = \alpha_0$ – равновесной руде.

Отношение (1.36) называется *коэффициентом радиоактивного равновесия* между Ra и U и может меняться от 0 до ∞ . Сведения о состоянии радиоактивного равновесия имеют важное значение при интерпретации результатов γ -измерений, например при количественных определениях U по результатам γ -каротажа.

Случай трех веществ

Допустим, что имеется цепочка последовательных превращений

$$N_1(t) \rightarrow N_2(t) \rightarrow N_3(t).$$

Атомы 3-го вещества образуются за счет распада 2-го вещества, который, в свою очередь, возникает за счет распада материнских ядер.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$, $N_1(0) \neq 0$, $N_2(0) = 0$, $N_3(0) = 0$. Требуется найти выражение для функции $N_3(t)$, т. е. количество ядер третьего продукта в любой момент времени. Скорость прироста ядер 3-го элемента можно записать следующим образом:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3, \text{ или} \quad (1.37)$$

$$\frac{dN_3}{dt} + \lambda_3 N_3 = \lambda_2 N_2. \quad (1.38)$$

Имея в виду, что количество ядер N_2 зависит от времени и определяется формулой (1.25), получим:

$$\frac{dN_3}{dt} + \lambda_3 N_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]. \quad (1.39)$$

Будем искать функцию $N_3(t)$ в виде суммы

$$N_3(t) = N_3'(t) + N_3''(t), \quad (1.40)$$

где $N_3'(t)$ – общее, $N_3''(t)$ – частное решение уравнения (1.39).

Полагая нулю правую часть (1.39), получим для общего решения:

$$N_3'(t) = A \exp(-\lambda_3 t).$$

Частное решение будем искать в виде, соответствующем структуре правой части уравнения. В нашем случае:

$$N_3''(t) = B \exp(-\lambda_1 t) + C \exp(-\lambda_2 t).$$

Поскольку частное решение обязано удовлетворять исходному дифференциальному уравнению, то, учитывая, что

$$\frac{dN_3''}{dt} = -\lambda_1 B \exp(-\lambda_1 t) - \lambda_2 C \exp(-\lambda_2 t), \text{ имеем:}$$

$$B(\lambda_3 - \lambda_1) \exp(-\lambda_1 t) - C(\lambda_3 - \lambda_2) \exp(-\lambda_2 t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)],$$

откуда легко находятся постоянные интегрирования B и C :

$$B = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} N_{01}, \quad C = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} N_{01}.$$

Постоянную интегрирования A найдем, имея в виду начальное условие. Считая, что при $t = 0$, $N_3(0) = 0$, получим из (1.40): $A + B + C = 0$, откуда легко показать, что

$$A = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} N_{01}.$$

Подставляя выражения для постоянных A , B и C в (1.40), имеем:

$$N_3(t) = \lambda_1 \lambda_2 N_{01} \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{\exp(-\lambda_3 t)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right]. \quad (1.41)$$

Обобщение на случай n веществ

Пусть имеется цепочка ядерных превращений типа

$$N_1(t) \rightarrow N_2(t) \rightarrow \dots \rightarrow N_{n-1}(t) \rightarrow N_n(t).$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$, $N_1(0) \neq 0$, $N_2(0) = N_3(0) = \dots = N_n(0) = 0$. Имея в виду особенности правых частей функций $N_2(t)$ и $N_3(t)$, формулы (1.25) и (1.41), запишем для $N_n(t)$:

$$N_n(t) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} N_{01} \left[\frac{\exp(-\lambda_1 t)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1)} + \frac{\exp(-\lambda_2 t)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_2)} + \dots + \frac{\exp(-\lambda_n t)}{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n) \dots (\lambda_{n-1} - \lambda_n)} \right]. \quad (1.42)$$

Если период полураспада первого (материнского) вещества является наибольшим, то по истечении достаточно длительного времени в цепочке из n веществ устанавливается состояние радиоактивного равновесия либо подвижное, либо вековое. В первом случае количество каждого нуклида уменьшается пропорционально остыванию материнского вещества:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_n}{N_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1)}. \quad (1.43)$$

Если же период полураспада материнского (1-го) вещества оказывается настолько большим, что $\lambda_1 \ll \lambda_2$, $\lambda_1 \ll \lambda_3$, ..., $\lambda_1 \ll \lambda_n$, то в этом случае между материнским и дочерними радионуклидами устанавливается вековое равновесие, которое характеризуется равенством активностей:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_n N_n.$$

Радиоактивное равновесие в цепочке последовательных превращений практически наступает спустя время, на порядок превышающее период полураспада дочернего радионуклида с наибольшим временем жизни.

1.5. Естественные радиоактивные элементы

Систематическое изучение радиоактивности природных сред показало, что в любой горной породе содержатся (в разных количествах) радиоактивные изотопы тяжелых элементов с числами Менделеева от 81 до 92.

К числу естественных радиоактивных элементов (ЕРЭ), все изотопы которых являются неустойчивыми, относятся элементы от ^{84}Po до ^{92}U . Встречающиеся в природе ^{81}Tl , ^{82}Pb , ^{83}Bi содержат в своем составе радиоактивные изотопы. Имеются радиоактивные изотопы и у других элементов средней части таблицы Менделеева.

Таблица 1.2

Ядерные характеристики одиночных естественных радионуклидов

Изотоп	Отн. распростран., %	Период полураспада	Схема распада	Дочернее ядро	Энергия излучений, МэВ
$^{19}\text{K}^{40}$	0,0119	$1,27 \cdot 10^9$ лет	β^- -распад (89%) <i>K-захват</i> (11%)	$^{20}\text{Ca}^{40}$ $^{19}\text{Ar}^{40}$	β_m - 1,325 γ - 1,460
$^{37}\text{Rb}^{87}$	27,5	$4,7 \cdot 10^{10}$ лет	β^- -распад	$^{38}\text{Sr}^{87}$	β_m - 0,274 γ - 0,394
$^{49}\text{In}^{115}$	95,72	$6,0 \cdot 10^{14}$ лет	β^- -распад	$^{49}\text{Sn}^{115}$	β_m - 0,6
$^{57}\text{La}^{138}$	0,089	$1,1 \cdot 10^{11}$ лет	β^- -распад (6%) <i>K-захват</i> (94%)	$^{58}\text{Ce}^{138}$ $^{56}\text{Ba}^{138}$	β_m - 1,0 γ - 0,81, 1,43
$^{62}\text{Sm}^{147}$	14,97	$1,2 \cdot 10^{11}$ лет	α -распад	$^{60}\text{Nd}^{143}$	α - 2,18
$^{71}\text{Lu}^{176}$	2,59	$2,1 \cdot 10^{10}$ лет	β^- -распад (33%) <i>K-захват</i> (67%)	$^{72}\text{Hf}^{176}$ $^{70}\text{Yb}^{176}$	β_m - 0,43 γ - 0,19, 0,31
$^{75}\text{Re}^{187}$	66,93	$1,2 \cdot 10^{11}$ лет	β^- -распад	$^{76}\text{Os}^{187}$	$\beta_m < 0,008$ γ - нет
$^{78}\text{Pt}^{190}$	0,012	$6,9 \cdot 10^{11}$ лет	α -распад	$^{76}\text{Os}^{186}$	α - 3,3

В 1906 г. Кэмпбелл и Вуд обнаружили слабую β^- -активность у калия и рубидия, которая не была обусловлена какими-либо примесями, поскольку оказалась пропорциональной массовой доле элемента. Впоследствии выяснилось, что радиоактивность К связана с присутствием в его составе малораспространенного изотопа $^{19}\text{K}^{40}$, распадающегося по схеме β^- - и *K*-захвата. Радиоактивным изотопом рубидия оказался $^{37}\text{Rb}^{87}$, испускающий β^- -частицы. Известны и другие радионуклиды, встречающиеся в земной коре, их основные свойства приведены в табл. 1.2.

1.5.2. Ядерная геохронология

Особенности ядерных превращений широко используются в приложениях, в частности для определения абсолютного возраста горных

пород. Известно, что в любой горной породе можно обнаружить даже самые микроскопические количества любого химического элемента, включая и естественно-радиоактивные.

Допустим, что начальное количество ядер некоторого радионуклида в заданном образце горной породы составляет N_0 ядер. Если установлено, что за прошедший период этот радионуклид не выносился или дополнительно не поступал в исследуемую породу, то, зная постоянную распада радионуклида и соотношение начального N_0 и конечного количества N ядер, можно вычислить время t , которое потребовалось для этого соотношения.

Конечное (существующее на момент датировки) содержание радионуклида определяется аналитически (химия, радиохимия, γ -спектрометрия и др. методы анализа). О начальном содержании N_0 судят по количеству накопившегося в породе стабильного изотопа $N_{\text{ст}}$, являющегося конечным продуктом распада исходного радионуклида. При этом используется то обстоятельство, что начальное содержание радионуклида может быть представлено в виде суммы его концентрации N на момент исследований и содержания $N_{\text{ст}}$ – продукта распада, т. е.

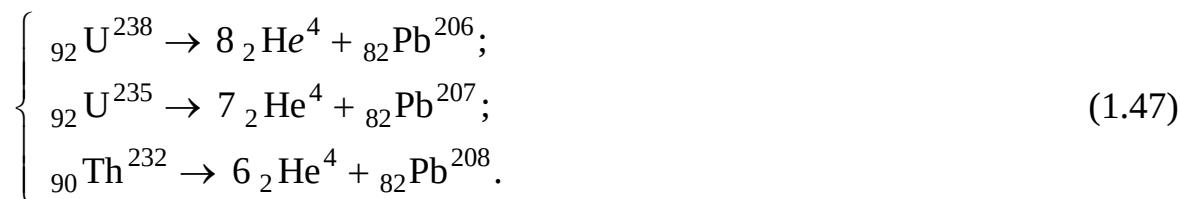
$$N_0 = N + N_{\text{ст}}. \quad (1.44)$$

Учитывая, что $N = N_0 \exp(-\lambda t)$, имеем:

$$\frac{N_{\text{ст}}}{N} = \exp(\lambda t) - 1, \text{ откуда} \quad (1.45)$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{N_{\text{ст}}}{N} \right). \quad (1.46)$$

Первые методы определения абсолютного возраста были основаны на использовании цепочки последовательных превращений U, Th и актиноурана в соответствующие стабильные изотопы ${}_{82}\text{Pb}^{206}$, ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ и ${}_{82}\text{Pb}^{207}$:



В результате этих реакций образуется He и изотопы Pb в зависимости от того, по какому из указанных конечных продуктов распада определяется возраст, метод соответственно называется *гелиевым* или *свинцовым*.

В наиболее простом случае, когда возраст минерала априори относительно невелик ($t < 200$ млн лет), а Th в его составе отсутствует, возраст может быть оценен приближенно по формуле

$$t = 1,155 \frac{1}{\lambda_{U^{238}}} \frac{C_{Pb}}{C_U}, \quad (1.48)$$

где C_{Pb} , C_U - массовые доли свинца и урана.

При наличии в минерале Th его содержание выражают в эквиваленте U, учитывая соотношения их активностей. Формула для расчета возраста при этом выглядит так:

$$t = 7600 \frac{C_{Pb}}{0,36C_{Th} + C_U}. \quad (1.49)$$

При более древнем возрасте минералов ($t > 200$ млн. лет) его рассчитывают через содержания изотопов свинца $^{82}Pb^{206}$, $^{82}Pb^{207}$ и $^{82}Pb^{208}$, определяемые масс-спектрометрическим методом.

Расчет ведется по формулам [59]:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{\lambda_{U^{238}}} \ln \left(1 + 1,155 \frac{C_{Pb^{206}}}{C_{U^{238}}} \right); \\ t = \frac{1}{\lambda_{U^{235}}} \ln \left(1 + 1,135 \frac{C_{Pb^{207}}}{C_{U^{235}}} \right); \\ t = \frac{1}{\lambda_{Th^{232}}} \ln \left(1 + 1,115 \frac{C_{Pb^{208}}}{C_{Th^{232}}} \right). \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Возраст, полученный по трем формулам (1.50), теоретически должен быть одинаковым. В действительности этого обычно не наблюдается, так как природные системы не являются полностью закрытыми, и на протяжении геологической истории возможна частичная потеря как промежуточных, так и конечных нуклидов. Определенную погрешность дают также и масс-спектрометрические измерения.

Для определения истинного возраста урановых минералов и руд применяют способ так называемой «*кривой конкордии*». Указанная кривая представляет собою теоретическую зависимость отношения $^{82}Pb^{207}/_{92}U^{235}$ к $^{82}Pb^{206}/_{92}U^{238}$ от возраста природных сред, построенного на основании закона распада (рис. 1.9) [59].

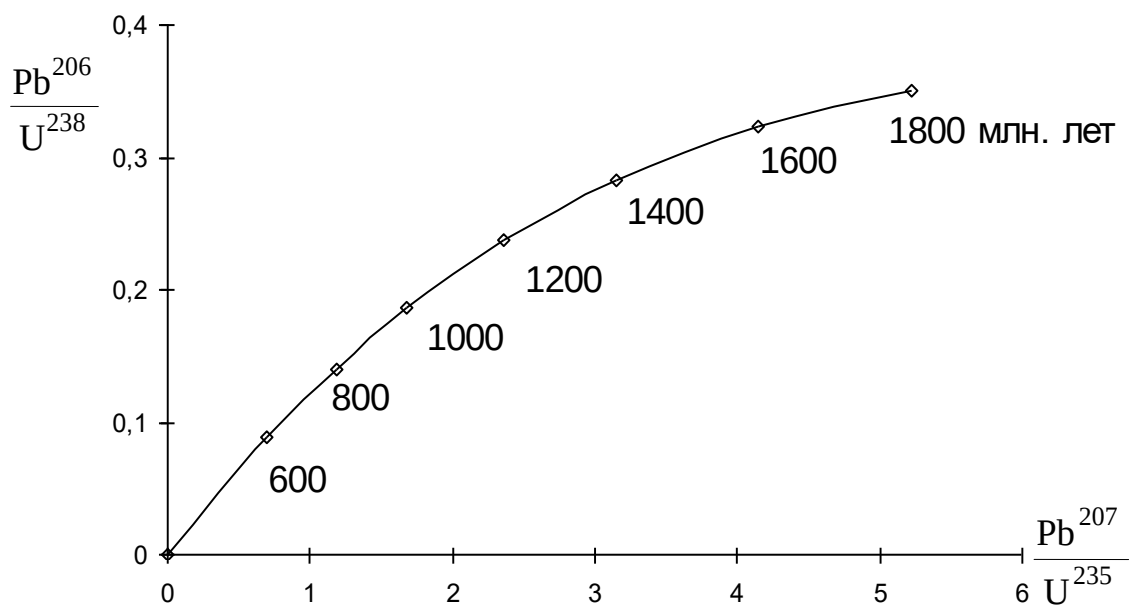


Рис. 1.9

Кроме указанных методов, для датировки природных образований используются также К-Аг-, Rb-Sr- и радиоуглеродный (C^{14}) методы.

Калий-аргоновый метод. Калий - широко распространенный элемент, входит в состав большинства горных пород. Кларк К в земной коре равен 2,5 %, его содержание в горных породах колеблется от 0,03 до 3,34 % (кроме солей). Почти 18 % массы земной коры приходится на долю К-содержащего минерала – ортоклаза (КПШ). Это двойная соль кремниевой кислоты $K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 6SiO_2$. В результате химического выветривания ортоклаз превращается в каолин, песок (SiO_2) и воду. По этой причине К можно встретить как в изверженных, так и в осадочных горных породах.

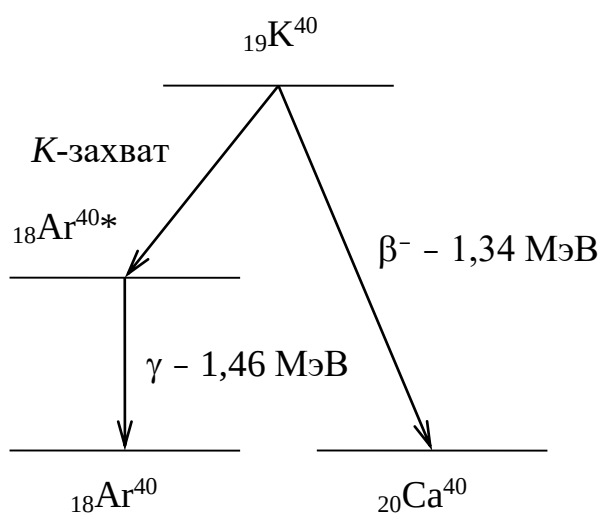
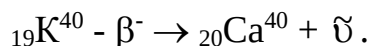


Рис. 1.10

Природная смесь К состоит из двух стабильных изотопов $^{19}K^{39}$ (98,03 %), $^{19}K^{41}$ (6,91 %) и одного радиоактивного - $^{19}K^{40}$ (0,0119 %). Радиоактивный изотоп калия распадается путем β^- -превращения (с вероятностью 89 %) и превращения типа К-захвата (11 %), сопровождающегося γ -излучением с энергией 1,46 МэВ (рис. 1.10). В результате К-захвата по схеме $^{19}K^{40} + \beta^- \rightarrow ^{18}Ar^{40} + \nu$

образуется возбужденное ядро ${}_{18}\text{Ar}^{40*}$, которое переходит в основное состояние после испускания γ -кванта с энергией 1,46 МэВ.

Постоянная распада λ_e , соответствующая явлению e -захвата, для ${}_{19}\text{K}^{40}$ составляет $0,585 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}$. Бета-минус распад ${}_{19}\text{K}^{40}$ приводит к образованию стабильного изотопа ${}_{20}\text{Ca}^{40}$ по схеме



Постоянная β^- -распада ${}_{19}\text{K}^{40}$ составляет $\lambda_\beta = 4,72 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}$.

При расчетах значение абсолютного возраста t может быть получено из следующего соотношения:

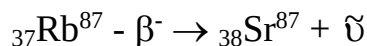
$$t = \frac{1}{\lambda_\beta + \lambda_e} \ln \left(1 + \frac{\lambda_\beta + \lambda_e}{\lambda_e} \frac{C_{\text{Ar}^{40}}}{C_{\text{K}^{40}}} \right). \quad (1.51)$$

Надежность датировки пород с помощью К-Аг-метода во многом зависит от скорости утечки образующегося Аг из минералов.

Рубидиево-стронциевый метод. Рубидий – химический элемент I группы периодической системы, имеет порядковый номер $Z = 37$ и атомный вес $A = 85,47$. Рубидий малораспространен в природе, его кларк в земной коре составляет 0,015 % по массе.

Среди изверженных пород наиболее высокие содержания Rb отмечаются в кислых разностях (0,02 %), а наиболее низкие – в ультрабазитах (2 г/т). Среднее содержание Rb в глинах и глинистых сланцах 0,02 %. В природе Rb, как правило, встречается совместно с Cs и собственных минералов не образует. Наиболее высокие концентрации этих элементов наблюдаются в некоторых минералах пегматитовых жил: полевых шпатах, слюдах, бериллах и особенно в поллуците. Содержание Rb в ортоклазах и микроклинах может достигать 2,7-2,8 %, в мусковитах – 1,8, в биотитах – 0,37, в лепидолитах – 2,7-3,7 %.

Природный рубидий состоит из смеси двух изотопов с массовыми числами 85 (72,81 %) и 87 (27,19 %). Изотоп ${}_{37}\text{Rb}^{87}$ β -радиоактивен и распадается по схеме



с периодом полураспада $T = 4,7 \cdot 10^{10}$ лет. В природных условиях встречаются четыре стабильных изотопа стронция: ${}_{38}\text{Sr}^{84}$ (0,56 %), ${}_{38}\text{Sr}^{86}$ (9,86 %), ${}_{38}\text{Sr}^{87}$ (7,02 %) и ${}_{38}\text{Sr}^{88}$ (82,56 %).

Данные по относительной распространенности стабильных изотопов Sr были получены после того, как Гольдшмидт в 1937 г. высказал предположение, что β^- -распад ${}_{37}\text{Rb}^{87}$ с образованием ${}_{38}\text{Sr}^{87}$ можно использовать в качестве

геохронометра. Поскольку изотоп $^{87}_{38}\text{Sr}$ может быть как естественным, так и радиогенным (за счет распада $^{87}_{37}\text{Rb}$), то при расчете геологического возраста следует сопоставлять между собою массовые доли радионуклида $^{87}_{37}\text{Rb}$ и радиогенной «добавки» $^{87}_{38}\text{Sr}$.

Время t , необходимое для получения имеющегося в данном образце количества радиогенного $^{87}_{38}\text{Sr}$, рассчитывается из соотношения

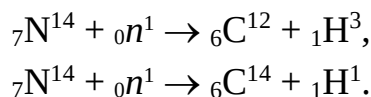
$$t = \frac{1}{\lambda_{\text{Rb}^{87}}} \frac{C_{\text{Sr}^{87}}}{C_{\text{Rb}^{87}}}, \quad (1.52)$$

где $\lambda_{\text{Rb}^{87}}$ – постоянная распада материнского изотопа $^{87}_{37}\text{Rb}$;

$C_{\text{Rb}^{87}}$, $C_{\text{Sr}^{87}}$ – массовые доли изотопа $^{87}_{37}\text{Rb}$ и радиогенного $^{87}_{38}\text{Sr}$.

Радиоуглеродный метод. Ниже рассматривается метод, который широко используется для датировки объектов жизнедеятельности, существовавших тысячи или первые десятки тысяч лет. Речь идет о датировке по радиоуглероду $^{14}_6\text{C}$, который образуется в атмосфере под действием космического излучения.

Космические лучи, состоящие из частиц высокой энергии, разрушают в верхних слоях атмосферы ядра атомов азота, входящих в состав воздуха. При этом образуются вторичные ядерные частицы и дочерние продукты, которые могут быть радиоактивными. Вторичные ядерные частицы, например нейтроны, могут взаимодействовать с $^{14}_7\text{N}$ и образовывать ^3_1H и $^{14}_6\text{C}$:



Первая из этих реакций идет на быстрых, а вторая на тепловых нейтронах. Возникающие под действием космических лучей нейтроны замедляются в воздухе до тепловых энергий, поэтому скорость образования ядер $^{14}_6\text{C}$ оказывается заметно выше скорости образования ^3_1H (примерно 2,3 атом/с на 1 см² поверхности для $^{14}_6\text{C}$ и 0,4 атома ^3_1H при тех же условиях).

Радиоуглерод $^{14}_6\text{C}$ является β -излучателем с периодом полураспада 5570 лет. Максимальная энергия β -частиц составляет 155 кэВ. Если предположить, что интенсивность космического излучения оставалось постоянной за последние десятки тысяч лет, то, исходя из периода полураспада $^{14}_6\text{C}$, можно считать, что к настоящему времени достигнуто равновесие между образующимися и распадающимися ядрами $^{14}_6\text{C}$. Атом радиоуглерода в воздухе довольно быстро окисляется и переходит в двуокись $\text{C}\hat{\text{I}}_2$.

Растительный мир живет за счет атмосферного углекислого газа. Животный мир питается растительным, и, следовательно, слабо радиоактивный углерод проникает в организм животных. В результате распада атомов $^{14}_6\text{C}$

каждый грамм углерода в живом организме испускает примерно 15 β -частиц в минуту. Когда жизнедеятельность прекращается, то обрывается и углеродный обмен с атмосферой и биосферой, количество атомов ${}^{14}\text{C}$ в организме не восполняется, происходит лишь их распад с известным периодом. Спустя 5570 лет после прекращения жизнедеятельности, число испускаемых β -частиц на каждый грамм содержащегося в нем С уменьшается вдвое, а спустя два периода полураспада ${}^{14}\text{C}$, это число уменьшится в 4 раза. Следовательно, измеряя удельную активность ${}^{14}\text{C}$, можно установить в пределах точности метода, когда для изучаемого объекта прекратился углеродный обмен, т. е. когда этот живой организм умер.

Зная удельную радиоактивность атмосферного углерода I_0 (та же, что и в организме) и активность исследуемого ископаемого остатка I , можно вычислить возраст с момента прекращения обмена углеродом:

$$t = \frac{1}{\lambda_{{}^{14}\text{C}}} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right). \quad (1.53)$$

Радиоуглеродный метод применим для датировки образований, возраст которых не превышает 20 тыс. лет. Для него пригодны древесный уголь (обугленное вещество), древесина, торф, кости, раковины и т. п.

Радиоуглеродный метод был проверен на образцах пород, возраст которых был хорошо известен из археологических данных. Одним образцом служил брусок кипариса из гробницы фараона Снофру; возраст бруска по археологическим данным оценивался в 5600 лет. Другой образец был взят из палубы похоронного судна фараона Сезостриса III; возраст – 3800 лет. Для каждого из этих образцов, как и для ряда других, возраст по ${}^{14}\text{C}$ совпал с археологическими данными с точностью $\pm 10\%$ относительных [61].

1.5.3. Физико-химические свойства некоторых естественно-радиоактивных элементов

Уран (U). Уран является наиболее тяжелым природным элементом с порядковым номером 92. Атомный вес природной смеси его изотопов (U^{238} , U^{235} , U^{234}) равен 238,03, плотность урана – 18,9 г/см³. Этот элемент открыт Клапротом в 1782 г., а его радиоактивность обнаружена Беккерелем в 1896 году. Уран характеризуется большим зарядом ядра и сложным строением электронной оболочки. В природных условиях он встречается в 4- (U^{+4}) и 6-валентной (U^{+6}) формах. Основной особенностью U является большая химическая активность и сильная восстановительная способность, особенно ярко проявляющаяся в кислых водных растворах. С кислородом U образует

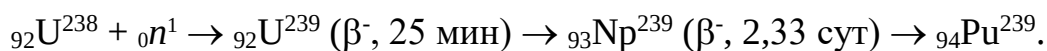
оксиды UO_2 , U_3O_8 , и UO_3 . Последний оксид в природных условиях без воды обычно не встречается. Галогенные соединения урана неустойчивы и весьма летучи. Сульфатные соединения урана в природе неизвестны. В природных условиях соединения 4-валентного U имеют черный, темно-коричневый и красно-бурый цвет и характеризуют гипогенные условия образования минералов при условиях восстановительной среды. Соединения U^{+6} имеют яркий зеленовато-желтый цвет и относятся ко вторичным урановым минералам.

Все урановые минералы делятся на *первичные* и *вторичные*. В группу первичных минералов U, представленных его оксидами, в первую очередь выделяют уранинит и настуран, отличающийся от уранинита тем, что он образуется в виде плотных натечных форм. Для всех первичных минералов U характерно присутствие Th. Вторичные минералы U представлены карбонатами, силикатами, фосфатами, ванадатами и сульфатами уранила. Во вторичных урановых минералах Th, как правило, отсутствует.

Кларк U в земной коре составляет $2,5 \cdot 10^{-4} \%$. Наиболее высокие средние содержания урана отмечаются в кислых изверженных породах (4,5 г/т), а наиболее низкие – в ультрабазитах $3 \cdot 10^{-7} \%$. В глинах и глинистых сланцах среднее содержание урана 3,2 г/т. Основная масса U (60 - 90 %) находится в литосфере в рассеянном состоянии, хотя известно большое количество (~200) U-содержащих минералов. Наибольшее практическое значение из них имеет около 30. Многие U-содержащие минералы являются сырьем на редкие земли и другие элементы.

Природные скопления урана образуются при магматических и гидротермальных процессах, при осадконакоплении, метаморфизме и выветривании пород. Встречаются как собственно урановые месторождения, так и комплексные. Массовые доли U в рудах колеблются от сотых долей процента до первых процентов. Среди урановых руд выделяют богатые (1-3 %), рядовые (0,1-1,0 %) и бедные (0,05-0,1 %). Из комплексных руд U извлекается и при убогих концентрациях (< 0,05 %)

Изотоп U^{235} делится под действием тепловых нейтронов и является основным сырьем для тепловых АЭС. Наиболее распространенный изотоп U^{238} делится под действием быстрых нейтронов и служит сырьем для получения стратегического делящегося материала – плутония. Образование Pu идет по следующей схеме:



Изотоп ${}_{94}\text{Pu}^{239}$ был открыт в 1941 г; он является α -излучателем с периодом полураспада $2,44 \cdot 10^4$ лет, превращаясь в дочерний продукт ${}_{92}\text{U}^{235}$.

Изотоп ${}_{94}\text{Pu}^{239}$ имеет очень большое сечение деления тепловыми нейтронами (738 барн) и испускает при одном акте деления $\sim 2,9$ нейтрона, что позволяет использовать ${}_{94}\text{Pu}^{239}$ в качестве стратегического сырья.

До пуска первых атомных реакторов урановые руды добывали в основном для извлечения из них Ra. Мизерные количества урановых соединений использовали в некоторых красителях и катализаторах. Когда из элемента, не имеющего почти никакого промышленного значения, U превратился в стратегическое сырье № 1, началась настоящая охота за его рудами. Чуть ли не все уголки земного шара были обследованы на U, благо его радиоактивность подсказывала принципы конструирования чувствительных поисковых радиометров.

При среднем содержании урана 2,5 г/т в некоторых горных породах, например в гранитах, его массовая доля составляет 4,5 г/т. Полная энергия, «спрятанная» в этих граммах, эквивалентна теплосодержанию сотен тонн каменного угля. Поэтому (а еще и потому, что во всем мире наблюдается устойчивая тенденция к извлечению U, и не только его, из все более бедных руд) можно полагать, что со временем гранит вполне может оказаться одним из видов минерального сырья. Всего в относительно тонком, 20-км верхнем слое Земли заключено 10^{14} т U. Количество громадное, способное удовлетворить все энергетические потребности человечества на долгое время. Энергия этого U оценивается астрономической цифрой – $2,3 \cdot 10^{24}$ киловатт-часов. Это в 10^6 раз больше, чем могут дать все разведанные и предполагаемые месторождения горючих полезных ископаемых.

Если бы в массе планеты концентрация U была такой же, как в гранитном слое, то температура Земли была бы намного выше существующей. Это обстоятельство, подтвержденное прямыми измерениями, показывает, что по мере продвижения к центру Земли концентрация U падает.

Способов извлечения U из руд разработано великое множество. Причина тому, с одной стороны – стратегическая важность этого элемента, а с другой, – разнообразие его минеральных форм. Но каков бы ни был метод или сырье, любое урановое производство включает три стадии: предварительное концентрирование (обогащение), выщелачивание U и получение достаточно чистых соединений U осаждением, экстракцией или ионным обменом. Далее, в зависимости от назначения получаемого урана, следует обогащение продукта изотопом U^{235} или сразу же восстановление элементного (металлического) урана.

Радий (Ra). Промежуточный продукт распада в радиоактивном семействе U^{238} , радий имеет порядковый номер 88 и атомный вес 226, плотность 5,0 г/см³. Открыт супругами Кюри в 1898 г. В чистом виде представляет собой довольно мягкий металл серебристого цвета. Химические свойства Ra близки к свойствам Ba, вместе с которым они часто встречаются в руде. Радий всегда двухвалентен. При взаимодействии с кислотами оксиды и гидраты окисей Ra легко образуют соли, причем соли с анионами Cl^- и NO_3^- легкорастворимы, а соли с анионами F^- , SO_4^{2-} , CO_3^{2-} – труднорастворимы в воде.

В природных условиях Ra встречается преимущественно в рассеянном состоянии и вследствие чрезвычайно низкого кларка ($1 \cdot 10^{-10}$ %) самостоятельных минералов не образует. Наиболее высокие содержания Ra отмечаются в кислых породах, а наиболее низкие – в ультрабазитах. Среднее содержание Ra в глинах и глинистых сланцах $1 \cdot 10^{-10}$ %.

Наиболее распространенный изотоп ${}^{226}_{88}Ra$ образуется за счет α -распада иония Io (${}^{230}_{90}Th$). Изотоп ${}^{226}_{88}Ra$ является α -излучателем с периодом полураспада 1602 лет. Кроме этого изотопа, в природе еще известен продукт цепочки ядерных превращений семейства U^{235} – ${}^{223}_{88}Ra$ ($T = 11,43$ сут) и продукт цепочки Th^{232} – ${}^{224}_{88}Ra$ ($T = 3,64$ сут).

Радон (Rn). Радиоактивный инертный газ (эманация), существует в природе как одно из промежуточных звеньев в цепочке ядерных превращений семейства U^{238} . Образуется в результате α -распада ${}^{226}_{88}Ra$. Массовое число 222, атомный номер 86, период полураспада 3,825 сут. Является α -излучателем. К настоящему времени известно 19 изотопов Rn с массовыми числами 204 и от 206 до 224. Искусственным путем получено 16 изотопов. В природных средах существует всего три изотопа Rn.

Эманация тория – Tn (${}^{220}_{86}Rn$ – торон) является членом другого естественно-радиоактивного семейства – ряда ${}^{232}_{90}Th$. Это изотоп радона с массовым числом 220 и периодом полураспада 55,6 с.

Третий природный изотоп радона – актинон An (${}^{219}_{86}Rn$). Так же как радон и торон, он является радиоактивным газом, относящихся к группе инертных (благородных) газов. Актинон является членом семейства актиноурана ${}^{235}_{92}U$, его массовое число 219, период полураспада 3,96 с.

Рассматриваемые эманации распространены в почвенном и (очень незначительно) в атмосферном воздухе, а также в минеральных источниках. Концентрация Rn в почвенном воздухе изменяется в широких пределах: от $2,6 \cdot 10^{-15}$ до $44 \cdot 10^{-15}$ %. В районах развитого уранового оруденения концентрация Rn в почвенном воздухе может достигать 10^{-12} %. В атмосферном воздухе

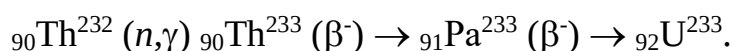
концентрация Rn невелика, примерно на три порядка ниже нормальной концентрации в почвенном воздухе, и составляет $\sim 4 \cdot 10^{-18} \%$.

В природных водах концентрация Rn меняется в очень широких пределах – от $4 \cdot 10^{-16}$ до $4 \cdot 10^{-10} \%$.

Торий (Th). Естественнo-радиоактивный элемент Th состоит из одного изотопа с массовым числом 232, который является родоначальником ториевого семейства. Открыт Берцелиусом в 1828 г., а его радиоактивность обнаружена М. Кюри в 1898 г.

Торий – металл белого цвета, плотностью $11,7 \text{ г/см}^3$, темнеющий на открытом воздухе. Торий является относительно широко распространенным элементом, его присутствие можно обнаружить практически в любой горной породе. Кларк Th составляет $1,5 \cdot 10^{-3} \%$ (15 г/т), т. е. примерно в четыре раза выше кларка урана. Наиболее высокое содержание тория отмечается в кислых породах (18 г/т), минимальные – в ультрабазитах (до $5 \cdot 10^{-7} \%$). В некоторых типах изверженных пород содержание Th достигает сотых долей процента, в глинах и глинистых сланцах – 11 г/т.

Известно более 120 Th-содержащих минералов, однако промышленное значение имеют немногие: монацит $(\text{GeLaTh})(\text{PO}_4)$, торит ThSiO_4 , ураноторит, торианит и др. Торий тесно связан с редкими землями и U. Основным источником Th является монацитовый песок. Не меньшую ценность представляет и находящийся в его составе Се. Торий может использоваться для получения делящегося материала, которым наряду с U^{235} , Pu^{239} является U^{233} . Этот изотоп получается по ядерной реакции



Калий (K). Среди трех природных изотопов калия только ${}_{19}\text{K}^{40}$ является радиоактивным с содержанием в естественной смеси 0,0119 % и периодом полураспада $T = 1,27 \cdot 10^9$ лет. Физико-химические свойства K резко отличаются от свойств других радиоактивных элементов. Прежде всего K распространен в природе в несравненно больших количествах. Кларк K в земной коре равен 2,4 %, высокие содержания отмечены в щелочных и кислых породах – 4,9 и 3,6 % соответственно, минимальные – в ультрабазитах – 0,03 %. Калий относится к группе щелочных металлов, имеет порядковый номер 19, атомную массу 39,1 и плотность $0,86 \text{ г/см}^3$.

Из наиболее распространенных K-содержащих минералов, обуславливающих повышенную радиоактивность горных пород, можно назвать сильвин $\hat{\text{E}}\text{Cl}$, карналлит, микроклин и ортоклаз. В глинистых минералах

значительная часть $\hat{E}$ находится в сорбированной форме и прочно связана с ними. Наиболее сильно $\hat{E}$ адсорбируется гидрослюдами.

1.5.4. Естественно-радиоактивные элементы в природе

Естественная радиоактивность горных пород обуславливается присутствием в их составе K, U и Th. Присутствие радиоактивных элементов в том или ином количестве характерно для всех горных пород – изверженных, метаморфических и осадочных, а также для современных почв и донных осадков различных водоемов.

Радиоактивность изверженных пород. В результате изучения радиоактивности изверженных пород были установлены закономерности.

Массовые доли U и Th, а соответственно и продуктов их распада, значительно выше в кислых породах, чем в основных; радиоактивность изверженных пород растет в направлении от ультрабазитов к кислым.

Радиоактивные элементы в магматических породах концентрируются в основном в цветных и акцессорных минералах: монаците, цирконе, сфене, рутиле, биотите и др. В наиболее общем случае в минералах пород гранитного ряда радиоактивность, связанная с U и Th, растет в направлении кварц → полевые шпаты → слюды → магнезиально-железистые минералы → акцессорные минералы. Особенности концентрации радиоактивных элементов обуславливают неодинаковую радиоактивность пород даже одного и того же интрузивного массива; для гранитов она обычно выше в зонах концентрации акцессорных минералов, в сравнении с участками, сложенными кварцем и полевыми шпатами альбитового ряда.

Радиоактивность метаморфических пород. Зависит, во-первых, от радиоактивности исходных пород, а во-вторых, от характера метаморфизма: происходил ли он с привносом материала, включая радиоактивные элементы, или этого привноса не было. Кроме того, при метаморфизме осадочных толщ может происходить минеральная перегруппировка внутри образований с обеднением или обогащением их ЕРЭ в отдельных участках толщи. Считается, что в результате перегруппировки U внутри пород, подвергшихся изменению, могут образовываться так называемые метаморфогенные месторождения урана. Из сказанного можно сделать выводы:

Радиоактивность метаморфических пород весьма различна не только для разных пород, но и для одной и той же толщи.

Радиоактивность гнейсов и сланцев, образовавшихся из глинистых отложений, в целом оказывается выше, чем радиоактивность мраморов и кварцитов, образовавшихся из осадков с пониженной радиоактивностью.

Радиоактивность пород растет при гидротермальном метаморфизме.

Радиоактивность осадочных пород. Среди осадочных пород наибольшей радиоактивностью отличаются калийные соли, глины и, особенно, горючие сланцы. Наименьшей радиоактивностью обладают известняки, доломиты, гипс, ангидрит, галит. Радиоактивность песчаников увеличивается с ростом содержания глинистого материала, слюд и акцессорных минералов. Резко аномальные содержания радиоактивных элементов нередко фиксируются в природных средах с развитием органических остатков.

В некоторых разностях углей, фосфоритов, песчаников и известняков содержание ЕРЭ может достигать промышленных значений. Нередко в осадочных породах повышенные концентрации U обусловлены гипергенными процессами выщелачивания и его переотложением в более благоприятных участках осадочных толщ. Замечено, что морские отложения содержат более высокие концентрации ЕРЭ, чем осадочные породы речного и озерного происхождения. Накопление ЕРЭ элементов в осадочных породах связано также с адсорбцией их тонкокластическим (глинистым) материалом из водоемов, где шло осадконакопление. Более подробные сведения о радиоактивности природных сред приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Содержания ЕРЭ и интенсивность γ -излучения природных сред

Породы, объекты	Содержание элементов				γ -поле I_γ , мкР/ч	Парциальные доли ЕРЭ в I_γ (%)			Отношения ЕРЭ		
	Ra, мкг/т	U, г/т	Th, г/т	K, %		U γ	Th γ	K γ	Th/U	U/K	Th/K
Земная кора (ЗК)	0,8 0,6-1,3	2,3 1,8- 4,4	8,0 5-13	2,4 2,3-2,6	8,4 5- 8	26 22-32	46 40-48	28 24-34	3,5 2,5-4,5	1,0 0,8-1,5	3,5 2,0-5
Гранитный слой ЗК	1,2 0,8-1,7	3,6 2,4- 5,0	15,5 12-18	3,6 2,5-3,6	12,5 10- 15	24 23-31	52 48-54	24 19-26	4,0 3,0-5	1,0 0,8-2,0	4,0 3,5-6
Базальтовый слой ЗК	0,3 0,2-0,5	1,0 0,6- 1,5	3,3 1,8-3,8	1,0 0,7-1,2	3,5 2,0-5,0	28 22-32	44 40-48	28 24-34	3,5 3,0-4	1,0 0,8-1,5	3,5 2,0-4
Щелочные породы	1,6 0,1-30	4,7 0,3- 89	18,5 5-80	4,9 3- 12,5	18,0 9-130	25 20-35	49 40-55	26 23-32	4,0 1,0-8	1,0 0,9-3,0	4,0 1,5-9
Кислые породы	1,2 0,2-17	3,5 0,6- 35	15,5 3-96	3,6 1,6-9,0	15,0 8-95	24 20-35	52 45-55	24 20-30	4,0 1,5-15	1,0 0,8-2,0	4,5 3-8
Средние породы	0,7 0,1-1,9	2,0 0,3- 5,6	8,3 2-34	2,2 0,8-6,8	8,0 2- 23	24 20-30	49 45-55	27 22-30	4,0 1,5-7	1,0 0,8-1,5	4,0 2-6
Основные породы	0,3 0- 0,9	0,9 0,1- 2,7	3,5 0,5-15	1,0 0,3-1,8	3,5 0,5-10	25 20-30	47 40-50	28 24-34	4,0 1,5-6	1,0 0,8-1,5	3,5 2,5-5
Ультра-базиты	0,01 0-0,02	0,03 0- 0,06	0,1 0-0,3	0,03 0-0,2	0,1 0- 2,0	27 22-32	46 40-48	27 24-34	3,5 1,0-4	1,0 0,8-1,5	3,0 2-4

Известняки	0,4 0,3-4,5	1,2 0,9- 12	2,5 0,7-8	0,4 0,1-1,2	2,5 1,5-13	43 35-50	43 35-50	14 10-20	2,0 0,5-5	3,0 1,5-4	6,0 4-8
Сланцы	1,0 0,1-5,0	2,9 0,3- 90	10,0 8-17	2,7 0,7-3,2	10,0 5-25	27 22-40	47 40-50	26 20-35	3,5 1,0-5	1,0 0,8-1,5	3,5 2-7
Глины	1,3 0,2-26	3,5 0,8- 78	7,0 5-16	2,3 0,6-2,9	9,0 4- 25	38 33-60	36 30-40	26 8-30	2,0 0,5-4	2,0 1,0-8	3,0 2-5
Песчаники	0,7 0,1-2,7	2,1 0,3- 8	9,0 6-30	2,1 1,1-3,0	7,5 4,5-18	24 20-30	52 45-60	24 20-30	4,5 1,5-7	1,0 0,8-1,5	4,0 2-10
Почвы	0,8 0,2-2,5	2,1 0,3- 4,5	6,0 2,5-15	1,4 0,3-3,6	6,0 1,8-15	32 25-55	46 30-50	22 10-25	3,0 1,0-4,5	1,5 1,0-6	4,0 2-6
Морские илы	2,0 0,3-15	3,2 1,0- 20	4,6 1,6-8,8	1,2 0,5-2,5	6,5 3- 30	48 40-65	34 25-35	18 10-25	1,5 0- 3	2,7 1,5-10	4,0 3-5
Морская вода	10 ⁻⁴	0,003	0,001	0,04	0	7	2	91	0,3	0,07	0,02

Примечания: 1. В числителе приведено среднее значение, в знаменателе - возможные отклонения; 2. Модули U/K и Th/K указаны в (г/т)/%.

Основная часть U и Th присутствует в горных породах, растениях и живых организмах в рассеянном состоянии. В благоприятных условиях эти элементы создают рудные скопления с коэффициентом концентрации от двух до четырех порядков (10^2 - 10^4). В первичных и вторичных ореолах урановых месторождений этот коэффициент снижается до 5-50 единиц.

Высокая геохимическая активность U является причиной большого разнообразия его природных образований, встречающихся в форме 4-валентных U^{4+} и неустойчивых 6-валентных U^{6+} соединений. Эти особенности обеспечивают возможность промышленных скоплений U в самых разнообразных геологических условиях. Месторождения U имеют разное происхождение и встречаются в кристаллическом основании фундамента, осадочном чехле древних и молодых платформ, и особенно широко – в областях послеплатформенного орогенеза. Они отличаются по вещественному и минеральному составам руд и не обнаруживают выраженной тенденции к устойчивой ассоциации с определенными типами месторождений других типов полезных ископаемых.

Все известные наиболее значительные концентрации U связаны с эндогенными и экзогенными процессами, протекающими в орогенных условиях формирования или распада коры континентального типа. В областях с корой океанического типа крупные месторождения U не обнаружены.

В 1986 г. академиком Н. П. Лаверовым была предложена генетическая систематика месторождений U, учитывающая новые данные и сохраняющая

привычные для специалистов основные подразделения. Среди них выделены четыре основные серии: эндогенная, экзогенная, метаморфогенная и полигенная. При этом схема систематики эндогенных месторождений насчитывает три типа: А – эндогенные месторождения, связанные с щелочно-ультраосновным метаморфизмом, Б – связанные со щелочным магматизмом и В – связанные с гранитоидным метаморфизмом.

Месторождения экзогенной серии разделяются на две группы: седиментационно-диагенетические и инфильтрационные (эпигенетические), образованные поверхностными и подземными водами. В первую группу входят осадочные месторождения, образованные в речных, озерно-болотных и морских условиях. Вторая группа подразделяется на три класса месторождений, образованных грунтовыми, пластовыми и трещинными подземными водами. Внутри выделяются типы экзогенных месторождений, отличающихся минеральным и вещественным составом руд, условиями их формирования и морфологией рудных тел.

Месторождения метаморфогенной серии подразделяются на две группы – метаморфизованные и ультраметаморфизованные. Группы включают несколько классов, которые в свою очередь состоят из конкретных типов месторождений.

Месторождения полигенной серии в качестве самостоятельных выделяются Лаверовым впервые. Они включают 2 группы, 3 класса и 6 типов месторождений, например полиметаллические урановые (Ni, Co, Cu, Ag).

1.6. Метрология радиационных измерений

1.6.1. Измеряемые величины и единицы измерений [48]

Физические величины, прямо или косвенно определяемые при радиационных измерениях, приведены в табл. 1.4. Это – масса и массовая доля радиоактивных веществ, активность, плотность потока ионизирующих излучений и дозовые характеристики γ -поля. Для удобства работы с литературой наряду с единицами системы СИ в табл. 1.4. приведены ранее применявшиеся единицы и их соотношения с единицами СИ.

В соответствии со стандартом СЭВ 1052-78 массу радиоактивных веществ выражают в килограммах и производных от них единицах (миллиграммах, граммах, тоннах и т. п.).

Содержание радиоактивных веществ (ГОСТ 8.505, прил. 4) – обобщающее наименование физических величин: массовой и объемной доли, массовой концентрации, которые количественно характеризуют состав горных

пород и руд. Единицами их измерений являются массовые и объемные проценты, кг/кг, кг/м³ и др.

Единицей *активности*, характеризующей число ядерных превращений в источнике в секунду, является *беккерель* (Бк). Один беккерель соответствует активности источника, в котором происходит одно ядерное превращение в секунду. Переход от активности a (Бк) радионуклида с постоянной распада λ (с⁻¹) к массе M (г) осуществляется по формуле

$$a = \lambda \frac{N_A}{A} M, \quad (1.54)$$

где N_A – число Авогадро; A – массовое число радионуклида.

Таблица 1.4

Единицы измерения радиоактивных веществ и ядерных излучений

Физическая величина	Единицы измерения		Соотношение единиц
	система СИ	внесистемные ед.	
Масса	кг	мг-экв Ra	1 мг-экв Ra = 10 ⁻⁶ кг Ra (по γ -излучению)
Активность	беккерель (Бк)	кюри (Ки)	1 Ки = 3,7·10 ¹⁰ Бк 1 Бк = 2,7·10 ⁻¹⁰ Ки
Массовая доля	кг/кг, % мас.	г/г, % мас.	1 % мас. = 0,01 кг/кг 1 кг/кг = 100 % мас.
Объемная доля	м ³ /м ³ , % об.	см ³ /см ³ , % об.	1 % об. = 0,01 м ³ /м ³ 1 м ³ /м ³ = 100 % об.
Удельная активность	Бк/кг	Ки/г, Ки/кг	1 Ки/г = 3,7·10 ¹³ Бк/кг 1 Бк/кг = 2,7·10 ⁻¹⁴ Ки/г
Объемная активность	Бк/м ³	Ки/л, эман	1 Ки/л = 3,7·10 ¹³ Бк/м ³ 1 эман = 10 ⁻¹⁰ Ки/л 1 Бк/л = 0,27 эман
Плотность потока ядерных частиц	с ⁻¹ ·м ⁻²	с ⁻¹ ·см ⁻²	1 с ⁻¹ ·см ⁻² = 10 ⁴ с ⁻¹ ·м ⁻² 1 с ⁻¹ ·м ⁻² = 10 ⁻⁴ с ⁻¹ ·см ⁻²
Энергия	джоуль (Дж)	эВ	1 эВ = 1,602·10 ⁻¹⁹ Дж 1 Дж = 6,24·10 ¹⁸ эВ
Плотность потока энергии	Вт/м ²	эВ/(см ² ·с)	1 эВ/(см ² ·с) = 1,602·10 ⁻¹⁵ Вт/м ² 1 Вт/м ² = 6,24·10 ¹⁴ эВ/(см ² ·с)
Экспозиционная доза излучения	Кл/кг	рентген (Р)	1 Р = 2,58·10 ⁻⁴ Кл/кг 1 Кл/кг = 3,88·10 ³ Р
Мощность экспозиционной дозы излучения	А/кг	Р/с, мкР/ч	1 Р/с = 2,58·10 ⁻⁴ А/кг 1 мкР/ч = 0,0717 пА/кг

			1 пА/кг $\cong$ 14 мкР/ч
Поглощенная доза излучения	грей (Гр)	рад	1 рад = 0,01 Гр 1 Гр = 100 рад
Мощность поглощенной дозы излучения	Гр/с	рад/с	1 рад/с = 0,01 Гр/с 1 Гр/с = 100 рад/с
Эквивалентная поглощенная доза излучения	зиверт (Зв)	бэр	1 бэр = 0,01 Зв 1 Зв = 100 бэр

Ранее активность выражали в *кюри* (Ки), понимая под этим число ядерных превращений в секунду в 1 г Ra без его продуктов распада. В соответствии с (1,54) при $M_{Ra} = 1$ г активность Ra составит $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Различают *массовую* (или удельную) и *объемную* активность. В первом случае это активность вещества единичной массы (Бк/кг), во втором - вещества единичного объема (Бк/м³). Обычно в радиометрии объемная активность выражается в Бк/л при оценке концентраций эманаций. Ранее применяли единицу измерения удельной активности – кюри на литр (Ки/л) и производную от нее – *эман*: 1 эман = 10^{-10} Ки/л.

Плотность потока частиц и квантов имеет размерность $c^{-1} \cdot m^{-2}$, плотность потока энергии – Вт/м². Из-за сложности измерения потока энергии для количественной характеристики рентгеновского и γ -излучения на практике используют дозовые параметры. Под *дозой* понимается энергия излучения, предназначенная для передачи или переданная среде и рассчитанная на единицу массы или объема этой среды. Доза, определяемая по степени ионизации воздуха в условиях электронного равновесия, называется *экспозиционной дозой D*; доза, определяемая поглощенной энергией в любом другом веществе, – *поглощенная доза X*. Доза, отнесенная к единице времени, – *мощность дозы*.

Единица экспозиционной дозы – кулон на килограмм (Кл/кг). Это экспозиционная доза рентгеновского или γ -излучения, при которой сопряженная корпускулярная эмиссия в одном килограмме сухого атмосферного воздуха за время t образует ионы, несущие заряд каждого знака, соответствующий 1 Кл. Единица *мощности экспозиционной дозы (МЭД)* – кулон на килограмм в секунду [Кл / (кг·с)] или ампер на килограмм (А / кг).

Мощность экспозиционной дозы I_D (А / кг) от полиэнергетического источника с квантовым выходом K_i и плотностью потока i -й линии спектра n_i ($c^{-1} \cdot m^{-2}$)

$$I_D = \frac{D}{t} = \sum_{i=1}^K \frac{E_i n_i}{F}, \quad (1.55)$$

где E_i - энергия i -й линии в спектре γ -излучения (эВ);
 F - энергетический эквивалент (Кл /кг), равный $2,75 \cdot 10^{14}$ эВ.

1.6.2. Эталоны и образцовые меры [48]

В радиометрической разведке используют стандартные образцы состава ЕРЭ и их активности, а также образцовые источники плотности потока заряженных частиц и мощности дозы γ -излучения.

Стандартные образцы состава, аттестованные по массовой доле К, U и Th, изготавливают в виде порошковых препаратов для целей радиометрического анализа, а также в виде насыщенных и ненасыщенных по γ -лучам рудных моделей, используемых для градуирования γ -спектрометров.

Стандартные образцы активности Rn представляют собою водные растворы $RaCl_2$, аттестованные по массе Ra с погрешностью 1-3 % отн. Обычно это жидкие радиевые эталоны типа ЕВ-8, ЕВ-9, ЕВ-10 с массой Ra, соответственно $(100,10,1) \times 10^{-10}$ г, а также другие источники этого типа с массой Ra до $5 \cdot 10^{-6}$ г (ЕВ-65). В герметичном сосуде (после предварительного продувания), содержащем водный раствор Ra с массой M_{Ra} (г), за время t образуется Rn активностью в Бк:

$$a_{Rn} = 3,7 \cdot 10^{10} M_{Ra} [1 - \exp(-\lambda_{Rn} t)], \quad (1.56)$$

или в кюри (Ки):

$$a_{Rn} = M_{Ra} [1 - \exp(-\lambda_{Rn} t)]. \quad (1.57)$$

В качестве образцовых источников плотности потока α -частиц используют радиоизотопы Pu²³⁹, Pu²³⁴, U²³⁸; β -частиц – Sr⁹⁰ в равновесии с Y⁹⁰; нейтронного излучения – Pu+Be, Cf²⁵² и др.

Стандартные образцы мощности дозы γ -излучения изготавливают из смеси солей $RaSi_4$ и $BaSi_4$ в виде ампульных источников в Pt-Ir-экране толщиной 0,5 мм или в другом кожухе, с толщиной стенок, эквивалентной по поглощающим свойствам 0,5 мм Pt. Обычно это источники типа ЕР, аттестованные по массе Ra (мг) с погрешностью 0,5-2,0 % отн. Из них наиболее удобны для использования источники P₁₋₂, C₄₁ с массой Ra соответственно 1,0 и 0,1 мг, также ЕР-1 и ЕР-14.

Расчетная мощность дозы (пА/кг) γ -излучения источника массой M_{Ra} (мг) на расстоянии R (м) описывается соотношением

$$I_D(R) = 60,2 \frac{M_{Ra}}{R^2}. \quad (1.58)$$

Мощность дозы в микрорентгенах в час (мкР/ч):

$$I_D(R) = 840 \frac{M_{Ra}}{R^2}. \quad (1.59)$$

Сопоставляя между собою (1.58) и (1.59), видно, что $1 \text{ пА/кг} \cong 14 \text{ мкР/ч}$.

1.6.3. Средства измерения и их метрология

В качестве средств измерения в радиометрической разведке используют радиометры, эманометры, γ -спектрометры разного назначения (табл. 1.5). Измерения этими приборами физических величин относятся к разделу косвенных. Для перехода к их действительным значениям выполняют градуирование аппаратуры с помощью эталонов и образцовых мер.

При измерениях часто говорят о *пороге чувствительности*, под которым принято понимать наименьшее значение измеряемой величины, которое может быть обнаружено прибором в превышении над флуктуацией фонового излучения с заданной доверительной вероятностью.

Значение порога чувствительности L оценивают по формуле

$$L = k\sigma_{\phi}, \quad (1.60)$$

где σ_{ϕ} - среднеквадратическое отклонение измеряемых значений фона;

k - коэффициент, соответствующий значению доверительной вероятности (обычно $k = 3$).

1.6.4. Погрешности измерений

Разность Δ между результатом измерения x и истинным значением x_0 измеряемой величины называется *погрешностью измерений*:

$$\Delta = x - x_0.$$

По своей структуре погрешности измерений подразделяются на систематические, случайные, грубые, аппаратные, методические, абсолютные и относительные.

Систематическая погрешность представляет собою составляющую погрешности Δ , остающуюся постоянной или закономерно изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайная погрешность — это составляющая погрешности Δ , изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях.

Грубая погрешность – отклонение измеряемой величины от истинной вследствие грубого нарушения методики измерений оператором или вследствие неисправности аппаратуры.

Таблица 1.5

Радиометрическая аппаратура и ее характеристики

Прибор	Область применения	М, кг	Питание	Детектор	Регистратор	Порог чувствительности	Верхний предел регистрации
СРП-68-01, радиометр	Пешеходная γ -съемка	3,6	А-343 (9 шт.)	NaI(Tl) 30×25 ФЭУ-85	Стрелочный, телефон	0,07 при фоне 0,35 пА/кг	215 пА/кг
СРП-88Н, радиометр	Пешеходная γ -съемка	2,2	А-343 (4 шт.)	NaI(Tl) 25×40 ФЭУ-85	Цифровой индикатор	0,1 пА/кг	600 пА/кг
СРП-88Н1, радиометр	Шпуровая γ -съемка	4,1	А-343 (4 шт.)	NaI(Tl) 10×40 ФЭУ-60	Цифровой индикатор	0,2 пА/кг	600 пА/кг
СП-4, переносной γ -спектрометр	Пешеходная γ -съемка	6,8	Рубин (5 шт.)	NaI(Tl) 80×80 ФЭУ-110	Стрелочный, цифровой	U, Th – 1 г/т; К – 0,2 %	U, Th – 0,03 %; К – 25 %
РКП-305, «Карат», концентрометр	Пешеходная и шпуровая γ -съемка	9,2	А-343 (9 шт.)	NaI(Tl) 80×80 ФЭУ-110	Цифровая индикация U, Th, К	U, Th – 0,4 г/т; К – 0,1 %	U, Th – 0,05 %; К – 50 %
СКАТ-77, комплексная аэрогеофизическая станция	γ -спектрометр, магнитная, электрическая аэросъемка	430	Бортовая сеть 27 В	NaI(Tl) 200×100 (2-12 шт.) ФЭУ-110	Аналоговый, цифровой магнитный (РУМС-2000)	U – 0,2 г/т; Th – 0,5 г/т; К – 0,05 %	U – 0,025 %; Th – 0,1 %; К – 32 %
РСС-006, скважинный γ -спектрометр	γ -спектрометр. каротаж	20	11-16 В; 5 Вт	CsI(Tl) 25×80 ФЭУ-67Б	Цифро-аналоговый	U, Th – 5 г/т; К – 1 %	U, Th – 3 %; К – 50 %
«Гамма-01С», лабораторный γ -спектрометрический комплекс	Измерения и обработка спектров γ -излучения	20, 320 Pb	Сеть ~220 В	NaI(Tl) 75×40, энергетич. разрешение – 8 % (662 кэВ)	Встроенный в ПЭВМ АЦП с ПГ обеспечением	0,03 пА/кг	2000 пА/кг
РГА-01, «Глициния», α -радиометр, эманометр	Эманиационная съемка	9	Марс-373 (6 шт.)	ZnS(Ag), пластмасса	Цифровое табло	0,3 Бк/л	10 ⁵ Бк/л

Абсолютная погрешность – это погрешность измерений Δ , выраженная в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность δ – это абсолютная погрешность в нормировке к истинному значению измеряемой величины, выраженная в %:

$$\delta = \frac{x - x_0}{x_0} 100 \% .$$

Основным параметром, характеризующим рассеяние измеряемой величины, является среднеквадратическое отклонение результата измерений:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2} . \quad (1.61)$$

Поскольку в эксперименте вместо истинного (заранее неизвестного) значения x_0 используют среднее арифметическое из n измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i , \quad (1.62)$$

то параметр рассеяния многократно измеряемой величины

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} , \quad (1.63)$$

а параметр рассеяния среднего арифметического значения

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (1.64)$$

В метрологии, кроме того, существуют понятия точности, правильности, сходимости и воспроизводимости измерений (ГОСТ 16263-70).

Точность отражает близость результатов измерений к истинному значению измеряемой величины.

Правильность – качество измерений, отражающее близость к нулю систематической погрешности.

Сходимость – близость друг к другу результатов повторных измерений в одинаковых условиях.

Воспроизводимость – близость друг к другу результатов измерений в различных условиях (в разное время, в различных местах, разными методами и средствами).

1.6.5. Корреляционный анализ в радиометрии

В практике геологоразведочных работ нередко приходится иметь дело со статистическими связями между сопоставляемыми величинами, когда каждому

значению некоторой величины x соответствует статистический ряд значений y , и наоборот. Типичным примером статистической связи может служить зависимость между содержанием радиоактивных и нерадиоактивных элементов в некоторых рудах. Выявление и изучение таких связей выполняется с помощью корреляционного анализа.

В зависимости от типа связи различают *линейную* корреляционную связь, когда зависимость между связанными друг с другом величинами выражается линейным уравнением вида

$$y = ax + b, \quad (1.65)$$

и нелинейные статистические связи, когда зависимость между переменными выражается уравнением степени выше первой. Уравнение (1.65) носит название уравнения линейной регрессии y на x .

Допустим, что в результате измерений получен набор точек, через которые требуется провести прямую линию и записать (1.65) с учетом численных значений коэффициентов a и b . Прямую обычно пытаются провести таким образом, чтобы точки на плоскости распределялись по возможности одинаково по обе стороны от проведенной прямой. Для этого необходимо подобрать коэффициенты a и b (и следовательно, построить прямую) с наименьшим среднеквадратичным отклонением от экспериментальных точек, что и осуществляется в *методе наименьших квадратов*.

Построение прямой линейной регрессии разбивается на этапы:

1. Составление перечня (таблицы) всех экспериментальных точек.
2. Вычисление величин Σx , Σy , Σx^2 , Σy^2 , $\Sigma(xy)$.
3. Вычисление коэффициентов a и b по формулам:

$$a = \frac{\sum(xy) - \frac{1}{n} \sum x \sum y}{\sum x^2 - \frac{1}{n} (\sum x)^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad (1.66)$$

$$b = \frac{\sum y}{n} - a \frac{\sum x}{n} = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (1.67)$$

где символ верхней черты означает среднее значение.

4. Вычисление коэффициента корреляции выполняется по формуле:

$$r = \left\{ \frac{\left[\sum(xy) - \frac{1}{n} \sum x \sum y \right]^2}{\left[\sum x^2 - \frac{1}{n} (\sum x)^2 \right] \left[\sum y^2 - \frac{1}{n} (\sum y)^2 \right]} \right\}^{1/2}. \quad (1.68)$$

В табл. 1.6 показан пример обработки результатов наблюдений, вычисления a , b и коэффициента корреляции r по пяти точкам.

Таблица 1.6

Результаты статистической обработки результатов наблюдений

i	x	y	x^2	y^2	xy
1	5,0	13,7	25,0	187,7	68,5
2	7,2	18,8	51,8	353,4	135,4
3	11,3	26,4	127,7	697,0	298,3
4	23,8	53,1	566,4	2819,6	1263,8
5	45,4	98,2	2061,2	9643,2	4458,3
$n = 5$	$\Sigma x = 92,7$	$\Sigma y = 210,2$	$\Sigma x^2 = 2832,1$	$\Sigma y^2 = 13700,9$	$\Sigma(xy) = 6224,3$

Подставив полученные значения в формулы (1.66) - (1.68), получим параметры уравнения регрессии для нашего примера: $y = 2,1x + 3,1$ при коэффициенте корреляции $r \cong 1$, что указывает на тесную линейную связь между переменными y и x .

Экспоненциальная функция – пример нелинейного вида связи переменных y и x , которую тем не менее можно *линеаризировать*, т. е. после специальных математических преобразований представить в виде линейного уравнения. Вычислим коэффициенты регрессии для уравнения

$$y = be^{ax}. \quad (1.69)$$

Логарифмируя (1.69), имеем: $\ln y = ax + \ln b$; тогда:

$$a = \frac{\sum (x \ln y) - \frac{1}{n} \sum x \sum \ln y}{\sum x^2 - \frac{1}{n} (\sum x)^2}, \quad (1.70)$$

$$b = \exp \left[\frac{\sum \ln y}{n} - a \frac{\sum x}{n} \right]. \quad (1.71)$$

1.6.6. Статистический способ получения уравнения линейной регрессии

Выше был рассмотрен случай установления функциональной зависимости между линейно-связанными величинами y и x на основе так называемого *совместных* измерений. На практике нередко приходится иметь дело с результатами *несовместных* измерений, когда сопоставляемые величины

регистрируются автономно. В этом случае оказывается невозможным получить координатную $x_1, y_1; \dots x_n, y_n$ функцию и ее графическое представление.

Для установления аналитической зависимости в случае несовместных измерений возможно применение способа, основанного на использовании главных параметров (кривых) распределения сопоставляемых величин x и y – средних значений $\bar{x}$, $\bar{y}$ (или модальных для кривых) и стандартных отклонений σ_x , σ_y . Сущность этого способа заключается в следующем [14].

Допустим, что между сопоставляемыми величинами x и y существует линейная зависимость (1.65). Если при этом известны средние значения $\bar{x}$, $\bar{y}$ и стандартные отклонения σ_x , σ_y , то оказывается, что коэффициенты a и b в (1.65) могут быть найдены следующим образом.

Из теории вероятности и математической статистики известны свойства математического ожидания M (среднего значения) и дисперсии D :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= M(ax + b) = aM(x) + b = a\bar{x} + b; \\ D(y) &= D(ax + b) = a^2D(x), \text{ откуда:} \\ a^2 &= D(y)/D(x).\end{aligned}\tag{1.72}$$

Учитывая, что $\sigma = \pm\sqrt{D}$, имеем:

$$\begin{cases} \bar{y} = a\bar{x} + b \\ a = \sigma_y / \sigma_x \end{cases}\tag{1.73}$$

Из (1.73) можно найти коэффициент b :

$$b = \bar{y} - \bar{x} \sigma_y / \sigma_x.\tag{1.74}$$

Подставляя выражения для коэффициентов a и b в (1.65), получим следующую формулу для линейной функции $y(x)$ применительно к случаю несовместных измерений:

$$y_i = \left(x_i - \bar{x} + \bar{y} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right) \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.\tag{1.75}$$

Расчет величин $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x , σ_y выполняется на основе рядовых измерений сопоставляемых величин по формулам (1.62) и (1.63).

Обозначим через Δy и Δx разности $y_i - \bar{y}$ и $x_i - \bar{x}$ соответственно. Тогда, имея в виду (1.75), получим следующее выражение, которое можно использовать для оценки чувствительности метода в случае несовместных измерений:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.\tag{1.76}$$

Следует подчеркнуть, что в случае несовместных измерений оказывается принципиально невозможным нахождение коэффициента корреляции между

величинами y и x . Также имеется неоднозначность в выборе знака для коэффициента a (вследствие $\sigma = \pm\sqrt{D}$). Следовательно, этот метод не позволяет получить информацию о *тесноте* связи y и x и может давать неоднозначные предсказания значений одной величины по другой. Данный способ нахождения коэффициентов регрессии (1.65) можно рекомендовать лишь в том случае, когда априорно (заранее) известно:

- между x и y связь *существует*;
- связь *линейная*;
- можно установить *вид связи* – прямая или обратная пропорциональность ($a > 0$ или $a < 0$ соответственно).

Как правило, для выполнения этих двух условий необходимо и достаточно провести несколько совместных измерений (наблюдений) величин x_i и y_i . Количество измерений выбирают из соображений статистической значимости получаемых результатов. Например, для ответа на вопрос о существовании тесной линейной связи ($r > 0,9$) достаточно выполнить 5-7 измерений, а установление наличия слабой нелинейной связи потребует, как минимум, 30-40 измерений.

Рассмотренный метод очень удобен для градуирования геофизической аппаратуры (особенно нескольких приборов и в разное время), когда между аппаратурным параметром и измеряемой величиной существует линейная связь. В этом случае стандартным способом достаточно выполнить градуировку лишь одного прибора, а градуировку остальных выполнить с использованием формул (1.75) – (1.76).

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

КОМПЛЕКСУ



Екатеринбург
2022

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Для выполнения контрольной работы необходимо проработать рекомендуемую литературу по геологическому строению района проектируемых работ, физическим свойствам горных пород и руд построить физико-геологическую модель объекта исследований.

ВВЕДЕНИЕ

Во введении должна быть дана четкая формулировка задания: местоположение участка работ (административная, географическая и геологическая привязка), цель, задачи для составления физико-геологической модели исследования.

1. ГЕОГРАФО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЙОНА РАБОТ

Указывается административное положение района работ. Приводится краткая характеристика рельефа, климата, растительного и животного мира, населенности и путей сообщения, возможности найма рабочей силы на месте или их найма в другом районе. Приводится обзорная карта района работ. Этот раздел составляется по литературным источникам.

2. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЙОНА

Указывается геолого-структурное положение района работ.

Данный раздел содержит подразделы: “Стратиграфия”, “Магматизм”, “Тектоника”, “Геоморфология и гидрогеология”, “Полезные ископаемые”. В них приводятся краткие сведения по стратиграфии с указанием состава пород и их мощности, сведения об интрузивных образованиях, тектонике. Подробно описываются рудовмещающие комплексы, гидротермальные и метасоматические процессы, отмечаются рудоконтролирующие факторы. Особо отмечаются процессы метаморфизма, которые обуславливают изменение физических свойств горных пород.

В подразделе «Полезные ископаемые» приводится характеристика месторождений и рудопроявлений всех полезных ископаемых, встреченных в данном районе работ, отмечается их приуроченность к определенным комплексам пород, структурно-тектоническим и металлогеническим зонам. Выделяются полезные ископаемые, на которые площадь проектируемых работ является наиболее перспективной, и более подробно описываются месторождения, типичные для этого полезного ископаемого.

Необходимо уделить особое внимание анализу поверхностных рыхлых отложений, поскольку они могут иметь переменную мощность, неоднородны по составу и часто вносят существенные искажения в геофизические поля.

Текст необходимо иллюстрировать обзорной картой. На карте следует указать положение участка работ. Так же в данной главе необходимо привести один геологический разрез, который берется за основу составления Физико-геологической модели исследования.

3. ПЕТРОФИЗИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЙОНА РАБОТ

На основании геологических/геофизических отчетов прошлых лет, основываясь на справочные материалы дается характеристика по физическим свойствам горных пород.

Составляется упрощенная модель петрофизического разреза объекта исследований.

Физические свойства горных пород и полезных ископаемых района лучше описывать по их генетическим группам (осадочные, вулканогенно-осадочные, магматические и т. п.) Обязательно указываются источники, по которым приводятся данные по физическим свойствам, способы определения, представительность. Эти данные обычно приводят в виде таблицы. Если есть возможность, надо построить гистограммы или вариационные кривые и выполнить статистическую обработку. Наиболее наглядное представление о физических свойствах горных пород и полезных ископаемых дает диаграмма, которую надо обязательно построить. Для ее построения строится колонка, в которую включаются все горные породы района, и около нее – графики всех физических свойств.

Наличие различия физических свойств объекта и вмещающей среды еще не гарантирует возможности его обнаружения соответствующим геофизическим методом. Важное значение имеют и его геометрические параметры – форма, глубина от поверхности, элементы залегания, наличие мешающих геологических факторов (мощный слой приповерхностных рыхлых отложений, экраны из пород высокого сопротивления и т. д.). Поэтому для получения представления о возможностях геофизических методов необходимо дать комплексную **геолого-геофизическую характеристику объектов поисков**, включая их геометрические параметры, физические свойства и возможное влияние геологических помех.

4. ФИЗИКО ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной главе должна быть построена **физико-геологическая модель объекта поисков** и для нее выполнено решение прямой задачи. Для оценки глубинности методов в условиях района прямую задачу следует решить для нескольких положений эрозионного среза. Для характеристики возможностей методов хорошо также привести результаты наблюдений над реальными объектами. Желательно также построить физико-геологические модели для объектов, которые будут затруднять интерпретацию результатов (вызывать искажения, похожие на аномалии от объектов поисков или, маскировать их).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом контрольной работы являются выводы о возможностях каждого геофизического метода

ЛИТЕРАТУРА

В данной главе описывается список использованной литературы при выполнении работы.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОЗМОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ

1. Модель месторождений железа
2. Модель месторождений алмазов
3. Модель месторождений золота
4. Модель месторождений серебра

5. Модель месторождений медно-колчеданных руд
6. Модель месторождений каменного угля
7. Модель месторождений мезозойских бокситов
8. Модель месторождений огнеупорных глин
9. Модель месторождений кварцевых песков
10. Модель месторождений россыпного золота
11. Модель месторождений диатомитов
12. Модель месторождений мергелей
13. Модель месторождений глауконитов
14. Модель железорудных месторождений алапаевского типа месторождений
15. Объемные модели сложных геологических обстановок

ОСОБЫЕ УКАЗАНИЯ

По мере написания контрольной работы расставляются ссылки на литературу (в квадратных скобках в конце цитируемого текста [1], что соответствует номеру в списке литературы)

В конце каждой главы должна быть дана самостоятельная оценка приведенной в главе информации.

В работе обязательно излагается цель проекта, задачи (введение), описывается теория, приведена характеристика, рассматриваются примеры, если нужно приводится сравнительная характеристика, излагается самостоятельный анализ материала, сделаны выводы (заключение)

Работа выполняется шрифтом Times New Roman (12 ил 14) отступы с каждой стороны по 2 см, 1 см на “красную строку”.

Рисунки располагаются после упоминания в тексте (рис.1):



Рис.1. Название рисунка

Таблицы располагаются после упоминания в тексте (табл.2)

Таблица 2

Название таблицы

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»



В. М. Сапожников

ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие
по дисциплине «Физико-геологическое моделирование»
для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
специализации «Геофизические методы поиска и разведки
месторождений полезных ископаемых»

УТВЕРЖДАЮ:

Одобрена на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Татлай А. Г.', is written over a horizontal line.

Татлай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 8 от 17.04.2019 г.

(Дата)

Екатеринбург – 2019

Введение

Представленный курс лекций в основном ориентирован на изложение методик выявления и изучения месторождений твердых полезных ископаемых. Именно эти объекты являются главными для специальности 21.05.03 Технология геологической разведки.

1. НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ И ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При проведении геофизических работ приходится оперировать понятиями нормального поля и геофизической аномалии. И хотя способы их определения в различных методах могут существенно различаться, основные принципы в этих способах являются общими. Это связано с тем, что задачей геофизических исследований является выявление и классификация неоднородностей в геологической среде.

Нормальное поле

Это такое физическое поле условно однородной геологической среды, которое существовало бы в случае отсутствия объектов, нарушающих однородность этой среды. Например, за нормальное в гравиразведке принимают поле силы тяжести условно однородного сфероида Земли, поверхность которого совпадает с уровнем океанов. Это поле определяют исходя из координат точки наблюдения по широте и долготе с учетом значения поля на экваторе. Для уточнения в это поле вносят поправку Буге, учитывающую влияние толщины и плотности промежуточного (между точкой наблюдения и уровнем океана) слоя.

В магниторазведке также рассчитаны карты нормального поля Земли, которое на ограниченной площади принимают за постоянное значение. Его определяют в соответствии с географическим положением этой площади на материке или в море. В методе радиоволнового просвечивания (РВП) нормальное электромагнитное поле вычисляют с учетом паспортной для передатчика начальной напряженности, геометрии (взаимного расположения элементов) установки и коэффициента поглощения поля (α_k) условно однородной среды (рис. 2).

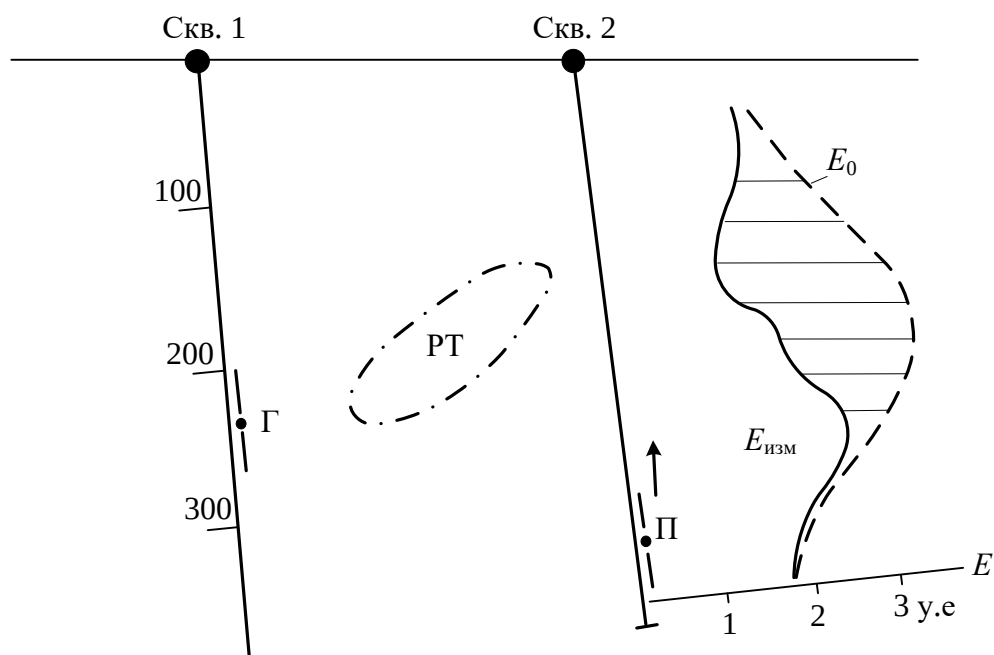


Рис. 2. Пример сопоставления напряженности измеренного ($E_{изм}$) и вычисленного нормального (E_0) поля в методе радиоволнового просвечивания

Г – генераторная антенна; П – приемная антенна; РТ – рудное тело

Похожий подход к определению нормального поля применяют в методе заряда, выражая это поле в виде функции от расстояния точки наблюдения до эпицентра погруженного источника тока. Эту функцию рассчитывают аналитически или определяют стохастическим способом по измеренному полю [13].

В методах, изучающих искусственно возбуждаемые поля, в качестве нормального иногда принимают некоторые обоснованные постоянные значения поля или в виде некоторого диапазона значений с верхним и нижним пределами.

В общем случае нормальным считается поле, обусловленное однородной по конкретному физическому параметру геологической средой. В некоторых случаях условно однородная среда может представлять какую-то структуру, например, горизонтально-слоистое полупространство, измеряемая характеристика поля над которым остается постоянной или изменяется по установленному закону. Принимаемая однородность среды зависит от масштаба исследований. При средне- и крупномасштабных съемках используют понятие о местном нормальном поле, отражающем стохастический подход к его определению.

Стохастический способ определения нормального поля

В методах, изучающих на ограниченной площади естественные физические поля или искусственно возбуждаемые поля при постоянном размере установки (магниторазведка, радиометрия, электропрофилирование и др.), в качестве фона (местного нормального поля) принимают некоторые постоянные значения, характерные для условно однородной геологической среды, которая рассматривается в качестве фонового объекта. Это может быть массив горных пород, горизонтально-слоистая толща или другая структура, характеристики поля для которой по показаниям применяемой установки в идеале должны сохраняться постоянными.

В реальной геологической обстановке в случае наличия такой структуры на результаты геофизических наблюдений влияет масса случайных факторов: мелкая неоднородность физических свойств фонового объекта, изменения геометрии его элементов, рельеф местности и т.п. В этих условиях перспективно использовать стохастический (вероятностно-статистический) подход к определению фона.

Простейшим примером служит статистическое определение коэффициента поглощения в методе РВП, который определяется по нескольким значениям, вычисленным на участках трассы измерений, не имеющих признаков экранирования поля генератора проводниками в межскважинном пространстве. Этот коэффициент для изучаемого разреза принимается как постоянная величина и используется при вычислении нормального поля.

Профильная съемка. В более общем случае, как это показано на рис. 3, *a* на примере профилирования методом вызванной поляризации (ВП) с установкой постоянного размера, исходными являются данные измерений на участке, для которого имеются основания отнести поле на нем к условному фону. Как видно из рис. 3, *a*, значения кажущейся поляризуемости (η_k) на профиле изменяются в определенных пределах. Для объективного отражения изменчивости поля строится дифференциальная кривая распределения анализируемой характеристики с учетом закона, принимаемого для статистически однородной совокупности этой характеристики. В случае η_k распределение хорошо описывается нормальным законом Гаусса. Построение распределения ведется с применением линейной шкалы с разбивкой диапазона измеренных значений на равные интервалы (классы). Ось ординат отражает частоту появления при измерениях значений поля

для каждого из классов (соответствует середине класса) и принимается в штуках или процентах (рис. 3, б). Для характеристики фона желательно иметь не менее 30 измерений.

При ограниченном объеме выборки для построения детальной кривой распределения в статистике применяют прием, предусматривающий использование второй шкалы значений поля. Ширина классов остается прежней, но их границы смещаются относительно первой шкалы на половину класса. Использование дополнительной шкалы позволяет в 2 раза увеличить число точек, по которым строится распределение, не уменьшая ширину класса.

Значение поля A , встречающееся с максимальной частотой (мода), которое при нормальном законе распределения совпадает со средним и медианой, принимают в качестве центрального значения – $\bar{A}_0$ (в рассматриваемом примере изучения поляризуемости $\bar{\eta}_{k0} = 2.5\%$).

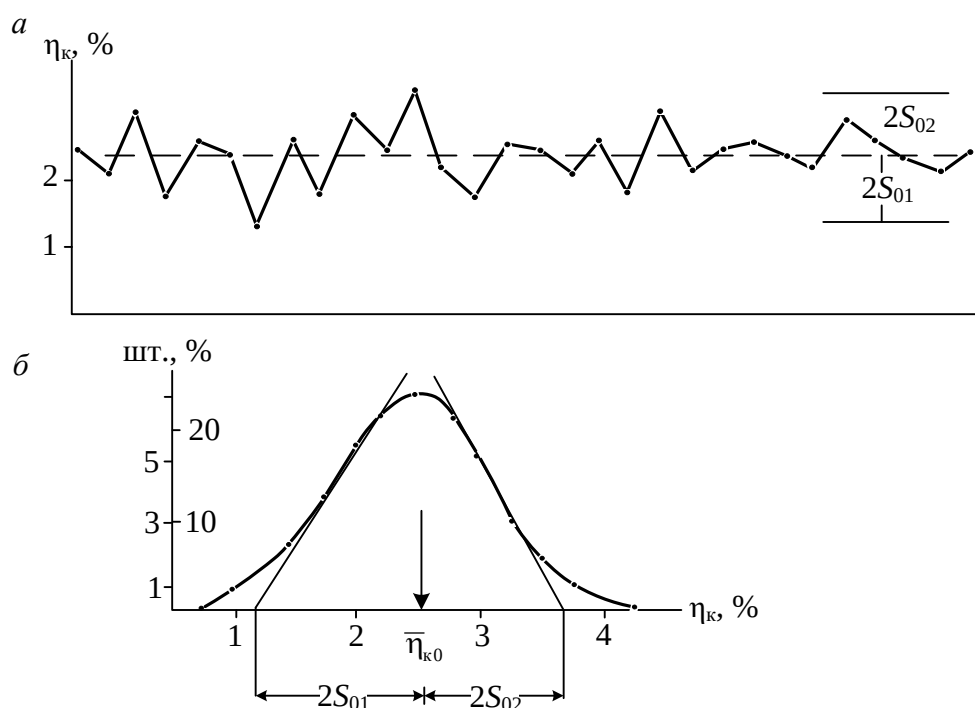


Рис. 3. Графики измеренных значений кажущейся поляризуемости (η_k) методом ВП по профилю в пределах фонового объекта (а) и дифференциальная кривая распределения значений η_k для этого профиля, по которой определяют стохастические характеристики фона (б)

Для характеристики рассеивания значений относительно центрального используют среднеквадратичное отклонение – S_0 . В теории вероятности ему соответствует стандартное отклонение (стандарт). Для его определения к ветвям кривой распределения проводятся две наклонных касательных (рис. 3, б). Согласно теории точки пересечения касательных с осью абсцисс смещены от центрального значения на величины $\pm 2S_0$, а расстояние между точками пересечения равно $4S_0$. В рассматриваемом примере $S_0=0,63\%$.

При упрощенном способе искомые характеристики определяют графически по графикам измеренного поля на фоновом объекте. Осредняющая график прямая соответствует значению $\bar{A}_0$, а величина S_0 определяется по диапазону изменения фона, который приблизительно равен $4S_0$. На рис. 3, а этот диапазон отмечен ограничивающими линиями (в правой части рисунка).

Статистические характеристики нормального поля с распределением по закону Гаусса могут быть вычислены и аналитическим путем. Центральное значение вычисляется как среднее для n рядовых (i) измерений: $\bar{A}_0 = \sum A_{0i}/n$, а величина S_0 определяется по формуле

$$S_0 = \left[\sum_{i=1}^n (A_{0i} - \bar{A}_0)^2 / n \right]^{1/2} \quad (1)$$

По результатам оценки статистических характеристик нормального поля его диапазон с надежностью 95 % принимают равным:

$$A_0 = \bar{A}_0 \pm 2 S_0. \quad (2)$$

Очевидно, что все величины поля, попадающие в этот диапазон, могут рассматриваться как значения фона. По результатам измерений, приводимых на рис. 3, значения в интервале 1.24-3.74 относятся к фоновым характеристикам поля.

При известной величине S_0 к аномальным с надежностью 95 % относятся значения поля, отвечающие условиям: меньше $(\bar{A}_0 - 2S_0)$ или больше $(\bar{A}_0 + 2S_0)$.

Метод заряда. Исходными данными являются значения относительного потенциала, измеренные по некоторой сети, причем для нее известны координаты точек наблюдения, позволяющие определить расстояние от каждой точки до эпицентра заряда. В примере (рис. 4), иллюстрирующем применение способа, результаты съемки поля за-

ряда в рудное пересечение скважины 1 представлены в виде плана изолиний потенциала.

Наиболее распространенной моделью вмещающей среды в этом методе является однородное изотропное или горизонтально-слоистое полупространство. Для реализации способа определения нормального поля на планшете съемки намечаются 6-8 радиальных профилей с началом в эпицентре заряда O . На одном чертеже строят графики измеренного потенциала (U) для этих радиальных профилей как функции расстояния (r) от точки O и проводят осредняющую их кривую $U_{\text{ср}}$. Кривая $U_{\text{ср}}$ и рассматривается в качестве функции нормального потенциала $U_0(r)$. Естественно эту процедуру можно выполнить аналитически по простейшей программе осреднения.

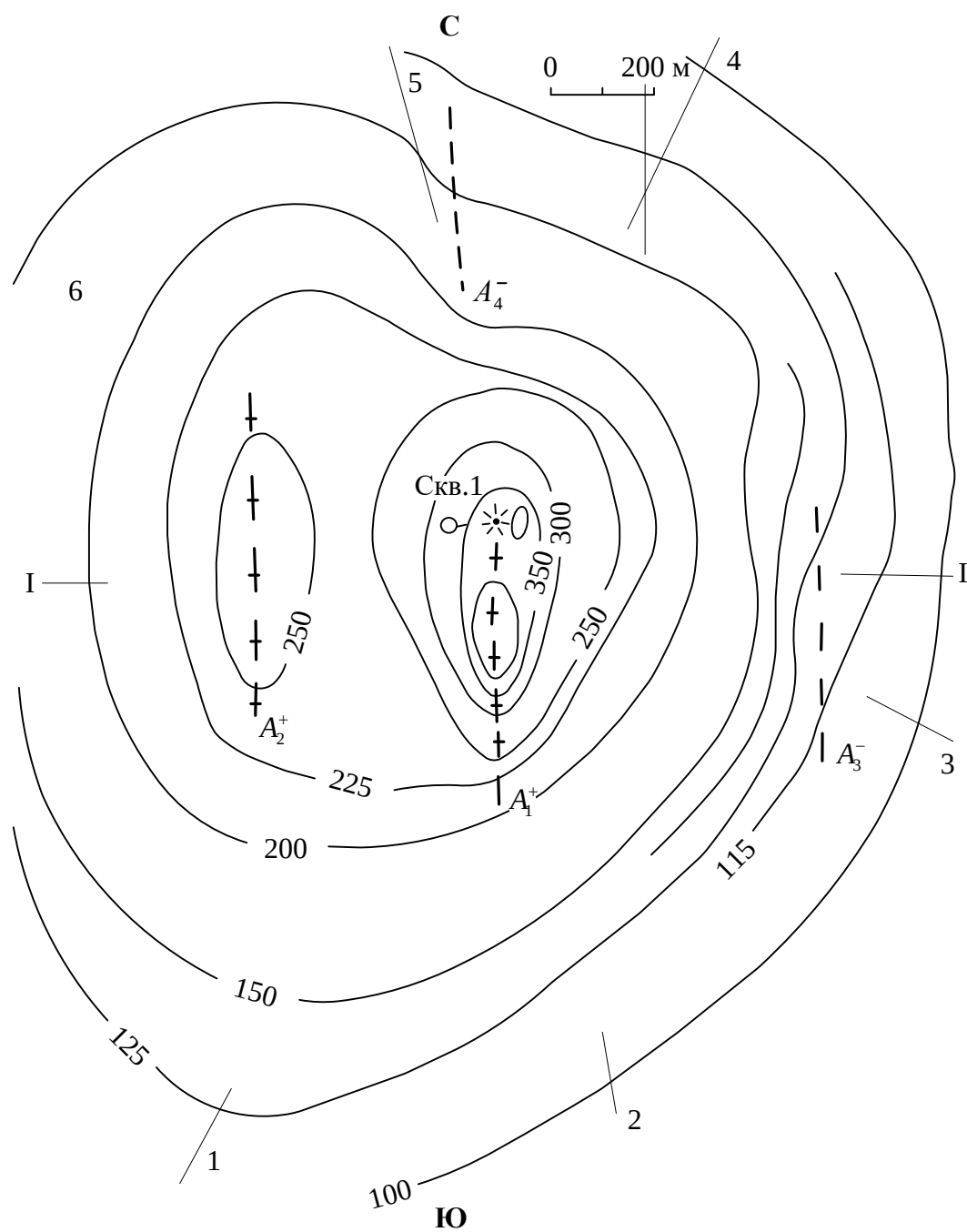


Рис. 4. План изолиний потенциала (в мВ) поля заряда, сделанного в рудное пересечение скв.1:

A^+ , A^- - оси положительных и отрицательных аномалий, 1-6 – радиальные профили, O – эпицентр заряда; I – I – линия геологического разреза

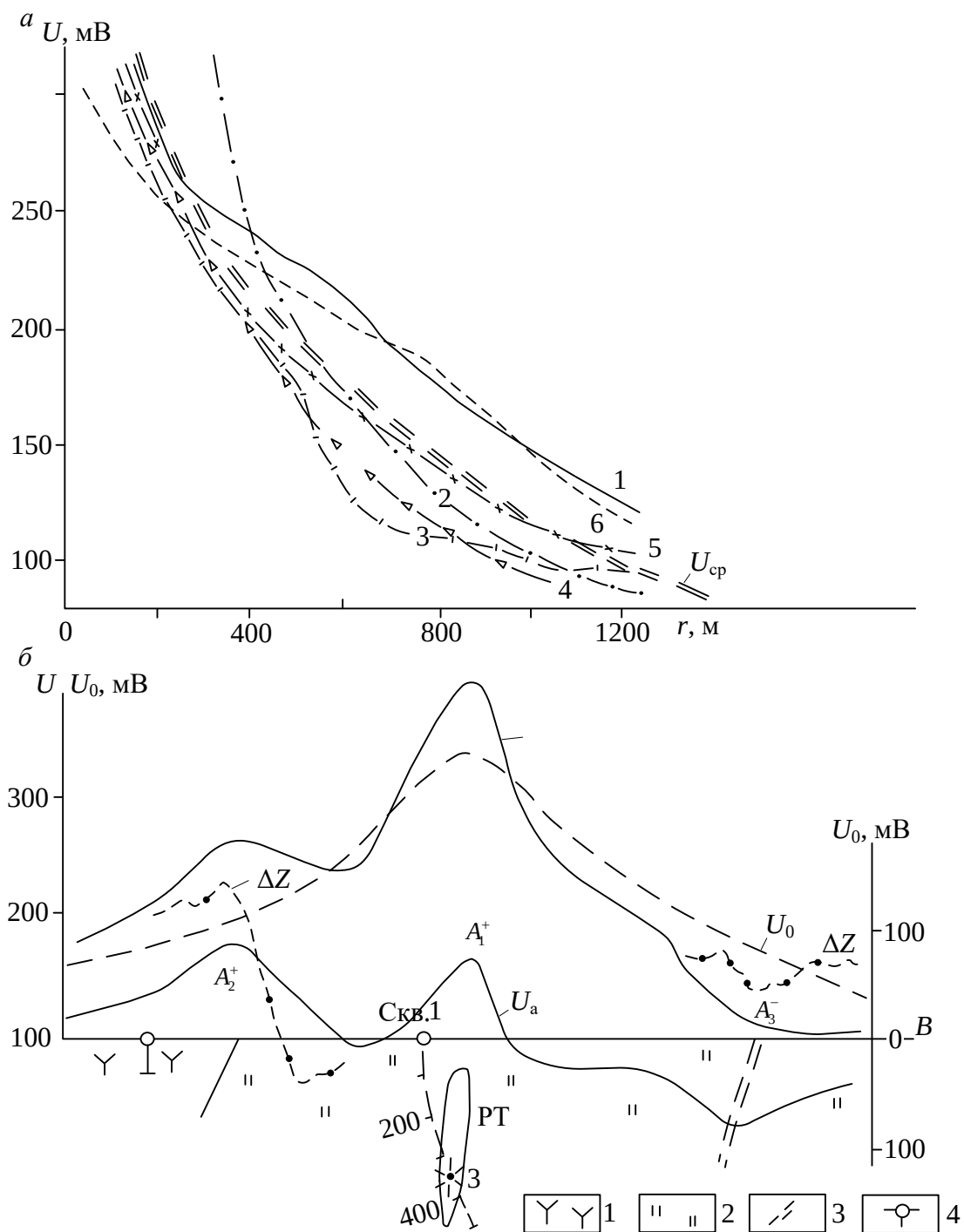


Рис. 5. Результаты обработки и интерпретации поля заряда в скважину 1 (исходные данные на рис. 4):

a – графики потенциала по системе радиальных профилей и осредняющая их кривая ($U_{cp} = U_0(r)$); b – графики измеренного, нормального и аномального потенциала (U , U_0 , U_a), фрагменты измерений магнитного поля (ΔZ) и геологический разрез по профилю I–I.

1 – субвулканические липарито-дациты; 2 – гидротермально измененные породы; 3 – разрывные нарушения; 4 – скважины; 3 – заряд; РТ – рудное тело (проекция на плоскость разреза)

В случае наличия признаков проявления анизотропной вмещающей среды стохастический способ определения нормального потенциала в методе заряда применяют с учетом схемы перехода от анизотропной к изотропной среде [13].

По результатам определения нормального потенциала можно при любой ориентировке профилей съемки вычислить нормальный потенциал по профилю. Пример определения в методе заряда по плану изолиний (рис. 4) нормального потенциала по одному из поперечных профилей показан на рис. 5, а.

Геофизические аномалии

Геофизическая аномалия характеризует отклонение физического поля от его нормальных значений. По геофизическим аномалиям изучают неоднородности геологической среды различного масштаба, что позволяет получить представление о самой структуре земных недр. В общем случае, при анализе результатов геофизических измерений в качестве аномальной составляющей рассматривают величину разности между измеренным значением поля в i -ой точке (A_i) и местным нормальным полем (A_0): $A_{ai} = \Delta A_i = A_i - A_0$. Нормальное поле может быть постоянным или плавно меняющимся, задаваться некоторыми средними величинами или, при учете его дисперсии, в виде предельных значений. В общем случае к аномальным относятся значения, превышающие верхний предел нормального поля или оказывающиеся ниже его нижнего предела. В первом случае наблюдается положительная аномалия, а во втором случае отрицательная аномалия.

Например, на рис. 2 аномальная составляющая изображена заштрихованной областью и отражает появление отрицательной аномалии, связанной с экраным влиянием сульфидного рудного тела.

В качестве примера определения аномальной составляющей изучаемого поля могут служить результаты, полученные при обработке и интерпретации данных метода заряда, приводимые на рис. 4 и 5. Данные о распределении нормального потенциала $U_0(r)$ используются для выделения в рядовой точке аномальной составляющей U_a измеренного потенциала U , равной

$$U_a = U - U_0(r). \quad (3)$$

По результатам определения нормального потенциала можно при любой ориентировке профилей съемки вычислить нормальный, а

затем и аномальный потенциал по профилю. Результаты подобных вычислений нормального потенциала, сопоставления его с измеренным полем и график аномального потенциала по одному из поперечных профилей с элементами геологической интерпретации показан на рис. 5, б.

В рассматриваемом примере аномалия A^+_1 связана с приподнятой относительно заряда частью заряженного рудного тела, имеющего северное склонение. Другая положительная аномалия A^+_2 обусловлена контактом гидротермально измененных пород, вмещающих заряженное тело, с менее электропроводной субинтрузией. Отрицательные аномалии фиксируют субвертикальные плоскости разрывных нарушений относительно повышенной электропроводности.

Безразмерные характеристики геофизических аномалий. В ряде случаев для характеристики аномального объекта целесообразно использовать нормирование аномалий относительно каких-то стандартных величин, при котором учитывается уровень фона, снижается зависимость от точности измерений, типа измеряемой аппаратуры, условий наблюдений, вида изучаемого поля. Появляется возможность сопоставлять аномальные эффекты, зафиксированные от одного и того же объекта различными методами или одним методом, но с применением различных технологий, и в других случаях.

В промысловой геофизике при оценке аномалий широко применяется двойной разностный параметр α . Он представляет отношение

$$\alpha = \Delta A_i / \Delta A_0 = (A_i - A_0) / (A_0 - A_0), \quad (5)$$

где ΔA_i – аномалия на рядовом объекте, ΔA_0 – максимальная аномалия на объекте принятом за эталон (может быть и любым объектом с которым производится сравнение). Например, при проведении измерений поля ПС в скважине на изучаемом пласте-коллекторе потенциал равен 20 мВ, на пласте с самыми высокими фильтрационно-емкостными свойствами потенциал равен 10 мВ, на глинах, рассматриваемых в качестве фона, зафиксированы значения 60 мВ. Следовательно, для изучаемого пласта имеем $\alpha_{\text{ПС}} = -40 / -50 = 0,8$.

Применение безразмерного двойного разностного параметра удобно для установления корреляционной зависимости $\alpha_{\text{ПС}}$ от некоторых промысловых параметров, например, от коэффициента пористости K_p , определенного по данным лабораторных исследований. Подобные зависимости часто имеют достаточно универсальное значение и широко используются на производстве.

При геофизических поисковых и разведочных работах на твердые полезные ископаемые для характеристики аномальности i -го объекта при применении j -го метода используется показатель контрастности γ_{ij} , равный [1]:

$$\gamma_{ij} = \Delta A_i / S_0. \quad (6)$$

В этом параметре учитывается не только аномальность поля относительно уровня фона, но и дисперсия самого фона. Показатель контрастности удобен для сравнения эффективности методов при оценке их конкурентности, а также для вычисления аномальности объекта в случае применения комплекса методов. Для успешного применения метода необходимо условие $\gamma_i > |2|$.

Использование безразмерных величин γ_i позволяет учитывать результаты нескольких методов путем вычисления функции комплексного показателя θ , представляющую алгебраическую сумму показателей контрастности отдельных методов. Знак у показателей контрастности при суммировании устанавливается в соответствии с решаемой задачей, обеспечивая подчеркивание аномальности искомых объектов по комплексу методов. Подробнее этот вопрос рассмотрен ниже в разделах 3 и 5.

2. ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЙ

Геофизические методы применяются для изучения разнообразных геологических и технических объектов. Это могут быть геологические структуры, благоприятные на содержание ценного сырья, месторождения и отдельные тела полезных ископаемых. К типовым объектам также относятся земельные основания для строительства или прокладки автомобильных и железных дорог, скважины или другие горные выработки на разведываемых или эксплуатируемых месторождениях и др. При организации и проведении геофизических работ на любых объектах необходимо четко сформулировать цели исследований по выявлению и изучению в типовых условиях геологических образований. Следует также рассмотреть возможные варианты их параметров, физические предпосылки для успешного решения поставленных задач. Результаты, получаемые в процессе исследований, часто требуют оперативного и обоснованного внесения корректив в их технологию. Ответственным моментом является представление ито-

говых данных исследований в форме понятной и удобной для специалистов, организующих комплексные геологоразведочные или изыскательские работы.

Решение всех этих вопросов осуществляется с помощью сформированной для соответствующей стадии работ физико-геологической модели (ФГМ) объекта геофизических исследований. Существенный вклад в теорию и методику комплексирования геофизических методов, включая принципы формирования ФГМ, внес выпускник Свердловского горного института профессор Гелий Сергеевич Вахромеев [1].

ФГМ отражает упрощенно-обобщенное представление об изучаемом геофизическими методами объекте, предполагающее наличие системы геолого-геофизических сведений, имеющихся на данной стадии работ. ФГМ создают в период проектирования геофизических работ, в процессе их проведения по мере поступления получаемых данных, а также по завершению работ в виде итогового документа.

Обобщенную ФГМ можно представлять в виде совокупности частных моделей: геологической, петрофизической и физических полей в профильном, плоскостном или объемном варианте.

Геологическая модель.

Примеры геологических моделей рудных полей

Геологическая модель отражает представление об объекте исследований как системе геологических тел и проявлений геологических процессов с изображением соответствующих разрезов, карт, блок-схем и т. п.

Представляет интерес рассмотреть обобщенные морфогенетические геологические модели постмагматогенных рудных полей, которые являются предметом изучения при поисках рудных месторождений. Под рудным полем понимают геологический объект, состоящий из генетически родственных сближенных рудных скоплений, гидротермально измененных минерализованных пород и малых магматических образований, представляющих собой фазы отщепления из общего материнского очага и использовавших в своем движении общие каналы. Поэтому при поисках рудных месторождений интерес представляет выявление всех этих структурных элементов рудных полей.

Наиболее отчетливо модели рудных полей продемонстрированы в работах П. Ф. Иванкина на основе детального изучения более 50

глубокозалегающих месторождений руд самого различного состава. Достоинство типизации рудных полей, выполненное П. Ф. Иванкиным, состоит в том, что сформированные им геологические модели отражают в наглядной форме главнейшие их структурные элементы, к выявлению которых могут успешно привлекаться геофизические методы. Об этом свидетельствует опыт успешных поисково-разведочных работ, отраженный в частности в монографии [13]. Большой набор примеров рудных месторождений, изученных в пределах разнотипных рудных полей, часть из которых приведена ниже, рассмотрен в справочнике [9].

Постмагматогенные рудные поля формируются выше или на периферии материнских интрузий, которые являются источником постмагматических растворов, создающих ореолы гидротермальных изменений горных пород и рудные скопления. По характеру взаимоотношений гидротермального оруденения с материнскими интрузиями можно выделить три рода рудных полей.

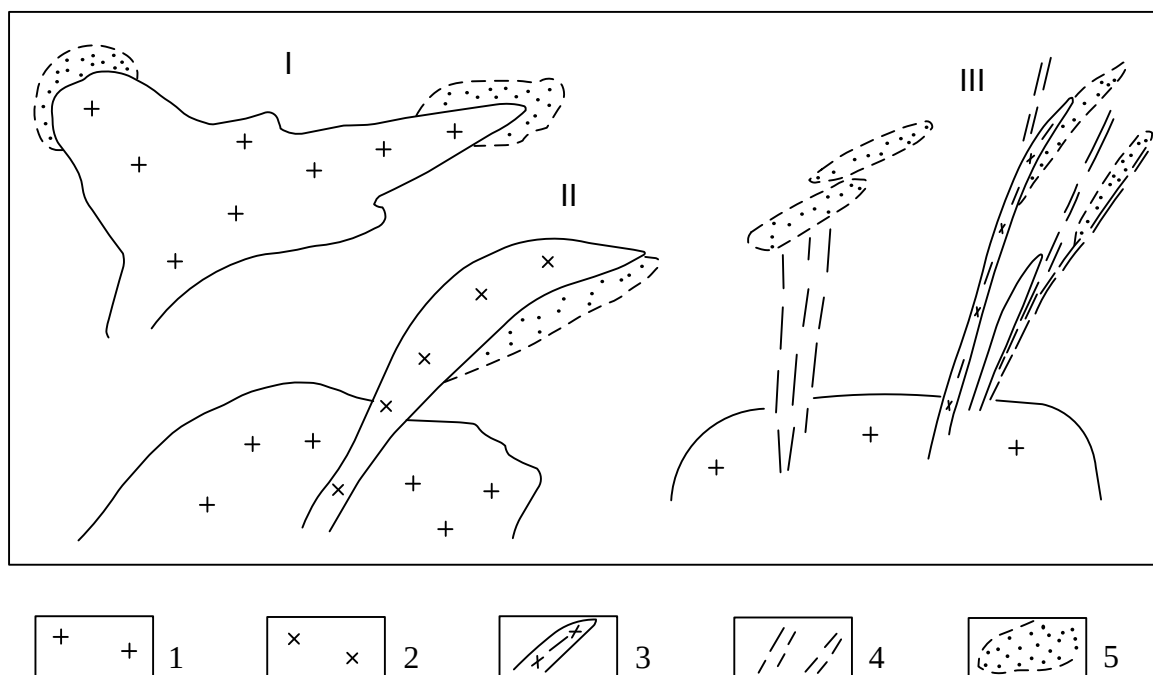


Рис. 6. Морфологические типы (геологические модели) постмагматических рудных полей разного рода (I, II, III) (по П. Ф. Иванкину):

1 – материнский плутон; 2 – тела поздних магматических отщеплений; 3 – лентовидные тела малых интрузий; 4 – разрывные нарушения; 5 – рудоносный комплекс, включающий гидротермально измененные породы и руды

Рудные поля I рода являются ореольными или бескорневыми (рис. 6). Они формируются на ранних стадиях остывания внедривше-

гося магматического тела в условиях широкого фронта отделения растворов по всей или части поверхности материнского интрузива. Растворы обычно обогащены водой, летучими и рудными компонентами. Минерализация вмещающих пород происходит вблизи места отделения растворов от остывающей магмы. В результате образуются широкие ореолы измененных пород с рассеянной или прожилковой минерализацией без богатых локальных скоплений. На поверхности они проявляются в виде полей измененных пород и рассеянной минерализации на достаточно обширных пространствах над погребенными интрузиями или вдоль границ вскрытых эрозией магматических тел. Примеры геологических разрезов месторождений типичных для ореольных рудных полей I рода приведены на рис. 7. Эти разрезы могут рассматриваться как геологические модели этих объектов. Главными структурными элементами их являются интрузии и ореолы рассеянной или прожилковой минерализации.

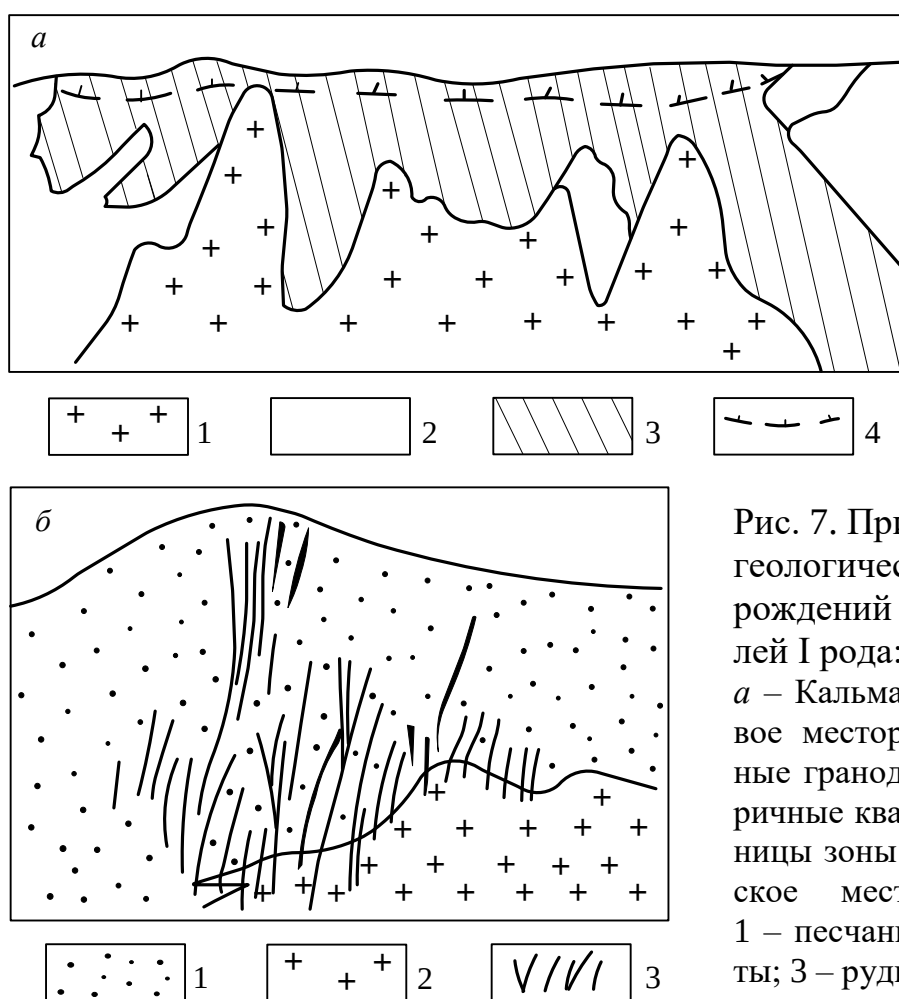


Рис. 7. Примеры схематических геологических разрезов месторождений ореольных рудных полей I рода:

а – Кальмакырское медно-порфировое месторождение: 1 – интрузивные гранодиорит-порфиры; 2 – вторичные кварциты; 3 – руды; 4 – границы зоны окисления; *б* – Иультинское месторождение вольфрама: 1 – песчаники и сланцы; 2 – граниты; 3 – рудные жилы

Рудные поля II рода – это системы рудных тел, окружающих их зон гидротермально измененных пород и поздних магматических от-

щеплений, имеющих общие корни (или рудно- и магмоподводящие каналы), уходящие внутрь крупного интрузива, производными которого все они являются (рис. 6.) Считается, что растворы поступали из верхних частей интрузива и проникали в их кровлю в виде потоков, двигавшихся по нарушениям, контактам или другим проницаемым каналам, что обусловило структурный контроль оруденения. Фигура рудного поля и свойства преобразованных в его пределах пород отражают направленность рудоносных растворов от корней к фронту поля. Рудные поля II рода характерны для гипабиссальных интрузий, часто приурочены к вулканическим постройкам, сформировавшимся над ними, имеют пологие и крутопадающие ветви. Примеры месторождений, типичных для корневых рудных полей II рода, приведены на рис. 8.

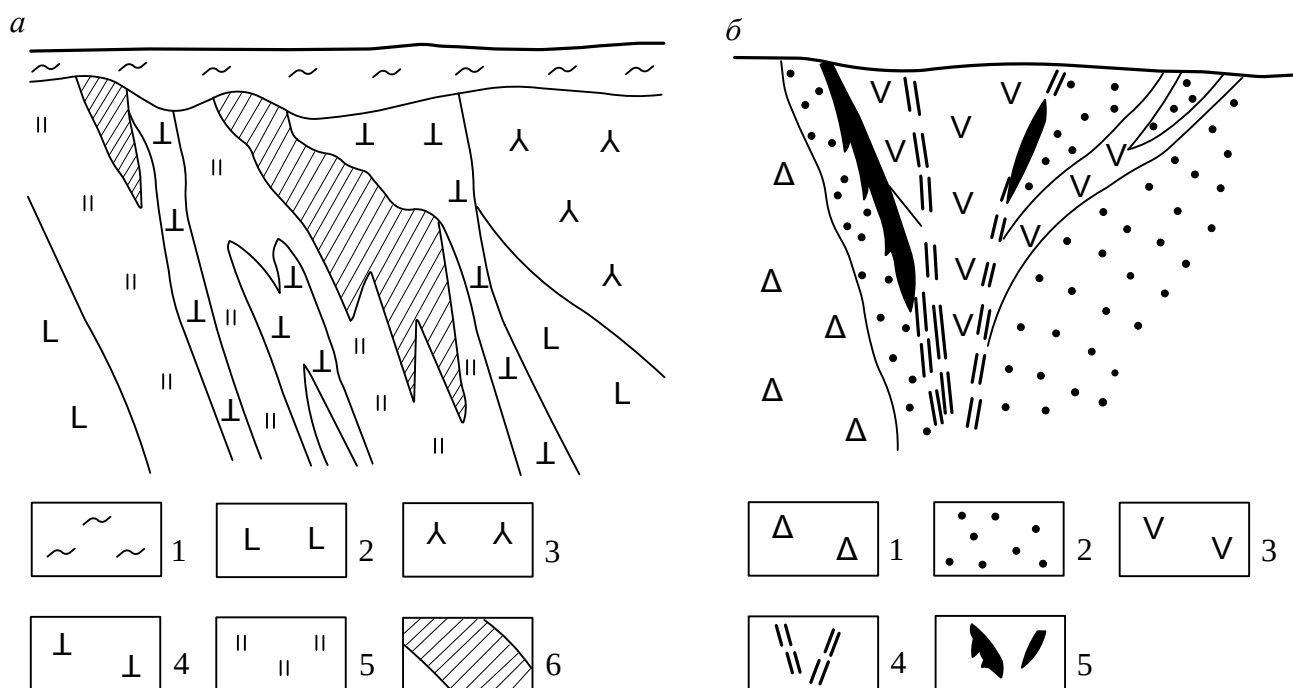


Рис. 8. Схематические геологические разрезы месторождений рудных полей II рода:

а – южная часть Гайского медноколчеданного месторождения: 1 – рыхлые отложения; 2 – туфы; 3 – диабазовые порфириты; 4 – субвулканические липарит-дациты (малая интрузия); 5 – метасоматиты; 6 – руды; б – молибден-урановое месторождение: 1 – диабазы и спилиты докембрия; 2 – переслаивающиеся осадочные и вулканогенно-осадочные породы; 3 – субвулканические андезиты (малая интрузия); 4 – разрывные нарушения; 5 – рудные тела

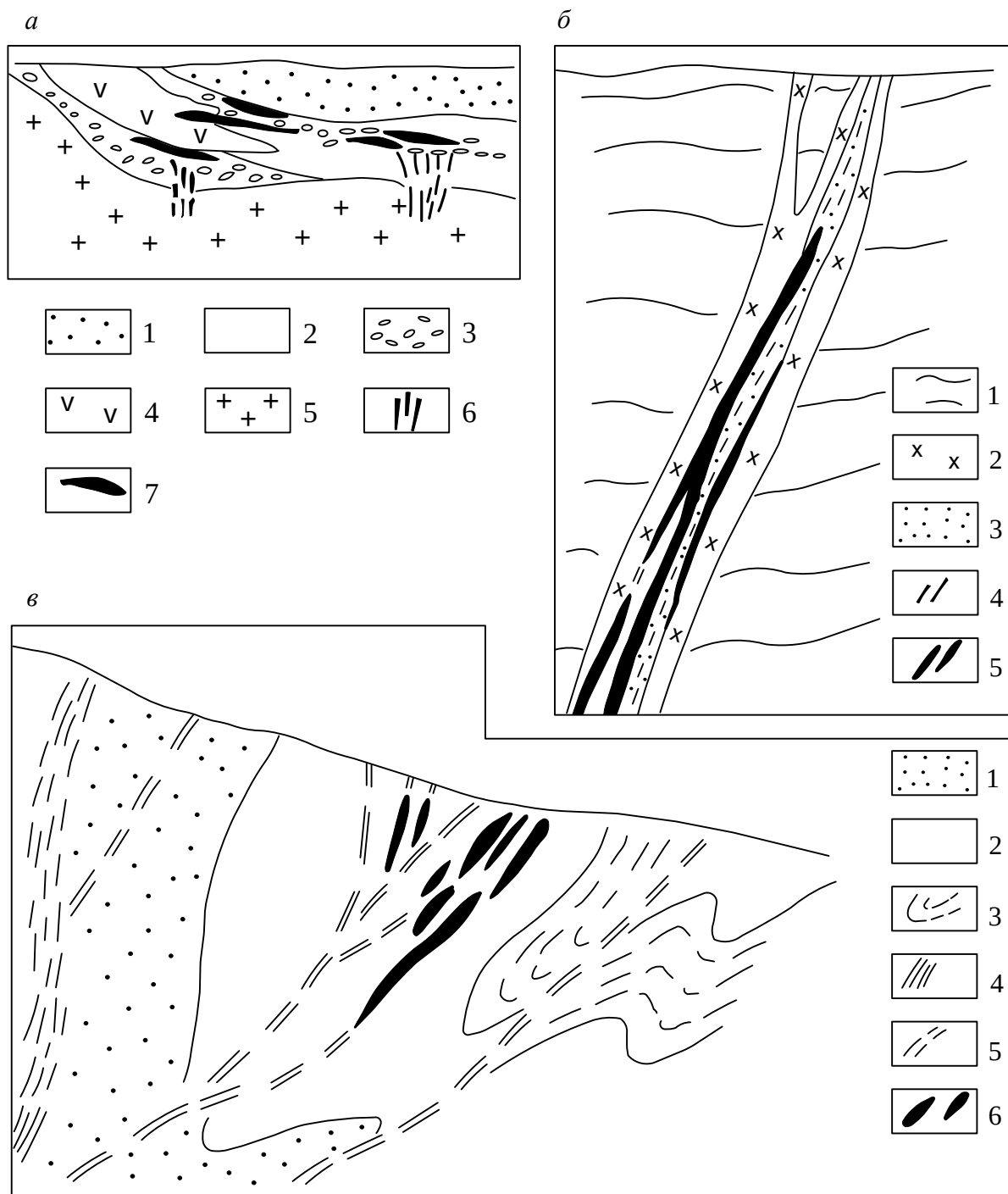


Рис. 9. Примеры геологических разрезов месторождений корневых рудных полей III рода:

а – мышьяково-урановое месторождение: 1 – алевролиты с прослоями песчаников; 2 – песчаники; 3 – конгломераты и гравелиты; 4 – туфолавы; 5 – граниты; 6 – разрывные нарушения; 7 – рудные тела; *б* – уран-титановое месторождение: 1 – кристаллические сланцы и гнейсы; 2 – пегматитовые жилы; 3 – гидротермально измененные породы; 4 – бластомилониты тектонических швов; 5 – рудные тела; *в* – Сахалинское месторождение киновари: 1 – песчаники, конгломераты, алевролиты; 2 – глинистые алевролиты; 3 – пачки глин; 4 – главный разлом; 5 – оперяющиеся трещины; 6 – рудные тела

К рудным полям III рода относят систему рудных тел, окружающих их измененных пород и иногда сопровождающих их серии малых интрузий, значительно оторванных от глубинных интрузий (рис. 6). Образовавшие их потоки гидротерм приурочены к самостоятельным тектоническим зонам, уходящих на глубину, или к ветвям крупных разломов. Последние являлись открытыми системами и, хотя могут нести следы гидротермальных изменений и минерализации, но промышленных скоплений руды не содержат. В ответвлениях, выклинивающихся к дневной поверхности, или в локальных проницаемых геологических телах, игравшими роль экранированных для растворов резервуаров, с которыми контактировали тектонические нарушения, образуются рудные скопления. Поэтому рудные залежи в рудных полях этого рода залегают согласно со слоистыми толщами или разрывными нарушениями в породах с повышенной пустотностью. Примеры месторождений, характерных для рудных полей III рода, приведены на рис. 9.

Таким образом, как следует из геологических моделей, при поисках рудных месторождений главными объектами выявления геофизическими методами являются рудные залежи, включающие их ореолы окolorудных изменений, рудоконтролирующие тектонические нарушения, крупные и малые интрузии. Все эти объекты имеют аномальные петрофизические свойства и благоприятные предпосылки для обнаружения при геофизических съемках.

Модели петрофизические и физических полей

Петрофизическая модель отражает сведения о распределении в геологическом пространстве физических свойств, характеризующих геологические тела, как объекты, имеющие предпосылки для выявления и изучения их геофизическими методами. При этом возможны случаи объединения нескольких геологических образований в структурно-вещественные комплексы (СВК) с одинаковыми или близкими физическими свойствами. В этом случае происходит упрощение петрофизической модели по сравнению с геологической моделью. Однако не исключены случаи, когда внутри условно единого геологического тела существуют участки изменений свойств за счет проявления процессов локального преобразования горных пород, которые отличаются по физическим свойствам и могут фиксироваться геофизическими методами. Такая картина наблюдается при локальном ме-

таморфизме, околорудных изменениях, развитии трещиноватости и др. процессах. В этих случаях петрофизическая модель может отражать результаты действия этих процессов и выглядеть сложнее, чем геологическая модель.

Петрофизическая модель может быть представлена в виде таблиц, типовых физико-геологических колонок, сводных геолого-геофизических разрезов, петрофизических карт или разрезов: самостоятельных или совмещенных с геологическими картографическими материалами. Желательно дополнять традиционно принятые в геологии мелкомасштабные литолого-стратиграфические разрезы (колонки) данными о физических свойствах, представленных на них толщ.

Исходные данные о физических свойствах горных пород для формирования петрофизической модели получают в результате лабораторных измерений на образцах, по данным интерпретации результатов каротажа или параметрических наблюдений физических полей на отдельных участках, а также путем использования справочной литературы. Помимо данных по изучаемой территории обязательно приводятся необходимые сведения об объектах-аналогах, что позволяет учесть опыт предшественников. Примером петрофизической модели месторождения может служить упрощенная типовая физико-геологическая колонка, изображенная на рис.11.

Физические поля или результаты их трансформации отражают данные, получаемые при решении прямой задачи на основе геологической и петрофизической моделей, или же отражают данные реальных наблюдений. Они необходимы для обоснования возможностей геофизических методов. На стадии проектирования это могут быть геофизические поля на объектах-аналогах, ранее изученных в схожих геологических условиях. Физические поля также приводятся как исходный материал, использованный при геологической интерпретации уже выполненных измерений, когда с помощью ФГМ представляются итоговые документы геофизических работ.

Пример физико-геологической модели

В качестве примера на рис. 10, 11 приводится ФГМ уранового месторождения, приуроченного к разрывным дислокациям в метаморфизованных породах протерозоя. По классификации П. Ф. Иванкина оно относится к корневым рудным полям III рода, оторванных от материнского глубинного плутона и приуроченных к тектониче-

ским зонам. На геологической модели (рис. 10, а) видно, что разрывные нарушения тяготеют к крыльям антиклинальной структуры, представленной вулканогенно-карбонатными отложениями. Оруденение локализуется в зонах проявления разрывной тектоники преимущественно в сланцевых толщах на участках с повышенной пористостью, появившихся вследствие разуплотнения пород. Рудоносные растворы помимо урана привнесли в зону их разгрузки вещества, сформировавшие ореолы гематитизации и сульфидизации. Эпигнетические изменения вмещающих пород сопровождались образованием в верхней части разреза зоны окисления.

Петрофизическая модель месторождения (рис. 11) отражает развитие аномальных проявлений в физических свойствах, как в контуре рудных тел, так и в околорудно-измененных породах. В рудах помимо высокой радиоактивности (J_γ) отмечается увеличение плотности (σ), магнитной восприимчивости (χ), поляризуемости (η_k) и понижение сопротивления (ρ_k). Вмещающие породы достаточно дифференцированы по физическим свойствам, что позволяет ожидать появление аномалий от складчатых структур. Анализируя петрофизическую модель, можно полагать, что зоны околорудно-измененных пород, характеризующиеся разуплотнением, повышением магнитной восприимчивости, электропроводности и поляризуемости, должны проявиться в магнитном поле, а также по данным методов электротометрии. Следует ожидать наложение на структурную составляющую полей проявлений, связанных с телами рудных тел и сопровождающих их ореолов минерализации.

Действительно, на графиках полей, измеренных комплексом методов по профилю, проходящему через рудоносную структуру (рис. 10, б), отражаются главнейшие ее элементы. Так отрицательной локальной аномалией силы тяжести отмечается ядро антиклинали (выход к поверхности карбонатов среди магматических пород). Расширение этой аномалии связано с проявлением зон разуплотнения и трещиноватости, обусловленных существованием здесь разрывных нарушений, как одного из признаков благоприятных условий для проникновения рудоносных растворов.

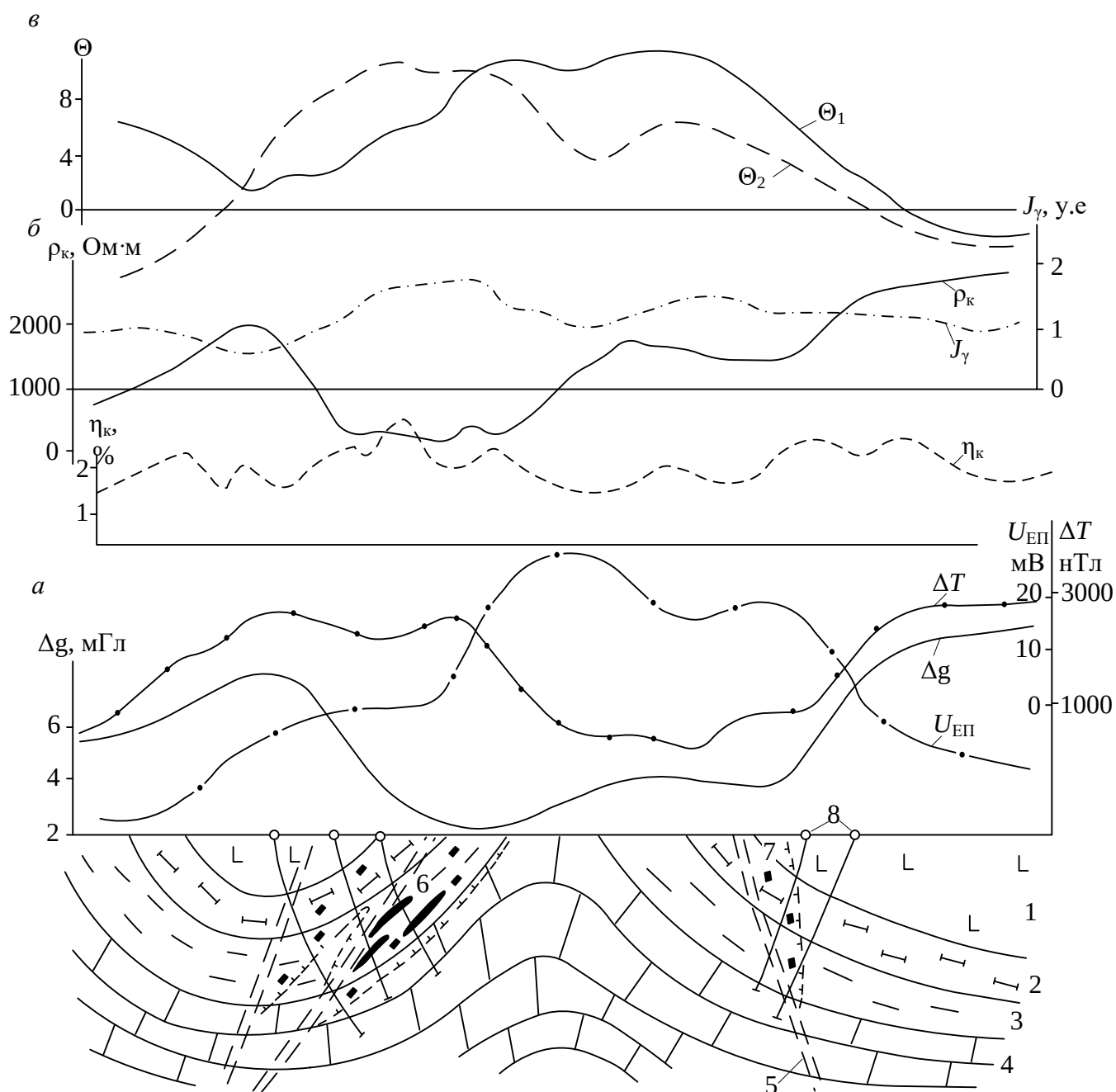


Рис. 10. ФГМ месторождения урана (по В. Е. Голомолзину, В. А. Титовой, А. В. Денисову):

а – геологический разрез (геологическая модель) месторождения: 1 – габбро-диабазы; 2 – пестроцветные слюдистые сланцы; 3 – слюдисто-карбонатные шунгитсодержащие сланцы; 4 – доломиты; 5 – тектонические нарушения; 6 – урановые руды; 7 – зоны гидротермально метасоматических изменений и минерализации; 8 – скважины; *б* – графики геофизических полей; *в* – функции комплексного показателя аномалий гравитационного и магнитного полей (θ_1), полей электрометрии и радиометрии (θ_2)

Отрицательная локальная аномалия магнитного поля, связанная с ядром антиклинали, явно уже гравитационной аномалии, то есть заметно повышение магнитного поля в районе ослабления поля силы

тяжести (над выходом к дневной поверхности рудоносных пород). Такое несоответствие двух полей является признаком отражения развития вторичных процессов, связанных с проявлением рассеянного ожелезнения, что характерно для фронтальной части ореола поступавших из недр рудоносных растворов. Это весьма благоприятный поисковый признак.

Для месторождения характерны участки профиля, на которых отмечается заметное уменьшение удельного сопротивления, хотя и слабое, но заметно повышение поляризуемости среды по данным срединного градиента с размером установки 1000 м. Так как над этим участком также наблюдается заметное повышение гамма-поля, то эти важные признаки следует также рассматривать как благоприятные для обнаружения оруденения.

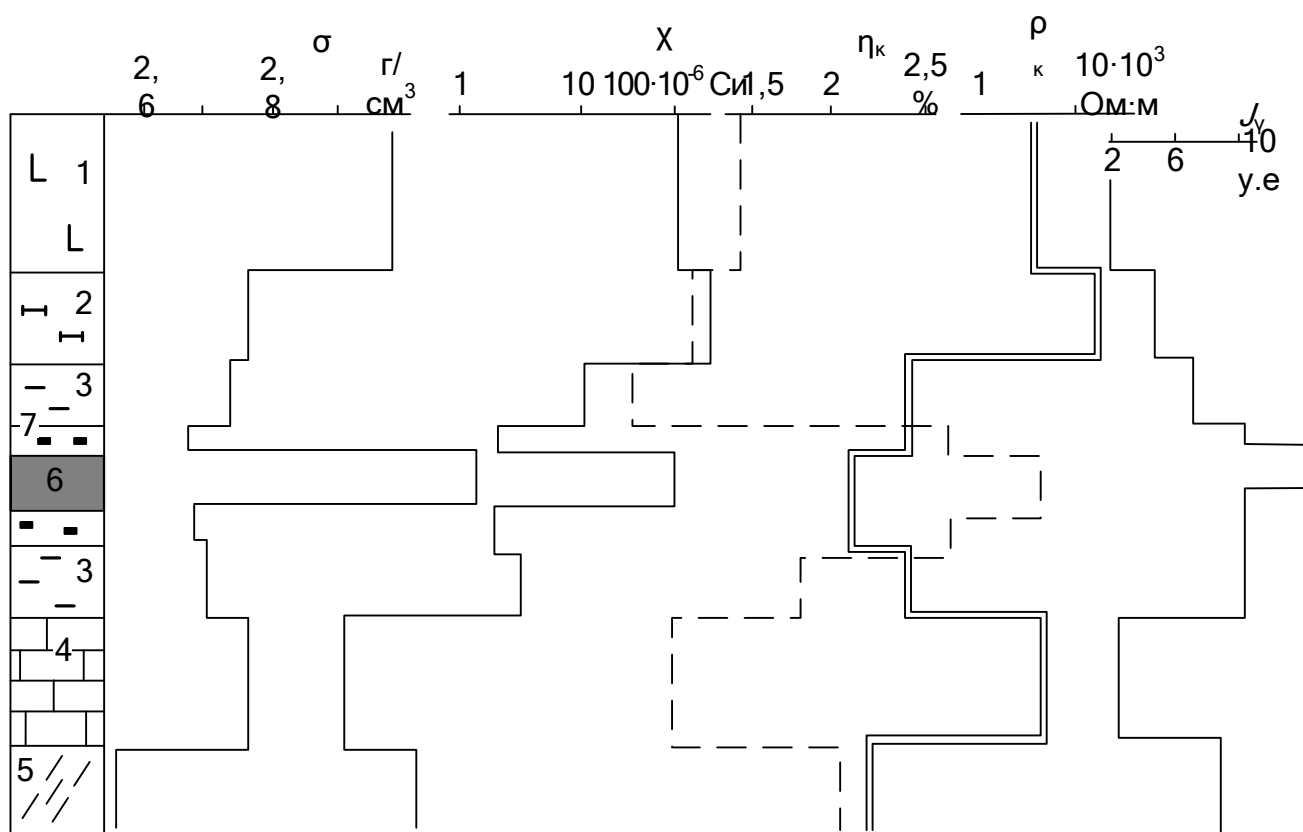


Рис. 11. Типовая физико-геологическая колонка (петрофизическая модель) месторождения урана (см. рис.10):
 графики плотности (σ), магнитной восприимчивости (χ), кажущихся поляризуемости (η_k) и удельного сопротивления (ρ_k), радиоактивности (J_γ) горных пород разреза (1-7 см. подрисуночные надписи к рис.10, а)

Весьма отчетливо влияние рудоносных пород проявляется в виде четкой положительной аномалии естественного электрического

поля. И хотя аномалия несколько смещена по восстанию относительно самого оруденения и наблюдается еще над участком с рассеянной минерализацией, однако, при наличии других признаков район, наиболее перспективный на оруденение, по аномалии естественного поля фиксируется достаточно надежно.

Представление о возможности совместного учета результатов нескольких методов показано на примере двух вариантов функции комплексного показателя (рис. 10, в). При вычислениях в качестве нормального поля использовались значения, типичные для участков профиля, проходящих над магматическими породами. Вычислительные формулы для Θ составлялись с таким расчетом, чтобы подчеркнуть положительными аномалиями присутствие объектов, представляющих первоочередной интерес.

Функция Θ_1 вычислялась по формуле $\Theta_1 = -\gamma_{ГР} - \gamma_{м}$ и отражает совместное проявление аномальности полей гравиметрии и магнитометрии. При структурных исследованиях интерес представляют выходы к дневной поверхности потенциально рудоносной толщи сланцев, и соответствующие им отрицательные аномалии этих полей являются положительными факторами контроля этих искомых объектов. Это обстоятельство учтено в формуле Θ_1 . График функции Θ_1 имеет картировочное значение и положительная аномалия Θ_{A1} хорошо соответствует выходам сланцев совместно с толщиной карбонатных пород среди тел магматитов.

Функция Θ_2 отражает аномальность методов электроразведки (КС, ВП и ЕП) и радиометрии, связанных с самим месторождением урана и близрасположенного рудопроявления, и вычислялась по формуле $\Theta_2 = \gamma_{ВП} + \gamma_{ЕП} - \gamma_{КС} + \gamma_{р}$. Результирующая аномалия этих методов подтверждает возможность применения данного комплекса методов для поисков урановых руд в геологических условиях близких тем, которые отражены на представленной ФГМ.

Таким образом, сформированная по данным геологии, измерений физических свойств в скважинах и полей на дневной поверхности ФГМ, позволяет расшифровать природу геофизических аномалий наземных методов, выявить те признаки, по совокупности которых можно обнаруживать урановые месторождения в районе с подобными геологическими условиями. Появляется возможность обосновать комплекс геофизических методов, при применении которого можно рассчитывать на успешные результаты поисков.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ПЕТРОФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ РУДНОГО КАРОТАЖА

В настоящее время сведения о физических свойствах при проектировании, поисках и разведке месторождений полезных ископаемых в основном получают по данным геофизических методов исследования скважин (ГИС). Одним из вариантов представления петрофизической модели объекта исследований является типовая геолого-геофизическая колонка разреза изучаемой геологической среды. В промысловой геофизике она получила название сводный геолого-геофизический разрез. Поскольку физические свойства осадочной толщи, изучаемой методами промысловой геофизики, достаточно стабильны по латерали, для формирования модели разреза используют диаграммы 2-3 скважин, имеющих пересечения всех структурных элементов разреза.

В рудных районах, характеризующихся высокой изменчивостью разнообразных признаков геологических образований, представление об их физических свойствах можно получить с помощью стохастической модели разреза.

Основными элементами структуры рудного поля являются геологические тела и зоны развития геологических процессов, мощности которых измеряются десятками метров. Отдельный элемент, исходя из опыта ГИС, представляет образование с включениями и его можно с некоторым приближением рассматривать как двухкомпонентную среду. Размеры включений обычно составляют первые метры. Роль включений играют мелкие чередующиеся пропластки пород иного состава по сравнению с вмещающей их средой. К включениям относят также локальные участки проявления выборочного эпигенетического преобразования в геологическом теле, останцы материнской породы, подвергшейся метаморфическим изменениям, и др.

Кодирование диаграмм ГИС

Рассматривая пересечение геологического тела в скважине как двухкомпонентную смесь, предложено выполнять кодирование диаграмм каротажа, позволяющее представить информацию о пересечении в виде характеристик изучаемого свойства (поля) A и долей содержания для каждого из компонентов [8]. Естественно полагать, что для одного из компонентов макросмеси присущи высокие значения

свойства A_B , а для другого – низкие значения этого свойства A_H . Коэффициенты, отражающие содержание каждого из компонентов, соответственно равны K_B и K_H .

Для реализации простейшего способа определения характеристик такой макросмеси необходимо провести в пределах пересечения три линии, осредняющие значения измеряемого свойства для каждого из компонентов (средние значения A_B и A_H) и диаграммы в целом (значение A_{cp}) (рис. 12). Первые два значения определяют свойства компонентов, а коэффициенты содержания каждого из компонентов находят по формулам:

$$K_B = (A_{cp} - A_H)/(A_B - A_H), K_H = (A_B - A_{cp})/(A_B - A_H) = 1 - K_B. \quad (4)$$

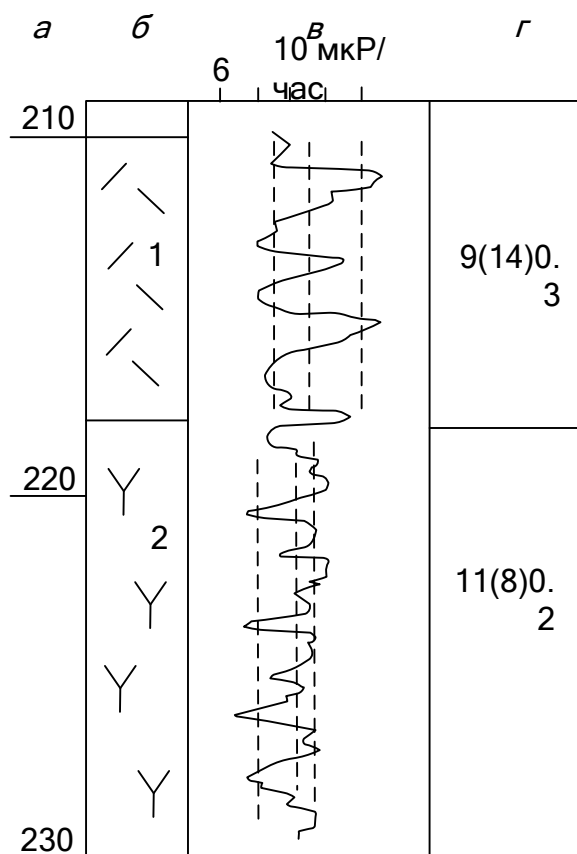


Рис. 12. Пример кодирования диаграммы ГК для двух интервалов участка скважины:
а – глубины; *б* – геологическая колонка; *в* – диаграмма; *г* – результаты кодирования; 1 – туфы; 2 – липариты

Очевидно, что, если мощность рассматриваемого пересечения составляет H метров, то доли компонентов в метрах равны: $H_B = HK_B$ и $H_H = HK_H$.

Информацию об измеренном физическом признаке для каждого пересечения геологического образования можно представить в виде кода следующего вида: $A_{ок}(A_{вкл})K_{вкл}$. Первое значение соответствует средней величине физического свойства основного компонента, доля

которого в макросмеси выше. Значение в скобках отражает среднее значение физического свойства компонента, рассматриваемого как включение, а последнее значение соответствует его доле в макросмеси. Следует заметить, что основной компонент также как и включения могут характеризоваться относительно высокими или низкими значениями свойства. Например, при кодировании данных измерений методом ГК естественной радиоактивности в мкР/час (рис. 12) для интервала 210-218 м (туфы) с помощью набора значений 9(14)0,3 фиксируется наличие среди основной части пласта мощностью 8 м включений (пропластков с повышенным содержанием кислой фации), на долю которых приходится 2,4 м. Основная масса туфов имеет радиоактивность 9 мкР/час, а более радиоактивные пропластки характеризуются значениями около 14 мкР/ч. Для липаритов, залегающих ниже туфов, пересечение которых зафиксировано в интервале 218-230 м, характерны средние значения для основного компонента 11 мкР/час, а для включений 8 мкР/час. Доля включений составляет 0,2, и поэтому результаты кодирования для этого интервала выражаются набором значений 11(8)0,2.

Имеется программа автоматического кодирования диаграмм методов ГИС, созданная В. А. Серковым при участии автора.

Результаты кодирования позволяют представить данные измерения физического свойства (поля) по скважине в компактной форме, удобной для хранения, трансляции, применения разнообразных способов обработки, построения петрофизических разрезов без потери информации о неоднородной структуре геологических образований, отражающей проявление определенных процессов. Например, имея данные кодирования диаграммы электрометрии с измерениями удельного сопротивления ρ в Ом·м, можно вычислить коэффициент электрической анизотропии λ . Для среды с двухосной анизотропией, характеризующейся удельным сопротивлением вкrest слоистости – ρ_n , по слоистости – ρ_t , справедливы следующие формулы:

$$\rho_n = K_v \rho_v + K_h \rho_h, \quad \rho_t = \rho_v \rho_h / (K_h \rho_v + K_v \rho_h), \quad \lambda = (\rho_n / \rho_t)^{1/2} \quad (5)$$

Статистическая обработка результатов кодирования

Данные кодирования диаграмм методов ГИС, зарегистрированных по нескольким скважинам изучаемого участка на стадии поисков или разведки, позволяют сформировать петрофизические модели каждого элемента структуры этого участка. Задача практически сво-

дится к получению представления о типичных горных породах и рудах участка, как объектах исследования геофизическими методами. При этом следует отразить те изменения в свойствах этих пород, которые вызывают процессы тектоники, метаморфизма и минерализации.

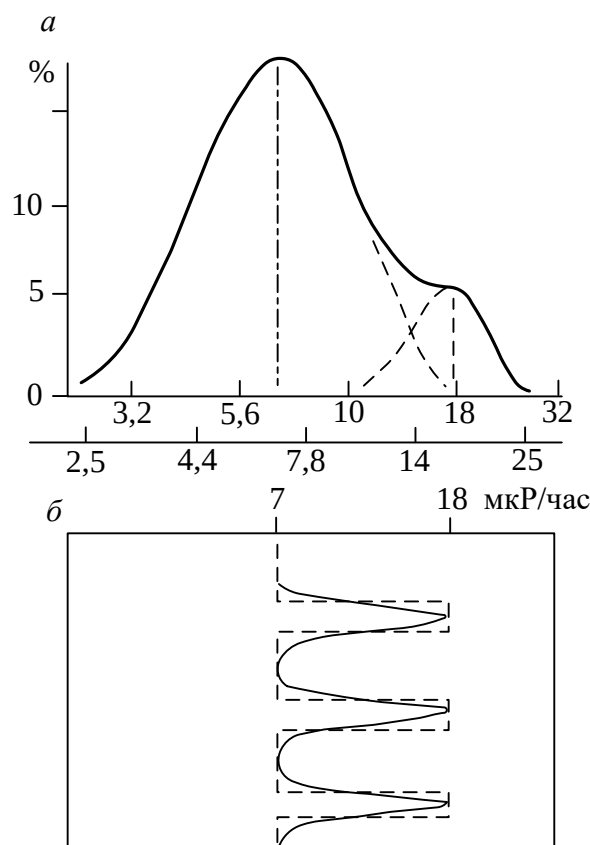
Петрофизические модели, присущих изучаемому разрезу литотипов горных пород, формируются на основе статистических исследований по выборкам для каждого из них путем построения кривых распределения изучаемых физических характеристик. В выборку для конкретного литотипа включаются все его пересечения, которые на геологических колонках классифицированы приблизительно одинаково. Статистика проводится для каждого изучаемого геофизического свойства отдельно, подобно тому, как это делается при оценке уровня нормального поля стохастическим способом (см. раздел 2). Поскольку распределение для большинства физических свойств статистически однородных совокупностей горных пород подчиняется логнормальному закону, рассмотрим этот случай детально.

Для построения дифференциальной кривой распределения признака (физического поля или свойства) A необходимо выполнить группирование данных о нем по классам (интервалам равной ширины на оси абсцисс), применяя логарифмическую шкалу. Для достаточно представительных (репрезентативных) выборок удобно разбивать один порядок на 4 класса. Например, границы классов могут соответствовать значениям: 1-1,8-3,2-5,6-10-18-32 и т. д. В случае применения второй смещенной шкалы границы классов: 1,4-2,5-4,4-7,8-14-25 ит. д. При таком подходе отпадает необходимость применять бланки с логарифмической шкалой.

В таблицу группирования заносятся значения мощности в метрах. Для двухкомпонентных макросмесей в таблицу заносятся мощности компонентов H_H и H_B в классы в соответствии с характерными для компонентов значениями A_H и A_B . В большинстве случаев они разносятся по разным классам, но при близких значениях измеряемого признака мощности компонентов могут попасть в один класс. Дифференциальная кривая распределения (функция частоты) строится по данным о суммарной мощности (ординаты) каждого класса (на оси абсцисс это середины классов). Пример дифференциальной функции распределения приведен на рис. 13, а.

Рис. 13. Пример построения статистической диаграммы для туфов смешанного состава:

а – дифференциальная кривая распределения естественной радиоактивности (выборка по 5 скважинам); *б* – статистическая диаграмма ГК (поле в логарифмическом масштабе)



В большинстве случаев кривые распределения отражают статистическую неоднородность изучаемых образований, которая проявляется в двухгорбности кривых, или они имеют другие особенности, также позволяющие сделать вывод о двухкомпонентной структуре этих образований. Пользуясь известными приемами статистики сложную кривую распределения можно представить в виде двух элементарных кривых, соответствующих логнормальному закону. По ним легко определить центральные значения признака для каждого компонента, а также долю каждого компонента в выборке (по соотношению площадей элементарных кривых). Эти данные и используют для статистической характеристики изучаемых объектов по геофизическим признакам путем построения прямоугольных диаграмм, которые затем могут быть скорректированы с учетом специфики вида аномалий измеряемого в скважинах поля. Так для метода ГК аномальными являются пропластки (включения) с максимумом аномалии в середине пропластков и полумаксимумом на их границах.

Рис. 13, *б* иллюстрирует принцип построения статистической диаграммы для объекта по данным, получаемым при использовании распределения естественной радиоактивности туфов смешанного состава (измерения по 5 скважинам на периферии медноколчеданного

месторождения). О соотношении долей основного компонента и включений можно судить по ширине площадок значений радиоактивности основного компонента и включений. В рассматриваемом примере это соотношение 1:3 и, следовательно, на статистической диаграмме $K_{\text{вкл}} = 0,25$.

Построение типовой физико-геологической колонки

Построение начинается с формирования типовой геологической колонки, которая отражает в разрезе весь комплекс геологических тел, участвующих в создании структуры изучаемого участка с отражением последовательности их залегания. При мелкомасштабных исследованиях можно использовать литолого-стратиграфическую колонку, которая создается геологической службой в каждом районе геологоразведочных работ. Такие колонки обычно не имеют масштаба, а сведения о мощностях толщ или геологических тел приводятся на колонке в виде диапазонов их мощностей. На геологических колонках отдельно выделяются объекты, которые развиты в районе не повсеместно, то есть появляются в виде локальных тел. В первую очередь это относится к малым интрузиям, рудным телам и зонам метаморфизма. Подобные объекты изображаются в виде включений в толще вмещающих пород.

На основе дифференциальных кривых распределения геофизических признаков для каждого литотипа формируются статистические диаграммы по изученным признакам для всего разреза в соответствии с геологической колонкой. В большинстве случаев все геологические тела представляются на статистических геофизических диаграммах как образования с включениями. Неоднородность объектов показывают путем изображения прямоугольных или скорректированных с учетом типичной формы диаграмм, подобных той, которая представлена на рис. 13, б. Пример типовой физико-геологической колонки (упрощенный вариант без отражения компонентов в горных породах) приведен на рис. 10.

Типовая физико-геологическая колонка дает представление о физических свойствах всего комплекса геологических образований в изучаемом районе и на ее основе могут решаться разнообразные задачи в период проведения геологоразведочных работ. Полученные данные используют при формировании петрофизической модели при исследовании участков с условиями близкими тем, которые учтены

при формировании типовой колонки, как на стадии проектирования работ, так при интерпретации измеренных полей. В период разведки типовая колонка помогает правильно классифицировать объекты, изученные методами ГИС.

4. ТОЧНОСТЬ НАБЛЮДЕНИЙ

Вопрос о точности наблюдений возникает как в период проектирования геофизических работ, так и по их завершении. При планировании точности наблюдений необходимо знать уровень аномалий от объектов, представляющих интерес для решения стоящих задач, погрешности измерений, которые возникают при применении имеющейся аппаратуры и планируемой технологии измерений, а также вероятный диапазон геологических помех, типичный для фоновых образований из-за их неоднородности.

Сведения об интенсивности аномалий, подлежащих обнаружению, получают исходя из анализа сформированной ФГМ и опыта предшественников. Обычно ориентируются на некоторую минимальную по интенсивности аномалию, которая характерна для объекта, представляющего интерес при решении поисковой задачи.

Необходимо учитывать, что искомую аномалию придется обнаруживать на фоне нормального поля, присущего среде, вмещающей искомый аномалиеобразующий объект. Нормальное поле всегда имеет некоторую дисперсию D_0 , которую можно охарактеризовать через среднеквадратичную погрешность измерения нормального поля S_0 , поскольку $D_0 = S_0^2$. Как уже отмечалось в разделе 2, величину S_0 можно оценить несколькими способами. К стандартным относится аналитический способ, основанный на использовании данных n измерений поля A в пределах фоновой среды и формулы (1). В случае малой выборки вместо n применяют значение $n-1$.

Дисперсия значений в пределах нормального поля складывается из дисперсии геологических помех S_Γ , вызванных неоднородностью фонового объекта, и дисперсии показаний, связанных с аппаратурно-методическими (условно приборными) погрешностями измерений S_Π . Поэтому общая дисперсия измерений фона равна: $S_0^2 = S_\Gamma^2 + S_\Pi^2$.

Приборная погрешность оценивается по результатам независимых контрольных n измерений поля по формуле

$$S_\Pi = \pm \sqrt{\sum_1^n (A_1 - A_2)^2 / (2n - 1)},$$

A_1 и A_2 – соответственно первичное и контрольное измерение на i -ой точке.

По величине составляющей S_{Γ} , которая равна $S_{\Gamma} = (S_0^2 - S_{\Pi}^2)^{1/2}$, получают представление о влиянии геологических помех.

Для успешного выделения аномальных значений A_a , как это уже отмечалось в разделе 2, необходимо чтобы выполнялись условия: $A_a < (\bar{A}_0 - 2 S_0)$ или $A_a > (\bar{A}_0 + 2 S_0)$. В первом случае выделяется отрицательная, а во втором случае положительная аномалии.

Для снижения общей погрешности измерений S_0 руководствуются следующими положениями [1,3].

1. Если $S_{\Gamma} > S_{\Pi}$, то для снижения S_{Γ} полезным оказывается применение специальных методов обработки данных съемки с целью подавления геологических помех, носящих часто случайный характер. Например, простое сглаживание измеренного поля по N точкам уменьшает S_{Γ} почти в N раз.

2. Если $S_{\Pi} > S_{\Gamma}$, то есть смысл применить более точную аппаратуру или усовершенствовать технологию измерений. Например, за счет многократного (N кратного) измерения поля на одной точке и использования осредненного его значения удастся уменьшить величину S_{Π} приблизительно в $\sqrt{N}$ раз.

Среднеквадратичная приборная погрешность S_{Π} вычисляется по результатам каждой съемки. Обычно планируется для выполненного объема наблюдений провести приблизительно в 5 % точках контрольные измерения.

5. ОБОСНОВАНИЕ СЕТИ НАБЛЮДЕНИЙ

Как правило, сеть наблюдений представляет систему параллельных профилей, на которых намечаются с определенным шагом точки наблюдения. Условно принимают, что профили параллельны оси x и перпендикулярны оси y . Тогда расстояния между профилями – Δy , а между точками – Δx .

Обычно геофизическая съемка проводится в помощь геологическому картированию определенного масштаба. Исходя из этого масштаба расстояние между профилями должна составлять на отчетной карте съемки 1 см. Например, при масштабе 1:50000 необходимо иметь $\Delta y = 500$ м. Шаг наблюдений обычно в 2 раза меньше межпрофильного расстояния. В рассматриваемом примере $\Delta x = 250$ м.

При непрерывной регистрации характеристик физического поля (на борту самолета, вертолета, судна, автомобиля) в силу инерционности регистрирующей аппаратуры условным шагом съемки можно считать величину $\Delta x = V \cdot \tau$, учитывающую скорость и постоянную времени движущегося измерителя.

В условиях резкой изменчивости свойств геологической среды масштаб геофизической съемки может быть принят вдвое крупнее, чем для геологического картирования.

При проектировании поисковых геофизических работ, проводимых, как правило, в масштабах 1:10000 и 1:5000, необходимо предвидеть вид и величину ожидаемых аномалий от объектов, представляющих первоочередной интерес для решения поисковой задачи. Этими объектами могут быть не только тела полезных ископаемых, но и связанные с ними генетически и пространственно малые интрузии, разрывные нарушения, ореолы окolorудных изменений и др., имеющие обычно меньшую контрастность по аномальным признакам. Представления о форме и размерах аномальных зон искомых геологических объектов формируются на основе анализа ФГМ.

Сеть наблюдений выбирают такой, чтобы в контур аномальной зоны попал хотя бы один профиль с двумя точками наблюдений, на которых аномальный объект будет зафиксирован.

Существует возможность теоретически оценить вероятность P обнаружения объекта [1, 6]. Обычно форму аномальной зоны объекта отождествляют с эллипсом, оси которого равны L (длина зоны) и B (ширина зоны). В наиболее простом случае вероятность пересечения аномальной зоны одним из профилей, ориентированных перпендикулярно большей оси (т.е. вкрест простирания), когда $L \leq \Delta y$, выражается простой дробью: $P = L / \Delta y$. При неизвестной ориентировке такого объекта вероятность его пересечения определяется классическим решением «задачи об игле», сформулированной монахом Ж. Бюффеном еще в 18 веке:

$$P = 2L / \pi \Delta y. \quad (7)$$

Можно отметить, что только за счет неизвестной ориентировки объекта поисков по отношению к направлению съемочных профилей при $L = \Delta y$ вероятность его обнаружения снижается с 1 до $P = 2/\pi = 0,637$.

Если известен угол β отклонения профилей от нормали к простиранию объекта в радианах, то при $L \leq \Delta y$ вероятность обнаружения объекта равна:

$$P = L \sin \beta / (\beta \Delta y). \quad (8)$$

Полезно заметить, что для значения $\beta = \pm \pi/6$ величина $\frac{\sin \beta}{\beta} = 0,955$, т.е. мало отличается от 1. Поэтому на практике достаточно чтобы сеть профилей была ориентирована только приближенно правильно. Если это условие соблюдается, то при $\Delta y = 0,9 L$ пересечение аномальной зоны профилем гарантировано.

Общее решение задачи о вероятности пересечения контура аномалии профилем при произвольном значении угла β , когда $L / \Delta y \geq 1$, приводит к выражению:

$$P = \frac{2}{\pi} \left[\frac{L}{\Delta y} + \cos^{-1} \frac{\Delta y}{L} - \sqrt{\left(\frac{L}{\Delta y} \right)^2 - 1} \right]. \quad (9)$$

При $L = \Delta y$ снова получаем $P = 2/\pi = 0,637$.

Общее выражение для вероятности пересечения аномальной зоны эллиптического вида с осями L , B и периметром Π при произвольной ориентировке профилей съемки имеет вид:

$$P = \Pi / \pi \Delta y, \quad (10)$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2} [1,5(L + B) - \sqrt{L \cdot B}]. \quad (11)$$

Две точки профиля, пересекающего аномальную зону, окажутся внутри ее контура, если $\Delta x \leq B/2$.

Для более скупуплезной оценки вероятности P имеется серия номограмм, учитывающих возможные варианты соотношения размеров контура аномалии, параметров сети и углов β [1, 3].

Оценим для примера вероятность обнаружения аномальной зоны размером 200×50 м сетью с ячейкой 100×25 м при неизвестном простирании оси зоны. В этом случае $L = 200$ м, $\Delta y = 100$ м. и по формуле (9) получим $P = 0,83$. С использованием специальных номограмм можно установить, что объект будет обнаружен с вероятностью $P = 1$, если отклонение профилей от нормали к простиранию объекта будет меньше 60° .

Следующая задача может быть сформулирована в виде задания. Необходимо определить какого минимального размера аномальная

зона с неизвестным простиранием может быть обнаружена с помощью сети размером в м 250×50 . Для решения найдем величину периметра зоны П из формулы (10) для случая $P = 1$, полагая $B = 100$ м и $\Delta y = 250$ м. Эта величина равна $\Pi = 785$ м. Решая уравнение для П относительно L (методом подбора или составив квадратное уравнение относительно $\sqrt{L}$), получим искомую величину: $L = 360$ м.

На стадиях детальных поисков и разведки сеть наблюдений бывает самой разнообразной. Помимо прямоугольной сети при детальных съемках возможно проложение радиальных и криволинейных профилей, допустимо отклонения от равномерности изучения площади съемки. Повышенная детальность принята для интерпретационных профилей, шаг наблюдений на которых допустимо устанавливать таким, чтобы выявить характерные точки измеряемого физического поля (экстремумы, точки перегиба, перехода через ноль и т. п.). Обычно пункты наблюдения сгущают в районе эпицентра аномалий и разряжают на участках выхода в нормальное поле. В результате детальных работ необходимо установить конфигурацию, размеры аномалии, ее амплитуду и другие особенности, которые затем используют в процессе интерпретации.

Шаг наблюдений подбирают с таким расчетом, чтобы при аппроксимации поля между двумя фиксированными точками прямой линией отклонение фактических его значений от этой прямой не превышало 5 % средней величины значений поля. Например, при съемке естественного поля с шагом 20 м амплитуда аномалии составила 58 мВ, откуда следует, что среднее значение аномалии на профиле приблизительно равно 29 мВ. Между двумя рядовыми точками съемки, на которых получены значения 27 и 39 мВ, выполнено промежуточное измерение с результатом 36 мВ. Разница между последним значением и средней величиной рядовых измерений равна 3 мВ, что составляет 10,3 % от среднего значения аномалии. Следовательно, необходимо сгустить сеть, уменьшив шаг наблюдений по крайней мере в 2 раза.

7. ВЫДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ АНОМАЛИЙ И ИХ КОМПЛЕКСНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Конечным результатом геофизических съемок является выявление и геологическое истолкование тех неоднородностей геологиче-

ской среды, которые по размерам и контрастности свойств способны создавать ощутимые аномалии.

Важнейшими проблемами анализа измеренных полей являются исключение или ослабление их составляющих, связанных с влиянием геологических помех, разделение выделенных на фоне помех аномалий на региональные и локальные (возможно нескольких порядков). Необходимы классификация выделенных аномалий на перспективные (отвечающие целевым задачам) и неперспективные, выполнение качественной и количественной интерпретация аномалий и определение их геологической природы.

Выделение аномалий

При анализе поля A принимается аддитивная (суммирующая) его модель, согласно которой существующая в рядовой точке функциональная величина аномалии A_a имеет региональную A_{ap} , локальную $A_{ал}$ и случайную $A_{ас}$ (помеха) составляющие:

$$A_a = A_{ap} + A_{ал} + A_{ас}. \quad (12)$$

Помехи обычно отождествляют со случайными функциями и эта их особенность позволяет применять специальные методы математической фильтрации, основанные на исключении составляющих поля с высокочастотным спектром и некоррелируемостью характеристик поля по площади. Простейшей операцией по ослаблению случайной составляющей является сглаживание в окне из нескольких точек. Если взять 5 точек и применить полином третьей степени, то формула для сглаживания измеренных значений A в рядовой точке с номером i с использованием данных по соседним точкам имеет вид:

$$A_{сгл}(i) = 0,486A(i) + 0,343\{A(i+1) + A(i-1)\} - 0,086\{A(i+2) + A(i-2)\}. \quad (13)$$

Процедура сглаживания приводит к уменьшению дисперсии фона главным образом за счет снижения геологической погрешности при незначительном изменении неслучайной аномалии. В результате уменьшения общей среднеквадратической погрешности наблюдений увеличивается контрастность аномалии и, следовательно, улучшаются условия для ее выделения.

Примером могут служить результаты выделения слабой аномалии кажущейся поляризуемости, приводимые на рис. 21. Согласно исходным измерениям (график *a*), диапазон колебаний фоновых значений η_k составляет 0,5-2,5 %, а среднее значение равно 1,5 %. Выше верхнего предела фона зафиксированы 2 точки со значениями около

3 %. Полагая, что аномальные значения в этих точках равны 1,5 %, а среднеквадратичное отклонение для фона составляет 0,5 %, вычисленный показатель контрастности аномалии (см. (6)) для данных условий равен 3.

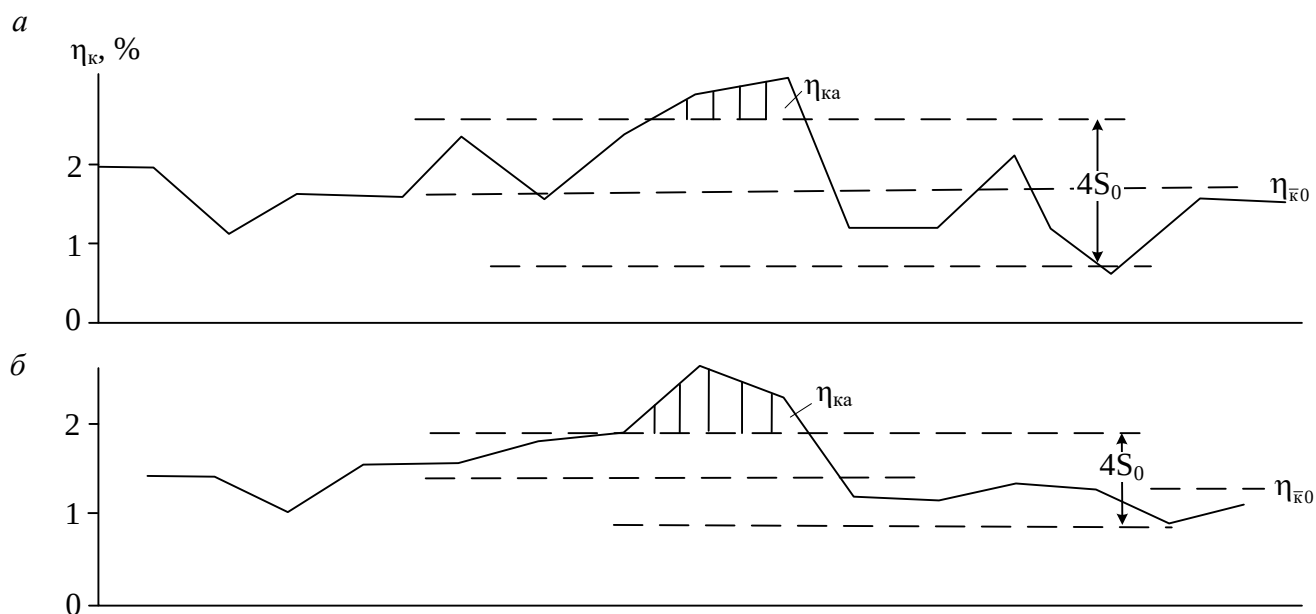


Рис. 21. Результаты выделения слабой аномалии кажущейся поляризуемости η_k по данным измеренного поля (график *а*) и после его сглаживания (график *б*)

После сглаживания исходного графика η_k по 5 точкам (график *б*), фоновые значения находятся в пределах 1-2 % при среднем 1,5 %, а аномальные значения остаются близкими к 3 %. Заметно, что на сглаженном графике аномалия проявляется более отчетливо. Этот эффект подтверждается и вычислением показателя контрастности, который становится близким к 6, то есть увеличивается в 2 раза относительно первоначального значения.

В инструкциях по ряду полевых методов к достоверной (надежность 99,5 %) аномалии относятся такие совокупности значений в не менее чем 3 точках, для каждого из которых выполняется условие: $A_a/S_0 \geq 3$. Если за аномалию принимать значения в 2 раза превышающее среднеквадратическую погрешность фона, то есть $A_a/S_0 \geq 2$, то надежность выделения такой аномалии согласно теории вероятности составляет 95 %. Оценивая надежность с точки зрения энергетического отношения аномалия/помеха, получим для последнего условия 82 %.

При выделении геофизических аномалий в общем случае проводится разделение региональных и локальных аномалий, отличающихся

ся областью их проявления. Наилучшие условия разделения этих аномалий существуют в случае резкого их различия по размерам и интенсивности. В зависимости от целевой задачи подавляется либо одна либо другая составляющая геофизического поля. Нередко интерес представляют как региональные аномалии, отражающие крупные структурные особенности геологической среды, так и локальные аномалии, которые связаны с влиянием мелких геологических тел, например рудных залежей.

Выделение региональных аномалий проводится на основе сглаживания наблюдаемого поля, предполагающего существенное ослабление влияния помех и локальных объектов. К основным способам выделения региональных аномалий относятся следующие.

1. Усреднение поля вдоль профилей или по площади. Часто используют поточечное усреднение в пределах круга определенного радиуса.

2. Тренд-анализ, под которым понимается процедура аппроксимации эмпирических данных вполне определенными функциями, аргументами которых являются координаты точек наблюдения. Аппроксимация может осуществляться с помощью алгебраических полиномов, как правило, невысоких степеней. При кусочно-полиномиальной аппроксимации применяют сплайн-функции, представляющие кубические полиномы для ограниченных участков площади.

3. Пересчет в верхнее полупространство позволяет существенно ослабить влияние небольших геологических неоднородностей и упростить процесс интерпретации региональной аномалии, которая проявляется более отчетливо.

Локальные аномалии определяют после исключения из измеренного поля региональной составляющей. Для того чтобы подчеркнуть существование локальной аномалии осуществляют пересчет измеренного поля в нижнее полупространство и вычисляют производные высшего порядка. Это позволяет усилить высокочастотную составляющую, связанную с геологическими телами небольших размеров.

Пример совместного проявления региональной и локальных аномалий в поле силы тяжести в районе медноколчеданного месторождения показан на рис. 22. На фоне плавного почти линейного уменьшения поля Δg в краевой части крупного массива базальтов

(основные породы с повышенной плотностью) фиксируется локальная отрицательная аномалия (условно первого порядка), связанная с субинтрузией гранитоидов (породы кислого состава менее плотные по сравнению с базальтами). Региональная аномалия от массива базальтов показана на рис. 22, б штриховой линией (Δg_p). Висячем боку субинтрузии гранитоидов внутри зоны гидротермально измененных пород (метасоматиты с минимальной для разреза плотностью) находится рудная залежь (с максимальной для разреза плотностью). Ореол метасоматитов создает отрицательную аномалию (условно второго порядка), на фоне которой проявляется локальная положительная аномалия (условно третьего порядка) от рудной залежи. Для наглядности все три локальные аномалии (1, 2, 3) изображены отдельно на рис. 22, в.

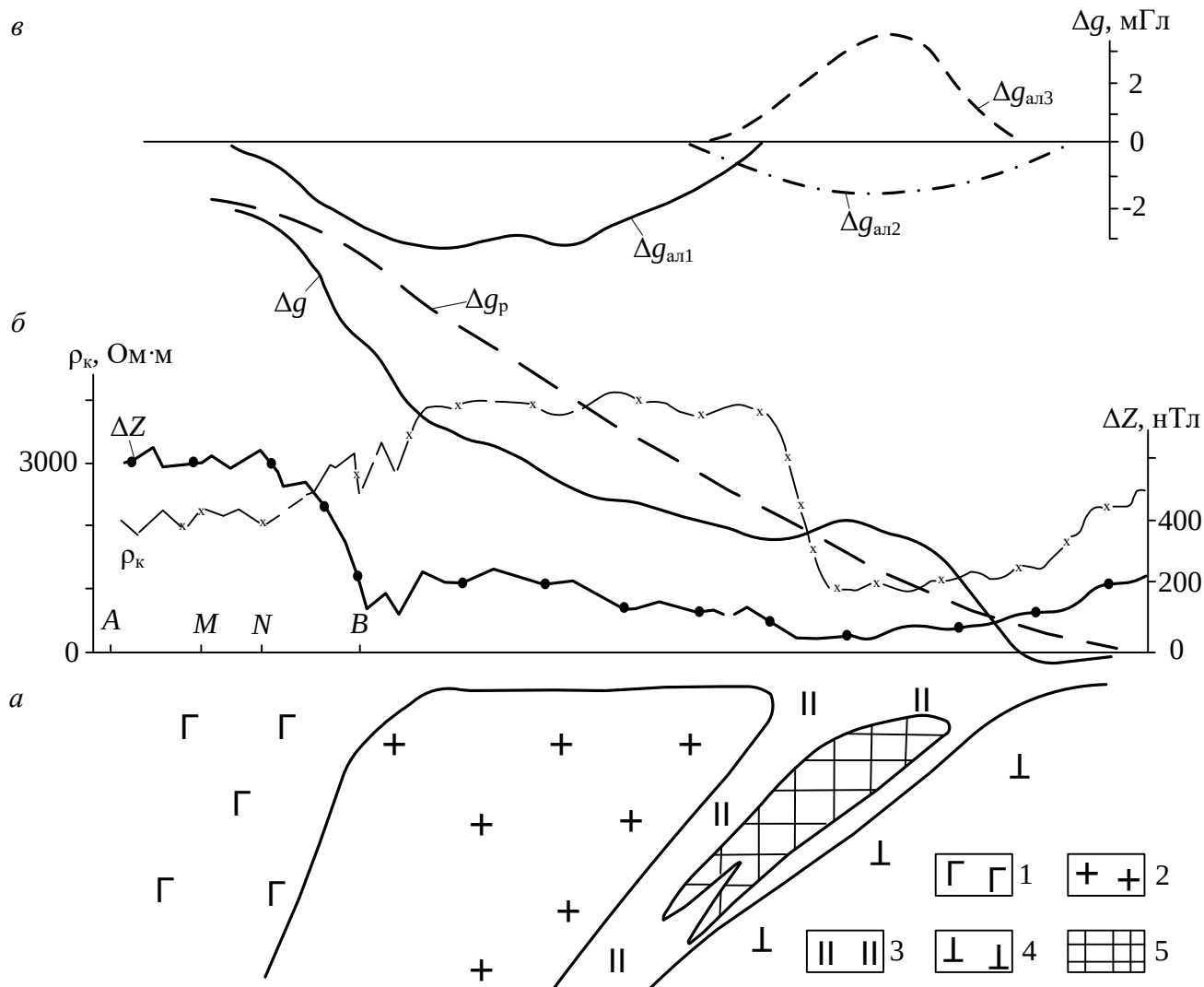


Рис. 22. Пример сложной аномалии силы тяжести, которая в совокупности с данными магниторазведки и электроразведки отражает присутствие в разрезе медноколчеданного месторождения комплекса геологических тел:

a – геологический разрез: 1 – базальты; 2 – гранитоиды; 3 – гидротермально измененные породы; 4 – туфы; 5 – руды; *б* – графики измеренного поля силы тяжести (Δg) и его регионального фона (Δg_p), магнитного поля (ΔZ), удельного сопротивления (ρ_k); *в* – графики локальных аномалий поля силы тяжести, отражающие присутствие в разрезе субинтрузии ($\Delta g_{ал1}$), зоны гидротермально измененных пород ($\Delta g_{ал2}$), рудной залежи ($\Delta g_{ал3}$)

О существовании нескольких локальных аномалий поля силы тяжести можно предположить по данным других геофизических методов. Так присутствие субинтрузии гранитоидов, которым соответствует обширная отрицательная локальная аномалия гравитационного поля (1), отчетливо фиксируется ступенчатым понижением магнитного поля относительно уровня, характерного для базальтов, и увеличением в этом районе кажущегося сопротивления. Выход к дневной поверхности зоны гидротермально измененных пород, которому соответствует локальная отрицательная аномалия (2), совпадает с областью минимальных значений магнитного поля и кажущегося сопротивления, что является довольно типичным признаком для ореолов околорудных изменений. Существование в этой же области слабой локальной положительной аномалии силы тяжести (3) является следствием влияния рудных масс с аномально высокой плотностью. Слабость влияния рудной залежи связано с тем, что над ее верхней кромкой залегают низкоплотные породы (метасоматиты и кора выветривания), а также эффектом наложения положительной аномалии от руды на более обширную отрицательную аномалию от зоны гидротермалитов.

Необходимо подчеркнуть важность разделения аномалий силы тяжести, поскольку результаты их количественной интерпретации позволяют сформировать представления о пространственных контурах геологических тел, создающих эти аномалии. Данные же большинства других методов имеют значение для картирования неоднородностей в верхней части разреза.

Принципы комплексной интерпретации геофизических аномалий

Цель комплексной интерпретации данных различных методов состоит в том, чтобы выполнить классификацию геологических объектов, создающих достоверные аномалии, уделяя первоочередное внимание перспективным аномалиям.

Использование эталонных аномалий. Комплексная интерпретация может осуществляться с помощью как аналитических, так и вероятностно-статистических методов. Первым этапом интерпретации

является построение рабочих (интерпретационных) физико-геологических моделей, которые позволяют задать некоторые априорные рамки и сузить неопределенность решения обратной задачи, выбрав наиболее вероятные варианты. В аналитических способах комплексной интерпретации геологические объекты и их параметры для ФГМ задаются в виде начальных приближений итерационного цикла решения обратной задачи. Интерпретатор должен представлять вид типичных аномалий, характерных для некоторого класса моделей геологических тел, подходящих для условий изучаемой среды. При этом учитываются ограничения, которые вытекают из представлений об априорной ФГМ и данных, полученных применявшимися геологическими (результаты проходки канав, шурфов, скважин), геохимическими и геофизическими методами.

Примером приемов решения обратных задач на участке проведения съемки методом заряда служит геологический разрез, построенный на основе комплексной интерпретации аномального поля заряда с учетом данных измерений магнитного поля и проходки скважин глубокого и картировочного бурения (рис. 5, б). При интерпретации аномального поля заряда использован набор некоторых теоретических аномалий электрического потенциала над типовыми объектами геологических разрезов рудных полей, приведенный на рис. 23.

Пособием по интерпретации локальных аномалий комплекса геофизических методов может служить таблица-схема, представляющая подборку аномалий от тел простейшей геометрической формы с аналитическими выражениями для вычислений полей в некоторых характерных точках (приложение 1).

Традиционными являются приемы визуального сопоставления аномалий, выделяемых по различным измеренным физическим полям. При анализе аномалий ориентируются по совпадению определенных признаков на установлении меры аналогии исследуемых и эталонных объектов. В качестве эталонов используют геологические тела, детально изученные как геофизическими, так и геологическими методами, подтвержденные бурением и горными выработками.

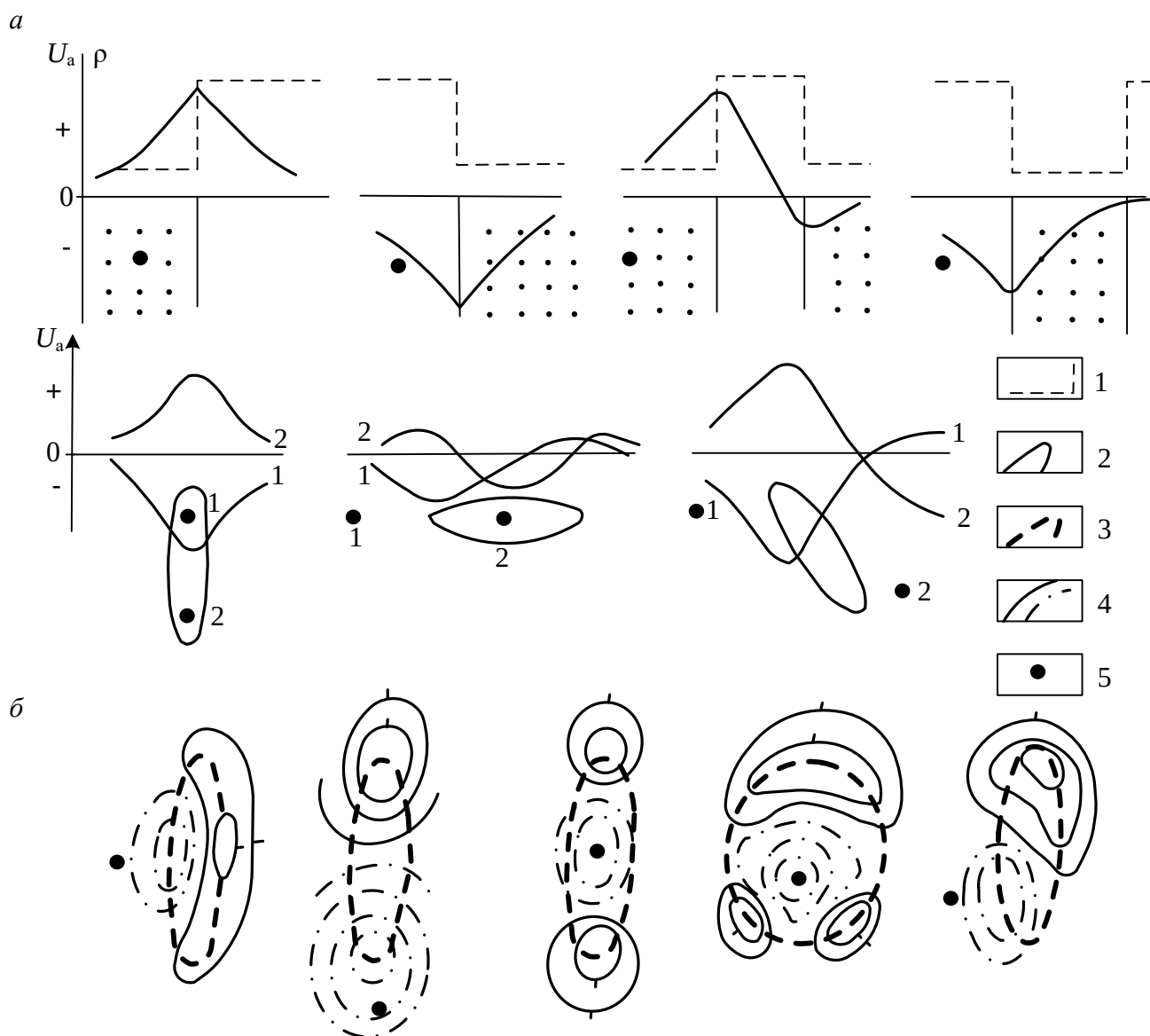


Рис. 23. Графики (а) и планы изолиний (б) аномального электрического потенциала (U_a) поля заряда в присутствии пластовых и сфероидальных тел:

1 – графики удельного сопротивления (ρ) слоистых сред; 2, 3 – погруженный сфероидальный проводник в разрезе (2) и плане (3); 4 – изолинии положительного (сплошные линии) и отрицательного (штрихпунктирные линии) аномального потенциала; 5 – заряд

Фактически задача подготовки к комплексной интерпретации сводится к созданию физико-геологических моделей типовых объектов-эталонов. Например, составляется сводка признаков, по которым могут быть откартированы тектонические нарушения. К их признакам обычно относят: отрицательные аномалии гравитационного, магнитного полей, кажущегося сопротивления, связанные с разрыхлением пород в зоне нарушения, увеличением над ним коры выветривания. В ряде случаев нарушениям в плане соответствуют узкие полосы

резкого изменения поля, связанного с различием свойств двух блоков, разделенных разрывом. Для тектонических нарушений характерна линейность в проявлении отмеченных признаков. В качестве эталонных аномалий гравитационных и магнитных полей, фиксирующих проявления разрывной тектоники, может служить подборка, приведенная на рис. 24. Признаки разрывов выражаются в сгущении изолиний, смене ориентировки большой группы локальных аномалий, повторяющимся изломом аномалий, наличием линейно вытянутых аномалий большой протяженности, смещении осей локальных аномалий или характерные деформации изолиний в определенном направлении. Все эти особенности аномальных полей можно видеть на рис. 24.

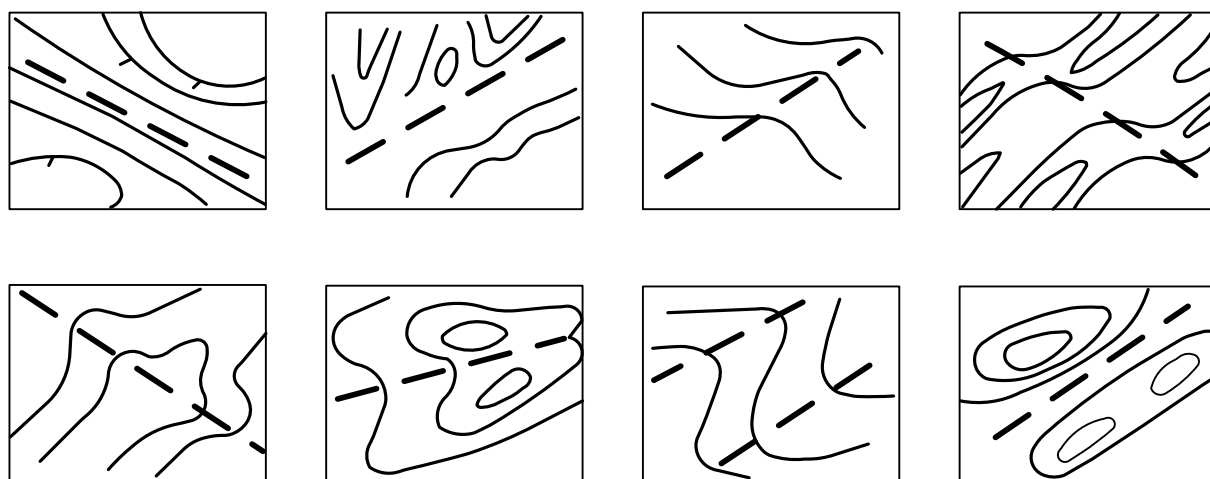


Рис.24. Примеры проявления тектонических нарушений (штриховые линии) в аномальных гравитационном и магнитном полях (по Г. Г. Кассину)

Разработаны специальные программы, позволяющие выделять и классифицировать комплексные аномалии в автоматическом режиме на основе некоторого набора эталонных образов типовых объектов. Результатом компьютерных способов распознавания образов являются прогнозные карты изученной территории с разбиением на несколько классов, характеризующихся различным набором признаков и имеющие определенное геологическое значение [2].

Одним из путей решения задачи диагноза геофизических аномалий является вычисление функций комплексного показателя (ФКП) θ , интегрировано обобщающих результаты измерений несколькими методами одновременно. Они служат для: 1) свертывания информации, полученной несколькими методами исследования; 2) приведения

наблюдений к уровню нормального поля; 3) выделения слабых аномалий; 4) разделения выявленных комплексных аномалий на перспективные и неперспективные [1].

Техника вычисления ФКП рассмотрена в разделах 3 и 5, а пример ее использования рассмотрен на материалах, послуживших основой при построении ФГМ для поисков месторождений урана (см. раздел 3, рис. 6). Полезность определения ФКП продемонстрирована также на рис 19.

Приводимое на рис. 6 отдельное вычисление ФКП для данных гравимагнитных исследований и поисковых методов электроразведки и радиометрии связано с различием задач, которые ставятся перед этими комплексами. С помощью первых методов можно картировать выходы к дневной поверхности потенциально рудоносных сланцев и подстилающих карбонатных отложений. Как показано на рис.6, эта задача решается успешно и выявляемые аномалии ФКП (Θ_1) являются перспективными и локализуют участки для детальных поисков.

В случае применения поискового комплекса обнаружение аномалий ФКП для этого комплекса (Θ_2), подобной той, которая изображена на рис. 6, позволяет отнести ее к перспективным и рассматривать как признак присутствия уранового оруденения.

Количественная комплексная интерпретация наиболее эффективна для сильных аномалий, то есть при больших значениях показателей контрастности. Данные совокупности методов позволяют более надежно установить возможные ограничения, которые необходимо учитывать при применении интерпретационного аппарата математической физики. Наиболее успешным является метод подбора параметров аномалиеобразующих объектов, позволяющий получить решение прямой задачи, соответствующее эмпирическим данным об изучаемых полях.

Прежде чем перейти к построению детальной ФГМ осуществляется экспресс-интерпретация полей путем оценочных вычислений ожидаемых для модели аномалий и их сопоставления с реально измеренными полями на участке работ. Для этих целей можно воспользоваться уже упоминавшейся выше таблицей-схемой аномалий для тел правильной геометрической формы. Таблица дает представление о виде геофизических аномалий и их амплитуде при известных форме, размерах, условиях залегания и аномальности физических (плотност-

ных, магнитных, электрических) свойств большой группы объектов, моделирующих геологические тела.

Способ подбора. Для уточнения форм аномалиеобразующих геологических тел используется способ подбора, который предполагает отыскание их границ по полям для отдельных методов с учетом ограничений, вытекающих из данных других методов. Например, при интерпретации сложных гравиметровых аномалий по профилю необходимо предварительно определиться с уровнем региональной аномалии и создающей ее неоднородностью, а также с количеством и видом локальных аномалий, подлежащих количественной интерпретации. Существенную помощь при этом могут оказать данные других геофизических методов. Например, как это показано по материалам рис. 22, можно обосновать возможность выделения локальных аномалий от нескольких объектов и высказать предположения об их геологической природе.

По данным электрозондирования часто удается установить положение кровли коренных горных пород и вероятные физические характеристики скрытых под наносами геологических тел (на основе корреляционных зависимостей между электрическими и другими физическими свойствами). Часто по аномалиям методов естественного электрического поля и вызванной поляризации проявляются участки рассеянной сульфидной минерализации, типичные для окколорудно-измененных пород. Пример подобных аномалий приведен в разделе 3 на рис. 10. Естественно, что имеет смысл геометризовать в пространстве эти участки, данные о выходах к дневной поверхности которых устанавливаются электроразведкой. Особый интерес представляет задача определить положение в пространстве рудных залежей, признаки существования которых заметны в аномальном поле силы тяжести и могут проявиться по данным специальных методов, например метода переходных процессов.

Для реализации способа подбора в рамках каждого метода разработаны разнообразные программы. Например, применительно к методу ВЭЗ разработан набор программ, как для ручной, так и машинной (компьютерной) интерпретации. Подбор сводится к сопоставлению наблюдаемых кривых с теоретически рассчитанными графиками для горизонтально-слоистой среды с известными параметрами (удельное сопротивление и мощность) слоев. Для снижения неоднозначности интерпретации используют данные о сопротивлении не-

которых опорных слоев или точно установленных границах на отдельных участках работ. Наиболее достоверные данные получают при наличии скважин.

Классификация геологических объектов на принципе самообучения

Этот принцип позволяет по совокупности геофизических данных разделить площадь исследований на некоторое число однородных (по совокупности признаков) классов (объектов), причем их геологическая природа может до определенного времени оставаться неясной. Для установления природы таких классов требуется выполнить геологические исследования (анализ проб, проходка скважин и др.), однако объем заверочных исследований невелик. Достаточно проанализировать данные по типичным представителям классов.

Примером реализации такого подхода могут служить материалы петрофизической классификации и картирования горных пород по данным измерений физических полей в скважинах [10]. Так при разведке медноколчеданного месторождения Осеннее на Южном Урале было установлено, что рудовмещающая структура представляет сложно построенную вулкано-тектоническую депрессию, осложненную крутопадающими и межслоевыми нарушениями. Всего в разрезе месторождения выделялось около десятка разновидностей литотипов [11], представлявших сложный комплекс геологических тел. Определенные сложности возникали с установлением наименования пород, подвергшихся гидротермальному метасоматозу, а также с определением роли субвулканических липарито-дацитов в формировании месторождения.

Для классификации геологических объектов на месторождении были привлечены данные каротажа естественной радиоактивности (ГК), которые, как известно, наиболее тесно связаны с литологическими особенностями горных пород. По этому свойству легче всего определить тип породы, подвергшейся эпигенетическим преобразованиям и принявшей черты метаморфизованной разновидности. Построенная по результатам статистической обработки диаграмм ГК, по методике изложенной в разделе 3, дифференциальная кривая распределения радиоактивности изображена на рис. 25. Из этой кривой следует, что все рудовмещающие породы можно разделить на три статистически однородные совокупности (А, Б, В) и определить границы

между ними (9 и 25 мкР/час) для построения петрорадиоактивных разрезов.

Результаты анализа химического состава показали, что радиоактивность рудовмещающих пород возрастает пропорционально увеличению кремнезема (47,6, 57,3, 65,7 %) и калия (1,9, 3,3, 4,8 % K_2O) и положительно коррелируется с повышением кислотности пород, которая в свою очередь отражает последовательность поступления в изучаемый массив магматических инъекций. Построенные петрофизические разрезы значительно проще геологических разрезов и наглядно отражают структурные особенности и историю формирования месторождения. Для этого на петрорадиоактивный разрез наложены контуры зон, отражающие степень сульфидной минерализации пород, установленные в результате статистической обработки диаграмм метода электродных потенциалов (МЭП). Данные метода фиксируют степень рудной концентрации ($>0,65$, $0,65-0,3$, $<0,3$), соответствующей уровню сплошных руд (класс Р), сильно измененных и сульфидизированных пород (класс С) и слабо измененных окolorудными процессами участков разреза.

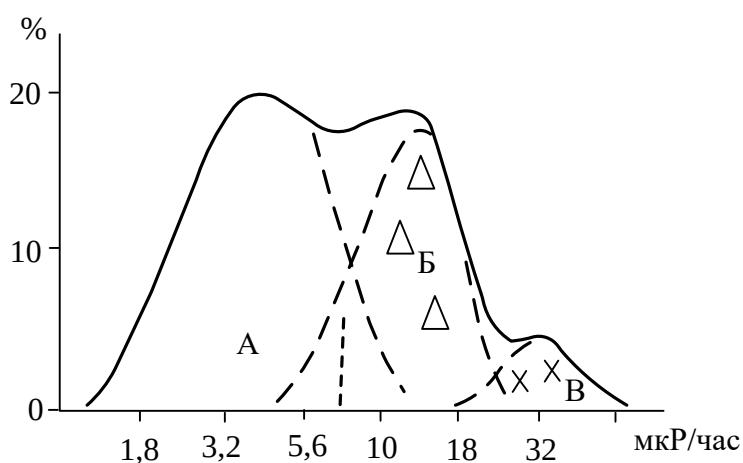


Рис. 25. Дифференциальная кривая распределения гамма-активности рудовмещающих пород медноколчеданного месторождения Осеннее

Результаты классификации геологических объектов по данным измерений двух геофизических полей на принципах самообучения с помощью статистического способа позволили построить петрофизические разрезы, на которых породы разделены на обоснованное огра-

ниченное число классов, отражающих главные черты рудоносной структуры.

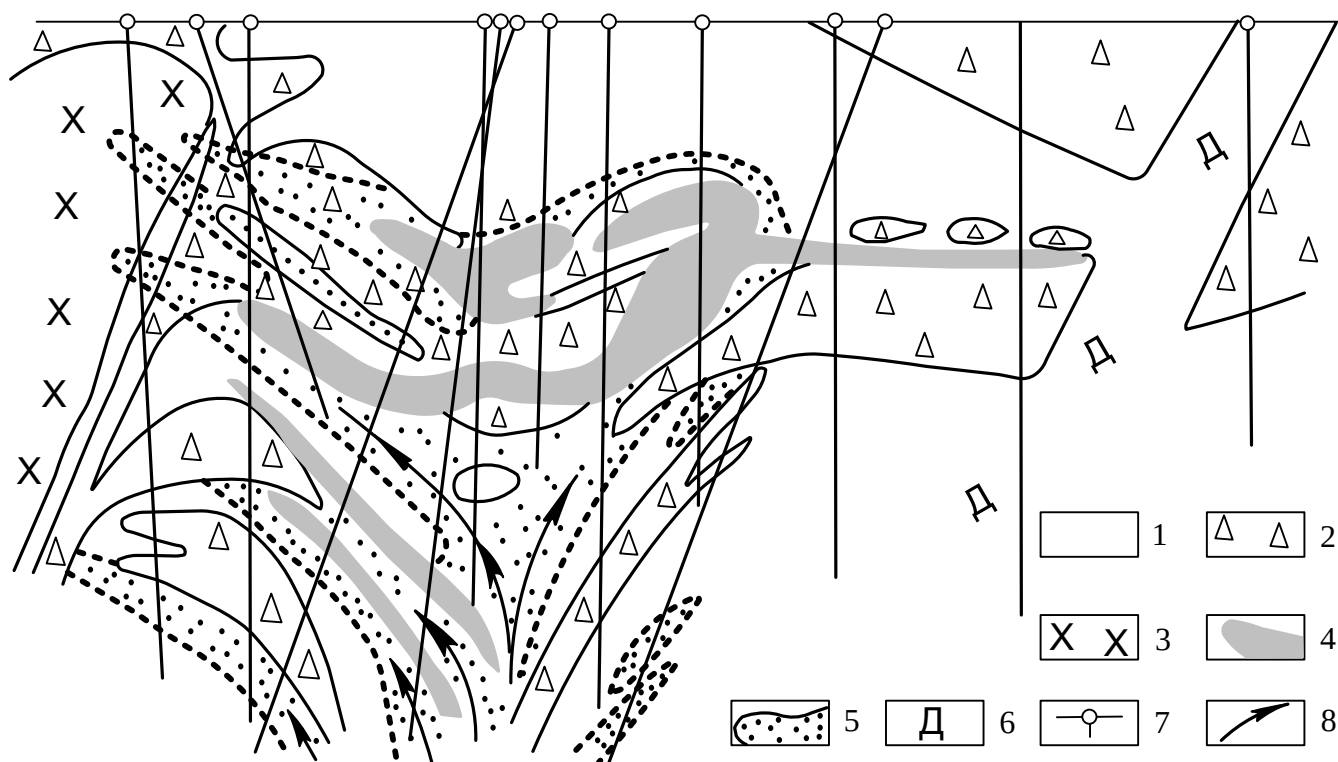


Рис. 26. Петрофизический разрез (классификация по двум геофизическим полям: ГК и МЭП) медноколчеданного месторождения Осеннее:

1, 2, 3 – петрорадиоактивные группы пород А, Б и В, соответственно; 4 – сплошные руды (класс Р); 5 – богатая сульфидная минерализация (класс С); 6 – дайка основных пород; 7 – скважины; 8 – предполагаемые пути движения рудоносных растворов

Один из таких разрезов приведен на рис. 26. Из него видно, что в массив, сложенный комплексом вулканогенных пород основного состава (комплекс пород класса А с низкой радиоактивностью) на завершающей стадии активного вулканизма по субвертикальной тектонической зоне внедрились субинтрузии кислых пород (липарито-дацитовые порфиры – класса Б по радиоактивности). Эти породы имеют силлобразную форму с корнями, уходящими на глубину. На заключительной стадии вулканизма ранее формированная толща была прорвана интрузией (сиенит-диориты класса В с наибольшей радиоактивностью). Поступление рудоносных растворов происходило по каналу уже пройденному субинтрузиями липарит-дацитов, кото-

рые перекрыли сквозную тектоническую зону, образовав экранированную структуру с участками повышенной проницаемости на контактах кислых и основных пород. Эти участки брекчирования и явились теми самыми резервуарами, в которых накапливались руообразующие смеси.

Контуры зон, отражающих классы пород с высокой и умеренной степенью сульфидной минерализации (классы Р и С, соответственно) фиксируют картину проникновения рудных растворов с глубоких горизонтов вверх по узкому субвертикальному каналу. Очевидно, что в верхней части разреза происходило распределение этих растворов по экранированным пологим участкам брекчирования на контактах вулканогенных и субинрузивных пород, где увеличивалась концентрация рудного вещества. По данным комплексной интерпретации геофизических полей медноколчеданное месторождение Осеннее является типичным представителем корневых рудных полей II рода, геологические модели которых рассмотрены в разделе 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. *Вахромеев Г. С.* Основы методологии комплексирования геофизических исследований при поисках рудных месторождений. М.: Недра, 1978. 152 с.

2. *Комплексирование методов разведочной геофизики: Справочник геофизика* / под ред. В. В. Бродового, А. А. Никитина М.: Недра, 1984, 384 с.

3. *Никитин А. А., Хмелевской В. К.* Комплексирование геофизических методов: учебник для вузов. Тверь: ООО Изд. «ГЕРС», 2004, 294 с.

Дополнительной

4. *Виноградов А. М.* Геополя и колчеданы Южного Урала. Екатеринбург: УрО РАН, 2004, 187 с.

5. *Геофизические методы разведки рудных месторождений.* / В. В. Бродовой, В. Д. Борцов, Л. Е. Подгорная и др. под ред. В. В. Бродового. М.: Недра, 1990, 296 с.

6. *Геофизические методы поисков и разведки неметаллических полезных ископаемых* / под ред. П. В. Вишневого, Г. С. Вахромеева, И. Л. Шаманского. М.: Недра, 1984, 223 с.

7. *Геофизические поиски рудных месторождений* / под ред. В. А. Кличникова. Алма-Ата: Каз.ФВИРГ, 1970, 610 с.

8. *Кассин Г. Г.* Геофизические методы на региональном этапе геологоразведочного процесса. Екатеринбург: УГГА, 1996, 104 с.

9. *Рудные месторождения СССР* / под ред. В. И. Смирнова. Том 3. М.: Недра, 1974, 392 с.

10. *Сапожников В. М.* Использование диаграмм каротажа для петрофизического картирования рудовмещающих горных пород. / Методика поисков и разведки глубокозалегающих рудных месторождений. Вып.1. Межвуз. науч. темат. сб. Свердловск: изд. УПИ, 1977, с. 11-19.

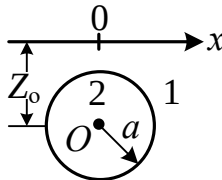
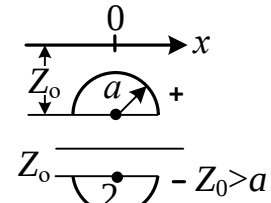
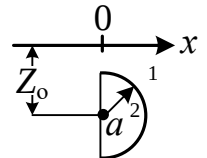
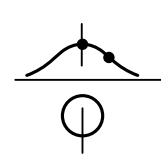
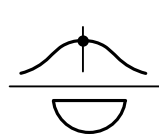
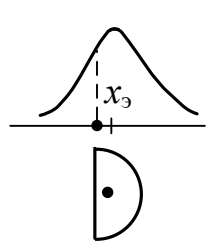
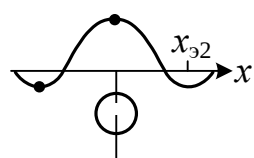
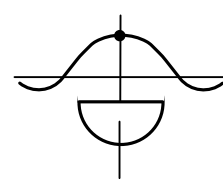
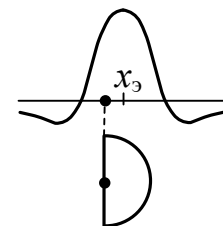
11. *Сапожников В. М., Голиков Ю. В., Берг Л. Я.* Опыт объемного петрофизического картирования рудовмещающих пород месторождения Осеннее / Методика поисков и разведки глубокозалегаю-

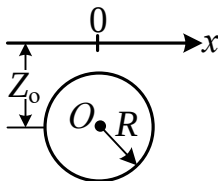
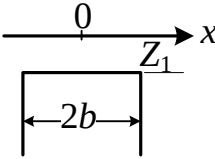
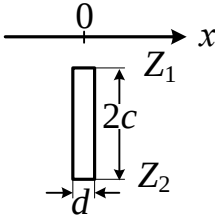
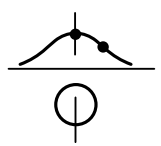
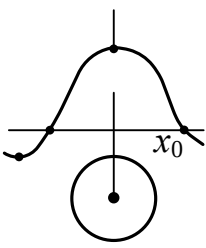
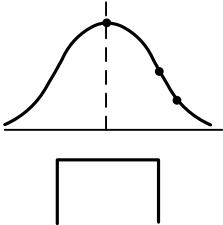
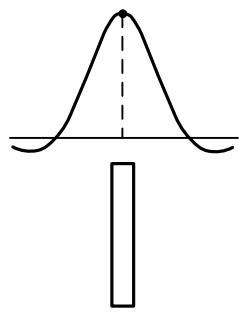
щих рудных месторождений. Вып.1. Межвуз. науч. темат. сб. Свердловск: изд. УПИ, 1977, с. 20-27.

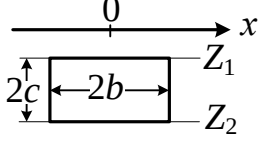
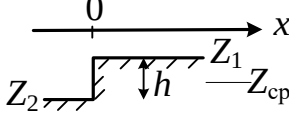
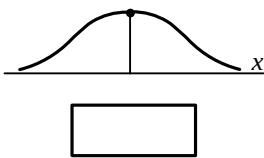
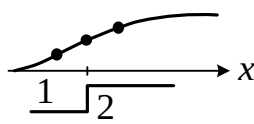
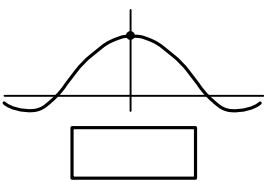
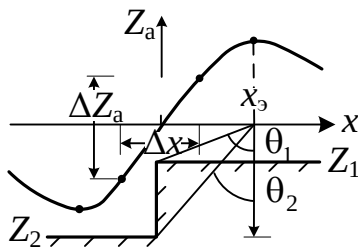
12. Сапожников В. М., Шевченко В. Г. Теория и методика электроразведки в градиентных средах. Л.: Недра, 1992, 135 с.

13. *Электроразведка рудных полей методом заряда* / М. В. Семенов, В. М. Сапожников, М. М. Авдевич, Ю. В. Голиков. Л.: Недра, 1984, 216 с.

**Сводка формул для вычисления значений
аномальных полей в характерных точках**

1		III	III _Г	III _В
2	разрез			
3	Δg_a^3	$\frac{4G\pi a^3 \Delta \sigma}{3Z_0^2}$ $x_{1/2} = 0,77Z_0$ 	$\frac{2G\pi a^3 \Delta \sigma}{3Z_0^2} \left(1 \pm \frac{3a}{4Z_0} \right)$ 	$\frac{2G\pi a^3 \Delta \sigma}{3Z_0^2}$ $x_3 = \frac{3}{8}a$ 
4	Z_a^3	$\frac{8\pi a^3 J}{3Z_0^3}$ $x_0 = \pm Z_0 \sqrt{2}$ $x_{32} = \pm 2Z_0$ $Z_{a2}^3 = -0,036Z_a^3$ 	$\frac{4\pi a^3 J}{3Z_0^3} \left(1 \pm \frac{9a}{8Z_0} \right)$ 	$\frac{4\pi a^3 J}{3Z_0^3}$ $x_3 = \frac{3}{8}a$ 
5	ρ_k^3 η_k^3	$\frac{2\kappa_1 \rho_1 a^3}{Z_0^3}$	$\frac{2\rho_1(\mu-1)a^3}{5\mu+1} \times$ $\times \left(\frac{1}{Z_0^3} \pm \frac{9a}{8Z_0^4} \right)$	$\frac{\rho_1(\mu-1)a^3}{(\mu+2)Z_0^3}$

1		Ц	МП	ТП
2	разрез			
3	Δg_a^3	$\frac{2G\pi R^2 \Delta \sigma}{Z_0^2}$ $x_{1/2} = \pm Z_0$ 	$\pm \infty$	$2Gd\Delta\sigma \ln \frac{Z_2}{Z_1}$ $x_{1/2} = \pm \sqrt{Z_1 Z_2}$ 
4	Z_a^3	$\frac{2\pi R^2 J}{Z_0^2}$ $x_{\min} = \pm Z_0 \sqrt{3}$ $x_0 = \pm Z_0$ 	$4J \operatorname{arctg} \frac{b}{Z_1}$ $x_{1/2} = \pm \sqrt{b^2 + Z_1^2}$ $x_{1/4} = \pm \sqrt{x_{1/2}^2 + 2Z_1 x_{1/2} }$ 	$2J d \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right)$ 
5	ρ_k^3 η_k^3	$\frac{2\kappa \rho_1 R^2}{Z_0^2}$	$\frac{2\rho_1(\mu-1)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{Z_1}$	$\frac{\rho_1 d}{\pi m} \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right)$ $m = \frac{\mu}{\mu-1} - \frac{c}{b+c}$ $d = 2b$

1		Пр	У
2	разрез		
3	Δg_a^3	$2G\Delta\sigma \left\{ b \ln \frac{Z_2^2 + b^2}{Z_1^2 + b^2} + 2(f_2 - f_1) \right\}$ $f_i = Z_i \operatorname{arctg} \frac{b}{Z_i}$ 	$2\pi G h \Delta \sigma$ $x_3 \rightarrow \infty$ $x_{1/2} = 0$ $x_0 \rightarrow -\infty$ $x_{1/4} = -Z_{cp}$ $x_{3/4} = Z_{cp}$ 
4	Z_a^3	$4J \left(\operatorname{arctg} \frac{Z_2}{b} - \operatorname{arctg} \frac{Z_1}{b} \right)$ 	$Z_a = 2J(\theta_1 - \theta_2)$ $\theta_{1,2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{Z_{1,2}}$ $x_0 = 0$ $x_3 = \pm \sqrt{Z_1 Z_2}$ $x = 0 \quad \Delta Z_a / \Delta x = \frac{2J}{Z_1}$ 
5	ρ_k^3 η_k^3	$\frac{2\rho_1}{\pi m} \left(\operatorname{arctg} \frac{Z_2}{b} - \operatorname{arctg} \frac{Z_1}{b} \right)$ $m = \frac{\mu}{\mu - 1} - \frac{c}{b + c}$	$\rho_{ка} = \rho_1 \frac{(\mu - 1)(\theta_1 - \theta_2)}{\mu \pi}$ при $\rho_2 = \rho_1$ $\eta_{ка} = (\eta_2 - \eta_1) \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi}$

Пояснения

Аномальные геофизические поля: гравитационное (Δg_a), магнитное (Z_a), удельное сопротивление ($\rho_{ка}$) и поляризуемость ($\eta_{ка}$).

Тела: шар (Ш), полушары вертикальный (ПШВ) и горизонтальный (ПШГ), цилиндр (Ц), мощный пласт (МП), тонкий пласт (ТП), прямоугольная прямая призма (ПР), вертикальный уступ (У).

Размерности: линейные величины в м, $\Delta\sigma$ -избыточная плотность в г/см³; $G=6.67\cdot 10^3$ внесистемный вариант гравитационной постоянной, позволяющий получать Δg_a в мГл.; $\Delta\chi$ -избыточная магнитная восприимчивость в системе СГС ($\Delta\chi_{СГС}=4\pi\cdot\Delta\chi_{СИ}$); J_i -интенсивность вертикального намагничивания: $J_i=\Delta\chi\cdot Z_n$; Z_n – нормальное поле Земли: $Z_n\approx 0.5$ Э; 1 Эрстед=10⁵ нТл.; $\text{artg } x$ в радианах; ρ_1 и ρ_2 – удельное сопротивление вмещающей среды и тела, соответственно; $\mu=\rho_2/\rho_1$; $K=(\mu-1)/(\mu+1)$; $K_1=(\mu-1)/(2\mu+1)$; $\rho_k=\rho_1+\rho_{ка}$; $\eta_k=1-\rho_k/\rho_k^*$; $\rho_1^*=\rho_1/(1-\eta_1)$; $\rho_2^*=\rho_2/(1-\eta_2)$; $\mu^*=\rho_2^*/\rho_1^*$; $\rho_k^*=\rho_1^*+\rho_{ка}^*$; $\eta_{ка}=\eta_k-\eta_1$; графики $\rho_{ка}$ и $\eta_{ка}$ подобны графикам Z_a ; $x_э=0$ (кроме уступа).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому

комитету

С.А. Уиоров



**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Александрова Ж. Н.

Екатеринбург

2020



ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

Ж. Н. Александрова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

Часть 1

Расчет доз внешнего и внутреннего облучения

**Екатеринбург
2020**

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

Ж. Н. Александрова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

Часть 1
Расчет доз внешнего и внутреннего облучения

Рецензент: Шапов В.А., старший научный сотрудник
Института геофизики УрО РАН, д-р геол.-мин. наук

Александрова Ж.Н.

- А46 Лабораторный практикум по радиационной безопасности: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине "Радиационная безопасность" для студентов специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки» очной и заочной формы обучения; Часть 1. Расчет доз внешнего и внутреннего облучения / Ж. Н. Александрова; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2020. – 32 с.

В учебно-методическом пособии кратко изложены сведения об ионизирующих излучениях и их основных свойствах, рассмотрено воздействие ионизирующего излучения на ткани организма, приведены специальная терминология по вопросам радиационной безопасности и значения предельно допустимых уровней облучения, описана методика расчета доз при внешнем и внутреннем облучении. Пособие содержит руководства к выполнению трех лабораторных работ по расчету доз облучения в различных ситуациях.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся специализациям «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» по специальности «Технология геологической разведки»

© Александрова Ж.Н., 2020
© Уральский государственный
горный университет, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ	5
1.1. Ионизирующие излучения и их свойства	5
1.2. Специальная терминология по вопросам радиационной безопасности	9
1.3. Воздействие ионизирующего излучения на ткани организма	12
1.4. Расчет доз облучения	17
1.5. Предельно допустимые уровни облучения	21
2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	22
2.1. Определение предельно допустимого времени пребывания на различных расстояниях от источника гамма-излучения	22
Задание	22
Материалы и оборудование	22
Порядок выполнения работы	22
Контрольные вопросы	24
Содержание отчета	24
2.2. Определение дозы внутреннего облучения при попадании радиоактивного вещества внутрь организма	25
Задание	25
Материалы и оборудование	26
Порядок выполнения работы	26
Контрольные вопросы	27
Содержание отчета	27
2.3. Определение дозы внешнего облучения при работе на территориях с повышенной радиоактивностью	27
Задание	27
Материалы и оборудование	29
Порядок выполнения работы	29
Контрольные вопросы	31
Содержание отчета	31
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	32

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время во многих отраслях практической деятельности человека применяются радиоактивные вещества и ионизирующие излучения. Расширяется применение радиоактивных изотопов и источников ионизирующих излучений в промышленности, медицине, науке, технике, геологоразведочной отрасли. В условиях роста количества работающих с ионизирующими излучениями вопросам радиационной безопасности должно придаваться большее значение.

Радиационная безопасность – это составная часть экологической безопасности человека. Обеспечение экологической безопасности при обращении с радиоактивными веществами предполагает такое обращение с ними, при котором наступление вредных последствий для здоровья и жизни человека было бы невозможно.

"Граждане Российской Федерации, иностранные граждане и лица без гражданства, проживающие на территории Российской Федерации, имеют право на радиационную безопасность. Это право обеспечивается за счет проведения комплекса мероприятий по предотвращению радиационного воздействия на организм человека ионизирующего излучения выше установленных норм, правил и нормативов, выполнения гражданами и организациями, осуществляющими деятельность с использованием источников ионизирующего излучения, требований к обеспечению радиационной безопасности" (статья 22 Федерального закона «О радиационной безопасности населения»).

Радиационная безопасность достигается совокупностью мер: правовых, технических, экономических, воспитательных и т.д. Ряд мер находится в ведении государства и специальных служб. Но многое зависит непосредственно от лиц, работающих с радиоактивными веществами – от их теоретических знаний и практических навыков при обращении с источниками ионизирующих излучений. Поэтому обучение персонала в области обеспечения радиационной безопасности приобретает важное значение.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Ионизирующие излучения и их свойства

Ионизация. Ионизация – это процесс образования разделенных электрических зарядов. Процесс образования положительного иона состоит в вырывании электрона с электронной оболочки нейтрального атома, для чего необходимо затратить некоторую энергию. Для большинства атомов эта энергия лежит в пределах от 9 до 30 эВ. Если энергия, переданная атому, меньше энергии, необходимой для вырывания электрона, то ионизации не происходит. В этом случае может произойти возбуждение атома. Возбужденный атом обладает избытком энергии, которая освобождается в виде излучения (обычно ультрафиолетового) при возвращении атома в нормальное состояние.

Электрон, вырванный из атома в результате ионизации, как правило, не остается долго в свободном состоянии, он “прилипает” к нейтральному атому или нейтральной молекуле, образуя отрицательный ион. Таким образом, в обычных условиях ионы образуются парами. Возникшие ионы исчезают в результате их рекомбинации, т.е. процесса воссоединения отрицательных и положительных ионов, в котором образуются нейтральные атомы или молекулы.

Число ионов, исчезающих из единицы объема среды в единицу времени в результате рекомбинации q_α , пропорционально концентрации положительных и отрицательных ионов:

$$q_\alpha = \alpha n_1 n_2, \quad (1)$$

где n_1 – число положительных ионов в 1 см^3 , n_2 – число отрицательных ионов в 1 см^3 , α – коэффициент рекомбинации, $\text{см}^3/\text{с}$ (для малых ионов в воздухе при нормальных условиях $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$).

Ионизирующие излучения. Ионизирующими называются излучения, которые прямо или косвенно способны ионизировать среду. К ним относятся рентгеновское и γ -излучение, а также излучения, состоящие из потоков заряженных или нейтральных частиц, обладающих достаточными для ионизации энергиями.

Радиоактивные препараты обычно испускают ионизирующие α - и β -частицы, γ -лучи и нейтроны. Кроме перечисленных видов излучений могут быть использованы потоки протонов, тяжелых ядер, а также частицы, возникающие при различных ядерных реакциях.

Альфа-частицы — это положительно заряженные ядра атомов гелия. Обладают малой проникающей способностью. Оценить пробег α -частиц в воздухе можно с помощью следующей эмпирической формулы:

$$R_{\alpha}(E) = 0,316 \cdot E_{\alpha}^{3/2},$$

где $R_{\alpha}(E)$ - пробег α -частицы в воздухе в см; E_{α} - энергия α -частицы в МэВ.

Наиболее проникающие α -частицы могут пройти слой воздуха при нормальном атмосферном давлении не более 11 см. В твердом веществе пробег α -частиц составляет микроны и может быть найден с помощью эмпирической зависимости *Брегга-Климэна* :

$$L_{\alpha}(E) = 3,2 \cdot 10^{-4} \cdot R_{\alpha}(E) \cdot \frac{\sqrt{A}}{\rho},$$

где A - атомный вес, а ρ - плотность среды переноса α -частицы с начальной энергией E .

Например, в воде пробег α -частиц не превышает 150 микрон, а верхний слой отмерших клеток кожи человека (эпидермис) защищает его от внешнего α -излучения.

Альфа-частицы обладают большой ионизирующей способностью. Вследствие большой начальной энергии при столкновении с молекулами поглощающей среды α -частица на пути своего движения образует сотни тысяч пар ионов.

Бета-частицы — это поток электронов или позитронов. Их проникающая способность значительно выше, чем у α -частиц. Оценить пробег электронов в среде можно, используя следующую эмпирическую связь:

$$\begin{cases} R_m = 0,407 \cdot E_{\max}^{1.38} & \text{при } E_{\max} \leq 0,8 \text{ МэВ}, \\ R_m = 0,54 \cdot E_{\max} & \text{при } E_{\max} > 0,8 \text{ МэВ}, \end{cases}$$

где R_m - массовый пробег электронов в г/см^2 ; $E_{\max}$ - максимальная энергия электронов в МэВ.

Наиболее быстрые β -частицы могут пройти слой алюминия до 5 мм. Ионизирующая способность меньше, чем у α -частиц.

Рентгеновские и γ -лучи — это электромагнитное излучение высокой энергии. Обладают большой проникающей способностью, изменяющейся в широких пределах. Ионизирующая способность значительно меньше, чем у α - и β -частиц.

Нейтроны — нейтральные частицы, обладающие большой проникающей способностью. Ионизирующая способность меньше, чем у α - и β -частиц.

Протоны — положительно заряженные ядра водорода. При одинаковой энергии с α - и β -частицами протоны занимают промежуточное положение между ними по проникающей и ионизирующей способностям.

Космические лучи — лучи, приходящие на Землю из космического пространства. До поверхности Земли космические лучи доходят значительно преобразованными в результате их взаимодействия с атмосферой. Первичные космические лучи состоят в основном из протонов и ядер тяжелых элементов. В результате их взаимодействия с воздухом атмосферы возникают новые частицы: мезоны, электроны, нейтроны и т.д. В результате взаимодействия нейтронов космического излучения с ядрами атомов азота в атмосфере постоянно образуется радиоактивный изотоп углерода — C^{14} . Радиоактивный изотоп водорода — тритий также образуется в атмосфере под действием космического излучения. Космические лучи обладают очень большой проникающей способностью.

В таблицах 1 – 3 приведены данные по прохождению α - и β -частиц и протонов в некоторых средах.

Пробеги α -частиц и полная ионизация в ткани плотностью 1 г/см³ [4]

таблица 1

Энергия α -частиц, МэВ	В воздухе, см	В алюминии, мкм	В биологической ткани, мкм	Полная ионизация, число пар ионов $\times 10^5$
4,0	2,5	16	31	1,1
4,5	3,0	20	37	1,3
5,0	3,5	23	43	1,4
5,5	4,0	26	49	1,6
6,0	4,6	30	56	1,7
6,5	5,2	34	64	1,9
7,0	5,9	38	72	2,0
7,5	6,6	43	81	2,1
8,0	7,4	48	91	2,3
8,5	8,1	53	100	2,4
9,0	8,9	58	110	2,6
9,5	9,8	64	120	2,7
10,0	10,6	69	130	2,9

Средний пробег протонов и полная ионизация в воздухе и ткани плотностью 1 г/см³ [3]

таблица 2

Энергия протонов, МэВ	Воздух, см	Мягкие биологические ткани, мкм	Полная ионизация, число пар ионов
1	2,3	23	9154
2	7,3	73	15841
3	14,7	147	22344
4	24,1	241	28438
5	35,5	355	34293
6	48,6	486	39901
7	64,2	642	45967
8	81,3	813	51707
9	100,4	1004	57529
10	121,1	1211	63214
15	238,0	2380	-

Максимальный пробег β -частиц в различных средах [8]

таблица 3

Энергия β -частиц, МэВ	В воздухе, м	В алюминии, мм	В мягкой ткани, мм
0,01	0,00229	0,00127	0,00247
0,5	1,601	0,837	1,77
1,0	3,936	2,059	4,38
2,0	8,732	4,593	9,84
3,0	13,411	7,741	15,30
4,0	17,858	9,841	20,60
5,0	22,281	11,889	25,80
6,0	25,156	14,259	31,00
8,0	34,377	-	41,30

1.2. Специальная терминология по вопросам радиационной безопасности

Число распадов в секунду в радиоактивном образце называется его **активностью**. Единицу измерения активности (в системе СИ) называют беккерелем (*Бк*) в честь французского ученого Анри Беккереля, открывшего явление радиоактивности.

$$1 \text{ Бк} = 1 \text{ распад/с}$$

Кюри (внесистемная единица) - активность препарата данного изотопа, в котором в одну секунду происходит $3,7 \cdot 10^{10}$ актов распада.

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$$

Концентрация радиоактивного вещества обычно характеризуется концентрацией его активности. Концентрация активности выражается в единицах активности на единицу веса (удельная активность) или на единицу объема (активная концентрация). Единицы измерения концентрации радиоактивного вещества *Бк/кг* (внесистемная единица *Ки/кг*), *Бк/л* и *Бк/м³* (внесистемные единицы *Ки/л*, *Ки/м³*, *эман*).

$$1 \text{ эман} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Ки/л} = 3,7 \text{ Бк/л}$$

Повреждений, вызванных в живом организме излучением, будет тем больше, чем больше энергии оно передаст тканям. Количество переданной организму энергии называется **дозой**.

Дозу излучения организм может получить от любого радионуклида или их смеси независимо от того, находятся ли они вне организма или внутри его (в результате попадания с пищей, водой или воздухом).

Дозы можно рассчитывать по-разному, с учетом того, каков размер облученного участка и где он расположен, один ли человек подвергся облучению или группа людей и в течении какого времени это происходило.

Поглощенная доза - количество энергии излучения, поглощенное единицей массы облучаемого тела (тканями организма). Единица измерения в системе СИ - Грей (*Гр*).

$$1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$$

Но эта величина не учитывает того, что при одинаковой поглощенной дозе альфа излучение гораздо опаснее бета- или гамма-излучений. Если принять во внимание этот факт, то дозу следует умножить на коэффициент, отражающий способность излучения данного вида повреждать ткани организма. Альфа-излучение считается при этом в *20 раз* опаснее других видов излучений. Пересчитанную таким образом дозу называют **эквивалентной дозой**. Ее в системе СИ измеряют в зивертах (*Зв*). Для рентгеновского, гамма- и бета-излучений

$$1 \text{ Зв} = 1 \text{ Дж/кг}$$

Следует учитывать также, что одни части тела (органы, ткани) более чувствительны, чем другие: например при одинаковой эквивалентной дозе облучения возникновение рака в легких более вероятно, чем в щитовидной железе, а облучение половых желез особенно опасно из-за риска генетических повреждений. Поэтому дозы облучения органов и тканей также следует учитывать с разными коэффициентами (табл. 4). Умножив эквивалентные дозы на соответствующие коэффициенты и просуммировав по всем органам и тканям, получим **эффективную эквивалентную дозу**, отражающую суммарный эффект облучения для организма. Она также измеряется в зивертах.

Эти три понятия описывают только индивидуально получаемые дозы. Просуммировав индивидуальные эффективные эквивалентные дозы, получен-

ные группой людей, мы получим **коллективную эффективную эквивалентную дозу**, которая измеряется в человеко-зивертах (чел·Зв).

Коэффициенты радиационного риска [7]

таблица 4

Красный костный мозг	0,12
Костная ткань	0,03
Щитовидная железа	0,03
Молочная железа	0,15
Легкие	0,12
Половые железы	0,25
Другие ткани	0,30
Организм в целом	1,00

Соотношение между внесистемными единицами измерения активности и характеристик поля излучения и единицами СИ

таблица 5

Величина	Обозначения и наименования единиц		Связь между единицами
	Внесистемная	Единица СИ	
Активность	<i>Ku</i> (кюри)	<i>Bk</i> (беккерель)	$1 Ku = 3,7 \cdot 10^{10} c^{-1} = 3,7 \cdot 10^{10} Bk$ $1 Bk = 1 c^{-1} = 0,27 \cdot 10^{-10} Ku$
Удельная активность	<i>Ku/кг</i>	<i>Bk/кг</i>	$1 Ku/кг = 3,7 \cdot 10^{10} Bk/кг$ $1 Bk/кг = 0,27 \cdot 10^{-10} Ku/кг$
Объемная активность	<i>Ku/л, эман</i>	<i>Bk/м³</i>	$1 Ku/л = 3,7 \cdot 10^{13} Bk/м³$ $1 Bk/м³ = 0,27 \cdot 10^{-13} Ku/л$ $1 эман = 1 \cdot 10^{-10} Ku/л = 3,7 Bk/л$
Поглощенная доза	<i>рад</i>	<i>Гр</i> (грей)	$1 рад = 100 эрг/г = 0,01 Гр$ $1 Гр = 10^4 эрг/г = 100 рад$
Мощность поглощенной дозы	<i>рад/с</i>	<i>Гр/с</i>	$1 рад/с = 0,01 Гр/с$ $1 Гр/с = 100 рад/с$
Эквивалентная доза	<i>бэр</i> (биологический эквивалент <i>рада</i>)	<i>Зв</i> (зиверт)	$1 бэр = 1 рад/Q^* = 0,01 Гр/Q = 0,01 Зв$ $1 Зв = 1 Гр/Q = 100 рад/Q = 100 бэр$
Мощность эквивалентной дозы	<i>бэр/с</i>	<i>Зв/с</i>	$1 бэр/с = 0,01 Зв/с$ $1 Зв/с = 100 бэр/с$
Экспозиционная доза	<i>P</i> (рентген)	<i>Кл/кг</i>	$1 P = 2,58 \cdot 10^{-4} Кл/кг$ $1 P = 0,88 \cdot 10^{-2} Гр$ в воздухе $1 Кл/кг = 3,88 \cdot 10^3 P$
Мощность экспозиционной дозы	<i>P/с</i>	$\frac{Кл}{кг \cdot с}$	$1 P/с = 2,58 \cdot 10^{-4} Кл/кг \cdot с$ $1 P/с = 0,88 \cdot 10^{-2} Гр/с$ в воздухе $1 Кл/кг \cdot с = 3,88 \cdot 10^3 P/с$

* - коэффициент качества излучения

1.3. Воздействие ионизирующего излучения на ткани организма

Радиация по самой своей природе вредна для жизни. Малые дозы облучения могут "запустить" не до конца еще установленную цепь событий, приводящих к раку или к генетическим повреждениям. При больших дозах радиация может разрушать клетки, повреждать ткани органов и явиться причиной скорой гибели организма.

Повреждения, вызываемые большими дозами облучения, обыкновенно проявляются в течение нескольких часов или дней. Раковые заболевания, однако, проявляются спустя много лет после облучения - как правило, не ранее, чем через одно-два десятилетия. А врожденные пороки развития и другие наследственные болезни, вызываемые повреждением генетического аппарата, проявляются лишь в следующем или последующих поколениях: это дети, внуки и более отдаленные потомки человека, подвергшегося облучению.

Чтобы вызвать острое поражение организма, дозы облучения должны превышать определенный уровень, но нет никаких оснований считать, что это правило действует в случае таких последствий, как рак или повреждение генетического аппарата. По крайней мере, теоретически для этого достаточно самой малой дозы. Однако в то же самое время никакая доза облучения не приводит к этим последствиям во всех случаях. Даже при относительно больших дозах облучения далеко не все люди обречены на эти болезни: действующие в организме человека репарационные механизмы обычно ликвидируют все повреждения. Точно также любой человек, подвергшийся действию радиации, совсем не обязательно должен заболеть раком или стать носителем наследственных болезней; однако вероятность, или риск, наступления таких последствий у него больше, чем у человека, который не был облучен. И риск этот тем больше, чем больше доза облучения.

Механизм воздействия ионизирующего излучения на ткани организма следующий.

Заряженные частицы. Проникающие в ткани организма альфа- и бета-

частицы теряют энергию вследствие электрических взаимодействий с электронами тех атомов, близ которых они проходят. Гамма-излучение и рентгеновские лучи передают свою энергию веществу несколькими способами (фотоэффект, комптон-эффект, эффект образования электрон-позитронных пар), которые в конечном счете также приводят к электрическим взаимодействиям.

Электрические взаимодействия. За время порядка десяти триллионных секунды после того, как проникающее излучение достигнет соответствующего атома в ткани организма, от этого атома отрывается электрон. Последний заряжен отрицательно, поэтому остальная часть исходно нейтрального атома становится положительно заряженной. Этот процесс называется ионизацией. Оторвавшийся электрон может далее ионизировать другие атомы.

Физико-химические изменения. И свободный электрон, и ионизированный атом обычно не могут долго пребывать в таком состоянии и в течение следующих десяти миллиардных долей секунды участвуют в сложной цепи реакций, в результате которых образуются новые молекулы, включая и такие чрезвычайно реакционноспособные, как "свободные радикалы".

Химические изменения. В течение следующих миллионных долей секунды образовавшиеся "свободные радикалы" реагируют как друг с другом, так и с другими молекулами и через цепочку реакций, еще не изученных до конца, могут вызывать химическую модификацию важных в биологическом отношении молекул, необходимых для нормального функционирования клетки.

Биологические эффекты. Биохимические изменения могут произойти как через несколько секунд, так и через десятилетия после облучения и явиться причиной немедленной гибели клеток или таких изменений в них, которые могут привести к раку.

Основную часть облучения население земного шара получает от естественных источников радиации (рис. 1). Большинство из них таковы, что избежать облучения от них совершенно невозможно. На протяжении всей истории существования Земли разные виды излучения падают на поверхность Земли из

космоса и поступают от радиоактивных веществ, находящихся в земной коре, а также полученных человеком в результате его техногенной деятельности.

Человек подвергается облучению двумя способами. Радиоактивные вещества могут находиться вне организма и облучать его снаружи. В этом случае говорят о внешнем облучении. Или же они могут оказаться в воздухе, которым дышит человек, в пище или воде и попасть внутрь организма. Такой способ облучения называют внутренним.

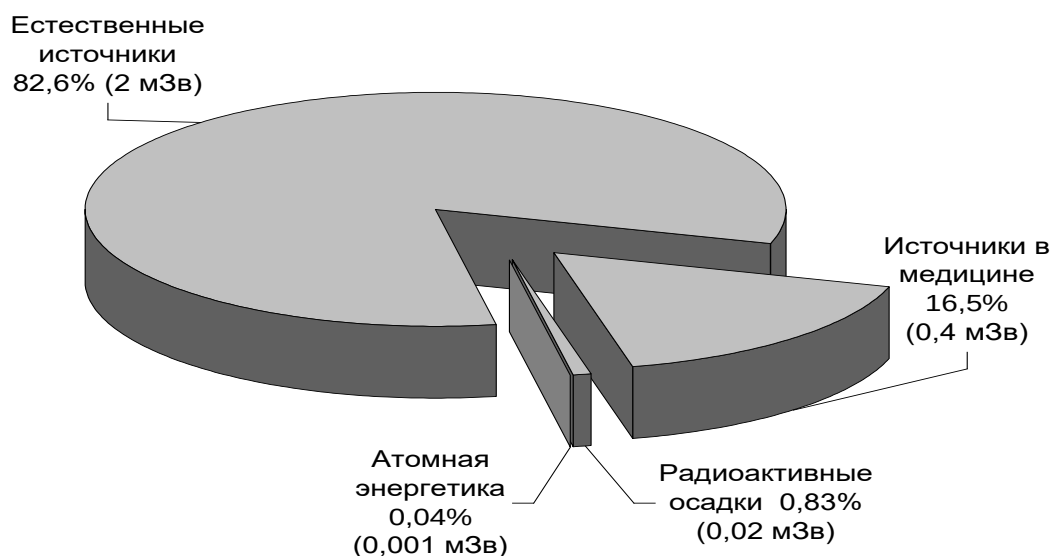


Рис. 1. Источники радиации [7]

Степень радиационного воздействия изотопов, содержащихся в организме человека, определяется создаваемой ими тканевой дозой облучения различных органов и тканей, избирательно накапливающих эти изотопы. Накопление изотопов в организме зависит от скорости их поступления в организм с пищевыми продуктами, водой и воздухом в желудочно-кишечный тракт или легкие, степени усвояемости изотопа из желудочно-кишечного тракта или легких, характера его распределения и времени удержания в организме (табл. 6).

Повреждений, вызванных в живом организме излучением, будет тем больше, чем больше энергии оно передаст тканям (табл. 7).

Биологические и физические константы для некоторых изотопов [5]

Таблица 6

Изотоп	Масса критического органа, г	Периоды полураспада и полу-выведения, дни			Доля изотопа, попадающая в рассматриваемый орган от общего его количества в организме	Доля изотопа, попадающая в рассматриваемый орган при	
		T _{физ}	T _{биол}	T _{эфф}		заглатывании	вдыхании
-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-	-8-
H ³	все тело, 7*10 ⁴	4,5*10 ³	12	12	1,0	0,75	1,0
C ¹⁴	все тело, 7*10 ⁴	2*10 ⁶	10	10	1,0	1,0	0,75
Na ²⁴	все тело, 7*10 ⁴	0,63	11	0,6	1,0	1,0	0,75
P ³²	все тело, 7*10 ⁴	14,3	257	13,5	1,0	0,75	0,63
	кости, 7*10 ³	14,3	1155	14,1	0,21	0,15	0,13
	гол. мозг, 1,5*10 ³	14,3	257	13,5	7·10 ⁻³	5,3·10 ⁻³	4,4·10 ⁻³
K ⁴²	все тело, 7*10 ⁴	0,52	58	0,52	1,0	1,0	0,75
	селезенка, 150	0,52	58	0,52	4·10 ⁻³	4·10 ⁻³	3·10 ⁻³
	гол. мозг, 1,5*10 ³	0,52	58	0,52	0,04	0,04	0,03
	печень, 1,7*10 ³	0,52	58	0,52	0,02	0,02	0,015
Ca ⁴⁵	все тело, 7*10 ⁴	164	16400	162	1,0	0,6	0,55
	кости, 7*10 ³	164	18000	162	0,9	0,54	0,5
Mn ⁵⁶	все тело, 7*10 ⁴	0,11	17	0,11	1,0	0,1	0,3
Fe ⁵⁵	все тело, 7*10 ⁴	1100	800	463	1,0	0,1	0,3
	селезенка, 150	1100	600	388	0,02	0,002	0,006
Fe ⁵⁹	все тело, 7*10 ⁴	45,1	800	42,7	1,0	0,1	0,3
	селезенка, 150	45,1	600	41,9	0,02	0,002	0,006
Co ⁶⁰	все тело, 7*10 ⁴	1900	9,5	9,5	1,0	0,3	0,4
	печень, 1,7*10 ³	1900	9,5	9,5	0,02	0,007	0,02
Ni ⁶⁵	все тело, 7*10 ⁴	0,11	667	0,11	1,0	0,3	0,4
	кости, 7*10 ³	0,11	800	0,11	0,5	0,15	0,2

-1-	-2-	-3-	-4-	-5-	-6-	-7-	-8-
Cu ⁶⁴	все тело, 7*10 ⁴	0,53	80	0,53	1,0	0,28	0,39
	печень, 1,7*10 ³	0,53	150	0,53	0,08	0,02	0,03
	гол. мозг, 1,5*10 ³	0,53	800	0,53	0,01	0,003	0,004
Zn ⁶⁵	все тело, 7*10 ⁴	245	933	194	1,0	0,1	0,3
	кости, 7*10 ³	245	0,001	206	0,16	0,015	0,045
	мышцы, 3*10 ⁴	245	1959	218	0,34	0,03	0,09
Sr ⁹⁰	все тело, 7*10 ⁴	10 ⁴	13000	5700	1,0	0,3	0,4
	кости, 7*10 ³	10 ⁴	18000	6400	0,99	0,09	0,12
Y ⁹⁰	все тело, 7*10 ⁴	2,68	14000	2,68	1,0	0,0001	0,25
	кости, 7*10 ³	2,68	18000	2,68	0,75	7,5·10 ⁻⁵	0,19
J ¹³¹	все тело, 7*10 ⁴	8	138	7,6	1,0	1,0	0,75
	щит. железа., 20	8	138	7,6	0,3	0,3	0,23
Cs ¹³⁷	все тело, 7*10 ⁴	1,1*10 ⁴	70	70	1,0	1,0	0,75
	мышцы, 3*10 ⁴	1,1*10 ⁴	140	138	0,79	0,4	0,3
Ba ¹⁴⁰	все тело, 7*10 ⁴	12,8	65	10,7	1,0	0,05	0,28
	кости, 7*10 ³	12,8	65	10,7	0,7	0,035	0,19
Po ²¹⁰	все тело, 7*10 ⁴	138,4	30	25	1,0	0,06	0,28
	печень, 1,7*10 ³	138,4	41	32	0,22	0,01	0,05
Ra ²²⁶	все тело, 7*10 ⁴	5,9*10 ⁵	8100	900	1,0	0,3	0,4
	кости, 7*10 ³	5,9*10 ⁵	16400	16000	0,99	0,04	0,03
Th ²³²	все тело, 7*10 ⁴	5,1*10 ¹²	57000	57000	1,0	0,0001	0,25
	кости, 7*10 ³	5,1*10 ¹²	73000	73000	0,9	7·10 ⁻⁵	0,18
Th ²³⁴	все тело, 7*10 ⁴	24,1	57000	24,1	1,0	0,0001	0,25
	кости, 7*10 ³	24,1	73000	24,1	0,7	7·10 ⁻⁵	0,18
U ²³⁸	все тело, 7*10 ⁴	1,6*10 ¹²	100	100	1,0	0,0001	0,25
	кости, 7*10 ³	1,6*10 ¹²	300	300	0,85	3,3·10 ⁻⁵	0,083
U ²³⁵	все тело, 7*10 ⁴	2,6*10 ¹¹	100	100	1,0	0,0001	0,25
	кости, 7*10 ³	2,6*10 ¹¹	300	300	0,85	3,3·10 ⁻⁵	0,083
Pu ²³⁹	все тело, 7*10 ⁴	8,9*10 ⁶	65000	64000	1,0	3·10 ⁻⁵	0,25
	кости, 7*10 ³	8,9*10 ⁶	73000	72000	0,9	2,4·10 ⁻⁵	0,2

Эффективная энергия основных радиоактивных изотопов,
передаваемая ткани при каждом акте их распада [5]

Таблица 7

Радиоактивный изотоп	Критический орган	$E_{\Sigma}, \text{МэВ}$
H^3	Все тело	0,01
C^{14}	Все тело, жировая ткань	0,054
	Кости	2,7
Na^{24}	Все тело	2,7
	Легкие	1,5
P^{32}	Все тело,	0,69
	Кости	3,5
Co^{60}	Все тело	1,5
	Легкие, печень	0,72
	Селезенка, почки	0,56
Zn^{65}	Все тело, мышцы	0,32
	Легкие, печень	0,15
	Почки	0,11
	Кости	0,094
Sr^{90}	Все тело, легкие	0,21
	Кости	1,1
Y^{90}	Все тело	0,89
	Легкие	0,87
	Кости	4,4
J^{131}	Все тело	1,6
	Щитовидная железа	0,69
Cs^{137}	Все тело, мышцы	0,59
Ba^{140}	Все тело, мышцы	2,3
	Кости	4,2
Po^{210}	Все тело, легкие, селезенка, почки, печень	55
Ra^{226}	Все тело, кости	110
Th^{232}	Все тело	62
	Кости	270
U^{235}	Все тело, почки, легкие	46
U^{238}	Все тело, легкие, почки	43
	Кости	220
Pu^{239}	Все тело, легкие, печень	53
	Кости	270

1.4. Расчет доз облучения

Тканевую дозу от внешнего γ -излучения радиоактивных изотопов можно определить по величине измеренной ионизации.

Хультковист [10] вывел соотношения для вычисления величины ионизации, создаваемой над поверхностью земли γ -излучением естественных радио-

активных изотопов Ra^{226} , U , Th (в случае равновесия с продуктами их распада) и K , содержащихся в почве (табл. 8).

Данные по ионизации над поверхностью земли [10]

таблица 8

Изотоп	Ионизация, пар ионов/ $см^3 \cdot с$	
	без учета рассеянного излучения *	с учетом многократного рассеяния γ -квантов
Радий-226	$0,6 \cdot 10^{12} C_{Ra}$	$1,26 \cdot 10^{12} C_{Ra}$
Природный уран	$0,2 \cdot 10^6 C_U$	$0,44 \cdot 10^6 C_U$
Торий-232	$0,104 \cdot 10^6 C_{Th}$	$0,21 \cdot 10^6 C_{Th}$
Калий	$48 \cdot C_K$	$91 \cdot C_K$

* C - концентрация радиоактивного изотопа, г/г почвы

Ионизация, создаваемая γ -излучением, и мощность дозы P в воздухе (в Гр/сутки) связаны между собой следующим соотношением:

$$P = \frac{n \cdot 34 \cdot 8,64 \cdot 10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{12} \cdot 770 \cdot 1,12}{10^4} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot n \quad (2)$$

где n - число пар ионов, образованных в $1 см^3$ за $1 с$; 34 - величина средней работы ионизации в воздухе для γ -квантов средних энергий, эВ; $8,64 \cdot 10^4$ - число секунд в сутках; $1,6 \cdot 10^{12}$ - число эргов в 1 эВ; 770 - объем, занимаемый 1 г воздуха, $см^3$; 1,12 - множитель перехода от поглощенной дозы в воздухе к поглощенной дозе в ткани (для γ -квантов средних энергий одному рентгену соответствует поглощенная в 1 г воздуха доза $0,88 \cdot 10^{-2}$ Гр, а в 1 г мягких тканей - $0,98 \cdot 10^{-2}$ Гр).

Используя эту зависимость, Хультквист [10] вывел соотношения, позволяющие определить величину мощности поглощенной дозы на поверхности земли в зависимости от концентрации изотопов Ra^{226} , U , Th и K (с учетом рассеянного излучения в почве):

$$\begin{aligned}
P &= 5 \cdot 10^5 \cdot C_{Ra}, \\
P &= 0,176 \cdot C_U, \\
P &= 8,4 \cdot 10^{-2} \cdot C_{Th}, \\
P &= 3,64 \cdot 10^{-5} \cdot C_K,
\end{aligned}
\tag{3}$$

где C_{Ra} , C_U , C_{Th} и C_K - концентрация радиоактивного изотопа в г/г почвы; P - мощность поглощенной дозы в Гр/сут.

Для естественных радиоактивных изотопов Rn и Tn (и продуктов их распада), содержащихся в атмосферном воздухе, при условии их постоянной концентрации по высоте над поверхностью земли мощность поглощенной дозы можно рассчитать, используя соотношения (4), также полученные Хульткови-стом в предположении, что 60 % аэрозольных частиц, несущих радиоактив-ность продуктов распада Rn и Tn , задерживаются в легочной ткани. Объем лег-ких принят 3000 см^3 , вес 800 г :

$$\begin{aligned}
P &= 1,05 \cdot 10^{-5} \cdot Q_{Rn}, \\
P &= 1,03 \cdot 10^{-5} \cdot Q_{Tn},
\end{aligned}
\tag{4}$$

где P - мощность поглощенной дозы в Гр/сут; Q_{Rn} , Q_{Tn} - концентрация радона и торона в атмосферном воздухе в Бк/л.

В атмосфере постоянно находятся естественные радиоактивные изотопы Rn , Tn и их дочерние продукты, которые непрерывно поступают в легкие чело-века с вдыхаемым воздухом; в легочной ткани накапливаются дочерние про-дукты распада Rn и Tn .

Дозы облучения легких, обусловленные излучением Rn и Tn и их дочер-них продуктов, находящихся в состоянии радиоактивного равновесия в легких, могут быть вычислены с помощью соотношений [9]:

$$\begin{aligned}
P_{Rn} &= 1,35 \cdot 10^2 Q_{Rn}, \\
P_{Tn} &= 17,97 \cdot 10^2 Q_{Tn},
\end{aligned}
\tag{5}$$

где P_{Rn} , P_{Tn} - мощности доз, создаваемых соответственно радоном и тороном в

мЗв/год ; Q_{Rn} и Q_{Tn} - концентрации радона и торона в воздухе в Бк/л .

Если известны мощность дозы P и время облучения t , то доза от внешнего облучения равна их произведению:

$$D = P t \quad (6)$$

Тканевая доза облучения критического органа, в котором отложилась некоторая доля от попавшего в организм радиоактивного изотопа, может быть вычислена по следующему соотношению:

$$D = \frac{C \cdot k \cdot E_{\Sigma} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot t}{M \cdot 10^4}, \quad (7)$$

где D - доза облучения критического органа в Гр ; C - активность изотопа, попавшего в организм, в Бк или расп/с ; k - доля изотопа, отложившегося в критическом органе, от его общего количества во всем организме; E_{Σ} - эффективная энергия, передаваемая ткани органа при каждом акте распада радиоактивного изотопа, в МэВ ; t - время облучения критического органа в с ; M - масса критического органа, в г ; $1,6 \cdot 10^{-6}$ - число эргов в 1 МэВ ; 10^4 - число эрг/г на 1 Гр .

Активность радиоактивного препарата, попавшего в организм, можно рассчитать, если известна его масса :

$$C = \frac{\ln 2 \cdot N_o \cdot m}{T_{1/2} \cdot A}, \quad (8)$$

где $N_o = 6,02 \cdot 10^{23}$ - число Авогадро; m - масса изотопа в г ; $T_{1/2}$ - период его полураспада в с ; A - атомная масса изотопа.

Как видно из соотношения (7), доза в органе, в котором содержится радиоактивный изотоп, зависит от массы облучаемого органа, активности изотопа, содержащейся в этом органе, и энергии испускаемых изотопом частиц и γ -квантов, приходящейся на один распад. На получаемую дозу также будет влиять время пребывания радиоактивного изотопа в органе, которое в свою очередь зависит от периода полураспада радионуклида и периода его полувыведения из органа.

По соотношению (7) можно рассчитывать дозу, если концентрация ра-

диоизотопа в критическом органе практически не меняется во времени (период эффективного полувыведения изотопа очень велик), то есть когда изотоп медленно распадается и выводится.

Если концентрация изотопа в критическом органе во времени ощутимо уменьшается из-за биологического выведения и радиоактивного распада, то через время t после окончания поступления изотопа в орган доза будет равна:

$$D = \frac{C \cdot k \cdot E_{\Sigma} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}}{M \cdot 10^4} \cdot \frac{(1 - e^{-\lambda t})}{\lambda}, \quad (9)$$

где λ - постоянная эффективного выведения ($\lambda = \ln 2 / T_{эфф}$) в c^{-1} .

Если доза рассчитывается за достаточно большой промежуток времени, когда практически весь радиоактивный изотоп удалится из организма, то необходимо использовать следующее соотношение:

$$D = \frac{C \cdot k \cdot E_{\Sigma} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}}{M \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{\lambda}. \quad (10)$$

1.5. Предельно допустимые уровни облучения

Предельно допустимые дозы внешнего и внутреннего облучения регламентируются Нормами радиационной безопасности (НРБ-99/2009) и приведены в таблице 9.

таблица 9

Нормируемые величины	Дозовые пределы, мЗв/год		
	персонал категории А*	персонал категории Б**	население
Эффективная доза	50	12,5	5
Эквивалентная доза в			
1) хрусталике глаза, кроветворных органах, гонадах	150	37,5	15
2) коже, щитовидной железе, костях, легких, печени, почках, мышцах и др.	500	125	50
3) кистях и стопах	500	125	50

* лица, работающие непосредственно с источниками ионизирующих излучений,

** лица, работающие в помещениях, смежных с помещениями, в которых ведутся работы с радиоактивными веществами и источниками ионизирующих излучений, но не занятых непосредственно работой с радиоактивными веществами и источниками ионизирующих излучений.

Для студентов и учащихся в возрасте до 21 года, проходящих обучение с использованием источников ионизирующего излучения, годовые накопленные дозы не должны превышать значений, установленных для населения.

2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

2.1. Определение предельно допустимого времени пребывания на различных расстояниях от источника гамма-излучения

Задание

а) Предварительно отградуированным радиометром измерить мощность экспозиционной дозы на различных расстояниях от источника гамма-излучения Ra^{226} (3,7 МБк).

б) По результатам эксперимента найти предельно допустимое время пребывания на различных расстояниях от источника излучения.

в) Рассчитать теоретически предельно допустимое время пребывания на различных расстояниях от данного источника излучения.

г) Сравнить экспериментальные результаты и теоретические расчеты. Сделать выводы.

Материалы и оборудование

1. Отградуированный радиометр типа СРП-68-01 или СРП-88-01.
2. Радиоизотопный источник Ra^{226} (эталон С-41; 0,1 мг Ra; 3,7 МБк).
3. Калькулятор, миллиметровка, карандаш, резинка, линейка.

Порядок выполнения работы

а) Радиометр установить в 10-ти положениях на различных расстояниях от источника Ra^{226} и измерить мощность экспозиционной дозы P . Расстояние изменять от 0,1 до 1 м с шагом 0,1 м. Для перемещения источника использовать дистанционный инструмент.

б) Рассчитать предельно допустимое время пребывания на различных расстояниях от источника излучения по формуле:

$$t_{max} = \frac{D_{np}}{P}, \quad (11)$$

где D_{np} - предельно допустимая доза за один рабочий день при пятидневной рабочей неделе (для персонала – 0,2 мГр, для населения – 0,02 мГр), P - мощность поглощенной дозы в мГр/ч ($1 \text{ мГр/ч} = 1,13 \cdot 10^5 \text{ мкР/ч}$).

Результаты замеров и последующих расчетов занести в таблицу:

Расстояние R , м	Мощность дозы P		t_{max} , ч	$t_{max}^{теор}$, ч
	в мкР/ч	в мГр/ч		
1	2	3	4	5

в) Теоретически рассчитать предельно допустимое время пребывания на различных расстояниях от источника излучения по формуле:

$$t_{max}^{теор} = \frac{D_{np}}{84} \cdot R^2, \quad (12)$$

где D_{np} - предельно допустимая доза за один рабочий день при пятидневной рабочей неделе (для персонала – 0,2 мГр, для населения – 0,02 мГр), 84 – постоянная источника Ra^{226} типа С-41, R – расстояние до источника излучения в м.

Результаты теоретических расчетов занести в таблицу.

г) По экспериментальным данным и теоретическим расчетам на одних координатных осях построить графики зависимости $t_{max} = f(R)$ и $t_{max}^{теор} = f(R)$ для персонала и населения (рис.2).

д) Сделать выводы. Объяснить, почему кривая $t_{max} = f(R)$ лежит ниже теоретически рассчитанной кривой $t_{max}^{теор} = f(R)$ или почему теоретически рассчитанное время пребывания возле источника больше найденного экспериментально.

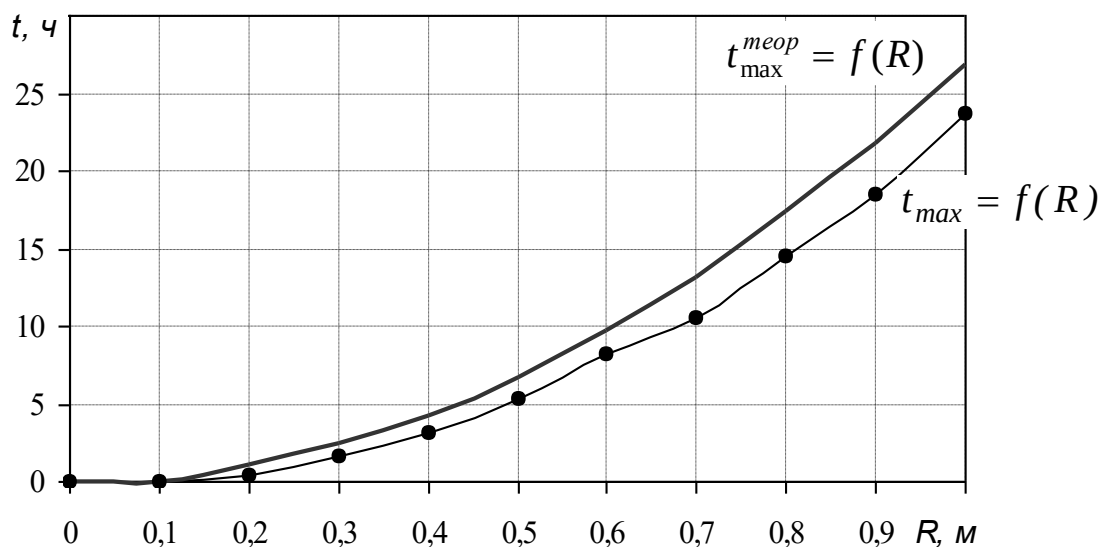


Рис. 2. Образец оформления графиков зависимости $t_{\max} = f(R)$ и $t_{\max}^{\text{теор}} = f(R)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение экспозиционной дозы.
2. Дайте определение поглощенной дозы.
3. Какова связь между мкР и мГр ?
4. Какова связь между дозой и мощностью дозы ?
5. Как зависит доза от расстояния между источником ионизирующего излучения и детектором ?
6. Как зависит доза от времени пребывания возле источника ?
7. Как влияет рассеянное гамма-излучение источника на дозу внешнего облучения ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения измерений и расчетов.
3. Результаты измерений и расчетов.
4. Графики зависимости $t_{\max} = f(R)$ и $t_{\max}^{\text{теор}} = f(R)$ для персонала и населения.
5. Выводы.

2.2. Определение дозы внутреннего облучения при попадании радиоактивного вещества внутрь организма

Задание

а) Познакомиться с основными теоретическими положениями при расчете тканевых доз облучения.

б) По заданному преподавателем варианту условий рассчитать дозу внутреннего облучения от радиоактивного вещества, попавшего внутрь организма, за период, равный времени полного выведения радионуклида из организма. При расчете пользоваться справочными данными табл. 6 и табл. 7.

в) Сделать выводы о последствиях внутреннего облучения всего организма или отдельных органов данным радиоактивным веществом.

г) Варианты условий расчета дозы внутреннего облучения

таблица 10

Вариант задания	Радиоактивный изотоп, попавший внутрь организма	Количество радиоактивного изотопа, г	Орган или ткань организма для расчета дозы
-1-	-2-	-3-	-4-
1	H ³	10 ⁻⁶	все тело
2	C ¹⁴	10 ⁻⁶	все тело
3	Na ²⁴	10 ⁻⁹	все тело
4	P ³²	10 ⁻⁹	все тело
5	P ³²	10 ⁻⁹	кости
6	Co ⁶⁰	10 ⁻⁹	все тело
7	Co ⁶⁰	10 ⁻⁹	печень
8	Zn ⁶⁵	10 ⁻⁹	все тело
9	Zn ⁶⁵	10 ⁻⁹	кости
10	Zn ⁶⁵	10 ⁻⁹	мышцы
11	Sr ⁹⁰	10 ⁻⁹	все тело
12	Sr ⁹⁰	10 ⁻⁹	кости
13	Y ⁹⁰	10 ⁻⁹	все тело
14	Y ⁹⁰	10 ⁻⁹	кости
15	J ¹³¹	10 ⁻⁹	все тело
16	J ¹³¹	10 ⁻⁹	щитовидная железа
17	Cs ¹³⁷	10 ⁻⁹	все тело
18	Cs ¹³⁷	10 ⁻⁹	мышцы
19	Ba ¹⁴⁰	10 ⁻⁹	все тело

-1-	-2-	-3-	-4-
20	Ba ¹⁴⁰	10 ⁻⁹	кости
21	Po ²¹⁰	10 ⁻⁹	все тело
22	Po ²¹⁰	10 ⁻⁹	печень
23	Ra ²²⁶	10 ⁻⁹	все тело
24	Ra ²²⁶	10 ⁻⁹	кости
25	Th ²³²	10 ⁻⁹	все тело
26	Th ²³²	10 ⁻⁹	кости
27	U ²³⁵	10 ⁻⁹	все тело
28	U ²³⁵	10 ⁻⁹	кости
29	U ²³⁸	10 ⁻⁹	все тело
30	U ²³⁸	10 ⁻⁹	кости
31	Pu ²³⁹	10 ⁻⁹	все тело
32	Pu ²³⁹	10 ⁻⁹	кости

Материалы и оборудование

1. Справочная информация из табл. 6 и 7 настоящего методического пособия.
2. Калькулятор.

Порядок выполнения работы

а) По формуле (8) рассчитать активность радиоактивного препарата, попавшего в организм.

б) Если изотоп медленно распадается и выводится, и концентрация радиоизотопа в критическом органе или всем теле практически не меняется во времени, то есть когда период эффективного полувыведения изотопа очень велик (см. табл. 6), то при расчете дозы использовать формулу 7. Время t принять равным времени полного выведения радионуклида из организма, то есть $t = T_{эфф}/\ln 2$

Если концентрация изотопа в критическом органе или всем теле ощутимо уменьшается во времени вследствие биологического выведения и радиоактивного распада, то при расчете дозы использовать формулу 9, также приняв время t равным $T_{эфф}/\ln 2$.

в) Сделать выводы об опасности либо безопасности рассчитанной дозы и возможных последствиях.

Контрольные вопросы

1. Как влияет период полураспада и атомная масса радионуклида на величину его активности ?
2. Как влияет масса критического органа или ткани человека на величину поглощенной дозы ?
4. Как влияет время пребывания радионуклида в критическом органе или ткани человека на величину поглощенной дозы ?
5. Как влияет энергия частиц, излучаемых радионуклидом, на величину поглощенной дозы ?
6. От чего зависит период эффективного полувыведения радионуклида из организма ?
7. Если период полураспада радионуклида велик, а период его биологического полувыведения из организма мал, то каков будет период эффективного полувыведения радионуклида ? Почему ?
8. Если период полураспада радионуклида мал, а период его биологического полувыведения из организма велик, то каков будет период эффективного полувыведения радионуклида ? Почему ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения расчетов.
3. Результаты расчетов.
4. Выводы.

2.3. Определение дозы внешнего облучения при работе на территориях с повышенной радиоактивностью

Задание

- а) Рассчитать дозу внешнего облучения оператора-радиометриста, выполняющего профильную спектрометрическую гамма-съемку в зоне уран-тори-

евого оруденения (рудное тело выходит на дневную поверхность). Скорость перемещения оператора по профилю – 3 км/ч. Время измерений на точке – 2 мин. Расстояние между точками измерений – 50 м. Исходными данными для расчета считать результаты измерений концентрации урана, тория и калия по профилю (табл. 11).

б) Построить графики распределения по профилю концентрации урана, тория, калия и суммарной мощности поглощенной дозы (рис. 3).

в) Сравнить рассчитанную дозу с дозовым пределом для населения (табл.9). Оценить возможность работы оператора в данных условиях в течение месяца при условии, что рабочий день составляет 8 часов. Дать объяснения.

г) Варианты условий расчета:

таблица 11

№ пи- кета	Вариант 1			Вариант 2			Вариант 3			Вариант 4		
	C _u , %	C _{Th} , %	C _k , %	C _u , %	C _{Th} , %	C _k , %	C _u , %	C _{Th} , %	C _k , %	C _u , %	C _{Th} , %	C _k , %
1	0,01	0,02	1,28	0,01	0,02	1,69	0,01	0,02	2,07	0,00	0,02	2,07
2	0,01	0,02	1,28	0,01	0,02	1,68	0,01	0,02	2,06	0,01	0,02	2,06
3	0,02	0,02	1,36	0,02	0,01	1,70	0,02	0,04	2,07	0,02	0,04	2,07
4	0,09	0,10	1,4	0,09	0,03	1,90	0,09	0,17	1,90	0,04	0,17	1,90
5	0,40	0,17	1,35	0,4	0,28	2,10	0,15	0,37	2,10	0,07	0,37	1,97
6	0,60	0,27	1,34	0,74	0,46	2,16	0,32	0,63	2,16	0,19	0,63	2,06
7	0,70	0,33	1,30	1,20	0,54	2,40	0,38	0,71	2,40	0,38	0,71	2,14
8	1,20	0,35	1,43	1,39	0,55	2,17	0,29	0,55	2,17	0,61	0,87	2,17
9	1,50	0,37	1,72	1,08	0,45	2,53	0,13	0,37	2,21	0,69	1,13	2,21
10	1,00	0,34	1,80	0,58	0,34	2,19	0,68	0,96	2,19	0,87	1,26	2,29
11	0,50	0,36	1,54	0,50	0,36	2,07	1,00	1,36	2,36	0,99	1,45	2,36
12	0,60	0,57	1,46	0,60	0,35	1,97	0,90	1,53	2,19	0,90	1,35	2,19
13	0,70	0,82	1,42	0,53	0,29	1,83	0,65	1,16	2,07	0,65	1,16	2,07
14	0,90	1,00	1,35	0,39	0,27	1,80	0,47	0,75	2,03	0,47	0,75	2,03
15	0,40	0,50	1,35	0,30	0,20	1,74	0,30	0,48	1,98	0,30	0,48	2,04
16	0,20	0,30	1,32	0,20	0,13	1,67	0,11	0,196	1,90	0,11	0,20	2,02
17	0,10	0,20	1,35	0,10	0,06	1,75	0,05	0,08	1,91	0,07	0,08	1,97
18	0,04	0,08	1,34	0,04	0,03	1,60	0,03	0,03	1,82	0,04	0,03	1,92
19	0,02	0,01	1,35	0,02	0,01	1,64	0,02	0,01	1,94	0,02	0,01	1,99
20	0,01	0,01	1,40	0,01	0,01	1,64	0,01	0,01	1,98	0,01	0,01	2,06

продолжение таблицы 11

№ пи- кета	Вариант 5			Вариант 6			Вариант 7			Вариант 8		
	$C_U, \%$	$C_{Th}, \%$	$C_K, \%$	$C_U, \%$	$C_{Th}, \%$	$C_K, \%$	$C_U, \%$	$C_{Th}, \%$	$C_K, \%$	$C_U, \%$	$C_{Th}, \%$	$C_K, \%$
1	0,00	0,02	1,79	0,00	0,02	2,14	0,00	0,02	2,14	0,02	0,02	2,05
2	0,04	0,02	1,88	0,03	0,02	2,12	0,02	0,02	2,12	0,02	0,02	2,04
3	0,02	0,04	1,86	0,02	0,04	2,02	0,02	0,00	2,02	0,02	0,01	2,02
4	0,04	0,04	1,90	0,20	0,04	2,02	0,04	0,06	2,02	0,09	0,01	2,02
5	0,07	0,17	1,97	0,27	0,09	2,12	0,07	0,15	2,12	0,39	0,03	2,12
6	0,18	0,45	2,06	0,28	0,10	2,18	0,18	0,22	2,18	0,59	0,08	2,36
7	0,38	0,65	2,20	0,38	0,07	2,29	0,29	0,4	2,29	0,29	0,16	2,29
8	0,29	0,85	2,23	0,52	0,1	2,36	0,52	0,61	2,36	0,92	0,36	2,23
9	0,77	1,08	2,30	0,77	0,53	2,40	0,94	0,98	2,65	1,60	0,64	2,55
10	0,89	1,20	2,35	0,89	0,12	2,35	1,80	1,52	2,85	2,18	0,83	2,96
11	0,30	0,26	2,10	0,64	0,07	2,23	0,87	1,13	2,59	1,10	0,55	2,59
12	0,90	0,15	2,19	0,54	0,15	2,19	0,30	0,57	2,42	0,30	0,11	2,42
13	0,65	0,06	2,13	0,60	0,10	2,13	0,18	0,32	2,37	0,12	0,07	2,37
14	0,14	0,04	2,03	0,39	0,06	2,10	0,28	0,92	2,21	0,07	0,03	2,21
15	0,30	0,04	2,04	0,30	0,04	2,10	0,13	0,36	2,28	0,04	0,07	2,10
16	0,11	0,02	2,02	0,11	0,01	2,11	0,04	0,13	2,11	0,04	0,01	2,00
17	0,02	0,01	2,04	0,03	0,01	2,12	0,03	0,04	2,12	0,03	0,02	1,97
18	0,04	0,03	2,07	0,04	0,01	2,16	0,01	0,02	2,07	0,04	0,01	2,07
19	0,02	0,01	2,12	0,02	0,01	2,12	0,02	0,05	2,12	0,02	0,03	2,05
20	0,01	0,01	2,06	0,01	0,01	2,06	0,01	0,01	2,06	0,01	0,01	2,15

Материалы и оборудование

1. Справочная информация из таблицы 9 настоящего методического пособия.
2. Калькулятор, миллиметровка, карандаш, резинка, линейка.

Порядок выполнения работы

а) Используя соотношения (3) рассчитать мощности поглощенных доз P_U , P_{Th} , P_K на поверхности земли в зависимости от концентрации изотопов U , Th и K . Следует иметь в виду, что в приведенных соотношениях концентрации радиоактивных изотопов C_U , C_{Th} и C_K представлены в г/г почвы, а мощности поглощенных доз P получают в Гр/сут. Чтобы C_U , C_{Th} и C_K подставлять в %, а P получать в Гр/ч, необходимо правую часть равенств умножить на 10^{-2} ($1 \% = 10^{-2}$ г/г) и разделить на 24 (1 сут. = 24 ч.):

$$\begin{aligned}
 P_U &= 7,33 \cdot 10^{-5} \cdot C_U, \\
 P_{Th} &= 3,5 \cdot 10^{-5} \cdot C_{Th}, \\
 P_K &= 1,52 \cdot 10^{-8} \cdot C_K
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Чтобы мощности поглощенных доз выразить в $мГр/ч.$, следует полученные значения P_U, P_{Th}, P_K умножить на 10^3 .

б) Общую мощность поглощенной дозы в i -той точке профиля от ионизирующего действия γ -излучений U (и продуктов его распада), Th (и продуктов его распада) и K , содержащихся в почве, находят суммированием:

$$P_{\Sigma i} = P_{Ui} + P_{Thi} + P_{Ki} . \tag{13}$$

Распределения по профилю концентрации урана, тория, калия и суммарной мощности поглощенной дозы вынести на график, образец оформления которого представлен на рис.3.

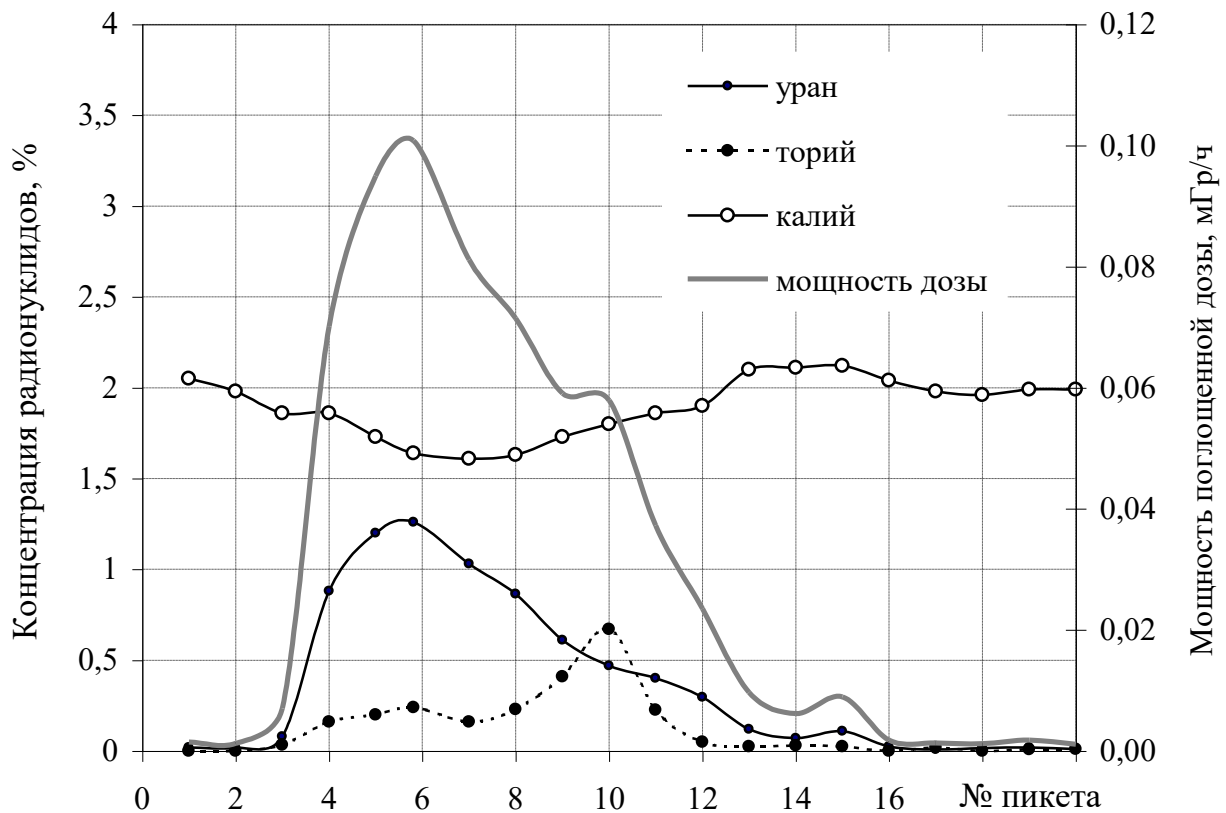


Рис. 3. Образец оформления графиков распределения по профилю концентрации урана, тория, калия и суммарной мощности поглощенной дозы

в) Величину поглощенной дозы находят

$$D = \sum_{i=1}^n P_{\Sigma i} \cdot t_i, \quad (14)$$

где $P_{\Sigma i}$ - общая мощность поглощенной дозы в i -той точке профиля; t_i - время пребывания в i -той точке профиля (с учетом времени перехода от одной точки к другой).

Контрольные вопросы

1. Как связаны между собой величина ионизации, создаваемая γ -излучением, и мощность поглощенной дозы ?
2. Как связаны между собой доза и мощность дозы ?
3. Как оценить возможное время пребывания в условиях повышенного гамма-фона, если известна мощность экспозиционной или поглощенной дозы ?
4. В каких единицах измеряют поглощенную дозу и мощность поглощенной дозы ?
5. Какой из изотопов U , Th или K вносит наибольший вклад в суммарную мощность поглощенной дозы ? Почему ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения расчетов.
3. Графики распределения по профилю концентрации урана, тория, калия и суммарной мощности поглощенной дозы.
4. Результаты расчета величины поглощенной дозы оператором-радиометристом.
5. Выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герфорд Л., Кох Х., Хюбнер К.* Практикум по радиоактивности и радиохимии: пер. с нем. – М.: Мир, 1984.
2. *Голубев В.П.* Дозиметрия и защита от ионизирующих излучений - М.: Энергоатомиздат, 1986.
3. *Гусев Н.Г.* Защита от ионизирующих излучений. Том 1. Физические основы защиты от излучений – М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. *Краткий справочник инженера-физика..* Ядерная физика. Атомная физика / Под ред. Федорова Н.Д. – М.: Госатомиздат, 1961.
5. *Моисеев А.А., Иванов В.И.* Краткий справочник по радиационной защите и дозиметрии. – М.: Атомиздат, 1964.
6. *Нормы радиационной безопасности (НРБ-99/2009)* – М.: Федеральный центр гигиены и эпидемиологии Роспотребнадзора, 2009.-100 с.
7. *Основные санитарные правила обеспечения радиационной безопасности (ОСПОРБ-99/2010)* - М.: Федеральный центр гигиены и эпидемиологии Роспотребнадзора, 2010. – 83 с.
8. *Радиация. Дозы, эффекты, риск:* пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
9. *Холл Э. Дж.* Радиация и жизнь: пер. с англ. – М.: Медицина, 1989.
10. *Хультквист Б.* Ионизирующее излучение естественных источников: пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

Учебное издание

Александрова Жанна Николаевна

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки»
очной и заочной формы обучения

Часть 1

Расчет доз внешнего и внутреннего облучения

Редактор _____
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать ____ . ____ . 2018 г.
Бумага писчая. Формат 60 x 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 100. Заказ _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

2020



0

ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

Ж. Н. Александрова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

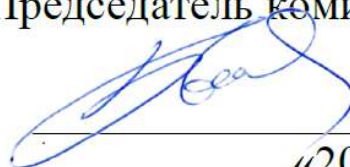
Часть 2

Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий

**Екатеринбург
2020**

Федеральное агентство по образованию
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

Ж. Н. Александрова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

Часть 2
Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий

Рецензент: Щапов В.А., старший научный сотрудник
Института геофизики УрО РАН, д-р геол.-мин. наук

Александрова Ж.Н.

- А46 Лабораторный практикум по радиационной безопасности: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине "Радиационная безопасность" для студентов специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки» очной и заочной формы обучения; Часть 2. Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий / Ж. Н. Александрова; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2020. – 26 с.

В учебно-методическом пособии дан краткий обзор существующих способов реабилитации радиоактивно загрязненных территорий, приведены приближенная теория и сведения о практическом применении ботанической реабилитации зараженных почв. Пособие содержит руководства к выполнению двух лабораторных работ по изучению распределения радионуклидов в почвах Чернобыльского следа и факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся специализациям «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» по специальности «Технология геологической разведки».

© Александрова Ж.Н., 2020

© Уральский государственный
горный университет, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. БОТАНИЧЕСКАЯ РЕАБИЛИТАЦИЯ РАДИОАКТИВНО ЗАГРЯЗНЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ	5
1.1. Краткий обзор существующих способов дезактивации радиоактивно загрязненных территорий	5
1.2. Теория ботанической реабилитации	6
1.2.1. Предпосылки к применению метода ботанической реабилитации ..	6
1.2.2. Основные количественные соотношения	11
1.2.3. Оценка сроков реабилитации	13
1.2.4. Понятие о факторе ботанической реабилитации и способы его количественной оценки	15
1.3. Практическое применение ботанической реабилитации	16
2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	20
2.1. Изучение распределения радионуклида Cs^{137} в почвах Чернобыльского следа	20
Задание	20
Материалы и оборудование	20
Порядок выполнения работы	20
Контрольные вопросы	22
Содержание отчета	22
2.2. Определение факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения ..	
Задание	23
Материалы и оборудование	24
Порядок выполнения работы	24
Контрольные вопросы	25
Содержание отчета	25
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	26

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий в биосфере нашей планеты появились новые компоненты - искусственно синтезированные человеком радиоактивные изотопы. Загрязнение биосферы радиоактивными материалами связано с быстрым ростом атомной промышленности и увеличением применения энергии расщепленного ядра атома.

Проблема радиоактивного загрязнения биосферы привлекает внимание широкого круга специалистов: медиков, биофизиков, геофизиков, радиоэкологов, так как стала очевидна возможная опасность серьезных последствий, вызванных действием на живые организмы ионизирующих излучений, источником которых являются рассеиваемые в природе радиоактивные изотопы.

Особую актуальность эти проблемы приобретают в случае аварийных ситуаций, связанных с выбросами радиоактивных веществ в атмосферу. Такие случаи могут приводить к выведению из сельскохозяйственного оборота больших площадей, где будет невозможно проживание людей и получение продукции, отвечающей нормативным требованиям.

Многие радиоактивные вещества, образующиеся в результате деления тяжелых ядер, играют важную роль в биотическом цикле, в том числе долгоживущие радиоактивные изотопы (например, Sr^{90} и Cs^{137} с периодами полураспада соответственно 28 и 30 лет), так как растворимы в воде и могут участвовать в пищевой цепочке человека. Они активно поглощаются растениями из зараженного почвенного слоя и попадают в продукты питания как растительного, так и животного происхождения.

Повышение уровня радиоактивности в сельском хозяйстве в результате радиоактивного загрязнения почв после выпадения радиоосадков и других возможных причин загрязнения почвенного покрова указывает на необходимость дезактивационных мероприятий, целью которых является исключение неблагоприятных последствий распространения радиоактивных продуктов в природе.

1. БОТАНИЧЕСКАЯ РЕАБИЛИТАЦИЯ РАДИОАКТИВНО ЗАГРЯЗНЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ

1.1. Краткий обзор существующих способов дезактивации радиоактивно загрязненных территорий

В настоящее время в качестве способов дезактивации загрязненных радионуклидами почв используются механические и химические способы [5], а также пассивное ожидание уменьшения радиационного фона за счет естественного распада радионуклидов.

Механическая дезактивации почвы осуществляется путем удаления верхнего слоя почвы с последующим его захоронением на специально отведенных территориях, либо путем глубокой вспашки, в результате которой верхний горизонт сбрасывается ниже границы корнеобитаемого слоя, а более глубокие горизонты переносятся на дневную поверхность [5]. Указанные приемы существенно снижают плодородие почв, так как они связаны с удалением поверхностного, наиболее плодородного слоя почвы или захоронением этого слоя на глубину. На естественное восстановление изъятого слоя почвы, в зависимости от климатических условий, требуются многие десятки и даже сотни лет [4]. Кроме того, механическая дезактивация абсолютно не пригодна для песчаных почв с тонким плодородным слоем, как, например, в Белоруссии, поскольку ее осуществление может привести к невозможности дальнейшего сельскохозяйственного использования таких территорий. Другим ограничивающим фактором для применения механической дезактивации является трудность, связанная с транспортировкой большой снятой массы почвы и организацией специальных "могильников". Здесь возникают проблемы ветровой эрозии и загрязнения грунтовых и питьевых вод.

При химической дезактивации почв предлагается проводить выщелачивание радиоактивных изотопов Cs^{137} и Sr^{90} с помощью химических агентов. Однако применение этой технологии связано с проблемой выбора химического агента. Невозможно подобрать такой агент, который действовал бы только на

атомы Cs^{137} и Sr^{90} , поскольку в системе почва - почвенный раствор будут всегда находиться различные соединения других элементов, которые так же, как соединения Cs^{137} и Sr^{90} , будут вступать в реакции с этим агентом. Применение химических соединений может ухудшать физические и химические свойства почв и приводить их в состояние, когда нормальная жизнедеятельность растений будет затруднена или исключена вовсе. Кроме того, химическое выщелачивание опасно применять на территориях с неглубоким уровнем грунтовых вод, так как это может привести к загрязнению последних.

Пассивное ожидание снижения уровня радиоактивности за счет естественного распада изотопов Cs^{137} и Sr^{90} предусматривает исключение загрязненных территорий из сельскохозяйственного использования и может растянуться, в зависимости от степени загрязнения, на сотни лет, так как указанные радионуклиды имеют большие периоды полураспада. Активность изотопов до безопасных пределов в 1000 раз уменьшается за десять периодов.

Таким образом, возникает необходимость в такой технологии дезактивации, которая была бы лишена отмеченных недостатков - не наносила бы экологического ущерба почвам и другим экосистемам и позволяла бы сократить сроки их реабилитации. Указанных недостатков лишена ботаническая дезактивация радиоактивно загрязненных территорий.

1.2. Теория ботанической реабилитации

1.2.1. Предпосылки к применению метода ботанической реабилитации

О способности растений накапливать различные химические элементы известно давно. Еще древние римляне предполагали, что растительный покров отражает до некоторой степени характер подпочвы. Взаимосвязь между растительностью и ее подпочвой использовали рудоискатели Европы и Китая уже 400 лет назад при поисках месторождений.

Русский геолог Карпинский А.М. [3] был одним из первых, кто установил, что отдельные ассоциации растений существуют на отличительных под-

почвах, таких как песчаники, глины, известняки и т.д., и что распределение растительного покрова может быть использовано для характеристики геологических особенностей района. Его классические работы в конечном итоге служат введением в геоботанику индикаторов, которая стала изучать растительный покров и его разновидности, указывающие на условия окружающей среды.

Способность растений по-разному аккумулировать химические элементы можно использовать в практических целях для очищения загрязненных территорий от радиоактивных продуктов деления с помощью отчуждения выращенной растительной массы и последующей ее утилизации.

Эффективность технологии фитодезактивации загрязненных территорий зависит от ряда факторов: используемых видов растительности, их морфобиологических особенностей, длительности вегетационного периода, а также от свойств дезактивируемых почв и применяемых агрохимических и агротехнических приемов, которые позволяли бы усиливать поступление радионуклидов из почв в растения, то есть управлять выносом радиоактивных элементов [3].

Существует несколько возможностей управления переходом радиоизотопов из почв в растения: 1) использование растений-гипераккумуляторов радиоактивных элементов, 2) стимуляция роста растений-гипераккумуляторов для получения наибольшей биомассы, 3) улучшение доступности радионуклидов для корневого питания растений

Способность растений накапливать радиоактивные элементы оценивается по факторам перехода радионуклида из почв в растения [2].

Фактор перехода (доля радиоактивности, переходящая из загрязненной почвы в зеленую массу растения) представляет собой следующее отношение:

$$\varphi_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_i}, \quad (1)$$

где A_{ij} - удельная активность [Бк/кг] i -го радионуклида в j -ом растении; A_i - удельная активность [Бк/кг] i -го радионуклида в почве.

В таблице 1 приведены экспериментально установленные величины фак-

торов перехода радионуклида Cs^{137} для некоторых растений локального участка Чернобыльского следа [1], среди которых как культурные (*рожь посевная*, *клевер белый*, *клевер луговой красный*, *люцерна* и др.), так и дикие представители флоры. Растения ранжированы в порядке убывания их факторов перехода.

таблица 1

	Название растения	Φ , отн.ед.		Название растения	Φ , отн.ед.
1	<i>Кипрей болотный</i>	0,671	34	<i>Повой заборный</i>	0,040
2	<i>Очиток пурпурный</i>	0,244	35	<i>Будра плющевидная</i>	0,039
3	<i>Осока острая</i>	0,242	36	<i>Крестовник луговой</i>	0,035
4	<i>Шлемник обыкновенный</i>	0,230	37	<i>Зверобой продырявленный</i>	0,034
5	<i>Мышиный горошек</i>	0,221	38	<i>Астрагал болотный</i>	0,034
6	<i>Жерушник</i>	0,208	39	<i>Вербейник обыкновенный</i>	0,034
7	<i>Горец земноводный</i>	0,208	40	<i>Вязель пестрый</i>	0,034
8	<i>Язвенник Линнея</i>	0,199	41	<i>Донник желтый</i>	0,034
9	<i>Черёда трехраздельная</i>	0,194	42	<i>Пижма обыкновенная</i>	0,031
10	<i>Клевер белый</i>	0,168	43	<i>Поручейник широколистный</i>	0,030
11	<i>Двукисточник тростниковый</i>	0,147	44	<i>Дрок красильный</i>	0,029
12	<i>Дудник обыкновенный</i>	0,146	45	<i>Болиголов пятнистый</i>	0,029
13	<i>Горичник Любименко</i>	0,129	46	<i>Девясил британский</i>	0,026
14	<i>Чистец болотный</i>	0,116	47	<i>Полынь обыкновенная</i>	0,024
15	<i>Люттик ползучий</i>	0,113	48	<i>Льнянка обыкновенная</i>	0,022
16	<i>Чахотная трава</i>	0,109	49	<i>Марь белая</i>	0,022
17	<i>Папоротник мужской</i>	0,104	50	<i>Щавель конский</i>	0,021
18	<i>Вероника длиннолистная</i>	0,098	51	<i>Кострец безостый</i>	0,020
19	<i>Хвоц приречный</i>	0,090	52	<i>Подмаренник мягкий</i>	0,019
20	<i>Дербенник иволистный</i>	0,089	53	<i>Одуванчик лекарственный</i>	0,017
21	<i>Люцерна хмелевидная</i>	0,082	54	<i>Луговик дернистый</i>	0,016
22	<i>Донник белый</i>	0,072	55	<i>Марь узколистная</i>	0,016
23	<i>Звездчатка злаковая</i>	0,069	56	<i>Лопух большой</i>	0,016
24	<i>Клевер луговой красный</i>	0,064	57	<i>Цикорий обыкновенный</i>	0,015
25	<i>Икотник серый</i>	0,063	58	<i>Тысячелистник обыкновенный</i>	0,015
26	<i>Мята болотная</i>	0,062	59	<i>Молочай обыкновенный</i>	0,014
27	<i>Клевер сходный</i>	0,053	60	<i>Бальзамин</i>	0,014
28	<i>Рожь посевная</i>	0,047	61	<i>Клевер шуршащий</i>	0,013
29	<i>Чистотел большой</i>	0,046	62	<i>Василек луговой</i>	0,012
30	<i>Редька дикая</i>	0,043	63	<i>Зюзник европейский</i>	0,011
31	<i>Подорожник большой</i>	0,043	64	<i>Мальва культурная</i>	0,010
32	<i>Ежа сборная</i>	0,042	65	<i>Спаржа лекарственная</i>	0,007
33	<i>Частуха подорожная</i>	0,041	66	<i>Пырей ползучий</i>	0,007

Обращает на себя внимание тот факт, что все растения в той или иной мере накапливают радиоактивный цезий. Диапазон изменения факторов перехода для различных видов растений очень велик и достигает трех порядков.

Максимальными факторами перехода характеризуются *кипрей болотный* (0,671), *очиток пурпурный* (0,244), *осока* (0,242), *шлемник обыкновенный* (0,23), *мышинный горошек* (0,221), *жерушник* (0,208) и другие растения, которые можно отнести к гипераккумуляторам радиоактивного цезия.

Минимальными факторами перехода обладают *полынь горькая* (0,001), *пырей ползучий* (0,007), *спаржа лекарственная* (0,007), которые можно назвать гипоаккумуляторами Cs^{137} .

Обращает на себя внимание тот факт, что некоторые виды растений способны в больших количествах накапливать радионуклиды (более 20 % от содержания последних в почве). Это обстоятельство является предпосылкой для ботанической реабилитации площадей, загрязненных по типу Чернобыльского следа.

Сущность указанного способа реабилитации заключается в следующем. На почвах, подлежащих очистке от радиоактивного загрязнения, систематически выращиваются растения, характеризующиеся максимальной способностью к извлечению радиоактивного элемента из питающей среды (почвы), то есть растения-гипераккумуляторы Cs^{137} (*мышинный горошек*, *шлемник обыкновенный* и другие). Урожай, обогащенный частично выведенными из почвы радионуклидами скашивается, озоляется и утилизируется. При этом цикл "выращивание гипераккумуляторов - скашивание - утилизация" повторяется до тех пор, пока уровень радиоактивности почвы не окажется соответствующим нормам радиационной безопасности.

Описанный способ позволяет сохранить плодородный почвенно-растительный слой и значительно сокращает срок реабилитации загрязненных площадей, если иметь в виду только естественную убыль активности загрязняющего радионуклида за счет распада.

При использовании технологии ботанической реабилитации почв, загрязненных радионуклидом Cs^{137} , важно знать характер распределения этого радионуклида в почвенном слое. Это может иметь значение при решении вопроса: доступен ли Cs^{137} для корневой системы растений.

На рис. 1 представлены результаты исследования распределения Cs^{137} по глубине почвенных разрезов [5]. Приведенные данные характеризуют ситуацию на 1995 год – спустя 9 лет после аварийного выброса на Чернобыльской АЭС. Из рисунка видно, что вся радиоактивность сосредоточена в верхнем 20-сантиметровом слое, а основная ее доля (около 90 %) - в 10-сантиметровом слое. Таким образом, скорость вертикальной миграции радионуклида Cs^{137} невелика, и ожидать значительного "самоочищения" почвы в ближайшие десятилетия не приходится. В настоящее время радиоцезий находится в корнеобитаемом почвенном слое и доступен растениям.

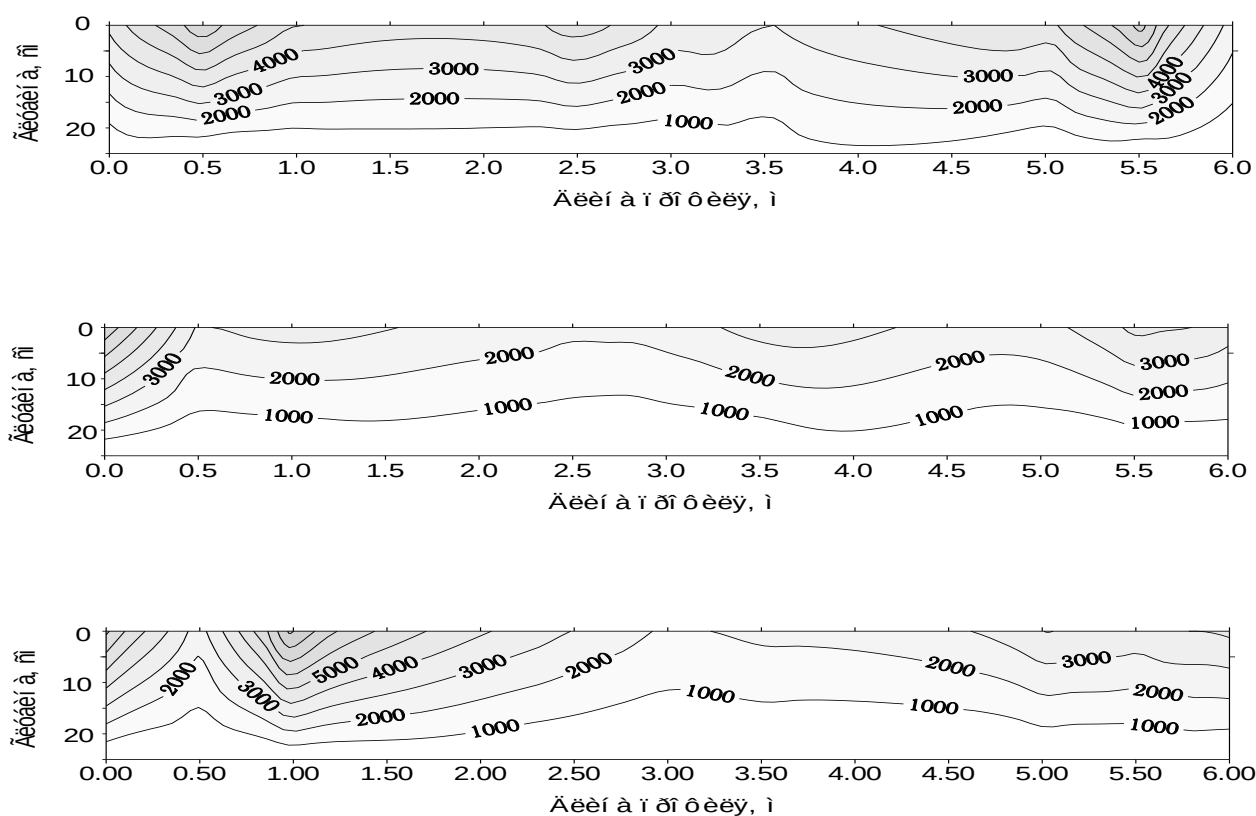


Рис. 1. Распределение удельной активности Cs^{137} по глубине нескольких почвенных разрезов Чернобыльского следа. Отметки изолиний соответствуют Бк/кг [1].

1.2.2. Основные количественные соотношения

Оценим время t , необходимое для снижения активности i -го радионуклида от начального a_{oi} до заданного $a_i(t)$ значения. При этом ограничимся только двумя из возможных факторов реабилитации – естественным остыванием и ботаническим выведением i -ой компоненты из среды загрязнения при культивировании растений j -го вида.

Предполагается, что в процессе "отсасывания" растениями i -го радионуклида, его количество, переходящее при прочих равных условиях из почвы в зеленую массу (подлежащую после созревания обязательной утилизации) составляет определенную, характерную для данного нуклида i и данного растения j долю активности i -ой компоненты, находящейся в среде загрязнения (почве).

Другими словами, фактор перехода ϕ_{ij} i -го радионуклида в зеленую массу j -го растения является константой, хотя результаты прямых измерений свидетельствуют о неустойчивости параметра ϕ_{ij} .

С учетом указанного выше допущения, формула для срока ботанической реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом i , остывающим с постоянной распада λ_i , выглядит следующим образом:

$$t = - \left(\frac{\tau_i \tau_{ij}}{\tau_i + \tau_{ij}} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}} \quad (2)$$

где τ_i - средняя продолжительность жизни ядер i -го радионуклида; τ_{ij} - средняя продолжительность пребывания i -го радионуклида в загрязненной почве с учетом его выведения (эвакуации) j -ым растением (при заданных параметрах урожайности).

Из формулы (2) видно, что для оценки сроков реабилитации необходимо иметь количественные сведения о параметре τ_{ij} , поскольку остальные величины либо табулированы (τ_{ij}), либо известны из результатов непосредственных измерений (a_{oi}) или заданы [$a_i(t)$].

Прежде всего, оценим величину t для частных случаев.

1. Если $\tau_i \ll \tau_{ij}$, то

$$t \approx -\tau_{ij} \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}} \quad (3)$$

В этом случае срок реабилитации будет определяться средней продолжительностью пребывания радионуклида i в среде загрязнения в связи с ботаническим фактором.

2. Допустим, что $\tau_i \gg \tau_{ij}$, тогда

$$t \approx -\tau_i \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}} \quad (4)$$

Если средняя продолжительность естественного остывания i -го радионуклида невелика в сравнении с продолжительностью ботанического выведения, то срок реабилитации будет определяться параметром τ_i .

3. В частном случае, когда $\tau_i = \tau_{ij}$

$$t = -\frac{\tau_i}{2} \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (5)$$

то есть в этом случае срок реабилитации сокращается вдвое по сравнению с естественным остыванием.

Сопоставляя сроки реабилитации с использованием механизма ботанического выведения (t_{ij}) и без него (t_i) имеем при прочих равных условиях

$$\frac{t_i}{t_{ij}} = 1 + \frac{\tau_i}{\tau_{ij}}. \quad (6)$$

Поскольку параметры τ_i , τ_{ij} больше нуля, то правая часть (6) будет больше единицы.

Другими словами, при любых соотношениях между параметрами естественного остывания τ_i и ботанического выведения τ_{ij} срок реабилитации с применением технологии ботанического выведения оказывается меньше, чем без его использования, то есть в любом случае $t_{ij} < t_i$.

Для расчета параметра τ_{ij} введем понятие периода ботанического полувыведения T_{ij} , под которым будем понимать время, необходимое для выноса половины i -ой компоненты j -ым растением при некотором уровне урожайности.

Учитывая отмеченное, имеем для функции выживания i -го радионуклида в среде культивирования j -го аккумулятора:

$$1 - n \frac{m_j}{M} \varphi_{ij} = 2^{-k_{ij}}, \quad (7)$$

где m_j - урожайность (масса с единицы площади) аккумулирующей зеленой массы; M - масса загрязненного корнеобитаемого почвенного слоя единичной площади; n - кратность утилизации (количество урожаев за сезон); k_{ij} - срок выращивания j -го растения (промежуток времени Δt) в нормировке к периоду полувыведения j -ым растением i -го радионуклида (T_{ij}), то есть

$$k_{ij} = \frac{\Delta t}{T_{ij}}. \quad (8)$$

Если отношение nm_j/M обозначить через μ_j , тогда

$$T_{ij} = - \left(\frac{\ln 2}{\ln(1 - \mu_j \varphi_{ij})} \right) \Delta t, \quad (9)$$

откуда для τ_{ij} имеем

$$\tau_{ij} = - \frac{\Delta t}{\ln(1 - \mu_j \varphi_{ij})}. \quad (10)$$

Подставляя выражение для параметра τ_{ij} в формулу (2), получим выражение для оценки срока ботанической реабилитации почвы:

$$t = \left(\frac{\tau_i \Delta t}{\tau_i \ln(1 - \mu_j \varphi_{ij}) - \Delta t} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (11)$$

1.2.3. Оценка сроков реабилитации

Оценим время t для предельных случаев.

1. Если $\mu_j \varphi_{ij} \rightarrow 0$, то есть переход i -го радионуклида из почвы в растительную массу практически отсутствует. Тогда

$$t \rightarrow -\tau_i \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (12)$$

Это означает, что срок реабилитации почвы будет определяться лишь естественным остыванием i -го радионуклида.

2. Если $\mu_j \varphi_{ij} \rightarrow 1$, то есть практически вся активность за время Δt из почвы переходит в растительную массу. При этом

$$\frac{a_i(t = \Delta t)}{a_{oi}} \rightarrow 0 \quad (13)$$

и тогда

$$t \rightarrow \Delta t \quad (14)$$

В этом случае срок реабилитации почвы будет определяться лишь длительностью вегетационного периода Δt и может составить несколько месяцев.

Для большинства растений $0 < \mu_j \varphi_{ij} < 1$. На рис. 2 представлена оценка по соотношению (11) срока реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом Cs^{137} , при использовании в качестве средства дезактивации растения *мышинный горошек*.

Так, для гипераккумулятора *мышинный горошек* $\varphi_{ij} = 0,221$, его урожайность m_j при благоприятных условиях составляет 11 т/га . Масса загрязненного почвенного слоя площади 1 га , мощности 10 см и плотности 1 г/см^3 равна 1000 т . При двух укосах ($n=2$) за вегетационный период ($\Delta t = 0,25$ года) величина $\mu_j = 0,022$. Для уменьшения активности радионуклида Cs^{137} ($\tau_i = 43$ года) в загрязненной почве в 10 раз потребуется время равное 55 годам, для снижения почвенной радиоактивности в 5 раз - примерно 38 лет, в 2 раза - примерно 16 лет (рис. 2).

Рассчитанные сроки оказываются значительно меньше сроков реабилитации почвы без ботанического выведения радиоактивной компоненты. Так, за

счет естественного распада Cs^{137} его активность в почве снижается в 10 раз через 104 года. Это примерно в 2 раза больше, чем при использовании в качестве средства дезактивации *мышинного горошка*.

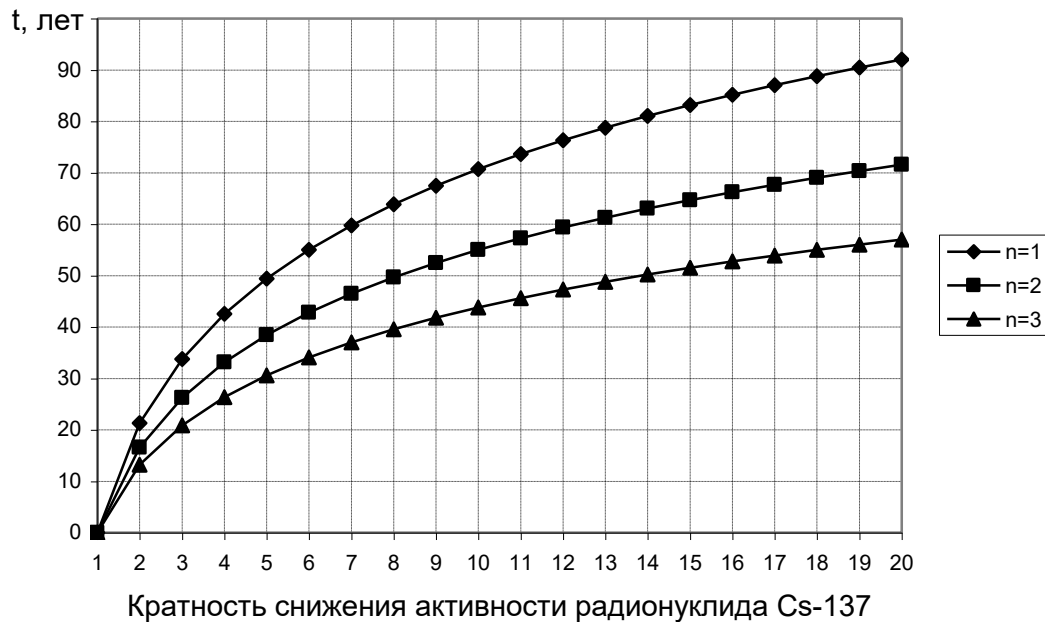


Рис. 2. Оценка срока реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом Cs^{137} , при использовании в качестве средства дезактивации растения *мышинный горошек*.

1.2.4. Понятие о факторе ботанической реабилитации и его количественная оценка

Выражение (11) для срока ботанической реабилитации почвы, загрязненной радионуклидом i , можно упростить, имея в виду разложение

$$\ln(1-a)|_{a \ll 1} \approx -a. \quad (15)$$

С учетом (15) формула (11) выглядит следующим образом:

$$t \approx - \left(\frac{\tau_i \Delta t}{\tau_i \varphi_{ij} \mu_j + \Delta t} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (16)$$

или

$$t_i \approx - \left(\frac{\tau_i}{1 + \frac{\tau_i}{\Delta t} \varphi_{ij} \mu_j} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (17)$$

Обозначив $\theta_i = \tau_i / \Delta t$, получим:

$$t_i \approx - \left(\frac{\tau_i}{1 + \theta_i \varphi_{ij} \mu_j} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (18)$$

или

$$t_i \approx - \left(\frac{\tau_i}{1 + R} \right) \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}, \quad (19)$$

где $R = \mu_j \theta_i \varphi_{ij}$ - фактор ботанической реабилитации.

Из формулы (19) видно, что при $R = 0$ реабилитация будет связана только с естественным остыванием радиоактивной компоненты, то есть

$$t_i \approx -\tau_i \ln \frac{a_i(t)}{a_{oi}}. \quad (20)$$

С возрастанием фактора реабилитации R , который включает в себя несколько составляющих, сроки дезактивации почвы уменьшаются и наоборот.

1.3. Практическое применение ботанической реабилитации

Результаты практического применения технологии ботанической реабилитации подтверждают ее основные теоретические положения и указывают на возможности очистки почв от радиоактивного загрязнения путем систематического отчуждения фитомассы, обогащенной радионуклидами.

Примером может служить один из участков Восточно-Уральского радиоактивного следа (ВУРСа), сформировавшегося в результате Кыштымской аварии 1957 года на ПО "Маяк". Участок располагается в южной части Каменского района Свердловской области в окрестностях оз. Тыгиш, где в настоящее время наблюдаются наибольшие остаточные уровни радиоактивного загрязнения, Содержание Sr^{90} в отдельных почвенных пробах соответствует плотности поверхностного загрязнения 5 и более Ки/км^2 .

Участок представлен почвами, с которых велся регулярный в послеаварийный период укос травы, и почвами, где отчуждение фитомассы не производилось (рис. 3а). Уровень загрязнения участка по Sr^{90} на 1997 год – до 1 Ки/км^2 .

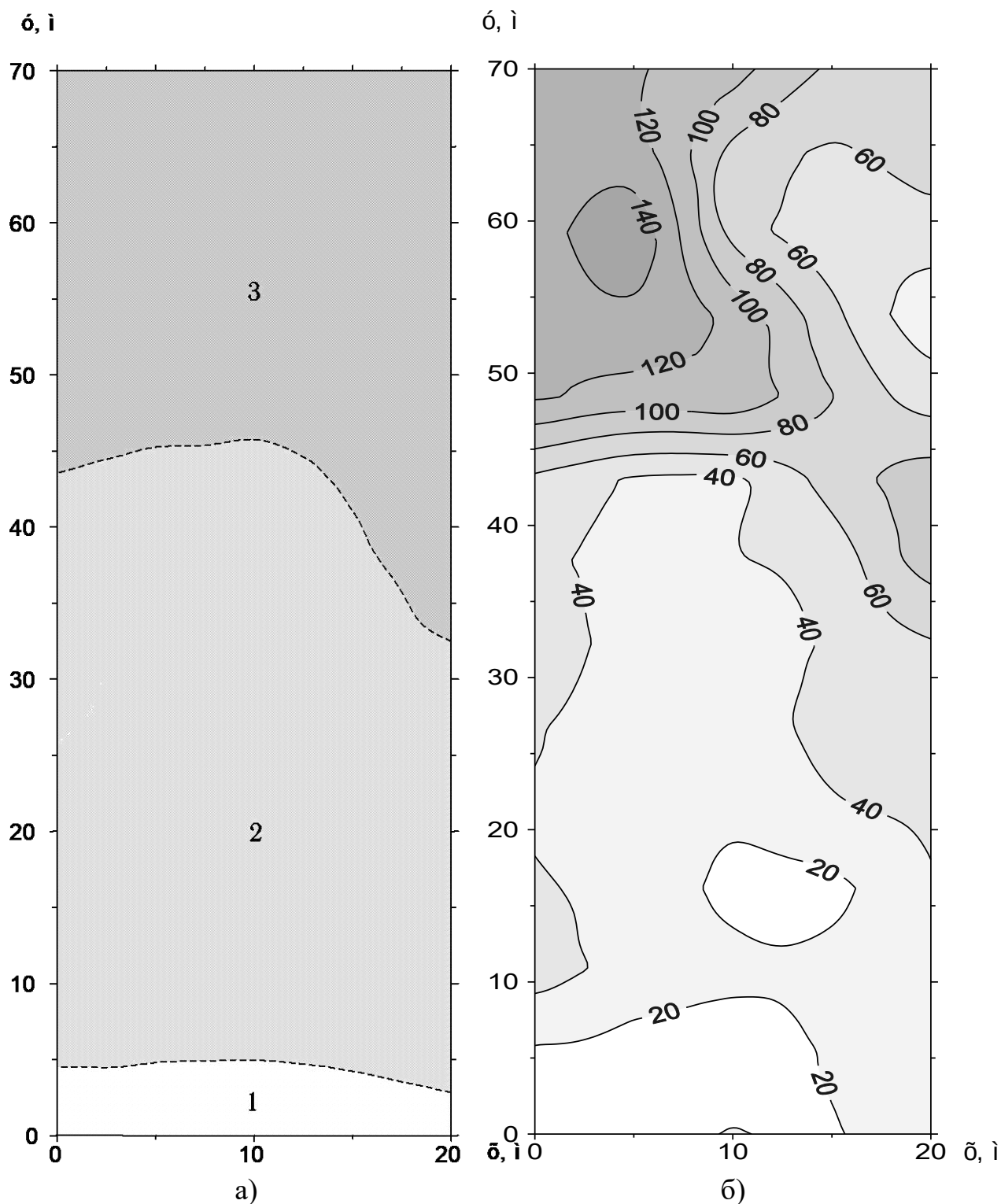


Рис. 3. а) Схема расположения различных по использованию почв на участке радиоэкологических исследований. б) Распределение β -активности по площади исследованного участка. Отметки изолиний соответствуют *имп/мин*.

Обозначения: 1 - сенокос на рекультивированной почве, 2 - сенокос на целинной почве, 3 - участок леса, где скашивание травы в послеаварийный период не производилось [1].

Так, северо-западную часть участка занимают почвы с погребенным гумусовым горизонтом, образование которого связано с проведением в начальный послеаварийный период серии дезактивационных работ. Последние были проведены на территории ВУРСа в зонах с максимальной плотностью загрязнения, и они представляют собой высокую отвальную вспашку, в результате которой верхняя часть гумусового профиля оказалась перемещенной на глубину 50-90 см. В настоящее время на этой почве производится выращивание многолетних трав, скашивание ведется с применением техники.

Средняя часть участка занята почвами, незатронутыми дезактивационными мероприятиями и которые с 1957 года используются местными жителями как естественный сенокос, скашивание ведется вручную.

И, наконец, юго-западную часть занимает лес. Эти почвы также не затронуты дезактивационными работами, но укос травы с них не производится даже вручную из-за наличия большого количества древесной растительности.

Исследования распределения β -активности по площади участка (Sr^{90} и его дочерний продукт Y^{90} являются β -излучателями) показали, что активность по β -лучам в той части участка, где производилось регулярное с момента загрязнения скашивание растительности, оказалась заметно ниже, чем в точках наблюдений, расположенных за пределами этой части, то есть где укос травы не производился (рис. 3б).

Контраст в аппаратном отклике по β -лучам хорошо виден на рис. 4, где представлена интенсивность β -излучения по одному из съемочных профилей участка. Так, минимальной β -активностью – 20 *имп/мин* характеризуются вспаханные рекультивированные почвы, на сенокосе β -отклик составил 30-40 *имп/мин*, а на территории леса отмечается максимальная активность по β -лучам – 80-140 *имп/мин*, что примерно в 3 раза больше, чем на сенокосе.

Систематическое скашивание и эвакуация растительности с фактором перехода по радиостронцию $\varphi_{ij} = 0,25$ с зараженной территории за 39 лет умень-

шили активность почв в 10 раз. Это сократило время, необходимое на такое снижение активности, более чем в 2 раза. Выращивание и утилизация *шлемника обыкновенного* с фактором перехода $\varphi_{ij} = 0,93$ могло бы обеспечить снижение активности Sr^{90} в почве в 10 раз, которое удалось зарегистрировать на участке, не за 39 лет, а примерно за 15 лет. Таким образом, возможность использования технологии ботанической реабилитации радиоактивно загрязненных почв получила экспериментальное подтверждение на локальном участке Восточно-Уральского радиоактивного следа [1].

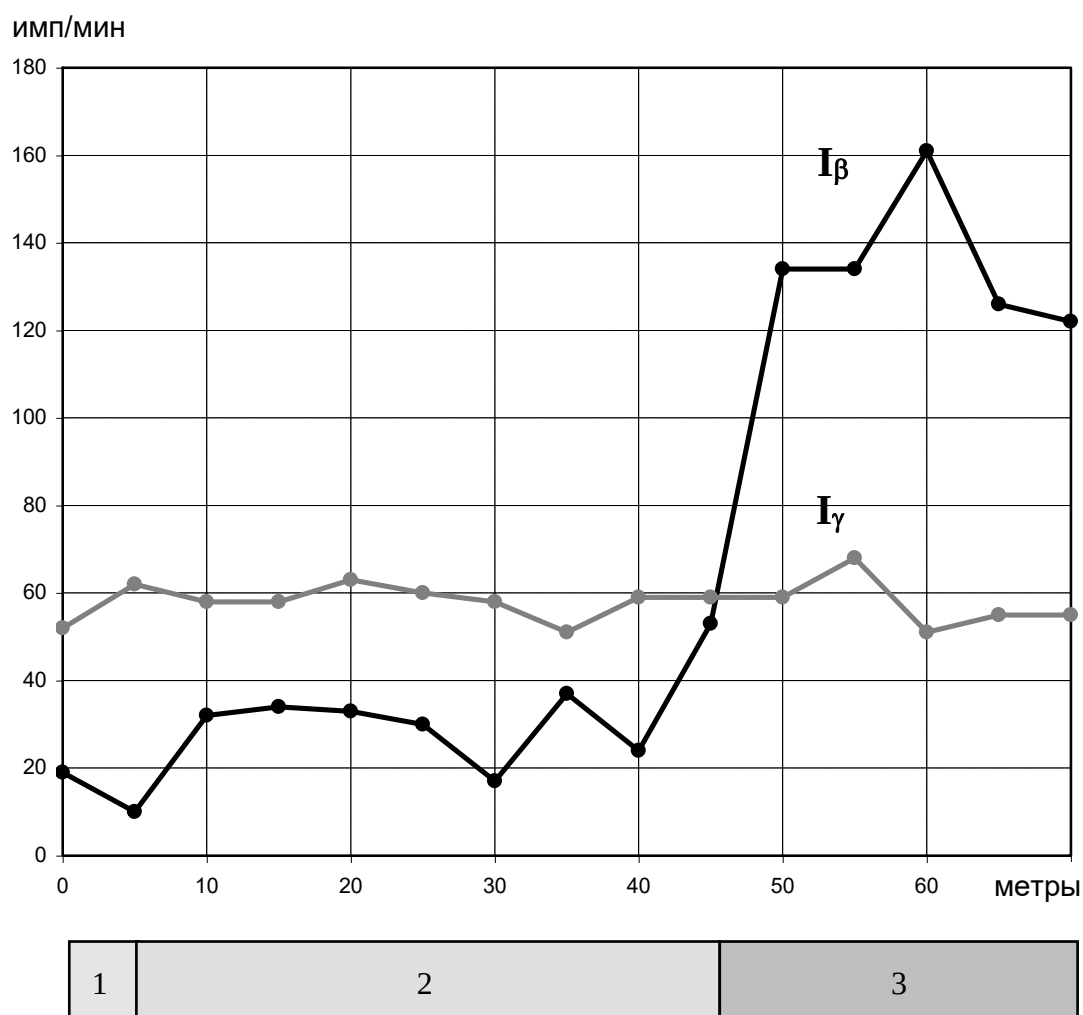


Рис. 4. Интенсивность β - и γ -излучения по съемочному профилю. Обозначения: 1- сенокос на рекультивированной почве, 2 - сенокос на целинной почве, 3 - лес.

2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

2.1. Изучение распределения радионуклида Cs^{137} в почвенном слое Чернобыльского следа

Задание

а) С помощью лабораторного гамма-спектрометра "Гамма-01С" зарегистрировать спектры гамма-излучения почвенных проб, отобранных на территории Чернобыльского следа с разной глубины почвенного слоя.

б) Произвести обработку полученных спектров и вычислить удельную активность радионуклида Cs^{137} в почвенных образцах.

в) Построить график вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном слое.

г) Сделать выводы о соответствии удельной активности Cs^{137} в почвенных образцах нормам радиационной безопасности и максимальной концентрации радиоактивного цезия в почвенном разрезе.

Материалы и оборудование

1. Лабораторный гамма-спектрометр "Гамма-01С".
2. Набор почвенных проб, отобранных на территории Чернобыльского следа с разной глубины почвенного слоя.
3. Эталон Cs^{137} с известной удельной активностью.
4. Набор образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).
5. Калькулятор, миллиметровка, карандаш, резинка, линейка.

Порядок выполнения работы

а) Лабораторный спектрометр подготовить к работе: прогреть в течение 10 минут, произвести градуировку энергетической шкалы с помощью образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).

б) Зарегистрировать спектр гамма-излучения эталонного образца Cs^{137} с экспозицией 10 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения эталона $S_{\text{эт}}$.

в) Зарегистрировать спектр фонового гамма-излучения с экспозицией 10 мин. Найти площадь S_{ϕ} , соответствующую энергетическому интервалу фотопика Cs^{137} на спектре фонового гамма-излучения эталона.

г) Взвесить почвенные образцы. Зарегистрировать спектры их гамма-излучения с экспозицией 10 мин (рис. 5). Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения каждой почвенной пробы S_{ni} .

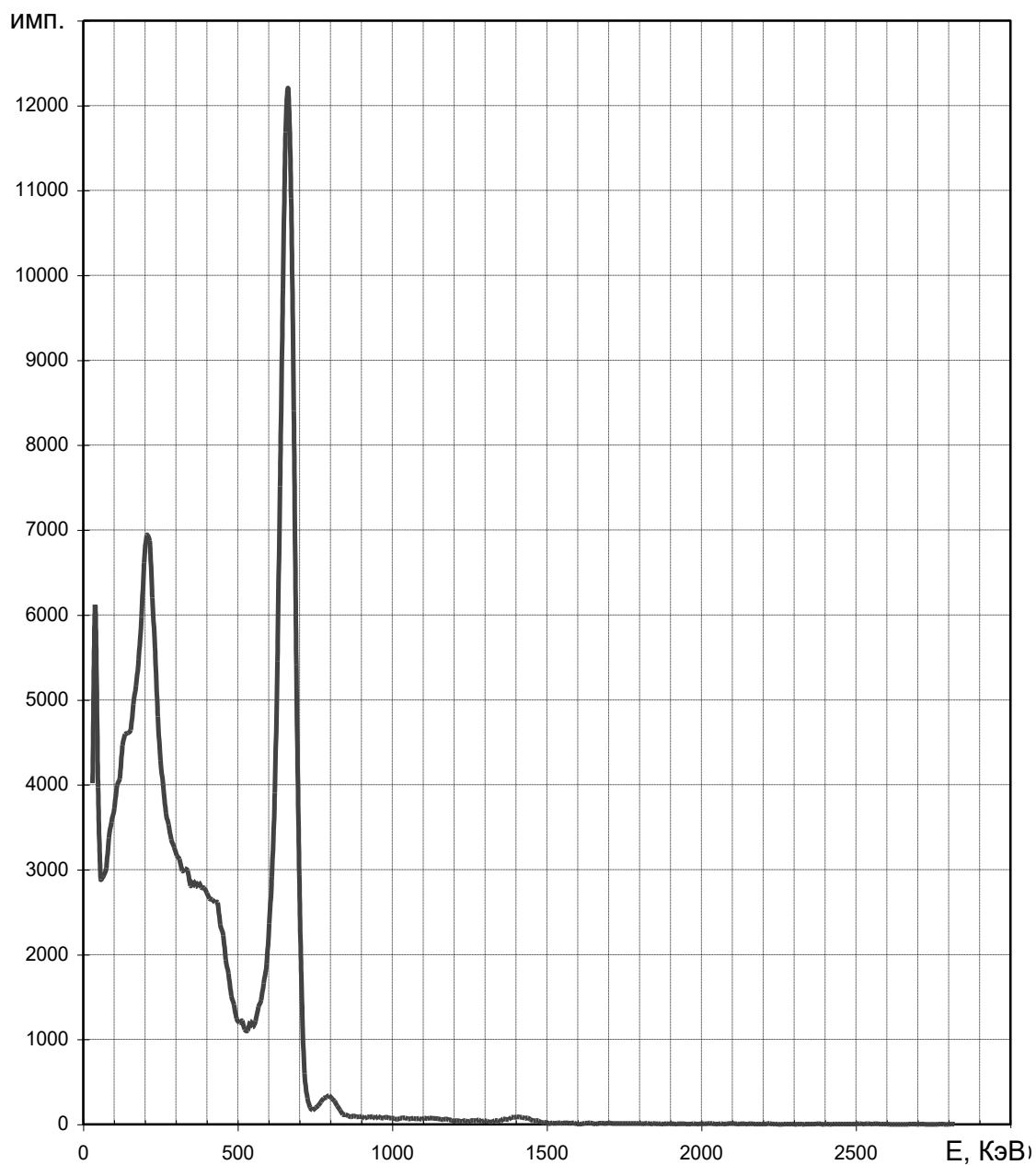


Рис. 5. Спектр гамма-излучения почвенной пробы локального участка Чернобыльского следа. Время измерения – 10 мин., масса – 100 г.

д) Вычисление удельной активности Cs^{137} в i -ом почвенном образце производится по формуле:

$$A_{ni} = A_{эм} \cdot \frac{S_{ni}}{S_{эм}} \cdot \frac{t_{эм}}{t_n} \cdot \frac{m_{эм}}{m_n}, \quad (21)$$

где $A_{эм}$ - удельная активность Cs^{137} в эталонном образце в $Bк/кг$; S_{ni} - площадь фотопика Cs^{137} на спектре γ -излучения i -ой почвенной пробы в $имп$; $S_{эм}$ - площадь фотопика Cs^{137} на спектре γ -излучения эталона в $имп$; $t_{эм}$ - время регистрации спектра эталонной пробы в $с$; t_n - время регистрации спектра почвенной пробы в $с$; $m_{эм}$ - масса эталонной пробы в $г$; m_n - масса почвенной пробы в $г$.

е) График вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном слое представить в виде гистограммы, образец которой приведен на рис. 6.

ж) Описать полученные результаты. Указать, находится ли Cs^{137} в корнеобитаемом почвенном слое, или он недоступен для корневого питания растений.

Контрольные вопросы

1. Какова основная цель изучения распределения радионуклида Cs^{137} в почвах Чернобыльского следа ?
2. Какова скорость вертикальной миграции радионуклида Cs^{137} в почвах?
3. Чем определяется скорость вертикальной миграции радионуклида Cs^{137} в почвах ?
4. Какие радионуклиды, кроме Cs^{137} , обнаружены Вами в почвенных образцах ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения измерений и последующей обработки данных.
3. График вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном разрезе.
4. Выводы.

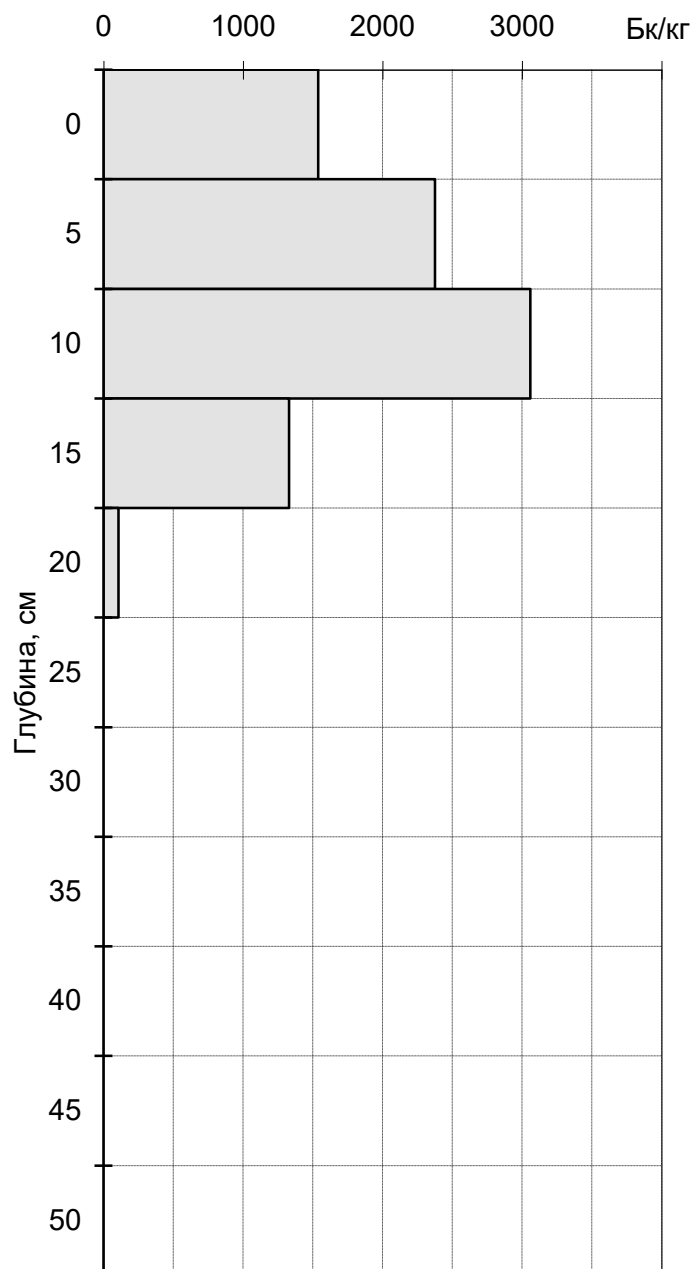


Рис. 6. Образец оформления графика вертикального распределения удельной активности Cs^{137} в почвенном разрезе.

2.2. Определение факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения

Задание

а) С помощью лабораторного гамма-спектрометра "Гамма-01С" зарегистрировать спектры гамма-излучения растительных и почвенных проб, отобранных на территории Чернобыльского следа.

- б) Произвести обработку полученных спектров и вычислить удельную активность радионуклида Cs^{137} в растительных и почвенных образцах.
- в) Рассчитать факторы перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения.
- г) Сделать выводы.

Материалы и оборудование

1. Лабораторный гамма-спектрометр "Гамма-01С".
2. Эталон Cs^{137} с известной удельной активностью.
3. Набор образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).
4. Пробы растений *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.
5. Пробы почв, соответствующие растениям *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.
6. Калькулятор, карандаш, резинка.

Порядок выполнения работы

а) Лабораторный спектрометр подготовить к работе: прогреть в течение 10 минут, произвести градуировку энергетической шкалы с помощью образцовых спектрометрических гамма-источников (ОСГИ).

б) Зарегистрировать спектр гамма-излучения эталонного образца Cs^{137} с экспозицией 10 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения эталона $S_{\text{эт}}$.

в) Зарегистрировать спектр фоновое гамма-излучения с экспозицией 10 мин. Найти площадь $S_{\text{ф}}$, соответствующую энергетическому интервалу фотопика Cs^{137} на спектре фоновое гамма-излучения эталона.

г) Взвесить подготовленные растительные образцы для *мышинного горошка* и *шлемника обыкновенного*. Зарегистрировать спектры их гамма-излучения с экспозицией 15 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения каждой растительной пробы $S_{\text{рj}}$.

д) Взвесить почвенные образцы, соответствующие растениям *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*. Зарегистрировать спектры их гамма-излу-

чения с экспозицией 5 мин. Найти площадь фотопика Cs^{137} на спектре гамма-излучения каждой почвенной пробы S_{nj} .

е) По формуле (21) рассчитать удельную активность Cs^{137} в растительных и соответствующих им почвенных образцах.

ж) По соотношению (1) вычислить факторы перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.

з) Сделать заключение, относятся ли исследованные растения к гипераккумуляторам радиоактивного цезия или нет.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют способы реабилитации радиоактивно загрязненных территорий ? Каковы их недостатки и преимущества ?
2. Что такое фактор перехода радионуклида из почвы в растение ?
3. Какие растения-гипераккумуляторы радиоактивного цезия Вы можете назвать ?
4. Как можно оценить срок ботанической реабилитации почвы ?
5. Какие факторы влияют на срок ботанической реабилитации почвы ?
6. Что такое фактор ботанической реабилитации почвы ?
7. Как влияет фактор ботанической реабилитации на сроки снижения почвенной активности ?

Содержание отчета

1. Краткое изложение основных теоретических положений.
2. Порядок выполнения измерений и последующей обработки данных.
3. Результаты расчета факторов перехода радионуклида Cs^{137} из почв в растения *мышинный горошек* и *шлемник обыкновенный*.
4. Выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Ж.Н.* Ядерно-физические измерения параметров ботанической реабилитации радиоактивно загрязненных площадей: Диссертация на соискание ученой степени кандидата геол.- минерал. наук. – Екатеринбург, 1998. – 147 с.
2. *Александрова Ж.Н., Возжеников Г.С.* О возможности ботанической реабилитации загрязненных площадей Восточно-Уральского радиоактивного следа // Международная выставка-семинар "Уралэкология-95": Тез. докл. – Екатеринбург, 1995. – с.190-191.
3. *Антропогенная радионуклидная аномалия и растения* / Гродзинский Д.М., Коломиец К.Д., Кутлахмедов Ю.А. и др. – Киев: Лыбидь, 1991. – 156 с.
4. *Брукс Р.Р.* Биологические методы поисков полезных ископаемых: Пер. с англ. – М.: Недра, 1986. – 311 с.
5. *Поляков Ю.А.* Радиоэкология и дезактивация почв. – М.: Атомиздат, 1970. – 142 с.

Учебное издание

Александрова Жанна Николаевна

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки»
очной и заочной формы обучения

Часть 2

Реабилитация радиоактивно загрязненных территорий

Редактор _____
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать ____ . ____ . 2018 г.
Бумага писчая. Формат 60 x 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 100. Заказ _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому

комитету

С.А. Уиоров



**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Александрова Ж. Н.

Екатеринбург

2020



ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

Ж. Н. Александрова, Ю. В. Бельшев

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

**Часть 3
Определение радона в воде**

**Екатеринбург
2020**

ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

Ж. Н. Александрова, Ю. В. Бelyшев

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 Технология геологической разведки
очной и заочной формы обучения

Часть 3
Определение радона в воде

Рецензент: Шапов В.А., старший научный сотрудник
Института геофизики УрО РАН, д-р геол.-мин. наук

Александрова Ж.Н., Бельшев Ю.В.

- А46 Лабораторный практикум по радиационной безопасности: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине "Радиационная безопасность" для студентов специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки» очной и заочной формы обучения; Часть 3. Определение радона в воде / Ж. Н. Александрова, Ю. В. Бельшев; Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: изд-во УГГУ, 2020. – 23 с.

В учебно-методическом пособии приводятся сведения о радиоактивном газе радоне, дан краткий обзор существующих способов его определения. Описан полевой эманометр «Радон» и порядок работы с ним. Пособие содержит руководство к выполнению лабораторной работы по определению концентрации радона в воде.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся специализациям «Геофизические методы исследования скважин» и «Геофизические методы поисков и разведки МПИ» по специальности «Технология геологической разведки».

© Александрова Ж.Н., Бельшев Ю.В., 2018
© Уральский государственный горный
университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭМАНАЦИОННЫХ МЕТОДОВ	4
1.1 Свойства радона	4
1.2 Радон в воздухе зданий	6
1.3 Радон в питьевой воде	7
1.4 Способы определения радона	8
2. ПОЛЕВОЙ ЭМАНОМЕТР «РАДОН»	13
2.1 Основные технические данные и характеристики прибора	14
2.2 Устройство и принцип работы прибора	14
2.3 Подготовка прибора и измерительной установки к работе	15
2.4 Градуирование прибора	16
3. ПРОГРАММА ИЗМЕРЕНИЙ	18
4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	22
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	23

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭМАНАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

1.1 Свойства радона

После открытия радия, когда ученые познавали тайны радиоактивности, было установлено, что твердые вещества, находившиеся в близком соседстве с солями радия, становились радиоактивными. Однако, спустя несколько дней радиоактивность этих веществ исчезала бесследно. В 1902 году Дорн, изучавший это явление, пришел к выводу, что радий непрерывно испускает радиоактивное вещество, невесомые количества которого оседают на близлежащих предметах. Это вещество оказалось радиоактивным газом, который Резерфордом был назван эманацией радия. Слово "эманация" было заимствовано из латинского языка и означает "истечение".

Радиоактивные газы (эманации) - радон ${}^{222}\text{Rn}$ ($T_{1/2} = 3,82$ сут), торон ${}^{220}\text{Rn}$ (Tn, $T_{1/2} = 55,6$ с) и актинон ${}^{219}\text{Rn}$ (An, $T_{1/2} = 3,96$ с) входят в радиоактивные цепочки последовательно превращающихся *естественных* радионуклидов уранового ${}^{238}\text{U}$ ($T_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$ лет), ториевого ${}^{232}\text{Th}$ ($T_{1/2} = 14 \cdot 10^9$ лет) и актиноуранового ${}^{235}\text{U}$ ($T_{1/2} = 7,04 \cdot 10^8$ лет) рядов.

Радон – самый тяжелый из благородных газов. Он в 110 раз тяжелее водорода, в 55 раз тяжелее гелия. Не имеет ни запаха, ни вкуса, прозрачен и бесцветен.

Плотность радона при 0 °С равна 9,81 кг/м³, т.е. почти в 7,5 раз больше плотности воздуха. Однако пока эти сведения не проверены, так как чтобы получить один литр радона из солей радия, нужно около 500 кг радия. Если бы такой объем газа и был получен каким-либо образом, то, по словам Резерфорда, ученого, открывшего радон, "никакой сосуд не мог бы удержать его, так как количество тепла, испускаемое радоном, расплавило бы сосуд, в который его заключили".

Радон химически инертен и реагирует только с сильными фторирующими реагентами.

Радон образуется при распаде ${}^{226}\text{Ra}$ ($T_{1/2} = 1620$ лет), входящего в радиоактивное семейство ${}^{238}\text{U}$. Он является α -излучателем.

В результате радиоактивного распада ${}^{226}\text{Ra}$ образующийся радон попадает в кристаллическую решетку минералов. Процесс выделения радона из минералов и горных пород в поровое или трещинное простран-

ство получил название *эманирования*. Не все атомы радона могут выделиться в поровое пространство, поэтому для характеристики степени высвобождения радона из горных пород используется *коэффициент эманирования*:

$$\eta = \frac{Q_{\text{п}}}{Q_0} 100\% = \frac{C_{\text{п}} V_{\text{п}}}{C V} 100\% = \frac{C_{\text{п}}}{C} k_{\text{п}} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где $Q_{\text{п}}$ - количество эманации, выделяемой в поровое пространство за некоторое время; Q_0 - полное количество эманации (включая «замурованную» часть в минеральных зернах), образующейся за тот же промежуток времени; $C = Q_0/V$ - общая концентрация эманации, находящейся в объеме V ; $V_{\text{п}}$ - объем пор; $k_{\text{п}} = V_{\text{п}}/V$ - коэффициент пористости породы.

Величина коэффициента эманирования зависит от характера породы, ее структуры и степени ее раздробленности. Чем меньше зерна породы, тем больше внешняя поверхность зерен, тем активнее идет процесс эманирования. Коэффициент эманирования может меняться от первых процентов (скальные породы) до 30-40 % (песчаники, угли) и даже 60 % (торфяники).

Попадая в поры горной породы эманации и в дальнейшем распространяются путем диффузии или конвективного переноса (по трещинам, разломам), образуя *газовый ореол рассеяния*. Растворенные в воде радиоактивные элементы и эманации могут мигрировать с подземными водами на значительные расстояния (до десятков километров), образуя *водный ореол рассеяния*.

Проводниками радона под землей являются региональные разломы, заложенные в допалеозойское время, и разломы, активизированные в мезо-кайнозойское время, с помощью которых радон появляется на поверхности земли и частично концентрируется в рыхлых отложениях.

Если в породе известна массовая доля P_U (%) урана, то концентрация $R_{\text{п}}$ в объеме порового пространства вычисляется по формуле:

$$C_{\text{Ra}}^{\text{пор}} = 3,4 \cdot 10^4 \frac{\eta}{k_{\text{п}}} \rho K_{\text{pp}} P_U, \quad (2)$$

где ρ - плотность горной породы (г/см^3); K_{pp} - коэффициент радиоактивного равновесия между радием и ураном.

$$K_{\text{pp}} = \frac{P_{\text{Ra}}}{P_U} \frac{1}{3,4 \cdot 10^{-7}}, \quad (3)$$

где P_{Ra} и P_U - содержания радия и урана соответственно.

Концентрация эманаций измеряется в долях удельной активности (Бк/л, Бк/м³ или Ки/л, Ки/м³) - количества ядерных превращений в секунду, происходящих в единице объема вещества.

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}, 1 \text{ эман} = 10^{-10} \text{ Ки/л} = 3,7 \text{ Бк/л}$$

При оценке концентрации T_n используется следующая формула:

$$C_{Tn}^{\text{пор}} = 2,6 \cdot 10^4 \frac{\eta}{k_{\Pi}} \rho P_{Th}. \quad (4)$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что распределение Rn между жидкой и газообразной фазами подчиняется закону Генри:

$$C_{\text{ж}} = \alpha(T) C_{\text{г}}, \quad (5)$$

где $C_{\text{ж}}$ - концентрация Rn в жидкости; $C_{\text{г}}$ - концентрация Rn в газе; $\alpha(T)$ - коэффициент растворимости (коэффициент Генри).

Установлена следующая эмпирическая зависимость растворимости радона в воде в зависимости от температуры:

$$\alpha(T) = 0,105 + 0,405 e^{-0,0502 \cdot T}. \quad (6)$$

Из формулы видно, что коэффициент α уменьшается с ростом температуры. При температурах 10, 20, 30, 40 °C он равен соответственно 0,35; 0,25; 0,20 и 0,16. При кипячении воды радон полностью удаляется.

В природе радона очень мало - его можно отнести к числу наименее распространенных на нашей планете химических элементов. Концентрация Rn в атмосфере оценивается цифрой $7 \cdot 10^{-17} \%$ по весу. В земной коре его тоже очень мало, поскольку радон образуется из сверхредкого элемента - радия. Тем не менее, даже ничтожное присутствие радона можно обнаружить с помощью специальных приборов - эманометров.

1.2 Радон в воздухе зданий

Основным источником поступления радона в воздух помещений является геологическое пространство под зданием. Содержание радона в воздухе помещений зависит от его содержания в почве и подстилающих породах, их эманацирующей способности, климатических условий, конструкции зданий и системы их вентиляции, кратностью воздухообмена в помещении. Концентрации и потоки радона крайне неравномерны, они изменяются в очень широких пределах для различных регионов и видов зданий.

Свой вклад в поток радона, поступающий в помещение, создает и его выход из строительных конструкций - радон может генерироваться строительными материалами при достаточно большом содержании в них урана и тория. Генерируется он вследствие того, что при строительстве здания мог быть использован кирпич, изготовленный из глины, характеризующейся повышенной радиоактивностью.

При проектировании новых зданий жилищного и общественного назначения должно быть предусмотрено, чтобы объемная активность радона и торона и их дочерних продуктов распада в воздухе помещений не превышала **100 Бк/м³**.

В эксплуатируемых зданиях концентрация Rn^{222} и Rn^{220} и их дочерних продуктов распада в воздухе не должна превышать **200 Бк/м³**. При более высоких значениях объемной активности должны проводиться защитные мероприятия, направленные на снижение поступления радона в воздух помещений и улучшение вентиляции помещений.

Изотоп Rn^{222} (продукт распада ${}_{92}U^{238}$) дает примерно 50–55 % дозы облучения, которое ежегодно получает каждый житель Земли. Изотоп Rn^{220} (продукт распада ${}_{90}Th^{232}$) прибавляет к этому еще примерно 5–10 %. Однако исследования показали, что в отдельных местностях радоновое облучение во много раз и даже на несколько порядков может превышать средние величины.

1.3 Радон в питьевой воде

Каким образом радон попадает в питьевую воду? Он попадает в воду из окружающих пород (гранитов, базальтов и др.), с которыми соприкасаются водоносные слои. Поэтому концентрация радона в водах зависит от концентрации материнских элементов в горных породах, омываемых ею, коэффициента эманирования, пористости или трещиноватости горных пород и скорости движения воды (расхода потока). Рыхлые или трещиноватые породы характеризуются повышенными концентрациями радона (зоны тектонических нарушений, кора выветривания и т.д.).

Подземные воды трещинных массивов кислых кристаллических пород обычно отличаются наиболее высокой концентрацией радона, достигающей 500 Бк/л и выше. Значительно ниже концентрация радона в водах основных изверженных пород. Трещинные воды известняков, песчаников,

сланцев обычно имеют концентрацию радона в пределах 10-100 Бк/л. Однако, в отдельных случаях, и в этих породах могут встречаться повышенные концентрации радона. Подземные воды в горизонтах грунтовых вод, залегающих недалеко от поверхности, обычно имеют более низкую концентрацию радона, составляющую менее 50 Бк/л. В поверхностных водах концентрация радона, как правило, не превышает 2-5 Бк/л, главным образом, из-за того, что радон успевает распасться в течение существования воды в поверхностных условиях или уйти в атмосферу за счет аэрации.

В зависимости от геологических и гидрогеологических условий в различных районах земли создаются условия для формирования широкого спектра фоновых концентрации радона. Наряду с районами с пониженными фоновыми концентрациями радона в водах имеются территории с весьма высокими, “ураганными” содержаниями радона. Такие территории обнаружены в Бразилии, Индии, Канаде. В Иране известны родники с высокими концентрациями радона. Повышенными фоновыми концентрациями радона характеризуются скандинавские страны. Многочисленные зоны с высокой концентрацией радона в водах выявлены в США. В России выявлены зоны с концентрацией радона в воде в 300-400 Бк/л. Из-за разнообразия условий радононакопления в водах в разных странах приняты различные величины предельно допустимых концентраций радона, которые ограничивают использование вод с высоким содержанием радона. Так, в Финляндии предельно допустимые концентрации установлены на уровне 300 Бк/л, в Швеции - 300 Бк/л, в Ирландии - 200 Бк/л.

В России нормы радиационной безопасности устанавливают предельно допустимое содержание радона в воде в **60 Бк/л** при отсутствии в воде других радиоактивных веществ. До этого «Санитарные правила и нормы для централизованного водоснабжения» разрешали пользоваться водой с содержанием радона до 120 Бк/л.

1.4 Способы определения радона

Радон можно определить с помощью эманационных методов.

Под эманационным методом геофизической разведки понимают исследования распределения концентрации радиоактивных газов в горных породах, рудах, почве, атмосферном воздухе, воде в целях поисков и разведки месторождений радиоактивных руд, а также для решения некото-

рых геологических (картирование разломов, зон трещиноватости), инженерно-геологических (выявление пород с повышенной пористостью, отслеживание водных горизонтов) и экологических задач. Сравнительно недавно установлено аномальное поведение радона в подземных водах вблизи эпицентра землетрясения. Это открытие позволило создать метод прогноза землетрясений, который уже оправдал себя на практике.

В зависимости от природы эманаций различают радоновый, торонный и актиноновый методы. Наибольшее распространение в полевых условиях получил радоновый метод эманационной съемки. Путем измерения концентраций Rn и Tn в почвенном воздухе и воде можно определять природу активного начала (тип радиоактивной аномалии) горных пород.

Эманационный метод представляет собой один из основных радиометрических методов геофизической разведки, что обуславливается его большой по сравнению с другими радиометрическими методами глубиной, так и его высокой чувствительностью.

Суть эманационных методов анализа заключается в следующем. Радиоактивные газы тем или иным способом извлекают из твердых или жидких веществ и переводят в ионизационную или сцинтилляционную камеру, чувствительную к α -частицам (радиоактивные эманации Rn , Tn , $Ап$ - это α -излучатели), которая предварительно градуируется с помощью жидкого радиевого стандартного образца (эталона). По ионизационному току или количеству импульсов определяют концентрацию эманации в камере и затем в исходной пробе почвенного воздуха или воды. Данные об активности Rn , Tn , $Ап$ используют для определения содержания долгоживущих материнских веществ - U (по Ra), Th и Ac .

Существует два наиболее распространенных способа анализа концентрации эманаций в водных пробах - *вакуумный* и *циркуляционный*.

При вакуумном способе (рис. 1, а) из сцинтилляционной камеры 1 объемом V_k и из осушителя 2 объемом V_{oc} через соединительные трубки 3 с зажимами $З_{1-2}$ откачивают воздух. Затем кран K_1 и зажимы в определенном порядке открывают, после чего атмосферный воздух, проходя через сосуд 4, обогащается растворенным в воде 5 радиоактивным газом, начинает поступать в эманационную камеру со скоростью около 100 пузырьков в минуту. Специальный сосуд (барботер) плотно закрыт резиновой пробкой 6 с винтовым зажимом, предотвращающей утечку эманации.

В замкнутой циркуляционной системе (рис. 1, б) эманация из сосуда с водой 4 (общий объем V_c , объем воды - $V_{\text{вод}}$) с помощью груши 7 объемом V_r через соединительные трубки 3 объемом V_t в течении некоторого времени прокачки $t_{\text{пр}}$ равномерно распределяется по всему *газовому* объему циркуляционной системы $V_{\text{сист}}$:

$$V_{\text{сист}} = V_k + V_{\text{ос}} + V_r + V_t + V_c - V_{\text{вод}} + \alpha V_{\text{вод}}, \quad (7)$$

или

$$V_{\text{сист}} = V_{\text{возд}} + \alpha V_{\text{вод}}, \quad (8)$$

где $V_{\text{возд}}$ - объем воздуха в системе; $\alpha V_{\text{вод}}$ - объем эманации, растворенной в воде; α - коэффициент Генри.

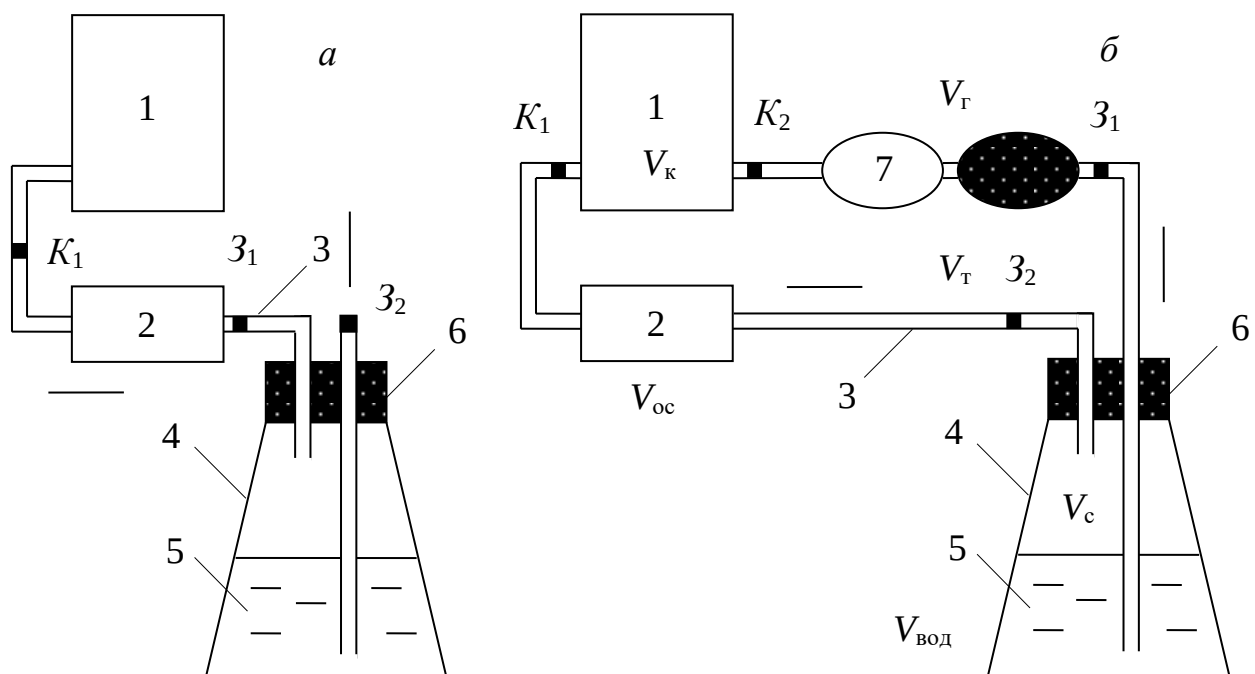


Рис. 1. Вакуумный (а) и циркуляционный (б) способы анализа. Стрелками показано направление движения воздуха

Имеет смысл сделать некоторые пояснения относительно объема эманации, растворенной в жидкости. Формулу (5) можно переписать так:

$$\frac{Q_{\text{ж}}}{\alpha V_{\text{ж}}} = \frac{Q_{\text{газ}}}{V_{\text{газ}}}, \quad (9)$$

где $Q_{\text{ж}}$, $Q_{\text{газ}}$ - количество эманации (Бк) в объемах $V_{\text{ж}}$ и $V_{\text{газ}}$.

Если бы мы перевели всю эманацию из жидкости в газ (что эквивалентно $Q_{\text{ж}} = Q_{\text{газ}}$), то объем $V_{\text{газ}}$, который она занимает в этом случае, со-

гласно (9) должен составить $\alpha V_{\text{вод}}$, что и отражено в соотношении (8).

После введения Rn в камеру и перекрытия зажимов начинает происходить накопление его дочерних продуктов распада (тоже α -излучателей), что приводит к увеличению интенсивности α -излучения I во времени (рис.2). Нарастание I зависит от продолжительности введения $t_{\text{пр}}$ эманации в камеру, от формы и размера камеры, типа детектора, поэтому наряду со значением I фиксируют интервал времени $t_{\text{пауз}}$ от момента прекращения прокачки системы до начала измерения скорости следования импульсов.

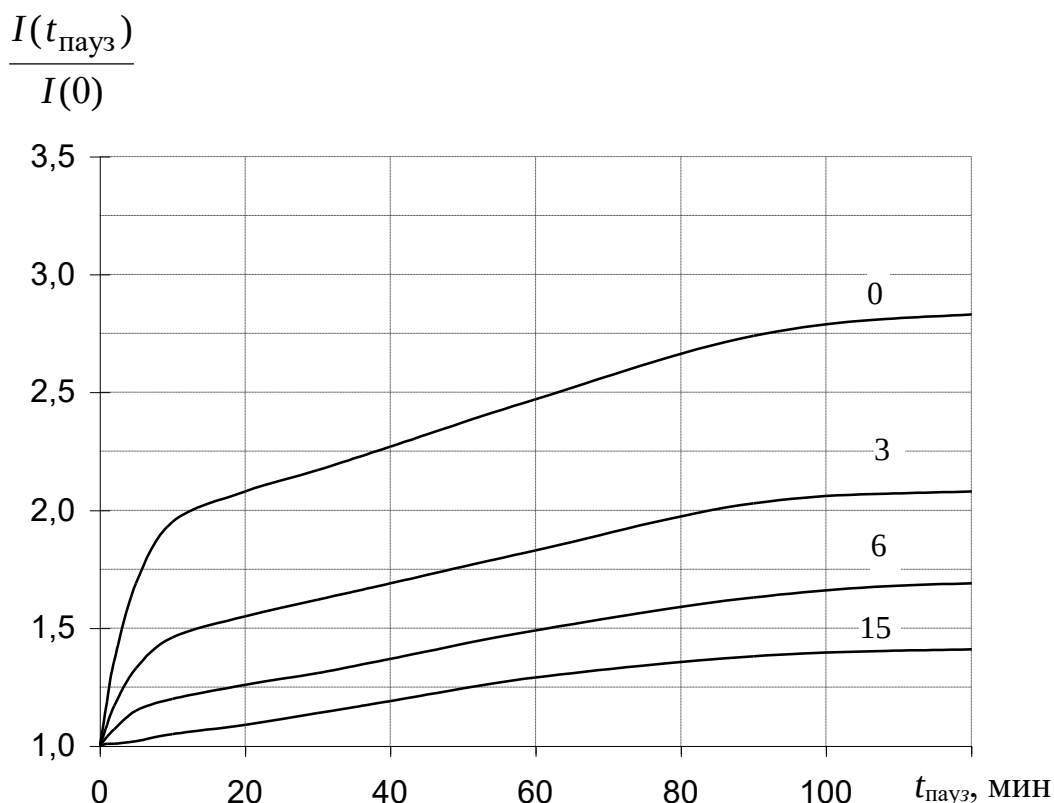


Рис. 2. Коэффициенты нарастания скорости счета импульсов в сцинтилляционной камере в зависимости от интервала $t_{\text{пауз}}$ и продолжительности прокачки системы $t_{\text{пр}}$ в минутах (шифр кривых)

Значение $t_{\text{пр}}$ выбирают одинаковым в процессе анализа проб и при градуировании аппаратуры. Для гидрохимических проб $t_{\text{пр}} = 3-6$ мин. Значение $t_{\text{пауз}}$ в анализах повышенной точности достигает нескольких часов, при изучении лито- и гидрохимических проб - от 3-10 мин до 3 ч.

Для анализа на Rn отбирают 0,2-0,5 л воды (в зависимости от объема барботера) и помещают ее в сосуд, включенный в циркуляционную систему. Желательно произвести эту операцию не позже 4-5 суток после мо-

мента отбора пробы, т.к. если вода не содержит солей Ra, то за этот интервал времени проба может потерять значительную долю активности.

Концентрация Rn в камере после прокачки системы, составляет

$$C_{Rn}^{возд} = \varepsilon I e^{-\lambda t}, \quad (10)$$

где I - скорость счета импульсов в превышении над фоном (имп/мин); ε - градуировочный коэффициент [эман/(имп/мин)]; t - время между отбором пробы и началом ее анализа; λ - постоянная распада Rn:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{3,82 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}. \quad (11)$$

Экспоненциальный множитель в формуле (10) выступает как поправка за распад эманации до начала проведения анализа. Если время t не превышает первых часов, то поправку можно не учитывать.

Количество Rn, циркулирующего в системе составляет

$$Q_{Rn}^{возд} = C_{Rn}^{возд} V_{сист} = \varepsilon I e^{-\lambda t} V_{сист}. \quad (12)$$

Поскольку из водной пробы был извлечен весь радон, то величина

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon I e^{-\lambda t} \frac{V_{сист}}{V_{вод}} = \varepsilon I e^{-\lambda t} \frac{(V_{возд} + \alpha V_{вод})}{V_{вод}} \quad (13)$$

представляет собой искомую концентрацию Rn в исследуемой пробе.

В случае, когда $V_{возд} \gg \alpha V_{вод}$ и можно пренебречь распадом Rn, формула (13) упрощается:

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon I \frac{V_{сист}}{V_{вод}} \approx \varepsilon I \frac{V_{возд}}{V_{вод}}. \quad (14)$$

В полевых условиях содержание Rn в высокорadioактивных водах определяют γ -методом. Для этого водой заполняют стандартный сосуд объемом 8-12 л и в нем измеряют интенсивность γ -излучения. Расчет концентрации эманации ведут по формуле:

$$C_{Rn,\gamma}^{вод} = \varepsilon_{\gamma} I_{\gamma}, \quad (15)$$

где I_{γ} - интенсивность γ -излучения в превышении над естественным фоном (пА/кг или мкР/ч); ε_{γ} - градуировочный коэффициент, который при работе с радиометрами серии СРП-68 составляет около 300 Бк/л на 1 пА/кг (5,8 эман

на 1 мкР/ч).

Эманиационная съемка в полевых условиях заключается том, что в определенной точке съемочного профиля производится отбор проб почвенного воздуха с некоторой глубины. Почвенный воздух по соединительной системе с помощью ручного насоса закачивается в эманиационную камеру. После введения пробы воздуха в камеру, с помощью фотоэлектронного умножителя и счетного устройства импульсов определяется количество сцинтилляций, которое пропорционально концентрации R_n в камере. Сцинтилляционный метод применим для анализа проб воздуха, содержащих радон в концентрациях от нескольких десятых долей эмана и выше.

На рис. 3 приведена принципиальная схема эманиационных измерений на одной из точек съемочного профиля в полевых условиях.

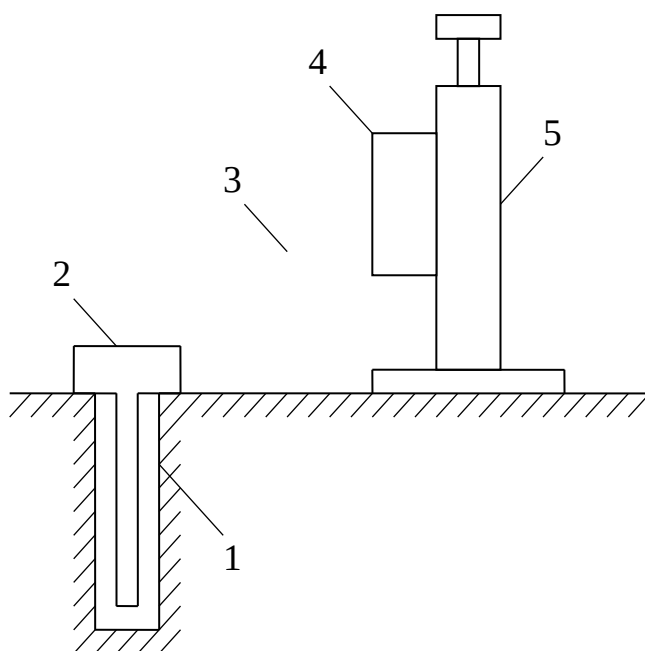


Рис. 3. Схема эманиационных измерений в полевых условиях. Обозначения: 1 – шпур; 2 – прободоборник воздуха; 3 – соединительный шланг; 4 – эманиационная камера и измерительное устройство; 5 – держатель и ручной насос

2. ПОЛЕВОЙ ЭМАНОМЕТР «РАДОН»

Полевой сцинтилляционный эманометр «Радон» предназначен для определения концентрации R_n в почвенном воздухе при полевой эманиационной съемке и определения R_n в пробах воды. «Радон» может применяться и при дозиметрических измерениях. Эманометр в разных модифи-

кациях выпускался с конца 60-х до середины 80-х годов, когда ему на смену пришел более современный прибор РГА-01 «Глициния».

2.1 Основные технические данные и характеристики прибора

- Диапазон измерения скорости счета импульсов - от 0 до 5000 имп/с с поддиапазонами 50, 250, 1000 и 5000 имп/с.

- Чувствительность прибора после трехчасового накопления продуктов распада R_n при объеме камеры 0,5 л не менее 0,36 эман/(имп/с) при фоне в чистой камере не более 5 имп/мин.

- Прибор устойчиво работает в диапазоне температур 0-40 °С при относительной влажности до 80 %. Дополнительная погрешность прибора, вызванная изменением температуры, не более 10 %.

- Питание прибора осуществляется от шести элементов А-373.

- Дополнительная погрешность, вызванная изменением напряжения питания в пределах 8,1 до 9,9 при номинале 9,0 - не более 15 %.

- Основная погрешность измерений эманометра - не более 30 %.

2.2 Устройство и принцип работы прибора

Эманометр «Радон» состоит из следующих основных блоков: сцинтилляционной камеры, фотоэлектронного умножителя (ФЭУ), блока питания и стабилизатора напряжения, усилителя импульсов, порогового дискриминатора, интенсиметра α -излучения, электромеханического счетчика (ЭМС) импульсов с секундомером. В комплект эманометра входит также ручной насос для закачки почвенного воздуха, осушитель и соединительные трубки.

Сцинтилляционная камера представляет собой металлический стакан покрытый внутри слоем $ZnS(Ag)$ - веществом, фоточувствительным к ионизирующему воздействию α -частиц. При попадании α -частицы на слой сцинтиллятора возникает световой квант (вспышка света), который, попадая в фотоэлектронный умножитель, в результате фотоэффекта на катоде выбивает из него электрон. Под действием ускоряющего электрического поля напряжением ≈ 600 В фотоэлектрон в дальнейших столкновениях с *динодами* ФЭУ производит лавинообразное умножение заряда, снимаемого с анода в виде короткого (1-5 мкс) импульса напряжения. С выхода ФЭУ импульсы попадают на усилитель и далее - на пороговый дискриминатор, осуществля-

ющий их отбор по амплитуде. С выхода дискриминатора импульсы поступают на ЭМС и аналоговый интенсиметр со стрелочным индикатором, принцип работы которого близок для большинства радиометров.

На панели основного блока эманометра расположены: держатель ФЭУ со съемной сцинтилляционной камерой и металлическими кранами, стрелочный индикатор измерительного прибора (ИП), регулятор порога дискриминации, кнопка СБРОС, переключатель диапазонов измерений (50, 250, 1000, 5000 имп/с), переключатель РОД РАБОТ и разъем для подключения блока ЭМС. На отдельном блоке ЭМС расположены: секундомер (слева), стрелочный индикатор числа зарегистрированных импульсов, тумблер СТОП/ПУСК и переключатель масштабов $\times 1 / \times 2$.

Переключатель рода работ может находиться в следующих положениях: ВЫКЛ - прибор выключен, НБ - проверка напряжения питания батарей, НВ - проверка высокого напряжения питания ФЭУ. ИМП/СЕК - режим измерения скорости счета импульсов с помощью стрелочного индикатора, ЭМС - режим измерения скорости счета импульсов с помощью электромеханического счетчика. При относительно высоких скоростях следования импульсов (более 20 имп/с) используется режим измерения со стрелочным индикатором, при низких скоростях - режим ЭМС.

ВНИМАНИЕ! Категорически запрещается использовать режим ЭМС при скорости счета 30 имп/с и более - это может привести к выходу счетчика из строя!

2.3 Подготовка прибора и измерительной установки к работе

Подготовка прибора начинается с зарядки батарей в отсек питания и проверки напряжения питания с помощью переключателя рода работ (положение НБ). При правильной работе блока питания стрелка измерительного прибора должна находиться во второй половине шкалы.

ВНИМАНИЕ! Включение прибора в режим измерений возможно только с установленной эманационной или контрольной камерой! В противном случае может произойти засветка ФЭУ и выход его из строя.

Далее производится проверка высокого напряжения ФЭУ: при переключателе рода работ НВ стрелка ИП должна отклоняться не менее чем на

16 делений шкалы. Если этого не происходит, то необходимо подождать 3-5 минут пока не установится рабочий режим ($\approx 18-20$ делений).

С помощью контрольной камеры проверяется чувствительность прибора и правильность установки порога дискриминации. С этой целью на поддиапазоне не ниже 250 снимается зависимость скорости счета импульсов от положения порога дискриминации. В некотором диапазоне шкалы регулятора порога должно наблюдаться «плато» - незначительное изменение скорости счета. Регулятор порога устанавливается примерно в середину этого «плато». Если «плато» не наблюдается, то положение порога фиксируется исходя из паспортных значений чувствительности эманометра, измеренных с помощью контрольной камеры на разных диафрагмах.

Непосредственно перед началом измерений концентрации R_n необходимо проверить работоспособность эманационных камер и оценить их собственный фон. Камера считается пригодной к работе если фон не превышает 30-40 имп/мин. Дочерние продукты распада R_n , оседая на стенках сцинтилляционной камеры, могут вызвать ее радиационное загрязнение. Поэтому после измерений высокоактивных проб рекомендуется заменить камеру и не использовать ее до тех пор, пока фон не снизится до нормального уровня (за счет проветривания и распада радионуклидов).

Подготовка установки для измерения концентраций R_n в воде заключается в сборе циркуляционной системы (рис. 4.1, б). Перед подключением соединительных трубок к эманационной камере краны K_{1-2} должны быть обязательно закрыты во избежание попадания эманации в детектор до начала измерений. Следует также проверять герметичность системы в целом и отсутствие в ней утечек воздуха. Следует обратить внимание на направление подключения груши, в противном случае при прокачке вместо воздуха в камеру может попасть вода и вывести прибор из строя.

2.4 Градуирование прибора

Градуирование эманометра заключается в нахождении значения коэффициента ε . С этой целью 1-2 раза в месяц проводят измерения скорости счета импульсов на стандартных образцах (СО). В качестве СО используют помещенный в барботер раствор соли R_a массой m_{Ra} (г). Для удаления R_n сосуд с радиевым раствором продувают воздухом, плотно закрывают, момент герметизации фиксируют на этикетке СО. Время накоп-

ления Rn берут $t > 3$ суток.

Собирают циркуляционную систему (рис. 1, б), следя за тем, чтобы зажимы Z_{1-2} и краны K_{1-2} были закрыты. Далее измеряют фон камеры $I_{\text{ф}}$ (имп/мин) за время $t_{\text{изм}} = 3$ мин. После этого открывают зажимы Z_{1-2} , краны K_{1-2} и начинают прокачку воздуха в течении $t_{\text{пр}} = 3$ мин. Прокачку системы ведут в темпе, при котором в воде наблюдаются отдельные пузырьки воздуха, следующие друг за другом со скоростью около 300 в мин.

Затем камеру закрывают и в течении нескольких часов через каждые 3 мин фиксируют показания прибора, настроенного на заданную чувствительность (порогом дискриминации), и строят кривую нарастания I (за вычетом фона) во времени.

Градуировочный коэффициент ε в эман/(имп/мин) для момента времени $t_{\text{пауз}} = 3$ мин (значительная часть $T_{\text{п}}$ уже распадется) после прокачки воздуха вычисляют по следующей формуле:

$$\varepsilon = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{C_{\text{Rn}}^{\text{возд}}}{I(t_{\text{пауз}})}, \text{ или} \quad (16)$$

$$\varepsilon = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{m_{\text{Ra}} \cdot 10^{10}}{(V_{\text{возд}} + \alpha V_{\text{вод}}) I(t_{\text{пауз}})}, \quad (17)$$

где $I(t_{\text{пауз}})$ - показания прибора, определяемые на графике для интервала времени $t_{\text{пауз}}$, принятого в процессе анализа проб.

Пример. Имеем эталон Ra массой $m_{\text{Ra}} = 8,55 \cdot 10^{-9}$ г и следующие режимы анализа: $t_{\text{пр}} = 3$ мин, $t_{\text{изм}} = 3$ мин, $t_{\text{пауз}} = 3$ мин. Параметры системы: $V_{\text{к}} = 0,5$, $V_{\text{ос}} = 0$, $V_{\text{г}} = 0,3$, $V_{\text{с}} = 0,5$, $V_{\text{т}} = 0,05$, $V_{\text{вод}} = 0,4$ (все в л), фон камеры $I_{\text{ф}} = 37$ имп/мин, температура $T_{\text{возд}} = 20$ °С. Эталон прокачен 72 ч назад, т.е. $t = 3$ сут.

Измеренная скорость счета импульсов на эталоне составила 1167 имп/с. После вычета фона $I(t_{\text{пауз}}) = 1167 - 37 = 1130$ имп/мин.

$$V_{\text{возд}} = V_{\text{к}} + V_{\text{ос}} + V_{\text{г}} + V_{\text{т}} + V_{\text{с}} - V_{\text{вод}} = 0,95 \text{ л.}$$

$$V_{\text{сист}} = V_{\text{возд}} + \alpha V_{\text{вод}} = 0,95 + 0,2 \cdot 0,4 \approx 1 \text{ л.}$$

$$1 - \exp(-\lambda t) = 1 - \exp(-0,693 \cdot 3/3,82) = 0,42.$$

$$\varepsilon = 8,55 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{10} \cdot 0,42 / (1 \cdot 1130) = 0,032 \text{ эман/(имп/мин).}$$

При проведении градуировании аппаратуры особо тщательно следует следить за тем, чтобы раствор радия не попал внутрь эманационной ка-

меры. Последствия радиационного заражения эманометра крайне неприятны: необходимо полностью разобрать прибор, тщательно промыть каждую деталь. Зараженная камера не пригодна к дальнейшим измерениям.

3. ПРОГРАММА ИЗМЕРЕНИЙ

Задание:

1. Ознакомиться с элементами теории эманационных методов (раздел 1).
2. Ознакомиться с эманометром «Радон», его назначением и основными техническими характеристиками. Подготовить прибор и измерительную установку к работе (раздел 2).
4. Произвести градуировку эманометра в соответствии с описанием, приведенном в разделе 2.4 (выполняется строго под руководством преподавателя).
5. Отобрать пробы воды из разных источников и выполнить измерения концентраций Rn в соответствии с программой измерений (раздел 3).
6. Сделать выводы о соответствии нормам радиационной безопасности исследованных водных источников и возможной природе выявленных аномалий.
7. Ответить на контрольные вопросы (раздел 4).

Материалы, оборудование:

1. Эманометр «Радон» с контрольной камерой, комплект из 6 батарей питания к нему (А-373, «Орион»).
2. Набор сцинтилляционных эманационных камер объемом 0,5 л.
3. Эталонный водный раствор соли радия ($10^{-7} \div 10^{-9}$ г Ra).
4. Специальные сосуды для отбора водных проб (барботеры).
5. Соединительные резиновые трубки, груша для прокачки воздуха, стеклянные трубки, осушительная камера.
6. Калькулятор, журнал измерений, карандаш, резинка.

Отбор водных проб выполняется в следующем порядке:

1. Сосуды для отбора проб (барботеры) моются, желательно в речной или озерной воде, после чего сушатся. На барботеры наклеиваются этикетки из лейкопластыря для записи даты, времени и места отбора проб.

2. Отбор проб производится из водоемов, колодцев, родников, водопроводных кранов, скважин и других источников в объеме 0,3-0,35 л (сосуды емкостью 0,5 л) и 0,5-0,6 л (емкость 1 л). Из водоемов и колодцев отбираются пробы $V = 0,5-0,6$ л, из скважин и родников - $V = 0,3-0,35$ л.

3. Если вода набирается из крана, то струя воды должна бежать свободно, БЕЗ НАПОРА и пузырьков воздуха. Воду следует наливать аккуратно, так, чтобы она бежала по стенке сосуда и не плескалась на дне. Эти предосторожности гарантируют сохранность растворенного в воде Rn .

4. Сразу же после заполнения барботера водой (примерно до середины) его следует герметично закрыть, для чего зажимаются или перевязываются резиновые соединительные трубки. Пробка барботера плотно зажимается винтовым механизмом, причем следует контролировать силу зажима - стеклянные трубки внутри сосуда не должны расколоться.

5. На этикетке сосуда записывается время t_0 и место отбора пробы.

Подготовка прибора и измерительной установки к работе выполняется в соответствии с разделом 4.2.3, градуирование - по указанию преподавателя.

Выполнение измерений концентрации Rn производят так:

1. Собирают циркуляционную систему (рис. 1, б), следя за тем, чтобы зажимы Z_{1-2} и краны K_{1-2} были закрыты.

2. Измерят фон камеры I_f (имп/мин) за время $t_{изм} = 3$ мин. С этой целью переключатель рода работ устанавливают в положение ЭМС. В исходное состояние сбрасываются секундомер и ЭМС. Пересчетный коэффициент ЭМС устанавливают в положение $\times 2$ (регистрируется каждый второй импульс). Для начала измерений необходимо одновременно запустить секундомер и включить переключатель ПУСК счетчика импульсов. Далее следят за секундомером, так как счетчик автоматически не останавливается после истечения времени $t_{изм}$. По истечении заданной экспозиции переключатель переводят в положение СТОП.

3. Открывают зажимы Z_{1-2} , краны K_{1-2} и начинают прокачку воздуха в течении $t_{пр} = 3$ мин. Прокачку системы ведут в темпе, при котором в воде наблюдаются отдельные пузырьки воздуха, следующие друг за другом со скоростью около 300 в мин.

4. После прокачки воздуха краны K_{1-2} закрывают и выжидают некоторое время $t_{пауз} = 3$ мин, чтобы активность радона в камере немного увеличилась, а торона - значительно уменьшилась.

5. Записывают в журнал время начала анализа t_1 . Проводят измерения скорости счета импульсов I (имп/мин) в течении времени $t_{изм} = 3$ мин аналогично п.2.

6. Вычисляют концентрацию Rn в водной пробе по формуле:

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon k (I - I_{\phi}) \frac{V_{сист}}{V_{вод}} \exp \left[-\frac{\ln 2}{3,82} (t_1 - t_0) \right], \quad (18)$$

где k - пересчетный коэффициент счетчика, для нашего случая $k = 2$.

В формуле (18) время отбора t_0 и начала анализа t_1 - в сутках. Если $t_1 - t_0 < 0,2$ сут, то вместо (18) используется более простая формула:

$$C_{Rn}^{вод} = \varepsilon k (I - I_{\phi}) \frac{V_{сист}}{V_{вод}}. \quad (19)$$

При вычислениях принять:

$$V_{сист} = V_{возд} + \alpha V_{вод}, \alpha = 0.2;$$

$$V_{возд} = V_{к} + V_{ос} + V_{г} + V_{т} + V_{с} - V_{вод}.$$

$$V_{к} = 0,5 \text{ л}, V_{ос} = 0,2 \text{ л}, V_{г} = 0,3 \text{ л}, V_{т} = 0,05 \text{ л}, V_{с} = 0,5 \text{ или } 1,0 \text{ л}.$$

Объем воды $V_{вод}$ в барботере определяют по оцифрованной шкале.

В процессе измерений рекомендуется вести следующую форму лабораторного журнала:

Прибор № _____ Оператор _____
 $t_{пр} =$ _____ $t_{пауз} =$ _____ $t_{изм} =$ _____
 $k =$ _____ $\varepsilon =$ _____ эман/(имп/мин)

	Место отбора пробы воды	t_0 , сут	t_1 , сут	I_{ϕ} , имп	I , имп	$I - I_{\phi}$, имп	$V_{вод}$, л	$V_{возд}$, л	$\frac{V_{сист}}{V_{вод}}$	C_{Rn} , эман
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Примечание. Если градуирование не проводится, то значение пересчетного коэффициента ε принимается равным 0,05 эман/(имп/с).



Рис. 4.4. Процесс измерения концентрации радона в водных пробах, отобранных в разных точках Верх-Сысертского участка

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сущность, цели и задачи эманационной съемки.
2. Радиоактивные газы и их краткая характеристика.
2. Глубинность эманационных методов (отдельно по R_n и T_n).
3. По какой формуле можно оценить концентрацию радона в поровом пространстве горной породы?
4. Единицы измерения концентрации эманаций и их соотношение.
5. Закон Генри. Зависимость коэффициента Генри от температуры.
5. Способы анализа концентрации эманаций в воздухе и в воде.
6. Полевой эманометр «Радон» и его краткая характеристика.
7. На каком физическом эффекте основан метод определения концентрации радиоактивных газов прибором «Радон»?
7. Устройство эманометра «Радон» и подготовка его к работе.
8. Порядок градуирования эманометра «Радон».
9. Порядок отбора и анализа содержания R_n в водных пробах.
10. Почему после ввода R_n в сцинтилляционную камеру скорость счета импульсов увеличивается с течением времени?
11. Если спустя несколько суток после отбора водной пробы ее α -активность не изменилась, то какой Вы можете сделать вывод?
12. Назовите физические предпосылки для раздельного определения концентраций радона, торона и актинона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Возжеников Г.С., Бельшев Ю.В.* Радиометрия и ядерная геофизика: Учебное пособие. - Екатеринбург: Изд. УГГУ, 2011.
2. *Гонсалес А.Х., Андерс Ж.* Естественные и искусственные источники излучения. В кн.: Ядерная энергия в будущем. МАГАТЭ, 1989. Т. 31, № 2.
3. *Жуковский М. В.* Радон: измерение, дозы, оценка риска. - Екатеринбург: ИПЭ, 1997.
4. *Крисюк Э.М.* Радиационный фон помещений. М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. *Нефёдов В.Д. и др.* Радиохимия. – М: Высшая школа, 1985.
6. Радиация: Дозы, эффекты, риск. Пер. с англ. - М.: Мир, 1998.
7. *Смыслов А.А., Максимовский В.А., Харламов М.Г. и др.* Радон в земной коре и риск радоноопасности // Разведка и охрана недр. 1995. № 5.
8. *Титов В.К., Лучин И.А., Лашков Б.П.* Радон в почвах и зданиях - Л.: Рудгеофизика, 1991.
9. *Уткин В.И.* Газовое дыхание Земли // Соросовский образовательный журнал. – М., 1997. – № 1.
10. *Уткин В. И.* Радоновая проблема в экологии. // Соросовский образовательный журнал. – М., 2000. - том 6, № 3.

Учебное издание

Александрова Жанна Николаевна
Белышев Юрий Владимирович

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО РАДИАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине «Радиационная безопасность» для студентов
специализаций «Геофизические методы исследования скважин» и
«Геофизические методы поисков и разведки МПИ»
специальности 21.05.03 – «Технология геологической разведки»
очной и заочной формы обучения

Часть 3
Определение радона в воде

Редактор _____
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать ____ . ____ . 2018 г.
Бумага писчая. Формат 60 х 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж 100. Заказ _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»



В. М. Сапожников

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Учебное пособие
по дисциплине «Комплексирование геофизических методов»
для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
специализации «Геофизические методы поиска и разведки
месторождений полезных ископаемых»

Екатеринбург – 2020

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии



В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

В. М. Сапожников
**КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ**

Учебное пособие
по дисциплине «Комплексирование геофизических методов»
для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
специализации «Геофизические методы поиска и разведки
месторождений полезных ископаемых»
очной, заочной и дистанционной форм обучения

Екатеринбург
2020

Рецензент: *Виноградов А. М.*, д-р. геол.-минер. наук,
ведущий научный сотрудник Института геофизики УрО РАН;
Голиков Ю. В., д-р. геол.-минер. наук,
Уральский государственный горный университет.

Печатается по решению Редакционно – издательского совета
Уральского государственного горного университета

Сапожников В. М.

Комплексирование геофизических методов: учебное пособие / В. М. Сапожников;
Уральский гос. горный ун-т.-Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. – 76 с.

Учебное пособие представляет несколько сокращенный конспект лекций по дисциплине №Комплексирование геофизических методов» для специальности 21.05.03 Технология геологической разведки специализации «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых» (РФ). В учебное пособие вошла та часть курса, которая посвящена поискам твердых полезных ископаемых и наиболее востребована при подготовке дипломных проектов большей частью студентов специальности РФ.

В пособии рассматриваются общие положения методологии планирования и проведения комплексных геофизических исследований преимущественно в рудных провинциях. Особое внимание уделено выявлению тектонических нарушений различного масштаба, которые являются контролируемыми, подводящими и распределяющими элементами рудоносных структур. Формирование и результативность комплекса при поисках рудных объектов показана на примере уранового месторождения, поскольку типовые комплексы для решения структурно-картировочных и поисковых задач на различные твердые полезные ископаемые подробно рассмотрены в специальной справочной литературе.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности РФ очного и заочного обучения. Отдельные разделы могут быть полезны студентам других геофизических и геологических специальностей, которым разведочная геофизика дается в сокращенном виде. Пособие может быть полезным аспирантам, магистрам и работникам производственных организаций, применяющих геофизические методы.

Автор выражает благодарность инженеру кафедры геофизики Г. А. Косаревой, взявшей на себя труд по оформлению рисунков и окончательной компоновки пособия.

Рис. 23 Библ. 13 наим.

© Уральский государственный
горный университет, 2020

Введение

Курс «Комплексирование геофизических методов» завершает подготовку студентов-геофизиков к профессиональной деятельности. В курсе на основе знаний по отдельным геофизическим методам с их достоинствами и ограничениями дается представление о решении типовых геологоразведочных задач путем комплексирования нескольких методов с целью получения совокупности данных существенно расширяющих возможности геофизических исследований недр.

С необходимостью применить знания по комплексированию геофизических методов студенты сталкиваются еще на стадии обучения в вузе в период дипломного проектирования и это умение оценивается государственной аттестационной комиссией по итогам защиты учебного проекта по решению картировочной или поисково-разведочной задачи. Выпускник кафедры геофизики должен показать умение сформировать и обосновать рациональный комплекс методов в конкретной геологической среде.

Представленный курс лекций в основном ориентирован на изложение методик выявления и изучения месторождений твердых полезных ископаемых. Именно эти объекты являются главными для специальности РФ. Что касается комплексирования геофизических методов при поисках месторождений нефти и газа, то по этой теме издан конспект лекций доцента вуза Г. Г. Кассина.

Методология комплексирования геофизических методов сформировалась к началу 80-х годов прошлого столетия, когда появились специальные монографии, учебники и справочники, обобщающие теоретические положения и опыт комплексирования. В числе специалистов, внесших существенный вклад в формирование и пропаганду технологии комплексирования методов разведочной геофизики, следует назвать Г. С. Вахромеева, В. В. Бродового, А. А. Никитина, В. К. Хмелевского.

Впервые курс по комплексированию геофизикам в нашем вузе начал читать профессор Н. А. Иванов. Несколько лет этот курс читал доцент, а затем профессор А. Я. Ярош. Проблеме комплексирования геофизических методов главным образом при поисках руд посвятили свои докторские диссертации Г. П. Саковцев, ставший впоследствии ректором нашего вуза, и выпускник кафедры геофизики Г. С. Вахромеев. Последним на эту тему опубликована монография. К настоя-

щему времени по курсу комплексирования издано несколько вариантов учебников и справочников. Основные из них приведены в списке использованной литературы.

В настоящем конспекте помимо классических положений, отраженных в известных источниках, автор приводит некоторые свои разработки и сведения, которые могут оказаться полезными в процессе выбора и обоснования комплекса геофизических методов.

1. ПРЕДПОСЫЛКИ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

При изучении теории и практики применения отдельных геофизических методов, которым посвящены специальные учебные курсы разведочной геофизики, обучающиеся знакомятся не только с достоинствами методов, но и их ограничениями при исследовании многообразных и сложных геологических сред. Практически всегда перед геофизическими методами ставится задача по изучению одиночных или комплекса объектов в некоторой вмещающей среде. И в общем случае ограниченные возможности одного метода делают невозможным без дополнительной информации определить природу геологических тел, признаки, существования которых выявляются в процессе измерений. Даже, если наличие определенного объекта установлено, бывает сложно определить требуемые для его оценки характеристики.

Одной из основных причин необходимости применения комплекса геофизических методов является неоднозначность истолкования наблюдаемого поля, следовательно, и неопределенность конечных геологических выводов. В качестве примера обратимся к рис. 1, на котором видно, что близкие по виду положительные локальные аномалии поля силы тяжести (Δg), наблюдаются над разнообразными геологическими объектами относительно повышенной плотности (интрузии, руды). Поэтому по данным гравиметрии можно лишь установить факт увеличения плотности, каких-то горных пород на изучаемом участке, но нельзя определить геологическую причину нарушения однородности среды и объективно охарактеризовать аномалиеобразующий объект.

При решении поисковой задачи нередко возникает проблема классификации аномалий, которые по признакам похожи на те, которые характерны для искомого объекта. Часто среди выявленных аномалий встречаются такие, которые вызваны геологическими телами, не представляющими поискового интереса. Их создают неоднородности, относимые к классу геологических помех. На примере рис. 1 видно, что при поисках залежей руд с повышенной плотностью, аномалии над разрезами *а*, *б* и *г* можно связывать с проявлением геологических помех. В рассмотренном примере для снижения или даже исключения неоднозначности в истолковании зафиксированных ано-

малый существенную помощь могло оказать применение электрического зондирования.

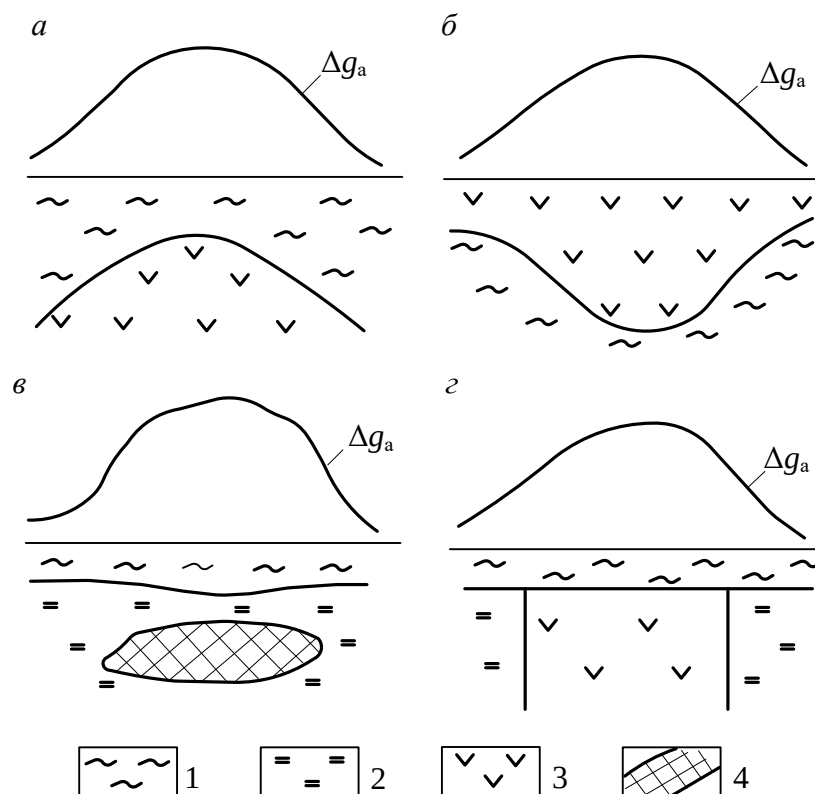


Рис. 1. Пример проявления однотипных аномалий силы тяжести над разнообразными геологическими разрезами: породы: 1 – глинистые; 2 – гидротермально измененные; 3 – магматические; 4 – руды

Перед геофизическими методами, отличающимися высокой производительностью и возможностью дистанционно изучать земные недра, ставятся задачи по определению качественных и количественных характеристик изучаемых объектов. Например, по данным промысловых геофизических исследований скважин необходимо провести литологическое расчленение разреза, выделить пласты-коллекторы, определить их фильтрационно-емкостные свойства, характер насыщения, а для продуктивных пластов – установить коэффициент нефтегазонасыщенности. Такое многообразие требуемых характеристик приводит к необходимости применять солидный комплекс геофизических методов, нередко превышающий десяток наименований.

Во многих случаях из-за влияния факторов, осложняющих условия наблюдения, приходится применять разнотипные методы определения одной и той же физико-геологической или геометрической характеристики объекта. Например, для определения пористости коллекторов в одной скважине применяют три разнотипных геофизических метода: ГГК-П, НК и АК, которые контролируют результаты друг друга. В крайнем случае, ограничиваются какими-то двумя методами.

Природу аномалиеобразующих объектов иногда можно определить, используя несколько модификаций одного и того же метода, отличающихся глубиной исследования. В качестве примера можно привести двухразное электропрофилирование или двухзондовый микрокаротаж.

При проектировании и применении геофизических методов ответственным моментом является их разделение на основные и вспомогательные – детализационные методы. Первыми изучается все намеченное геологическое пространство, а вторые применяются лишь на отдельных участках, как наиболее перспективных по данным основных методов.

Таким образом, комплексирование геофизических методов проводится с целями выявить и надежно классифицировать неоднородности геологической среды. Среди общего числа аномалий необходимо выделить те из них, которые обусловлены объектами, представляющими первоочередной интерес. Следует определить качественные и количественные характеристики геологических образований, и, в первую очередь, тел полезных ископаемых, требуемые для оценки их ценности, проектирования дальнейшей разведки и условий добычи.

2. НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ И ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ АНОМАЛИИ. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При проведении геофизических работ приходится оперировать понятиями нормального поля и геофизической аномалии. И хотя способы их определения в различных методах могут существенно различаться, основные принципы в этих способах являются общими. Это связано с тем, что задачей геофизических исследований является выявление и классификация неоднородностей в геологической среде.

Нормальное поле

Это такое физическое поле условно однородной геологической среды, которое существовало бы в случае отсутствия объектов, нарушающих однородность этой среды. Например, за нормальное в гравиразведке принимают поле силы тяжести условно однородного сфероида Земли, поверхность которого совпадает с уровнем океанов. Это поле определяют исходя из координат точки наблюдения по широте и долготе с учетом значения поля на экваторе. Для уточнения в это поле вносят поправку Буге, учитывающую влияние толщины и плотности промежуточного (между точкой наблюдения и уровнем океана) слоя.

В магниторазведке также рассчитаны карты нормального поля Земли, которое на ограниченной площади принимают за постоянное значение. Его определяют в соответствии с географическим положением этой площади на материке или в море. В методе радиоволнового просвечивания (РВП) нормальное электромагнитное поле вычисляют с учетом паспортной для передатчика начальной напряженности, геометрии (взаимного расположения элементов) установки и коэффициента поглощения поля (α_k) условно однородной среды (рис. 2).

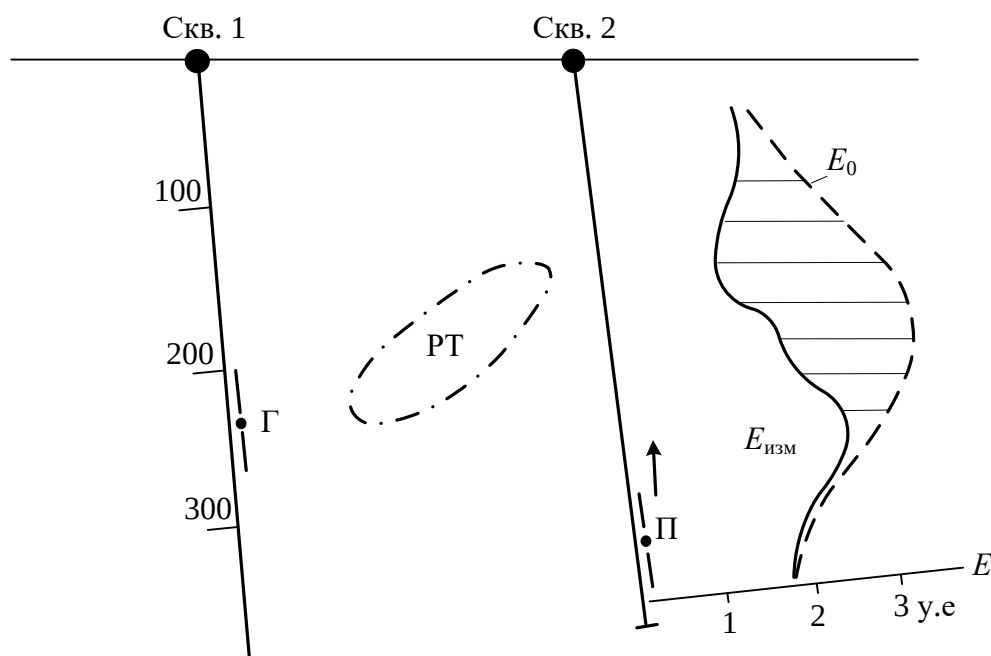


Рис. 2. Пример сопоставления напряженности измеренного ($E_{изм}$) и вычисленного нормального (E_0) поля в методе радиоволнового просвечивания

Г – генераторная антенна; П – приемная антенна; РТ – рудное тело

Похожий подход к определению нормального поля применяют в методе заряда, выражая это поле в виде функции от расстояния точки наблюдения до эпицентра погруженного источника тока. Эту функцию рассчитывают аналитически или определяют стохастическим способом по измеренному полю [13].

В методах, изучающих искусственно возбуждаемые поля, в качестве нормального иногда принимают некоторые обоснованные постоянные значения поля или в виде некоторого диапазона значений с верхним и нижним пределами.

В общем случае нормальным считается поле, обусловленное однородной по конкретному физическому параметру геологической средой. В некоторых случаях условно однородная среда может представлять какую-то структуру, например, горизонтально-слоистое полупространство, измеряемая характеристика поля над которым остается постоянной или изменяется по установленному закону. Принимаемая однородность среды зависит от масштаба исследований. При средне- и крупномасштабных съемках используют понятие о местном нормальном поле, отражающем стохастический подход к его определению.

Стохастический способ определения нормального поля

В методах, изучающих на ограниченной площади естественные физические поля или искусственно возбуждаемые поля при постоянном размере установки (магниторазведка, радиометрия, электропрофилирование и др.), в качестве фона (местного нормального поля) принимают некоторые постоянные значения, характерные для условно однородной геологической среды, которая рассматривается в качестве фонового объекта. Это может быть массив горных пород, горизонтально-слоистая толща или другая структура, характеристики поля для которой по показаниям применяемой установки в идеале должны сохраняться постоянными.

В реальной геологической обстановке в случае наличия такой структуры на результаты геофизических наблюдений влияет масса случайных факторов: мелкая неоднородность физических свойств фонового объекта, изменения геометрии его элементов, рельеф местности и т.п. В этих условиях перспективно использовать стохастический (вероятностно-статистический) подход к определению фона.

Простейшим примером служит статистическое определение коэффициента поглощения в методе РВП, который определяется по не-

скольким значениям, вычисленным на участках трассы измерений, не имеющих признаков экранирования поля генератора проводниками в межскважинном пространстве. Этот коэффициент для изучаемого разреза принимается как постоянная величина и используется при вычислении нормального поля.

Профильная съемка. В более общем случае, как это показано на рис. 3, а на примере профилирования методом вызванной поляризации (ВП) с установкой постоянного размера, исходными являются данные измерений на участке, для которого имеются основания отнести поле на нем к условному фону. Как видно из рис. 3, а, значения кажущейся поляризуемости (η_k) на профиле изменяются в определенных пределах. Для объективного отражения изменчивости поля строится дифференциальная кривая распределения анализируемой характеристики с учетом закона, принимаемого для статистически однородной совокупности этой характеристики. В случае η_k распределение хорошо описывается нормальным законом Гаусса. Построение распределения ведется с применением линейной шкалы с разбивкой диапазона измеренных значений на равные интервалы (классы). Ось ординат отражает частоту появления при измерениях значений поля для каждого из классов (соответствует середине класса) и принимается в штуках или процентах (рис. 3, б). Для характеристики фона желательно иметь не менее 30 измерений.

При ограниченном объеме выборки для построения детальной кривой распределения в статистике применяют прием, предусматривающий использование второй шкалы значений поля. Ширина классов остается прежней, но их границы смещаются относительно первой шкалы на половину класса. Использование дополнительной шкалы позволяет в 2 раза увеличить число точек, по которым строится распределение, не уменьшая ширину класса.

Значение поля A , встречающееся с максимальной частотой (мода), которое при нормальном законе распределения совпадает со средним и медианой, принимают в качестве центрального значения – $\bar{A}_0$ (в рассматриваемом примере изучения поляризуемости $\bar{\eta}_{k0} = 2.5 \%$).

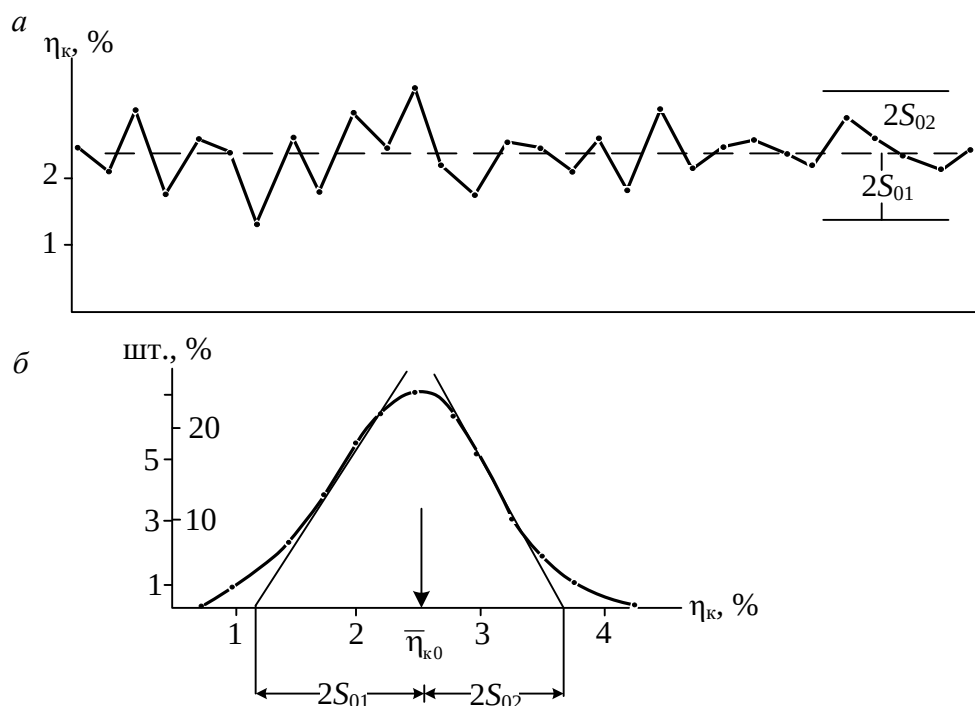


Рис. 3. Графики измеренных значений кажущейся поляризуемости (η_k) методом ВП по профилю в пределах фонового объекта (а) и дифференциальная кривая распределения значений η_k для этого профиля, по которой определяются стохастические характеристики фона (б)

Для характеристики рассеивания значений относительно центрального используют среднеквадратичное отклонение – S_0 . В теории вероятности ему соответствует стандартное отклонение (стандарт). Для его определения к ветвям кривой распределения проводятся две наклонных касательных (рис. 3, б). Согласно теории точки пересечения касательных с осью абсцисс смещены от центрального значения на величины $\pm 2S_0$, а расстояние между точками пересечения равно $4S_0$. В рассматриваемом примере $S_0 = 0,63\%$.

При упрощенном способе искомые характеристики определяют графически по графикам измеренного поля на фоновом объекте. Осредняющая график прямая соответствует значению $\bar{A}_0$, а величина S_0 определяется по диапазону изменения фона, который приблизительно равен $4S_0$. На рис. 3, а этот диапазон отмечен ограничивающими линиями (в правой части рисунка).

Статистические характеристики нормального поля с распределением по закону Гаусса могут быть вычислены и аналитическим пу-

тем. Центральное значение вычисляется как среднее для n рядовых (i) измерений: $\bar{A}_0 = \Sigma A_{0i}/n$, а величина S_0 определяется по формуле

$$S_0 = \left[\sum_{i=1}^n (A_{0i} - \bar{A}_0)^2 / n \right]^{1/2} \quad (1)$$

По результатам оценки статистических характеристик нормального поля его диапазон с надежностью 95 % принимают равным:

$$A_0 = \bar{A}_0 \pm 2 S_0. \quad (2)$$

Очевидно, что все величины поля, попадающие в этот диапазон, могут рассматриваться как значения фона. По результатам измерений, приводимых на рис. 3, значения в интервале 1.24-3.74 относятся к фоновым характеристикам поля.

При известной величине S_0 к аномальным с надежностью 95 % относятся значения поля, отвечающие условиям: меньше $(\bar{A}_0 - 2S_0)$ или больше $(\bar{A}_0 + 2S_0)$.

Метод заряда. Исходными данными являются значения относительного потенциала, измеренные по некоторой сети, причем для нее известны координаты точек наблюдения, позволяющие определить расстояние от каждой точки до эпицентра заряда. В примере (рис. 4), иллюстрирующем применение способа, результаты съемки поля заряда в рудное пересечение скважины 1 представлены в виде плана изолиний потенциала.

Наиболее распространенной моделью вмещающей среды в этом методе является однородное изотропное или горизонтально-слоистое полупространство. Для реализации способа определения нормального поля на планшете съемки намечаются 6-8 радиальных профилей с началом в эпицентре заряда O . На одном чертеже строят графики измеренного потенциала (U) для этих радиальных профилей как функции расстояния (r) от точки O и проводят осредняющую их кривую U_{cp} . Кривая U_{cp} и рассматривается в качестве функции нормального потенциала $U_0(r)$. Естественно эту процедуру можно выполнить аналитически по простейшей программе осреднения.

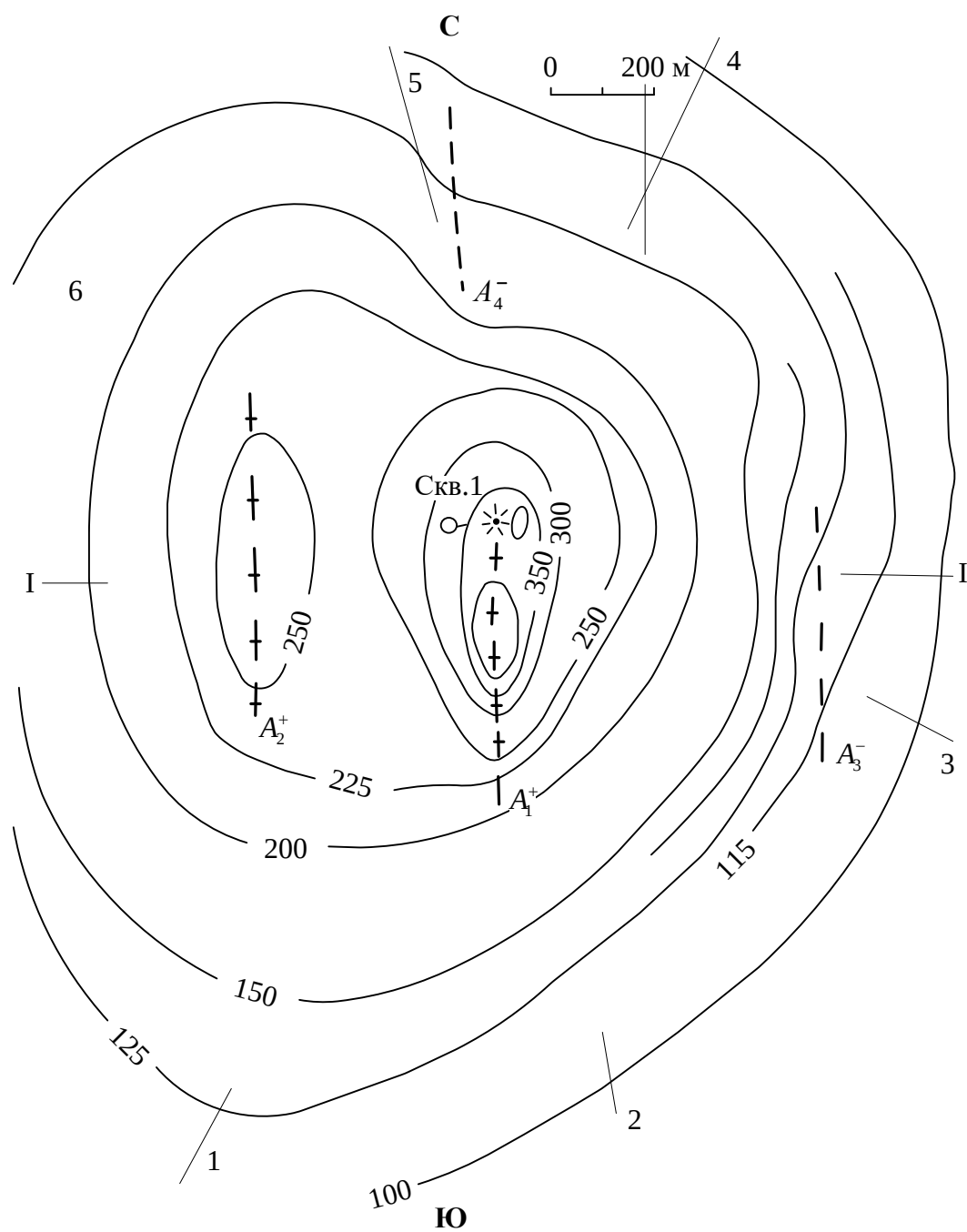


Рис. 4. План изолиний потенциала (в мВ) поля заряда, сделанного в рудное пересечение скв.1:

A^+ , A^- - оси положительных и отрицательных аномалий, 1-6 – радиальные профили, O – эпицентр заряда; I – I – линия геологического разреза

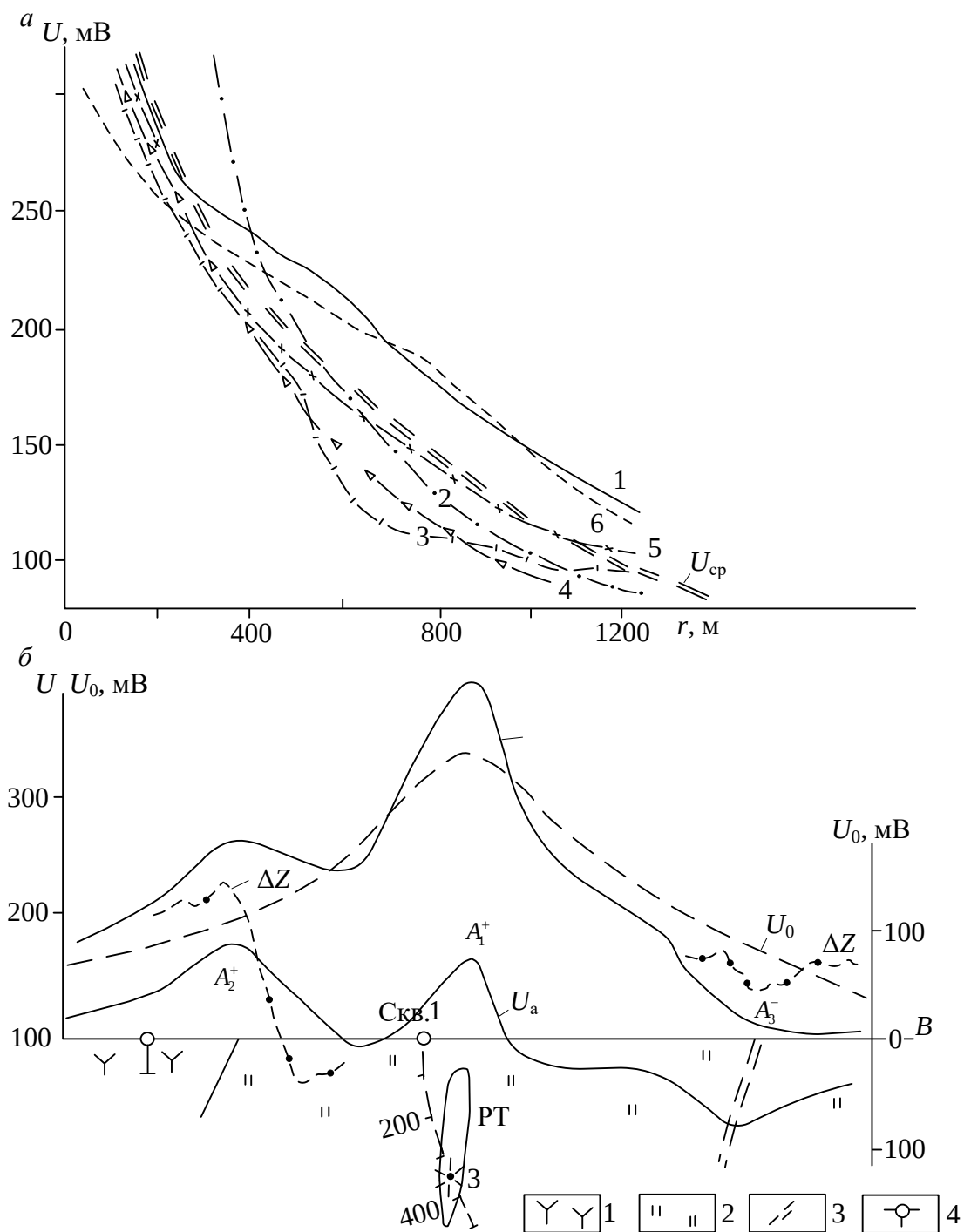


Рис. 5. Результаты обработки и интерпретации поля заряда в скважину 1 (исходные данные на рис. 4):

a – графики потенциала по системе радиальных профилей и осредняющая их кривая ($U_{cp} = U_0(r)$); b – графики измеренного, нормального и аномального потенциала (U , U_0 , U_a), фрагменты измерений магнитного поля (ΔZ) и геологический разрез по профилю I–I.

1 – субвулканические липарито-дациты; 2 – гидротермально измененные породы; 3 – разрывные нарушения; 4 – скважины; 3 – заряд; РТ – рудное тело (проекция на плоскость разреза)

В случае наличия признаков проявления анизотропной вмещающей среды стохастический способ определения нормального потенциала в методе заряда применяют с учетом схемы перехода от анизотропной к изотропной среде [13].

По результатам определения нормального потенциала можно при любой ориентировке профилей съемки вычислить нормальный потенциал по профилю. Пример определения в методе заряда по плану изолиний (рис. 4) нормального потенциала по одному из поперечных профилей показан на рис. 5, а.

Геофизические аномалии

Геофизическая аномалия характеризует отклонение физического поля от его нормальных значений. По геофизическим аномалиям изучают неоднородности геологической среды различного масштаба, что позволяет получить представление о самой структуре земных недр. В общем случае, при анализе результатов геофизических измерений в качестве аномальной составляющей рассматривают величину разности между измеренным значением поля в i -ой точке (A_i) и местным нормальным полем (A_0): $A_{ai} = \Delta A_i = A_i - A_0$. Нормальное поле может быть постоянным или плавно меняющимся, задаваться некоторыми средними величинами или, при учете его дисперсии, в виде предельных значений. В общем случае к аномальным относятся значения, превышающие верхний предел нормального поля или оказывающиеся ниже его нижнего предела. В первом случае наблюдается положительная аномалия, а во втором случае отрицательная аномалия.

Например, на рис. 2 аномальная составляющая изображена заштрихованной областью и отражает появление отрицательной аномалии, связанной с экраным влиянием сульфидного рудного тела.

В качестве примера определения аномальной составляющей изучаемого поля могут служить результаты, полученные при обработке и интерпретации данных метода заряда, приводимые на рис. 4 и 5. Данные о распределении нормального потенциала $U_0(r)$ используются для выделения в рядовой точке аномальной составляющей U_a измеренного потенциала U , равной

$$U_a = U - U_0(r). \quad (3)$$

По результатам определения нормального потенциала можно при любой ориентировке профилей съемки вычислить нормальный, а

затем и аномальный потенциал по профилю. Результаты подобных вычислений нормального потенциала, сопоставления его с измеренным полем и график аномального потенциала по одному из поперечных профилей с элементами геологической интерпретации показан на рис. 5, б.

В рассматриваемом примере аномалия A^+_1 связана с приподнятой относительно заряда частью заряженного рудного тела, имеющего северное склонение. Другая положительная аномалия A^+_2 обусловлена контактом гидротермально измененных пород, вмещающих заряженное тело, с менее электропроводной субинтрузией. Отрицательные аномалии фиксируют субвертикальные плоскости разрывных нарушений относительно повышенной электропроводности.

Безразмерные характеристики геофизических аномалий. В ряде случаев для характеристики аномального объекта целесообразно использовать нормирование аномалий относительно каких-то стандартных величин, при котором учитывается уровень фона, снижается зависимость от точности измерений, типа измеряемой аппаратуры, условий наблюдений, вида изучаемого поля. Появляется возможность сопоставлять аномальные эффекты, зафиксированные от одного и того же объекта различными методами или одним методом, но с применением различных технологий, и в других случаях.

В промысловой геофизике при оценке аномалий широко применяется двойной разностный параметр α . Он представляет отношение

$$\alpha = \Delta A_i / \Delta A_0 = (A_i - A_0) / (A_0 - A_0), \quad (5)$$

где ΔA_i – аномалия на рядовом объекте, ΔA_0 – максимальная аномалия на объекте принятом за эталон (может быть и любым объектом с которым производится сравнение). Например, при проведении измерений поля ПС в скважине на изучаемом пласте-коллекторе потенциал равен 20 мВ, на пласте с самыми высокими фильтрационно-емкостными свойствами потенциал равен 10 мВ, на глинах, рассматриваемых в качестве фона, зафиксированы значения 60 мВ. Следовательно, для изучаемого пласта имеем $\alpha_{\text{ПС}} = -40 / -50 = 0,8$.

Применение безразмерного двойного разностного параметра удобно для установления корреляционной зависимости $\alpha_{\text{ПС}}$ от некоторых промысловых параметров, например, от коэффициента пористости K_p , определенного по данным лабораторных исследований. Подобные зависимости часто имеют достаточно универсальное значение и широко используются на производстве.

При геофизических поисковых и разведочных работах на твердые полезные ископаемые для характеристики аномальности i -го объекта при применении j -го метода используется показатель контрастности γ_{ij} , равный [1]:

$$\gamma_{ij} = \Delta A_i / S_0. \quad (6)$$

В этом параметре учитывается не только аномальность поля относительно уровня фона, но и дисперсия самого фона. Показатель контрастности удобен для сравнения эффективности методов при оценке их конкурентности, а также для вычисления аномальности объекта в случае применения комплекса методов. Для успешного применения метода необходимо условие $\gamma_i > |2|$.

Использование безразмерных величин γ_i позволяет учитывать результаты нескольких методов путем вычисления функции комплексного показателя θ , представляющую алгебраическую сумму показателей контрастности отдельных методов. Знак у показателей контрастности при суммировании устанавливается в соответствии с решаемой задачей, обеспечивая подчеркивание аномальности искомых объектов по комплексу методов. Подробнее этот вопрос рассмотрен ниже в разделах 3 и 5.

3. ФИЗИКО-ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЙ

Геофизические методы применяются для изучения разнообразных геологических и технических объектов. Это могут быть геологические структуры, благоприятные на содержание ценного сырья, месторождения и отдельные тела полезных ископаемых. К типовым объектам также относятся земельные основания для строительства или прокладки автомобильных и железных дорог, скважины или другие горные выработки на разведываемых или эксплуатируемых месторождениях и др. При организации и проведении геофизических работ на любых объектах необходимо четко сформулировать цели исследований по выявлению и изучению в типовых условиях геологических образований. Следует также рассмотреть возможные варианты их параметров, физические предпосылки для успешного решения поставленных задач. Результаты, получаемые в процессе исследований, часто требуют оперативного и обоснованного внесения корректив в их технологию. Ответственным моментом является представление ито-

говых данных исследований в форме понятной и удобной для специалистов, организующих комплексные геологоразведочные или изыскательские работы.

Решение всех этих вопросов осуществляется с помощью сформированной для соответствующей стадии работ физико-геологической модели (ФГМ) объекта геофизических исследований. Существенный вклад в теорию и методику комплексирования геофизических методов, включая принципы формирования ФГМ, внес выпускник Свердловского горного института профессор Гелий Сергеевич Вахромеев [1].

ФГМ отражает упрощенно-обобщенное представление об изучаемом геофизическими методами объекте, предполагающее наличие системы геолого-геофизических сведений, имеющихся на данной стадии работ. ФГМ создают в период проектирования геофизических работ, в процессе их проведения по мере поступления получаемых данных, а также по завершению работ в виде итогового документа.

Обобщенную ФГМ можно представлять в виде совокупности частных моделей: геологической, петрофизической и физических полей в профильном, плоскостном или объемном варианте.

Геологическая модель.

Примеры геологических моделей рудных полей

Геологическая модель отражает представление об объекте исследований как системе геологических тел и проявлений геологических процессов с изображением соответствующих разрезов, карт, блок-схем и т. п.

Представляет интерес рассмотреть обобщенные морфогенетические геологические модели постмагматогенных рудных полей, которые являются предметом изучения при поисках рудных месторождений. Под рудным полем понимают геологический объект, состоящий из генетически родственных сближенных рудных скоплений, гидротермально измененных минерализованных пород и малых магматических образований, представляющих собой фазы отщепления из общего материнского очага и использовавших в своем движении общие каналы. Поэтому при поисках рудных месторождений интерес представляет выявление всех этих структурных элементов рудных полей.

Наиболее отчетливо модели рудных полей продемонстрированы в работах П. Ф. Иванкина на основе детального изучения более 50

глубокозалегающих месторождений руд самого различного состава. Достоинство типизации рудных полей, выполненное П. Ф. Иванкиным, состоит в том, что сформированные им геологические модели отражают в наглядной форме главнейшие их структурные элементы, к выявлению которых могут успешно привлекаться геофизические методы. Об этом свидетельствует опыт успешных поисково-разведочных работ, отраженный в частности в монографии [13]. Большой набор примеров рудных месторождений, изученных в пределах разнотипных рудных полей, часть из которых приведена ниже, рассмотрен в справочнике [9].

Постмагматогенные рудные поля формируются выше или на периферии материнских интрузий, которые являются источником постмагматических растворов, создающих ореолы гидротермальных изменений горных пород и рудные скопления. По характеру взаимоотношений гидротермального оруденения с материнскими интрузиями можно выделить три рода рудных полей.

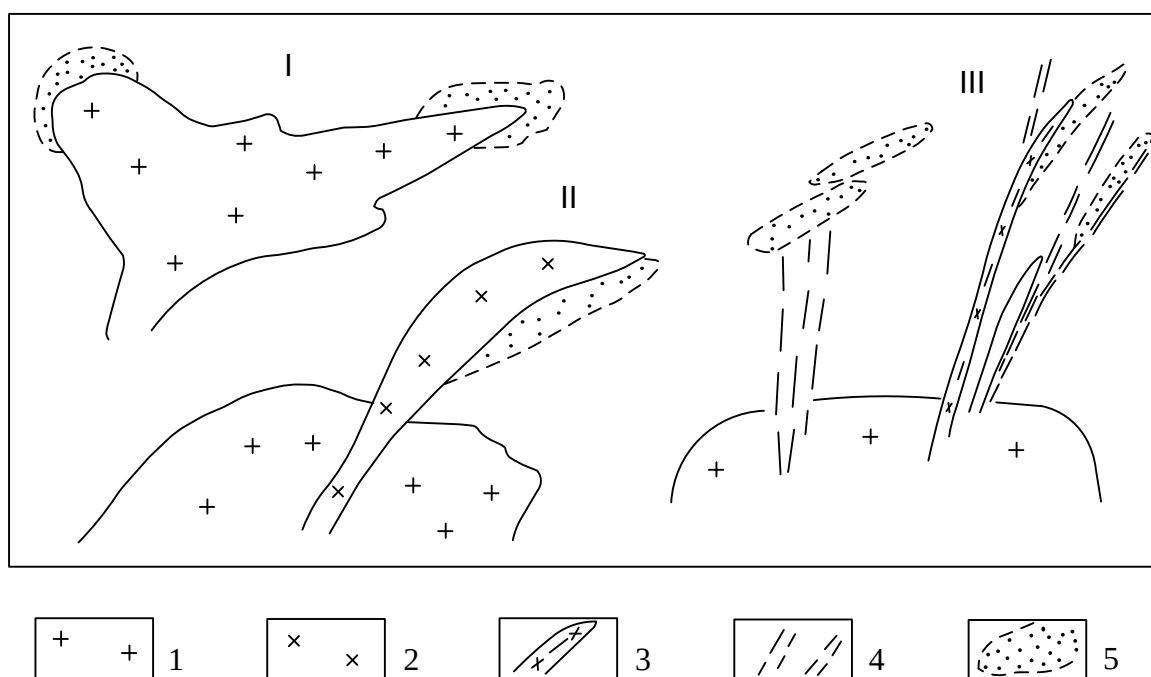


Рис. 6. Морфологические типы (геологические модели) постмагматических рудных полей разного рода (I, II, III) (по П. Ф. Иванкину):

1 – материнский плутон; 2 – тела поздних магматических отщеплений; 3 – лентовидные тела малых интрузий; 4 – разрывные нарушения; 5 – рудоносный комплекс, включающий гидротермально измененные породы и руды

Рудные поля I рода являются ореольными или бескорневыми (рис. 6). Они формируются на ранних стадиях остывания внедривше-

гося магматического тела в условиях широкого фронта отделения растворов по всей или части поверхности материнского интрузива. Растворы обычно обогащены водой, летучими и рудными компонентами. Минерализация вмещающих пород происходит вблизи места отделения растворов от остывающей магмы. В результате образуются широкие ореолы измененных пород с рассеянной или прожилковой минерализацией без богатых локальных скоплений. На поверхности они проявляются в виде полей измененных пород и рассеянной минерализации на достаточно обширных пространствах над погребенными интрузиями или вдоль границ вскрытых эрозией магматических тел. Примеры геологических разрезов месторождений типичных для ореольных рудных полей I рода приведены на рис. 7. Эти разрезы могут рассматриваться как геологические модели этих объектов. Главными структурными элементами их являются интрузии и ореолы рассеянной или прожилковой минерализации.

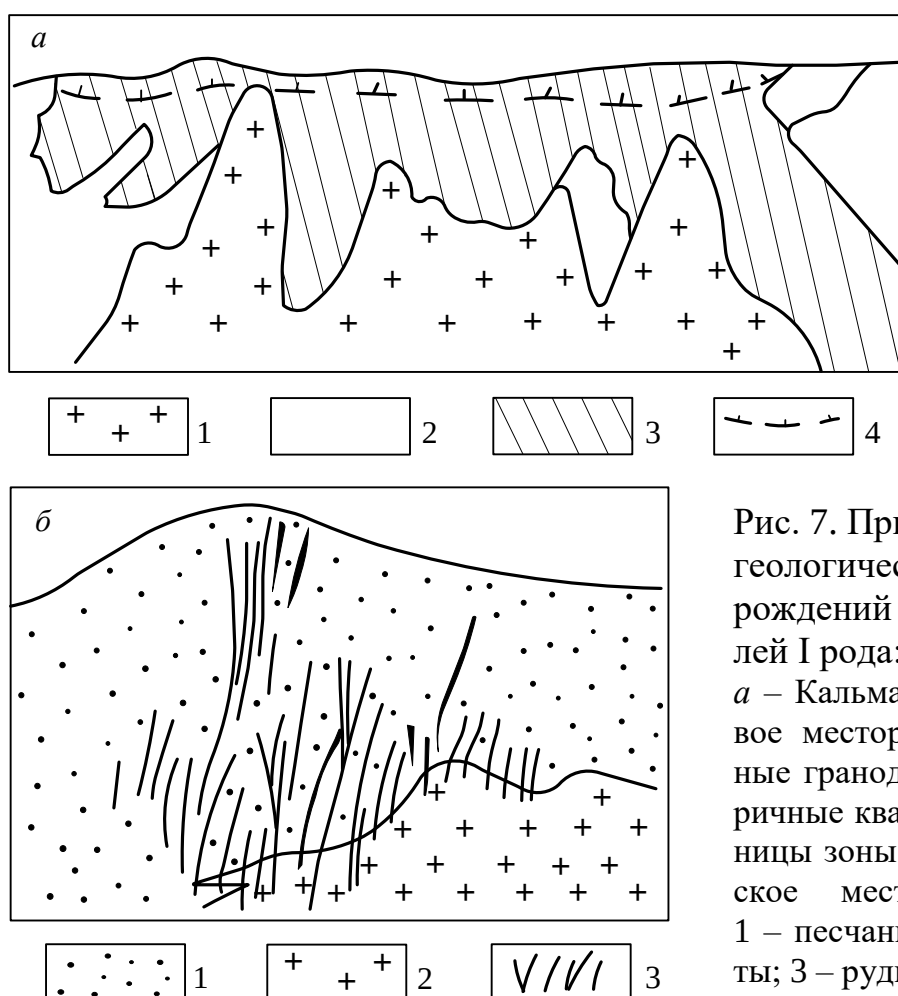


Рис. 7. Примеры схематических геологических разрезов месторождений ореольных рудных полей I рода:

а – Кальмакырское медно-порфировое месторождение: 1 – интрузивные гранодиорит-порфиры; 2 – вторичные кварциты; 3 – руды; 4 – границы зоны окисления; *б* – Иультинское месторождение вольфрама: 1 – песчаники и сланцы; 2 – граниты; 3 – рудные жилы

Рудные поля II рода – это системы рудных тел, окружающих их зон гидротермально измененных пород и поздних магматических от-

щеплений, имеющих общие корни (или рудно- и магмоподводящие каналы), уходящие внутрь крупного интрузива, производными которого все они являются (рис. 6.) Считается, что растворы поступали из верхних частей интрузива и проникали в их кровлю в виде потоков, двигавшихся по нарушениям, контактам или другим проницаемым каналам, что обусловило структурный контроль оруденения. Фигура рудного поля и свойства преобразованных в его пределах пород отражают направленность рудоносных растворов от корней к фронту поля. Рудные поля II рода характерны для гипабиссальных интрузий, часто приурочены к вулканическим постройкам, сформировавшимся над ними, имеют пологие и крутопадающие ветви. Примеры месторождений, типичных для корневых рудных полей II рода, приведены на рис. 8.

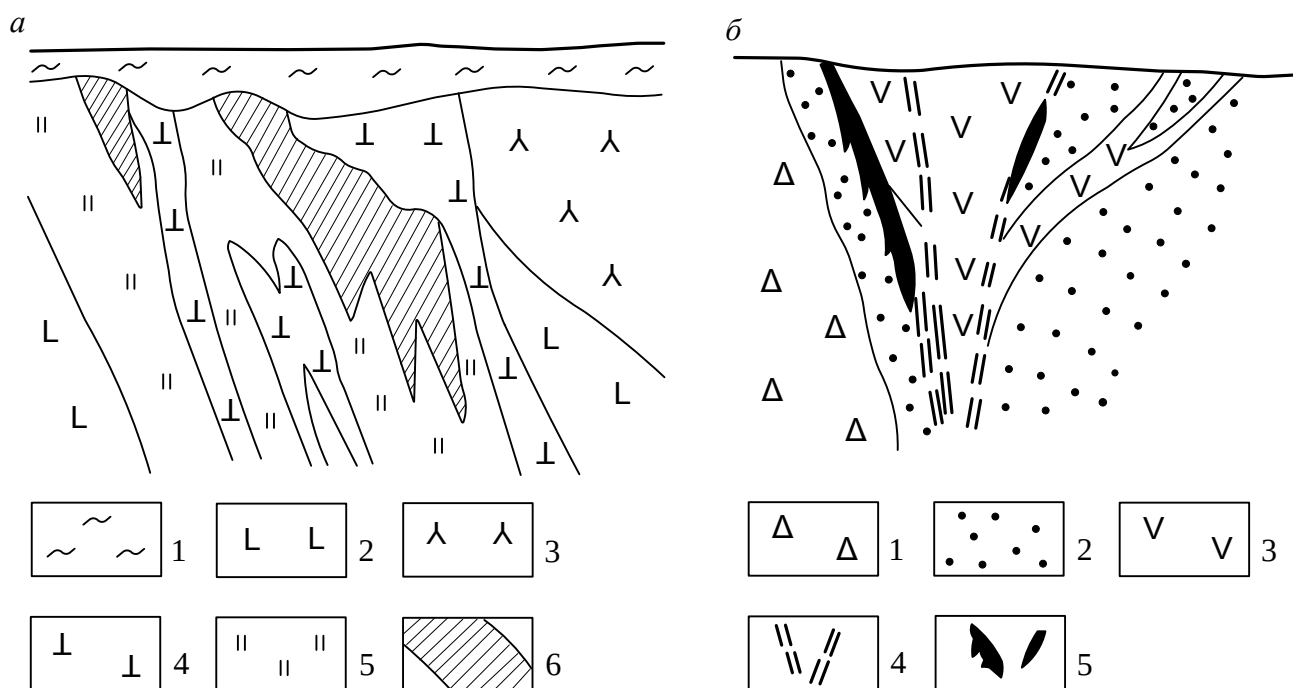


Рис. 8. Схематические геологические разрезы месторождений рудных полей II рода:

а – южная часть Гайского медноколчеданного месторождения: 1 – рыхлые отложения; 2 – туфы; 3 – диабазовые порфириты; 4 – субвулканические липарит-дациты (малая интрузия) ; 5 – метасоматиты; 6 – руды; б – молибден-урановое месторождение: 1 – диабазы и спилиты докембрия; 2 – переслаивающиеся осадочные и вулканогенно-осадочные породы; 3 – субвулканические андезиты (малая интрузия); 4 – разрывные нарушения; 5 – рудные тела

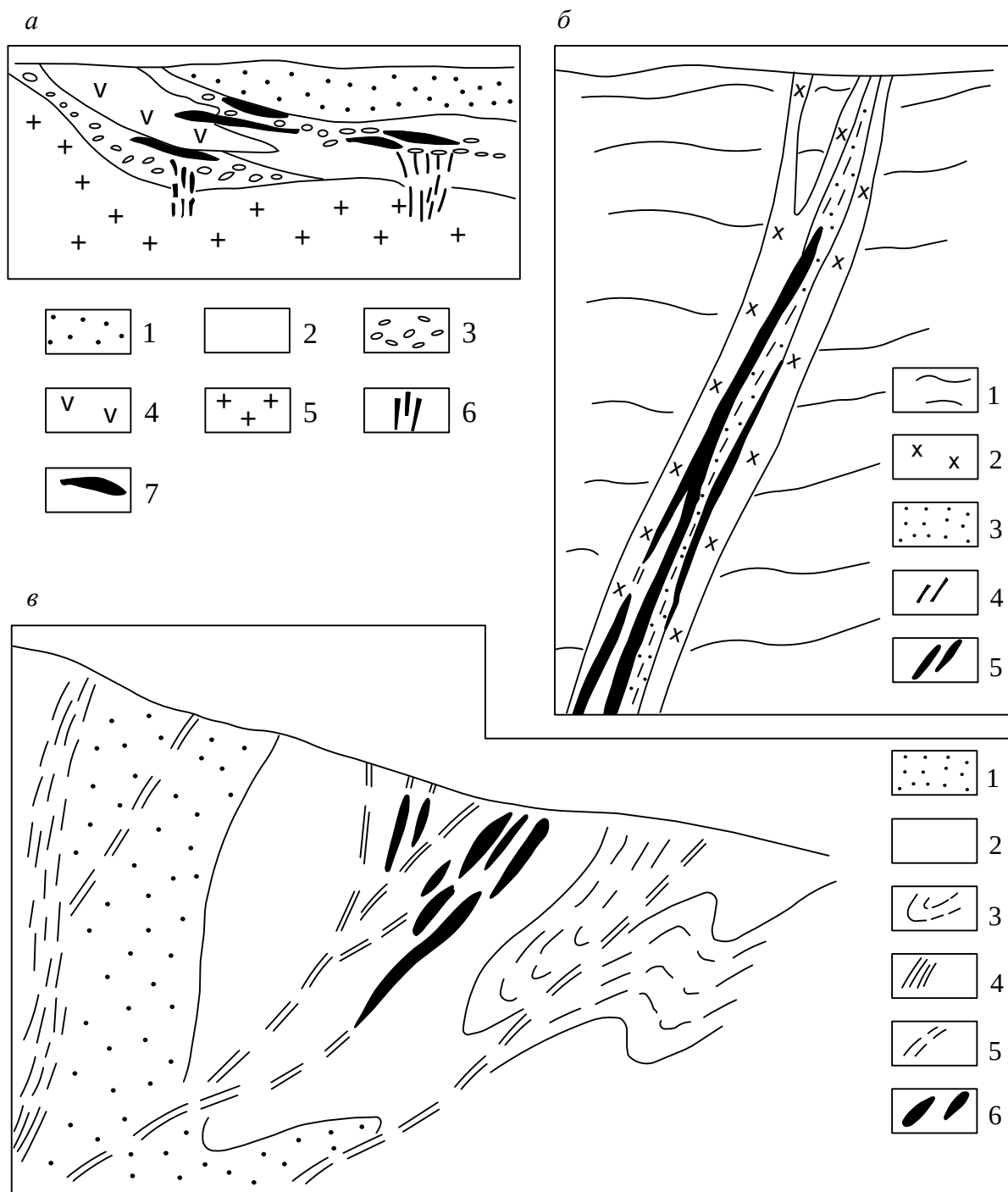


Рис. 9. Примеры геологических разрезов месторождений корневых рудных полей III рода:

а – мышьяково-урановое месторождение: 1 – алевролиты с прослоями песчаников; 2 – песчаники; 3 – конгломераты и гравелиты; 4 – туфолавы; 5 – граниты; 6 – разрывные нарушения; 7 – рудные тела; *б* – уран-титановое месторождение: 1 – кристаллические сланцы и гнейсы; 2 – пегматитовые жилы; 3 – гидротермально измененные породы; 4 – бластомилониты тектонических швов; 5 – рудные тела; *в* – Сахалинское месторождение киновари: 1 – песчаники, конгломераты, алевролиты; 2 – глинистые алевролиты; 3 – пачки глин; 4 – главный разлом; 5 – оперяющиеся трещины; 6 – рудные тела

К рудным полям III рода относят систему рудных тел, окружающих их измененных пород и иногда сопровождающих их серии малых интрузий, значительно оторванных от глубинных интрузий (рис. 6). Образовавшие их потоки гидротерм приурочены к самостоятельным тектоническим зонам, уходящих на глубину, или к ветвям крупных разломов. Последние являлись открытыми системами и, хотя могут нести следы гидротермальных изменений и минерализации, но промышленных скоплений руды не содержат. В ответвлениях, выклинивающихся к дневной поверхности, или в локальных проницаемых геологических телах, игравшими роль экранированных для растворов резервуаров, с которыми контактировали тектонические нарушения, образуются рудные скопления. Поэтому рудные залежи в рудных полях этого рода залегают согласно со слоистыми толщами или разрывными нарушениями в породах с повышенной пустотностью. Примеры месторождений, характерных для рудных полей III рода, приведены на рис. 9.

Таким образом, как следует из геологических моделей, при поисках рудных месторождений главными объектами выявления геофизическими методами являются рудные залежи, включающие их ореолы окolorудных изменений, рудоконтролирующие тектонические нарушения, крупные и малые интрузии. Все эти объекты имеют аномальные петрофизические свойства и благоприятные предпосылки для обнаружения при геофизических съемках.

Модели петрофизические и физических полей

Петрофизическая модель отражает сведения о распределении в геологическом пространстве физических свойств, характеризующих геологические тела, как объекты, имеющие предпосылки для выявления и изучения их геофизическими методами. При этом возможны случаи объединения нескольких геологических образований в структурно-вещественные комплексы (СВК) с одинаковыми или близкими физическими свойствами. В этом случае происходит упрощение петрофизической модели по сравнению с геологической моделью. Однако не исключены случаи, когда внутри условно единого геологического тела существуют участки изменений свойств за счет проявления процессов локального преобразования горных пород, которые отличаются по физическим свойствам и могут фиксироваться геофизическими методами. Такая картина наблюдается при локальном ме-

таморфизме, околорудных изменениях, развитии трещиноватости и др. процессах. В этих случаях петрофизическая модель может отражать результаты действия этих процессов и выглядеть сложнее, чем геологическая модель.

Петрофизическая модель может быть представлена в виде таблиц, типовых физико-геологических колонок, сводных геолого-геофизических разрезов, петрофизических карт или разрезов: самостоятельных или совмещенных с геологическими картографическими материалами. Желательно дополнять традиционно принятые в геологии мелкомасштабные литолого-стратиграфические разрезы (колонки) данными о физических свойствах, представленных на них толщ.

Исходные данные о физических свойствах горных пород для формирования петрофизической модели получают в результате лабораторных измерений на образцах, по данным интерпретации результатов каротажа или параметрических наблюдений физических полей на отдельных участках, а также путем использования справочной литературы. Помимо данных по изучаемой территории обязательно приводятся необходимые сведения об объектах-аналогах, что позволяет учесть опыт предшественников. Примером петрофизической модели месторождения может служить упрощенная типовая физико-геологическая колонка, изображенная на рис.11.

Физические поля или результаты их трансформации отражают данные, получаемые при решении прямой задачи на основе геологической и петрофизической моделей, или же отражают данные реальных наблюдений. Они необходимы для обоснования возможностей геофизических методов. На стадии проектирования это могут быть геофизические поля на объектах-аналогах, ранее изученных в схожих геологических условиях. Физические поля также приводятся как исходный материал, использованный при геологической интерпретации уже выполненных измерений, когда с помощью ФГМ представляются итоговые документы геофизических работ.

Пример физико-геологической модели

В качестве примера на рис. 10, 11 приводится ФГМ уранового месторождения, приуроченного к разрывным дислокациям в метаморфизованных породах протерозоя. По классификации П. Ф. Иванкина оно относится к корневым рудным полям III рода, оторванных от материнского глубинного плутона и приуроченных к тектониче-

ским зонам. На геологической модели (рис. 10, а) видно, что разрывные нарушения тяготеют к крыльям антиклинальной структуры, представленной вулканогенно-карбонатными отложениями. Оруденение локализуется в зонах проявления разрывной тектоники преимущественно в сланцевых толщах на участках с повышенной пористостью, появившихся вследствие разуплотнения пород. Рудоносные растворы помимо урана привнесли в зону их разгрузки вещества, сформировавшие ореолы гематитизации и сульфидизации. Эпигнетические изменения вмещающих пород сопровождались образованием в верхней части разреза зоны окисления.

Петрофизическая модель месторождения (рис. 11) отражает развитие аномальных проявлений в физических свойствах, как в контуре рудных тел, так и в околорудно-измененных породах. В рудах помимо высокой радиоактивности (J_γ) отмечается увеличение плотности (σ), магнитной восприимчивости (χ), поляризуемости (η_k) и понижение сопротивления (ρ_k). Вмещающие породы достаточно дифференцированы по физическим свойствам, что позволяет ожидать появление аномалий от складчатых структур. Анализируя петрофизическую модель, можно полагать, что зоны околорудно-измененных пород, характеризующиеся разуплотнением, повышением магнитной восприимчивости, электропроводности и поляризуемости, должны проявиться в магнитном поле, а также по данным методов электротометрии. Следует ожидать наложение на структурную составляющую полей проявлений, связанных с телами рудных тел и сопровождающих их ореолов минерализации.

Действительно, на графиках полей, измеренных комплексом методов по профилю, проходящему через рудоносную структуру (рис. 10, б), отражаются главнейшие ее элементы. Так отрицательной локальной аномалией силы тяжести отмечается ядро антиклинали (выход к поверхности карбонатов среди магматических пород). Расширение этой аномалии связано с проявлением зон разуплотнения и трещиноватости, обусловленных существованием здесь разрывных нарушений, как одного из признаков благоприятных условий для проникновения рудоносных растворов.

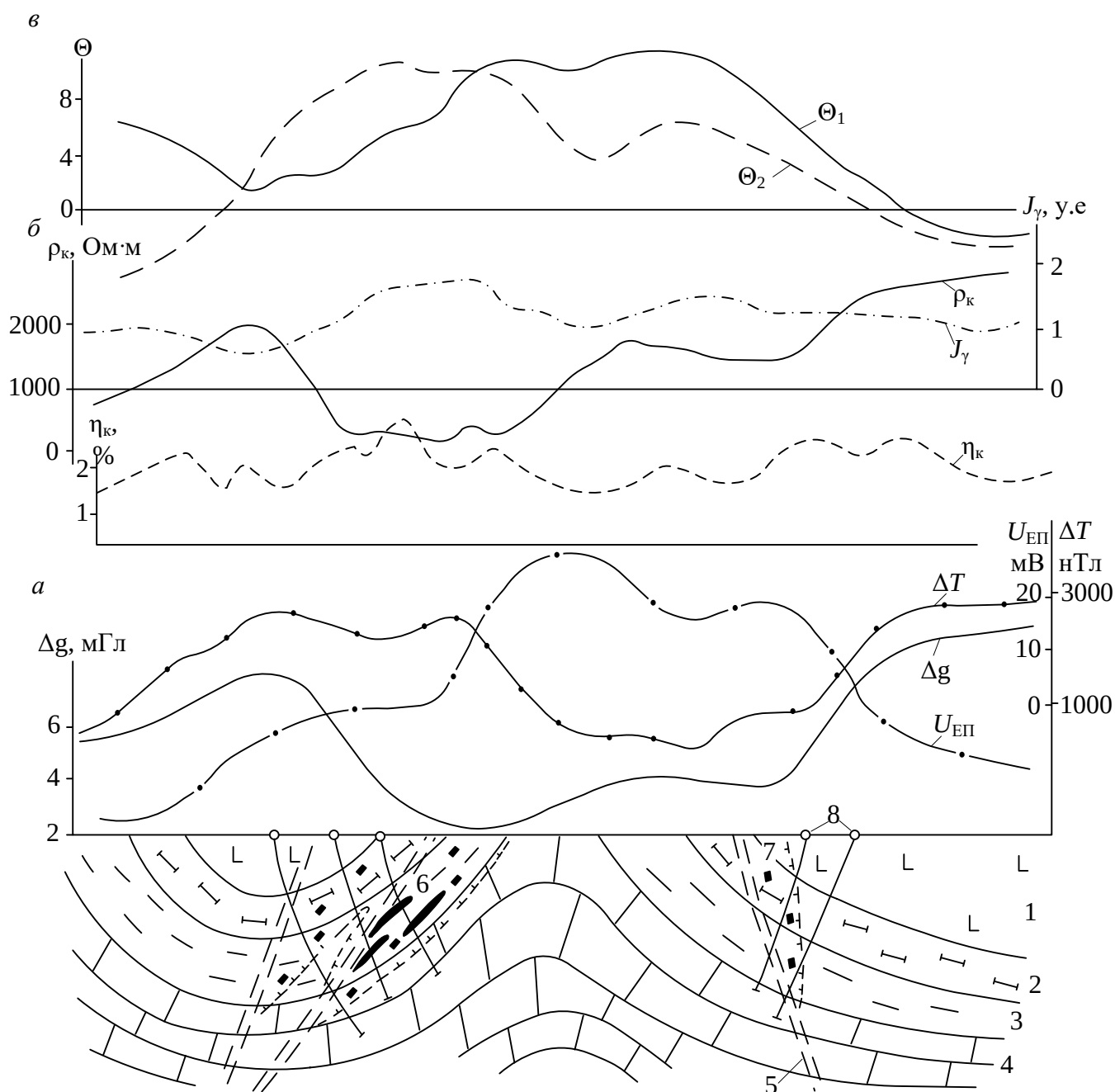


Рис. 10. ФГМ месторождения урана (по В. Е. Голомолзину, В. А. Титовой, А. В. Денисову):

а – геологический разрез (геологическая модель) месторождения: 1 – габбро-диабазы; 2 – пестроцветные слюдистые сланцы; 3 – слюдисто-карбонатные шунгитсодержащие сланцы; 4 – доломиты; 5 – тектонические нарушения; 6 – урановые руды; 7 – зоны гидротермально метасоматических изменений и минерализации; 8 – скважины; *б* – графики геофизических полей; *в* – функции комплексного показателя аномалий гравитационного и магнитного полей (θ_1), полей электрометрии и радиометрии (θ_2)

Отрицательная локальная аномалия магнитного поля, связанная с ядром антиклинали, явно уже гравитационной аномалии, то есть заметно повышение магнитного поля в районе ослабления поля силы

тяжести (над выходом к дневной поверхности рудоносных пород). Такое несоответствие двух полей является признаком отражения развития вторичных процессов, связанных с проявлением рассеянного ожелезнения, что характерно для фронтальной части ореола поступавших из недр рудоносных растворов. Это весьма благоприятный поисковый признак.

Для месторождения характерны участки профиля, на которых отмечается заметное уменьшение удельного сопротивления, хотя и слабое, но заметно повышение поляризуемости среды по данным срединного градиента с размером установки 1000 м. Так как над этим участком также наблюдается заметное повышение гамма-поля, то эти важные признаки следует также рассматривать как благоприятные для обнаружения оруденения.

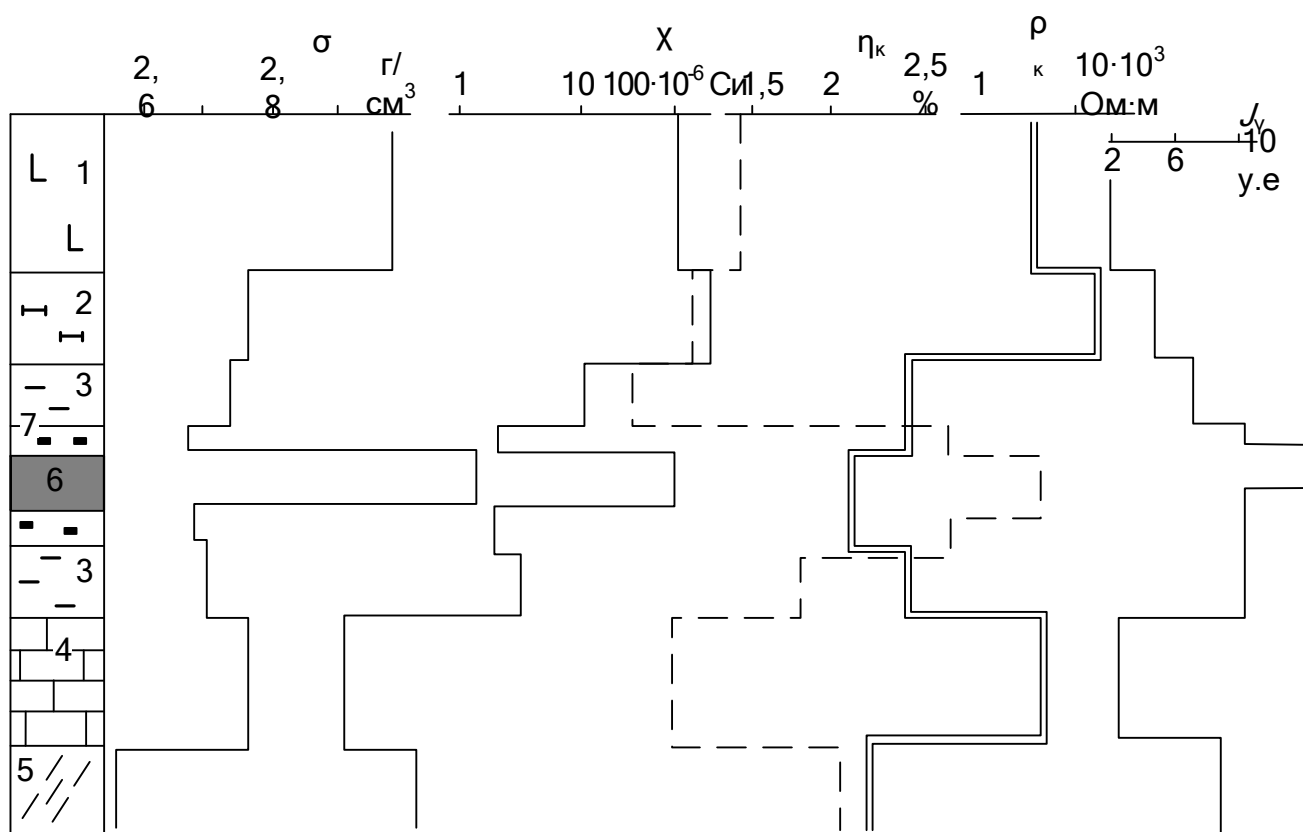


Рис. 11. Типовая физико-геологическая колонка (петрофизическая модель) месторождения урана (см. рис.10):
 графики плотности (σ), магнитной восприимчивости (χ), кажущихся поляризуемости (η_k) и удельного сопротивления (ρ_k), радиоактивности (J_γ) горных пород разреза (1-7 см. подрисуночные надписи к рис.10, а)

Весьма отчетливо влияние рудоносных пород проявляется в виде четкой положительной аномалии естественного электрического

поля. И хотя аномалия несколько смещена по восстанию относительно самого оруденения и наблюдается еще над участком с рассеянной минерализацией, однако, при наличии других признаков район, наиболее перспективный на оруденение, по аномалии естественного поля фиксируется достаточно надежно.

Представление о возможности совместного учета результатов нескольких методов показано на примере двух вариантов функции комплексного показателя (рис. 10, в). При вычислениях в качестве нормального поля использовались значения, типичные для участков профиля, проходящих над магматическими породами. Вычислительные формулы для Θ составлялись с таким расчетом, чтобы подчеркнуть положительными аномалиями присутствие объектов, представляющих первоочередной интерес.

Функция Θ_1 вычислялась по формуле $\Theta_1 = -\gamma_{ГР} - \gamma_{м}$ и отражает совместное проявление аномальности полей гравиметрии и магнитометрии. При структурных исследованиях интерес представляют выходы к дневной поверхности потенциально рудоносной толщи сланцев, и соответствующие им отрицательные аномалии этих полей являются положительными факторами контроля этих искомых объектов. Это обстоятельство учтено в формуле Θ_1 . График функции Θ_1 имеет картировочное значение и положительная аномалия Θ_{A1} хорошо соответствует выходам сланцев совместно с толщиной карбонатных пород среди тел магматитов.

Функция Θ_2 отражает аномальность методов электроразведки (КС, ВП и ЕП) и радиометрии, связанных с самим месторождением урана и близрасположенного рудопроявления, и вычислялась по формуле $\Theta_2 = \gamma_{ВП} + \gamma_{ЕП} - \gamma_{КС} + \gamma_{р}$. Результирующая аномалия этих методов подтверждает возможность применения данного комплекса методов для поисков урановых руд в геологических условиях близких тем, которые отражены на представленной ФГМ.

Таким образом, сформированная по данным геологии, измерений физических свойств в скважинах и полей на дневной поверхности ФГМ, позволяет расшифровать природу геофизических аномалий наземных методов, выявить те признаки, по совокупности которых можно обнаруживать урановые месторождения в районе с подобными геологическими условиями. Появляется возможность обосновать комплекс геофизических методов, при применении которого можно рассчитывать на успешные результаты поисков.

4. ФОРМИРОВАНИЕ ПЕТРОФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО ДАННЫМ РУДНОГО КАРОТАЖА

В настоящее время сведения о физических свойствах при проектировании, поисках и разведке месторождений полезных ископаемых в основном получают по данным геофизических методов исследования скважин (ГИС). Одним из вариантов представления петрофизической модели объекта исследований является типовая геолого-геофизическая колонка разреза изучаемой геологической среды. В промысловой геофизике она получила название сводный геолого-геофизический разрез. Поскольку физические свойства осадочной толщи, изучаемой методами промысловой геофизики, достаточно стабильны по латерали, для формирования модели разреза используют диаграммы 2-3 скважин, имеющих пересечения всех структурных элементов разреза.

В рудных районах, характеризующихся высокой изменчивостью разнообразных признаков геологических образований, представление об их физических свойствах можно получить с помощью стохастической модели разреза.

Основными элементами структуры рудного поля являются геологические тела и зоны развития геологических процессов, мощности которых измеряются десятками метров. Отдельный элемент, исходя из опыта ГИС, представляет образование с включениями и его можно с некоторым приближением рассматривать как двухкомпонентную среду. Размеры включений обычно составляют первые метры. Роль включений играют мелкие чередующиеся пропластки пород иного состава по сравнению с вмещающей их средой. К включениям относят также локальные участки проявления выборочного эпигенетического преобразования в геологическом теле, останцы материнской породы, подвергшейся метаморфическим изменениям, и др.

Кодирование диаграмм ГИС

Рассматривая пересечение геологического тела в скважине как двухкомпонентную смесь, предложено выполнять кодирование диаграмм каротажа, позволяющее представить информацию о пересечении в виде характеристик изучаемого свойства (поля) A и долей содержания для каждого из компонентов [8]. Естественно полагать, что для одного из компонентов макросмеси присущи высокие значения

свойства A_B , а для другого – низкие значения этого свойства A_H . Коэффициенты, отражающие содержание каждого из компонентов, соответственно равны K_B и K_H .

Для реализации простейшего способа определения характеристик такой макросмеси необходимо провести в пределах пересечения три линии, осредняющие значения измеряемого свойства для каждого из компонентов (средние значения A_B и A_H) и диаграммы в целом (значение A_{cp}) (рис. 12). Первые два значения определяют свойства компонентов, а коэффициенты содержания каждого из компонентов находят по формулам:

$$K_B = (A_{cp} - A_H)/(A_B - A_H), K_H = (A_B - A_{cp})/(A_B - A_H) = 1 - K_B. \quad (4)$$

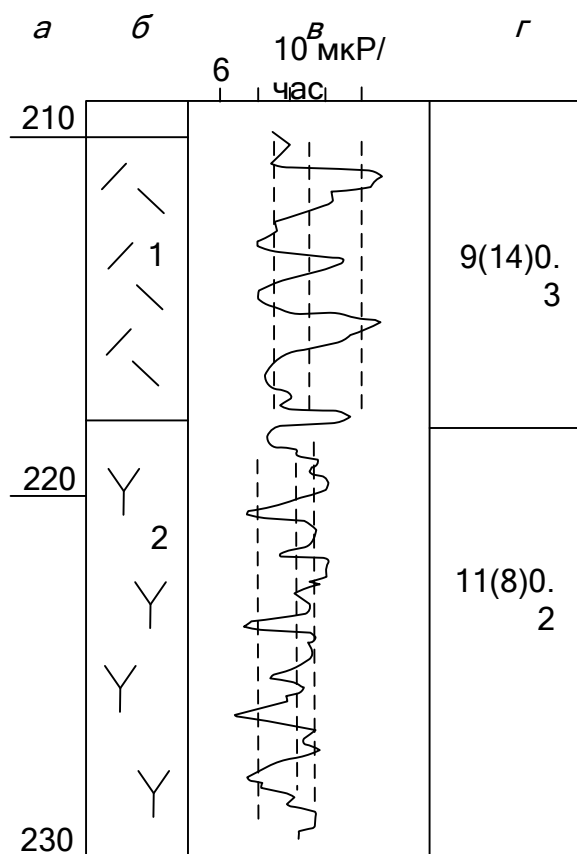


Рис. 12. Пример кодирования диаграммы ГК для двух интервалов участка скважины:
а – глубины; *б* – геологическая колонка; *в* – диаграмма; *г* – результаты кодирования; 1 – туфы; 2 – липариты

Очевидно, что, если мощность рассматриваемого пересечения составляет H метров, то доли компонентов в метрах равны: $H_B = HK_B$ и $H_H = HK_H$.

Информацию об измеренном физическом признаке для каждого пересечения геологического образования можно представить в виде кода следующего вида: $A_{ок}(A_{вкл})K_{вкл}$. Первое значение соответствует средней величине физического свойства основного компонента, доля

которого в макросмеси выше. Значение в скобках отражает среднее значение физического свойства компонента, рассматриваемого как включение, а последнее значение соответствует его доле в макросмеси. Следует заметить, что основной компонент также как и включения могут характеризоваться относительно высокими или низкими значениями свойства. Например, при кодировании данных измерений методом ГК естественной радиоактивности в мкР/час (рис. 12) для интервала 210-218 м (туфы) с помощью набора значений 9(14)0,3 фиксируется наличие среди основной части пласта мощностью 8 м включений (пропластков с повышенным содержанием кислой фации), на долю которых приходится 2,4 м. Основная масса туфов имеет радиоактивность 9 мкР/час, а более радиоактивные пропластки характеризуются значениями около 14 мкР/ч. Для липаритов, залегающих ниже туфов, пересечение которых зафиксировано в интервале 218-230 м, характерны средние значения для основного компонента 11 мкР/час, а для включений 8 мкР/час. Доля включений составляет 0,2, и поэтому результаты кодирования для этого интервала выражаются набором значений 11(8)0,2.

Имеется программа автоматического кодирования диаграмм методов ГИС, созданная В. А. Серковым при участии автора.

Результаты кодирования позволяют представить данные измерения физического свойства (поля) по скважине в компактной форме, удобной для хранения, трансляции, применения разнообразных способов обработки, построения петрофизических разрезов без потери информации о неоднородной структуре геологических образований, отражающей проявление определенных процессов. Например, имея данные кодирования диаграммы электрометрии с измерениями удельного сопротивления ρ в Ом·м, можно вычислить коэффициент электрической анизотропии λ . Для среды с двухосной анизотропией, характеризующейся удельным сопротивлением вкrest слоистости – ρ_n , по слоистости – ρ_t , справедливы следующие формулы:

$$\rho_n = K_v \rho_v + K_h \rho_h, \quad \rho_t = \rho_v \rho_h / (K_h \rho_v + K_v \rho_h), \quad \lambda = (\rho_n / \rho_t)^{1/2} \quad (5)$$

Статистическая обработка результатов кодирования

Данные кодирования диаграмм методов ГИС, зарегистрированных по нескольким скважинам изучаемого участка на стадии поисков или разведки, позволяют сформировать петрофизические модели каждого элемента структуры этого участка. Задача практически сво-

дится к получению представления о типичных горных породах и рудах участка, как объектах исследования геофизическими методами. При этом следует отразить те изменения в свойствах этих пород, которые вызывают процессы тектоники, метаморфизма и минерализации.

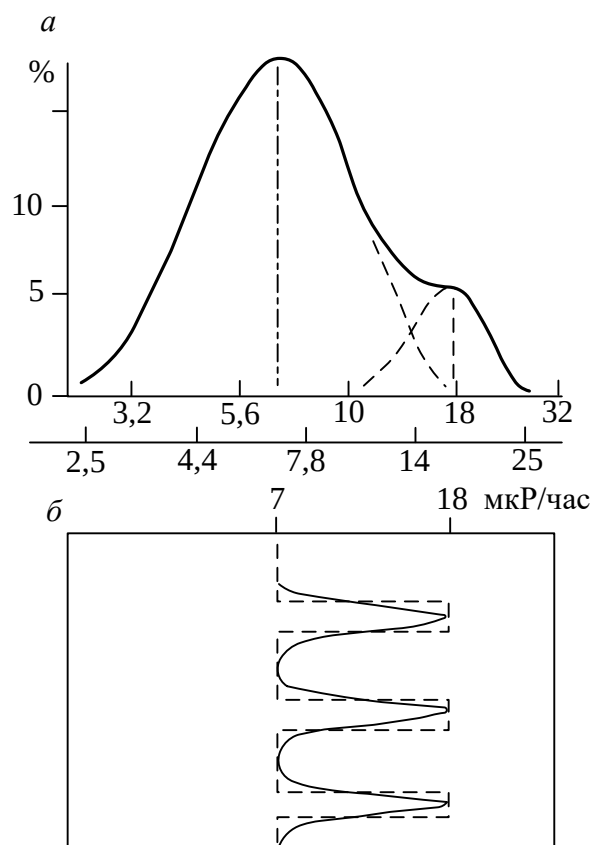
Петрофизические модели, присущих изучаемому разрезу литотипов горных пород, формируются на основе статистических исследований по выборкам для каждого из них путем построения кривых распределения изучаемых физических характеристик. В выборку для конкретного литотипа включаются все его пересечения, которые на геологических колонках классифицированы приблизительно одинаково. Статистика проводится для каждого изучаемого геофизического свойства отдельно, подобно тому, как это делается при оценке уровня нормального поля стохастическим способом (см. раздел 2). Поскольку распределение для большинства физических свойств статистически однородных совокупностей горных пород подчиняется логнормальному закону, рассмотрим этот случай детально.

Для построения дифференциальной кривой распределения признака (физического поля или свойства) A необходимо выполнить группирование данных о нем по классам (интервалам равной ширины на оси абсцисс), применяя логарифмическую шкалу. Для достаточно представительных (репрезентативных) выборок удобно разбивать один порядок на 4 класса. Например, границы классов могут соответствовать значениям: 1-1,8-3,2-5,6-10-18-32 и т. д. В случае применения второй смещенной шкалы границы классов: 1,4-2,5-4,4-7,8-14-25 ит. д. При таком подходе отпадает необходимость применять бланки с логарифмической шкалой.

В таблицу группирования заносятся значения мощности в метрах. Для двухкомпонентных макросмесей в таблицу заносятся мощности компонентов H_H и H_B в классы в соответствии с характерными для компонентов значениями A_H и A_B . В большинстве случаев они разносятся по разным классам, но при близких значениях измеряемого признака мощности компонентов могут попасть в один класс. Дифференциальная кривая распределения (функция частоты) строится по данным о суммарной мощности (ординаты) каждого класса (на оси абсцисс это середины классов). Пример дифференциальной функции распределения приведен на рис. 13, а.

Рис. 13. Пример построения статистической диаграммы для туфов смешанного состава:

а – дифференциальная кривая распределения естественной радиоактивности (выборка по 5 скважинам); *б* – статистическая диаграмма ГК (поле в логарифмическом масштабе)



В большинстве случаев кривые распределения отражают статистическую неоднородность изучаемых образований, которая проявляется в двухгорбности кривых, или они имеют другие особенности, также позволяющие сделать вывод о двухкомпонентной структуре этих образований. Пользуясь известными приемами статистики сложную кривую распределения можно представить в виде двух элементарных кривых, соответствующих логнормальному закону. По ним легко определить центральные значения признака для каждого компонента, а также долю каждого компонента в выборке (по соотношению площадей элементарных кривых). Эти данные и используют для статистической характеристики изучаемых объектов по геофизическим признакам путем построения прямоугольных диаграмм, которые затем могут быть скорректированы с учетом специфики вида аномалий измеряемого в скважинах поля. Так для метода ГК аномальными являются пропластки (включения) с максимумом аномалии в середине пропластков и полумаксимумом на их границах.

Рис. 13, *б* иллюстрирует принцип построения статистической диаграммы для объекта по данным, получаемым при использовании распределения естественной радиоактивности туфов смешанного состава (измерения по 5 скважинам на периферии медноколчеданного

месторождения). О соотношении долей основного компонента и включений можно судить по ширине площадок значений радиоактивности основного компонента и включений. В рассматриваемом примере это соотношение 1:3 и, следовательно, на статистической диаграмме $K_{\text{вкл}} = 0,25$.

Построение типовой физико-геологической колонки

Построение начинается с формирования типовой геологической колонки, которая отражает в разрезе весь комплекс геологических тел, участвующих в создании структуры изучаемого участка с отражением последовательности их залегания. При мелкомасштабных исследованиях можно использовать литолого-стратиграфическую колонку, которая создается геологической службой в каждом районе геологоразведочных работ. Такие колонки обычно не имеют масштаба, а сведения о мощностях толщ или геологических тел приводятся на колонке в виде диапазонов их мощностей. На геологических колонках отдельно выделяются объекты, которые развиты в районе не повсеместно, то есть появляются в виде локальных тел. В первую очередь это относится к малым интрузиям, рудным телам и зонам метаморфизма. Подобные объекты изображаются в виде включений в толще вмещающих пород.

На основе дифференциальных кривых распределения геофизических признаков для каждого литотипа формируются статистические диаграммы по изученным признакам для всего разреза в соответствии с геологической колонкой. В большинстве случаев все геологические тела представляются на статистических геофизических диаграммах как образования с включениями. Неоднородность объектов показывают путем изображения прямоугольных или скорректированных с учетом типичной формы диаграмм, подобных той, которая представлена на рис. 13, б. Пример типовой физико-геологической колонки (упрощенный вариант без отражения компонентов в горных породах) приведен на рис. 10.

Типовая физико-геологическая колонка дает представление о физических свойствах всего комплекса геологических образований в изучаемом районе и на ее основе могут решаться разнообразные задачи в период проведения геологоразведочных работ. Полученные данные используют при формировании петрофизической модели при исследовании участков с условиями близкими тем, которые учтены

при формировании типовой колонки, как на стадии проектирования работ, так при интерпретации измеренных полей. В период разведки типовая колонка помогает правильно классифицировать объекты, изученные методами ГИС.

5. ВЫБОР КОМПЛЕКСА ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Выбор геофизического комплекса можно рассматривать как творческое решение сложной задачи, требующей высокой квалификации исполнителей. Поэтому недаром в вузах для выпускников геологического направления квалификационной работой обычно является проект поисково-разведочных работ, при защите которого судят о подготовленности выпускника умело обосновать необходимый комплекс методов для успешного решения конкретной задачи геолого-разведочного производства.

При выборе геофизического комплекса руководствуются следующими положениями.

1. Необходимо использовать всю имеющуюся информацию о результатах ранее проводившихся в районе проектируемых работ геологических, геофизических и геохимических исследованиях. Это могут быть материалы регионального и среднемасштабного геологического картирования, спутниковой и аэрогеофизической съемки, результаты бурения и изучения опорных или структурных скважин и др.

2. Учесть опыт предшественников по геофизическим исследованиям в схожих геологических условиях, давших в первую очередь положительные результаты. Познакомится с типовыми комплексами применения геофизических методов для целей картирования и поисково-разведочных работ на определенные полезные ископаемые.

3. Сформировать рациональный геофизический комплекс, включающий минимально достаточное число методов, сочетание и последовательное применение которых имеет наилучшие перспективы для решения поставленной задачи с оправданным расходом требуемых средств.

В комплекс включают методы, несущие разнородную информацию и позволяющие классифицировать (с определенной вероятностью) геологические объекты в пределах изучаемой среды. Методы подразделяют на основные и вспомогательные. Первые планируются

применять на всей площади работ, а вторые, часто рассматриваемые как детализационные, необходимы для определения природы и геометрических характеристик выявленных аномалиеобразующих объектов на участках ограниченных размеров.

Типовой комплекс включает избыточное число методов, поскольку обобщает опыт успешного применения геофизических методов для решения определенного класса задач в разнообразных условиях и при различной аппаратурной оснащенности исполнителей. Приводимые в справочной, учебной и научной литературы сведения дают возможность выбрать лишь оправданно необходимый минимум методов. Тем не менее, в проекте должно быть отражены данные о типовом комплексе и приведены обоснования для принятых решений о выбранном минимуме.

При некоторых геофизических исследованиях специальными документами регламентируется применение определенного обязательного комплекса с возможностью его дополнения методами, для применения которых имеется веские причины. Так, например, в промысловой геофизике результаты исследования скважин не считаются кондиционными, если не применялся обязательный для данной стадии комплекс методов.

Внутри рационального комплекса могут быть отдельно выделены целевые комплексы методов. Это круг методов, объединяемых для решения какой-то узкой задачи. В качестве примера можно привести целевой комплекс методов для выявления крутопадающих секущих разрывных нарушений. Комплекс включает высокоточную магниторазведку, комбинированное электропрофилирование, метод естественного электрического поля. Эффективность этого комплекса продемонстрирована в разделе 8.

При обосновании рационального комплекса следует привлекать количественные оценки геологической и экономической эффективности методов, а также учитывать временные факторы их применения.

Хорошо зарекомендовал себя на практике способ вычисления показателей контрастности отдельных методов γ_j (см. раздел 2) и функции комплексного показателя (ФКП) θ , представляющей сумму показателей контрастности нескольких методов для характеристики комплекса [1]. При обосновании выбора одного из конкурирующих методов предпочтение отдается тому, для которого при анализе условий выделения аномалиеобразующего объекта на материалах ФГМ

или на уже разведанном объекте – аналоге показатель γ_j по модулю больше.

Для комплекса методов составляется формула алгебраического суммирования показателей контрастности с таким расчетом, чтобы аномальные эффекты каждого измеряемого признака для главного объекта поисков или разведки давали увеличение функции θ . Это достигается изменением знака у показателей, соответствующих отрицательным аномалиям. Например, если сульфидное месторождение фиксируется положительными локальными аномалиями гравитационного поля (Гр) и вызванной поляризации (ВП), но отрицательными аномалиями кажущего сопротивления (КС) и магнитного поля (М), то формула для вычисления θ имеет вид:

$$\Theta = \gamma_{\text{Гр}} + \gamma_{\text{ВП}} - \gamma_{\text{КС}} - \gamma_{\text{М}}. \quad (6)$$

Вычисление ФКП приводит к увеличению контрастности проявления искомого объекта и подавлению помех. Так при поисках сульфидных месторождений фиксируется много локальных положительных гравиметровых аномалий, не связанных с оруденением. С этими аномалиями часто коррелируются положительные аномалии КС и магнитного поля. В результате применения формулы (6) такие объекты-помехи будут сопровождаться низкими или даже отрицательными аномалиями ФКП, что позволит исключить их из рассмотрения.

Необходимо заметить, что для ФКП характерен некоторый фон, на величину которого влияет количество задействованных признаков, фактически число методов m , для которых определены показатели контрастности. В качестве фонового значения Θ_0 используется величина $\pm 2\sqrt{m}$, а в качестве аномальной рассматривается значение превышающее по модулю Θ_0 . Поэтому эффективность комплекса оценивают величиной аномалии ФКП – Θ_a .

Эффективность комплекса выше, если Θ_a больше модуля показателя контрастности любого метода. Увеличение числа методов в комплексе приводит к росту фона для ФКП и вполне возможно, что при этом величина Θ_a увеличится незначительно. Поэтому требуется ограничиться минимальным числом методов, применение которых гарантирует уверенное выделение искомого объекта достаточно контрастной аномалией ФКП.

Выбор геофизического комплекса для картирования разрывных нарушений

Тектонические нарушения относятся к важнейшим объектам геофизических исследований, поскольку часто имеют контролирующее значение при формировании месторождений полезных ископаемых. Изучение разрывных нарушений с одной стороны может привести к открытию рудных залежей, а с другой стороны связано с необходимостью установить строение изучаемых геологических объектов, в том числе и рудовмещающих структур.

Разрывные нарушения подчиняются определенной иерархии по размерам и глубине проникновения на глубину. К общим закономерностям можно отнести существование сеток из нарушений различного масштаба, разнородность проницаемости вдоль нарушений, способность к заполнению относительно молодыми геологическими телами.

Наиболее крупные разрывные нарушения, обычно классифицируемые как глубинные разломы, проникают на глубину в сотни километров и имеют ширину до десятков километров. Разломы этого типа представляют полосы, в пределах которых образовались крупные интрузии различного состава, возникли вулканические центры. Пример схемы, образующей сеть из глубинных разломов субмеридиального и субширотного простирания в пределах Оренбургского Урала показан на рис. 14, *а* [4]. Места пересечения разнонаправленных разломов очевидно являлись наиболее проницаемыми каналами поступления из глубины рудномагматических потоков, поэтому именно в узлах сетки из разломов отмечены интрузии, вулканические аппараты и проявления рудной минерализации.

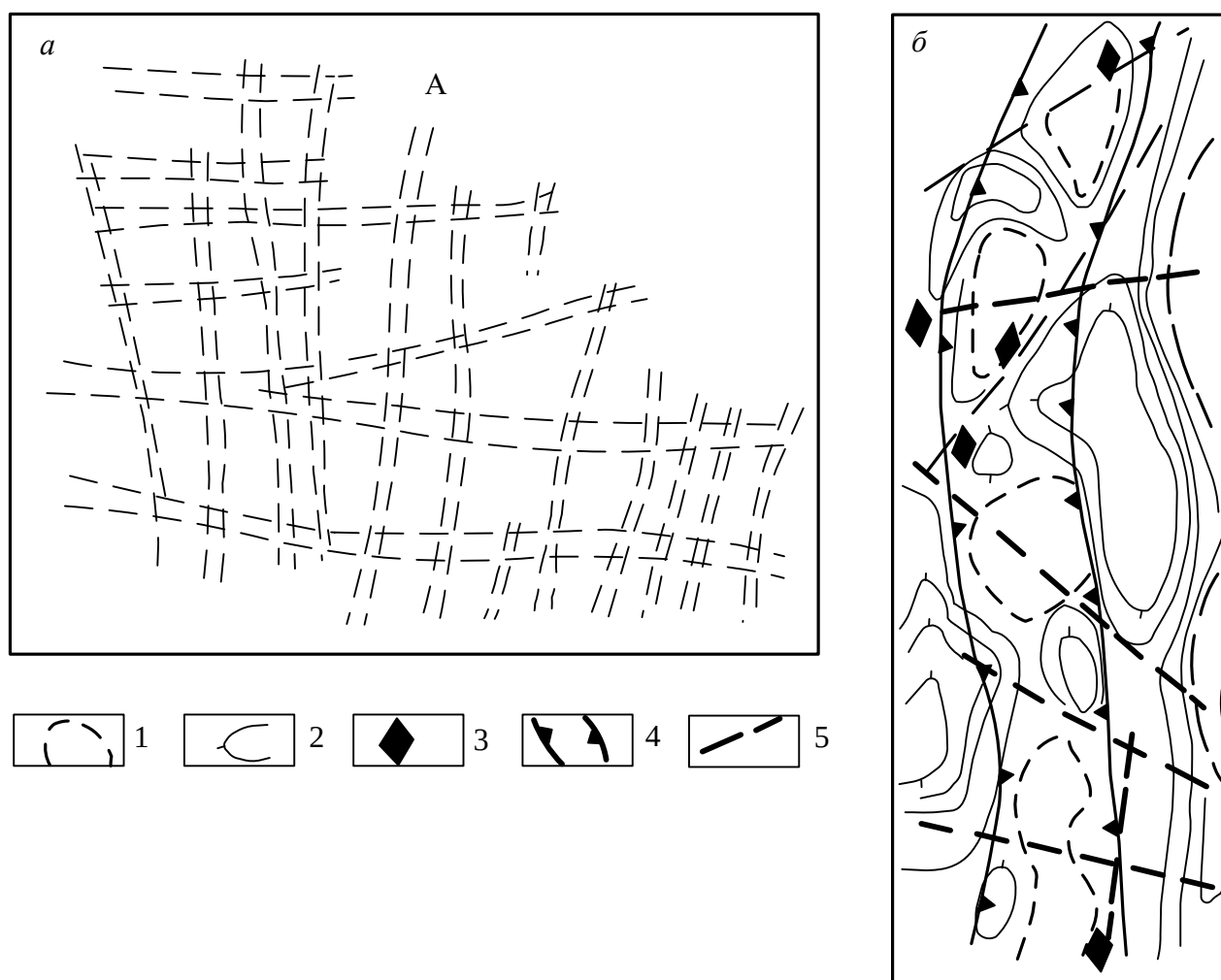


Рис. 14. Схемы сетки поясов глубинных разломов Оренбургского Урала (а) и Домбаровской рудной зоны в пределах Ащебутакского пояса (б), выделенные по данным гравиметрии (по А. М. Виноградову):

А – Ащебутакский глубинный разлом; б: 1 – участки отрицательных остаточных аномалий силы тяжести; 2 – некоторые изолинии положительных остаточных аномалий силы тяжести; 3 – медноколчеданные месторождения; 4 – зона магмовыводящего разлома; 5 – секущие разрывные нарушения

Гравиметрия является наиболее надежным геофизическим методом, обнаружения глубинных разломов, поскольку характеризуется наибольшей глубиной и способностью выявлять крупные геологические тела при относительно простой технологии съемки.

На примере Домбаровской рудной зоны (рис. 14, б), являющейся частью Ащебутакской полосы магмовыводящего глубинного разлома (рис. 14, а), видно, что известные медноколчеданные месторождения расположены на периферии отрицательных остаточных аномалий силы тяжести. Последние обусловлены установленными или предполагаемыми на глубине интрузиями гранитоидов. Такое представление о

связи корневых рудных месторождений с глубинными интрузиями преимущественно кислого состава, развиваемого П. Ф. Иванкиным (см. раздел 3), разделяет и крупный специалист в области рудной геофизики Урала А. М. Виноградов [4]. Отметим также приуроченность рудных месторождений Домбаровской зоны к более мелким секущим разломам (рис. 14, б), что подчеркивает важность картирования данных объектов. Свой вклад в решение этой задачи может вносить детальная гравиметровая съемка.

Существуют благоприятные предпосылки выявления разломов регионального значения по данным аэросъемки. Наиболее простым является случай, когда тектонический контакт разделяет две разнородные толщи (часто это мегаблоки) с различной магнитной восприимчивостью пород. Разлом определяется по линейной узкой полосе смены знака аномалии магнитного поля типа уступ. В областях смятия разломам соответствуют полосы несогласованности ориентировки локальных аномалий и другие отличительные признаки (см. раздел 8).

По магнитным данным часто картируются тектонические зоны, пересекающие однородный комплекс кристаллических пород. Появление аномального эффекта в подобных случаях связывается с интенсивной гидротермальной проработкой пород, в результате которой сильно намагниченные образования могут утратить свои магнитные свойства. В этом случае наблюдаются линейно-вытянутые локальные по ширине понижения магнитного поля. В других случаях гидротермальная деятельность может привести к значительному обогащению тектонических зон ферромагнитными минералами, что приводит к созданию цепочек вытянутых положительных аномалий.

Накоплен солидный опыт картирования разрывных нарушений по комплексу признаков в гравимагнитных полях, имеющих общие особенности. Подборка типичных проявления в аномальных полях уходящих на глубину разломов на картах площадных съемок приведена ниже в разделе 8 (рис. 24).

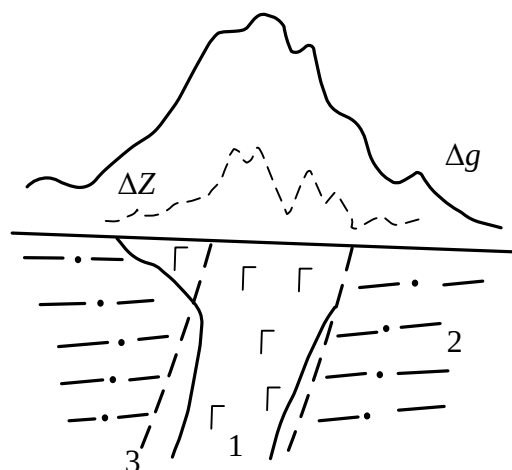
Как и при наземной съемке, благоприятные условия для картирования разломов аэросъемкой возникают при проникновении в тектонические зоны интрузий основного и ультраосновного состава. В результате формируются полосы чередующихся локальных для мелкомасштабных карт аномалий, подобных показанным на рис. 14, б.

В комплексе с магнитной часто применяют радиометрическую съемку в аэроварианте. Данные гамма-спектрометрических измерений помогают разделить блоки пород различного состава, отличающиеся содержанием радиоактивных элементов. Нередко разломы сопровождаются линейными аномалиями гамма-поля, знак и интенсивность которых зависят от целого ряда факторов.

Сейсморазведка весьма ограниченно используется для обнаружения глубинных разломов в районах перспективных на твердые полезные ископаемые. Исключения составляют работы по отдельным профилям ГСЗ (глубинное сейсмическое зондирование). Основной вклад в изучение глубинной тектоники сейсморазведка вносит в процессе поисковых работ на углеводороды.

Существует группа глубинных разломов более высокого порядка, чем рассмотренные выше, с меньшими размерами в пространстве. Их ширина измеряется сотнями метров. Они также образуют линейные пояса с локальными интрузиями преимущественно одного формационного типа. Подобные разломы нередко выделяются совпадающими гравитационными и магнитными линейными аномалиями. Пример такого разлома, фиксирующего раздвиг в массиве сланцев, показан на рис. 15.

Рис. 15. Пример проявления в гравимагнитных полях разлома, заполненного базальтоидной интрузией [4]:
1 – базальтоиды; 2 – сланцы;
3 – тектонические контакты



Часто разрывные нарушения являются границами относительно жестких участков земной коры, принявшей под действием тектонических сил блоковое строение. Блоки и разделяющие их разломы могут быть различной величины в пространстве и образовываться в результате горизонтальных и вертикальных сдвигов. В этом случае в пределах блоков геологические и геофизические характеристики обладают некоторыми стабильными признаками, а на границах блоков они из-

меняются резко. Примером в этом отношении могут служить материалы, представленные на рис. 16. По нему заметно, что на тектонических границах блоков происходит смена характера гравитационного, магнитного полей и поля электросопротивления.

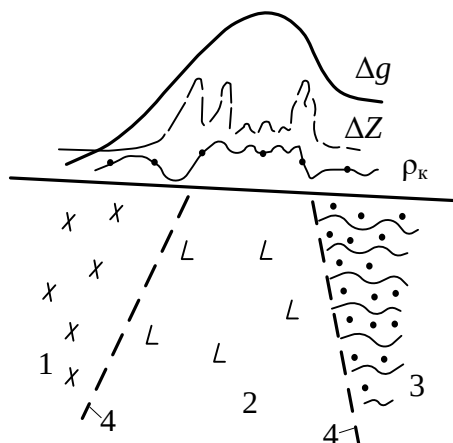


Рис. 16. Пример проявления в геофизических полях (силы тяжести, магнитном, удельного сопротивления) разрывных нарушений, являющихся границами блоков [4]:

1 – гранитоиды; 2 – вулканогенные породы основного состава; 3 – осадочные отложения; 4 – разрывные нарушения

Нередко блоковая структура проявляется в пределах однородных по составу массивов горных пород. Разрывные нарушения, являющиеся границами блоков, имеют относительно небольшую ширину (первые десятки метров и меньше) и представляют зоны трещиноватости с частично измененными дислокациями и другими процессами свойствами горных пород. В районах развития над коренными породами покровов рыхлых наносов и коры выветривания часто над зонами трещиноватости наблюдаются увеличения мощности покрова, что придает дополнительные аномальные свойства разрывным нарушениям. В верхних частях разреза, подвергшихся одновременному воздействию тектонических сил и агентов выветривания, происходит понижение значений многих физических свойств: плотности, магнитной восприимчивости, удельного сопротивления. Эти изменения обуславливают появление отрицательных аномалий гравимагнитных и электрических (кажущегося сопротивления при электропрофилеировании и зондировании) полей.

Разрывные нарушения в зависимости от структуры участка и гидрогеологического режима подземных вод могут играть роль дренажной системы или, напротив, системы притока подземных вод. В первом случае над разрывным нарушением наблюдаются отрицательные, а во втором положительные аномалии естественного поля фильтрационной природы. Пример выделения разрывного нарушения комплексом геофизических методов приведен на рис. 17.

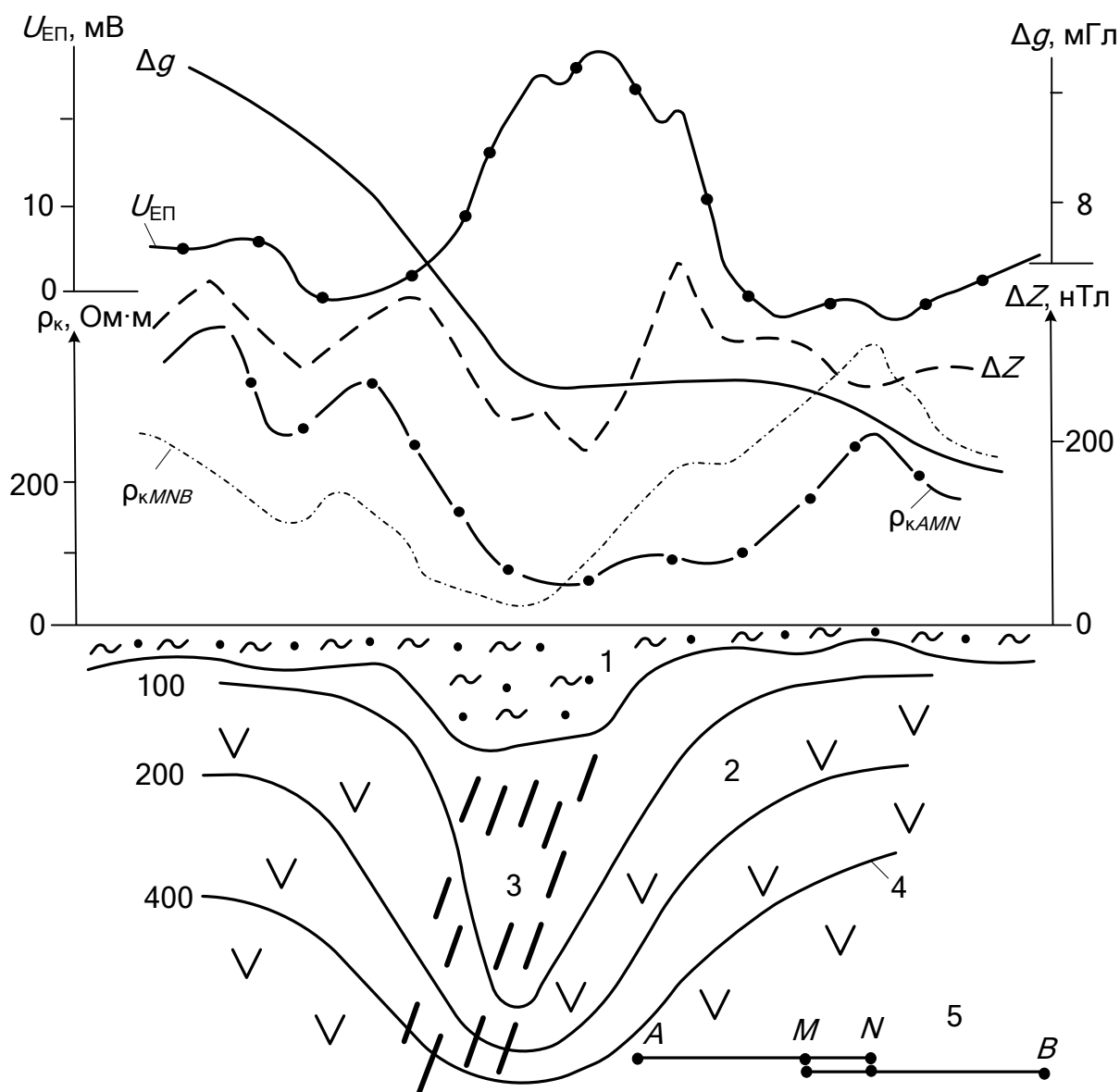


Рис. 17. Аномальные графики геофизических полей и геоэлектрический разрез, фиксирующие разрывное нарушение:

1 – рыхлые отложения; 2 – базальты; 3 – зона трещиноватости; 4 – изолинии кажущегося сопротивления геоэлектрического разреза (результаты метода ВЭЗ); 5 – установка комбинированного электропрофилирования

Приводимые на этом рисунке характеристики геофизических полей получены для относительно простой обстановки, когда тектоническое нарушение рассекает относительно однородные горные породы.

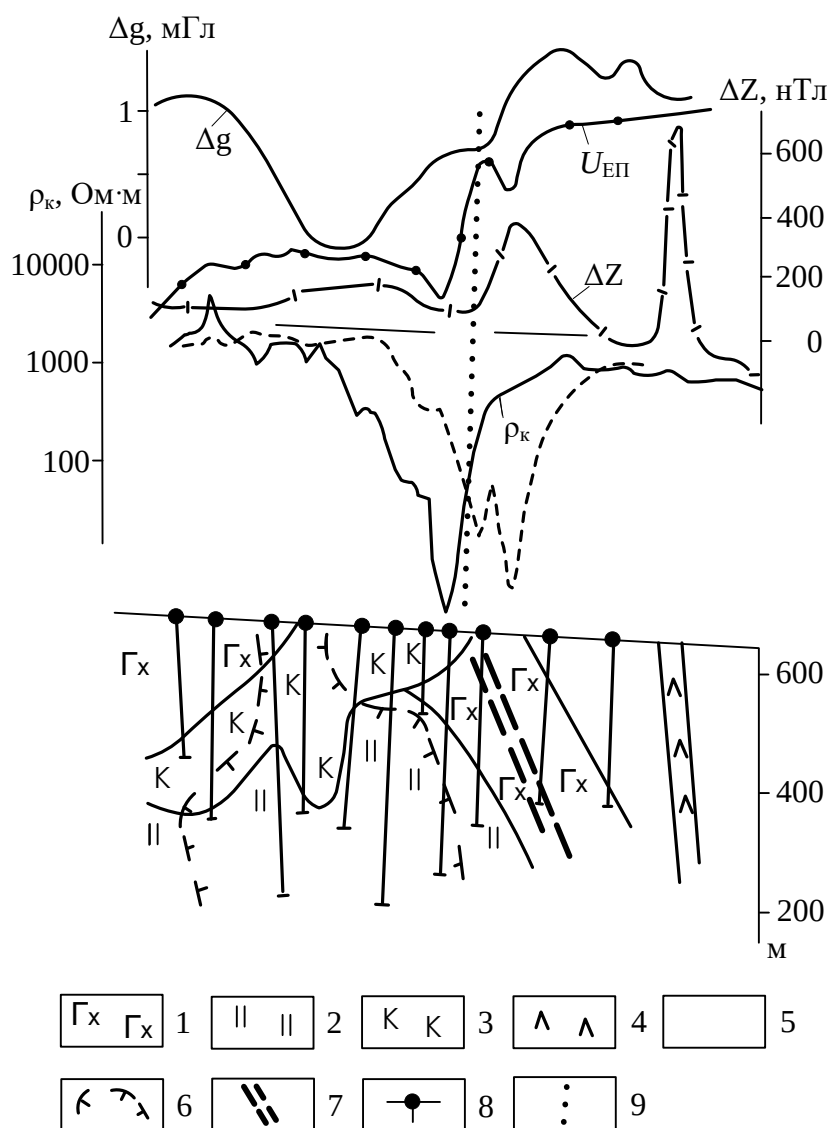


Рис. 18. Пример проявления в геофизических полях золоторудного месторождения в коре выветривания и разрывного нарушения, игравшего роль рудоподводящего канала (по материалам Северо-Енисейской геофизической экспедиции):

1 – кварц-графитистые сланцы; 2 – кварц-карбонатно-слюдистые сланцы; 3 – золотоносные коры выветривания; 4 – дайка пород основного состава; 5 – кварц-слюдистые сланцы; 6 – контур пород с повышенным содержанием золота; 7 – разрывное нарушение; 8 – скважины; 9 – корреляционная ось локальных аномалий геофизических полей над разрывом

Более интересен случай проявления разрыва на участке его действия как рудоподводящего канала. Примером в этом отношении являются материалы, представленные на рис. 18. На нем показаны графики геофизических полей, измеренные над золоторудным месторождением, сформировавшимся в коре выветривания. Рудоносные

породы отчетливо выделяются отрицательной аномалией силы тяжести как участок разуплотнения, который, видимо, существовал до начала рудообразования, и был подчеркнут изменениями при поступлении активных золотонесущих растворов. К индикаторным признакам изменений в горных породах также относятся понижения магнитного поля и удельного сопротивления, отрицательная аномалия естественного поля. Увеличивает вероятность проявления золоторудного месторождения существование в краевой части ореола измененных пород наклонного разрывного нарушения, которое фиксируется типичным набором локальных аномалий, близким по виду, тому, который наблюдается на рис. 17. Отличие состоит в том, что над разрывом в рудовмещающих породах локальные аномалии проявляются на более сложном фоне.

Наличие четких аномалий над разрывным нарушением подчеркивает важное значения этого объекта для формирования месторождения. С большой долей вероятности можно полагать, что по этому каналу трещиноватых пород и поступали к палеодневной поверхности рудоносные растворы. Просочившись в проницаемую среду они сформировали золоторудную зону, которая классифицируется как приуроченная к коре выветривания.

В условиях перекрытия разрывных нарушений мощным покровом осадочных пород или в случае слабой проявленности изменений физических свойств в зонах тектонических дислокаций существенную помощь в выявлении разрывных нарушений может оказать обобщение данных нескольких методов в форме функции комплексного показателя (см. раздел 2). В качестве примера на рис. 19 приведены результаты исследований над тектонической зоной дробления, включающей пегматитовую жилу. Тектоническая зона фиксируется четкой аномалией ФКП с максимумом равным 11,5 единиц при уровне фона для трехметодного комплекса в 3,4 единицы. По показаниям отдельных методов (радиометрии, магнитометрии и электропрофилирования) эта зона почти не проявлена.

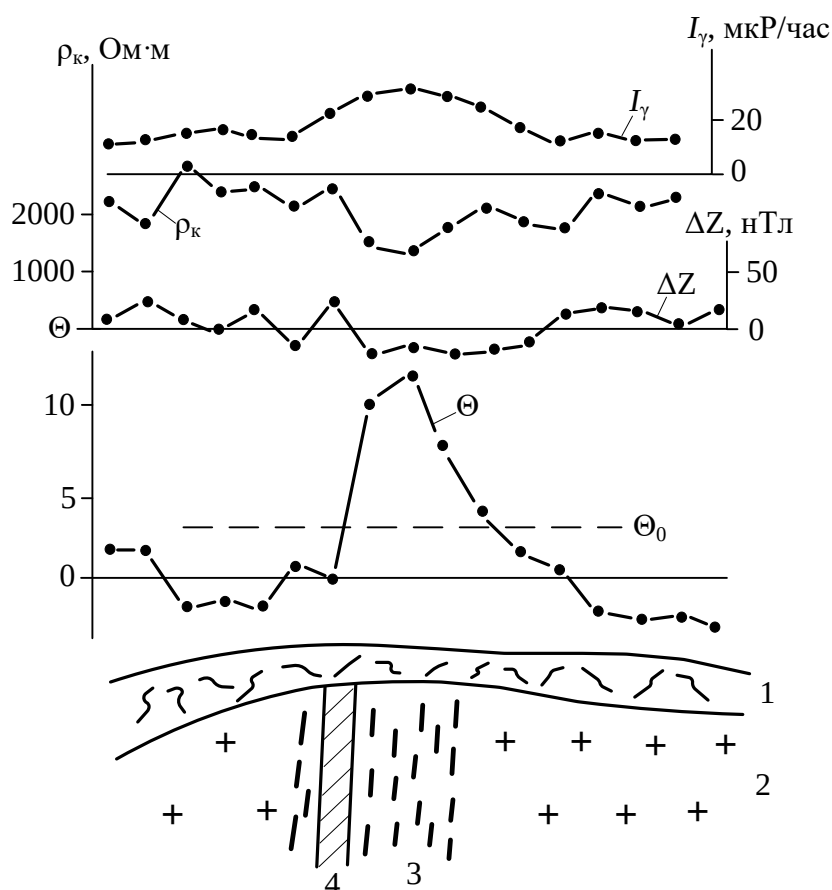


Рис. 19. Графики наземной гамма-съемки, электропрофилирования и магниторазведки над зоной дробления, включающей пегматитовую жилу, обобщенные способом построения ФКП (по Г. С. Вахромееву):

1 – элювиальные отложения, 2 – граниты; 3 – зона дробления; 4 – пегматиты

Определенную помощь в выделении разрывных нарушений особенно на стадии поисков рудных месторождений может оказать малоизвестный способ картирования горных пород по вектору градиента электропроводности [12]. Доказано, что многие геологические тела, включая зоны смятия, трещиноватости, ореолы окolorудных изменений и др., характеризуются областями изменений электропроводности, что, как было показано на приведенных ранее примерах (рис. 10, 17, 18), позволяет успешно применять для их выделения методы электрометрии. Отличительным свойством рассматриваемого метода является способность измерять новый параметр – градиент кажущегося удельного сопротивления (в дальнейшем сопротивления), а также выявлять геологические образования, когда над ними не окажется ни одной точки наблюдения.

Для практической реализации метода рекомендуется крестообразная установка. Она включает питающий электрод A , а также две

пары приемных электродов $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$, расположенных на взаимно перпендикулярных линиях. Каждый из приемных электродов удален от центра (A) установки на одинаковое расстояние r . Отрицательный питающий электрод относят, как и в методе заряда на значительное расстояние. Для определения направления наиболее резкого падения сопротивления $\Delta\rho_r$ в окрестностях установки строят вектор по измеряемым составляющим (разностям потенциалов) ΔU_1 и ΔU_2 , оси для которых направлены из A на приемные электроды N_1 и N_2 . Значение $\Delta\rho_r$, которое согласно теории метода представляет разность сопротивлений в центре установки и минимальным сопротивлением на окружности радиуса r , вычисляют по формуле:

$$\Delta\rho_r = 2\pi r J^{-1}(\Delta U_1^2 + \Delta U_2^2)^{1/2}. \quad (7)$$

Величина градиента сопротивления равна $\delta\rho_r = \Delta\rho_r/r$.

Крестообразная установка рекомендуется не для детальных исследований, а для выделения на исследуемой площади главнейших аномальных по электропроводности объектов, к каким относятся и разрывные нарушения. Съемку можно проводить по редкой и нерегулярной сети с радиусами измеряемыми сотнями метров. При картировании геологических образований руководствуются типичными картинками поведения векторов градиента и перпендикулярным им изолиниям сопротивления [12]. Естественно, что изолинии должны оконтуривать участки, на которых происходит изменение электропроводности горных пород. Так разрывные нарушения должны иметь линейную форму изолиний сопротивления и систему векторов градиента, перпендикулярных простирацию разрыва.

На рис. 20 приведены результаты, полученные на территории, включающей медноколчеданное месторождение. Исходные данные для построения векторов градиента сопротивления получены И. М. Петруниным. В пределах изученной площади по векторам градиента и изолиниям сопротивления (перпендикулярным векторам) выделяются главные элементы рудоносной структуры: субмеридиональная зона смятия (фиксируемая комплексом геофизических методов и подтвержденная бурением), игравшая роль рудоподводящего канала, оперяющее секущее тектоническое нарушение со следами околорудных изменений в боковых породах (рудораспределяющий канал) и само месторождение. Отметим, что на изученной площади зафиксированы другими геофизическими методами многочисленные аномалии, создающие сложную для расшифровки картину.

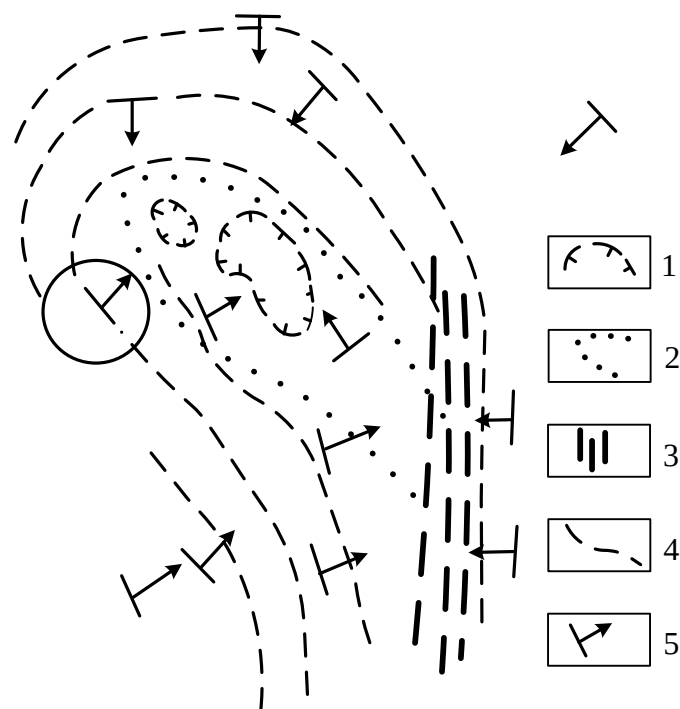


Рис. 20. Результаты измерений градиента электропроводности на южноуральском медноколчеданном месторождении:

1 – контуры рудных залежей; 2 – контуры ореола окolorудных изменений; 3 – тектоническая зона смятия; 4 – изолинии удельного сопротивления; 5 – векторы градиента электропроводности

Завершая тему выбора геофизического комплекса для выделения разрывных нарушений, еще раз подчеркнем необходимость учитывать их иерархию, сложность структуры объектов из-за насыщенности внедрившихся в ослабленные зоны более локальных по размерам геологических тел, типичные размеры разрывов различного порядка и возможности их выявления разноглубинными методами.

Пример формирования поискового комплекса геофизических методов

Рассмотрим пример формирования геофизического комплекса на примере детальных поисков урановых месторождений в условиях геологической среды, представление о которой дает геологическая модель, изображенная на рис. 6, а. Планируются поиски эндогенных месторождений секущего типа в пределах складчатой области в условиях развития разнообразных по составу и возрасту пород (субинтрузии магматических пород в толщах осадочных отложений и метаморфизованных комплексов). Мощность рыхлых отложений не пре-

вышает 30 м. Оруденение локализуется в пределах наиболее проницаемых разностей осадочных и метаморфических пород. Положение рудных залежей контролируется системами разрывных нарушений. Вдоль рудоконтролирующих систем развиты ореолы гидротермально измененных пород с проявлением сульфидной минерализации и процессов окисления продуктов метасоматоза. В периферийной части этих ореолов отмечается увеличение концентрации темноцветных минералов с повышенной магнитной восприимчивостью. Внутри ореолов, напротив, преобладают щелочные минералы с ухудшением магнитных свойств. Рудные скопления образуют крутопадающие линзо- и жиллообразные, реже штокверкоподобные залежи.

На основе опыта применения геофизических методов для поисков месторождений урана данного типа в справочной литературе рекомендуется следующий типовый комплекс для масштабов съемки 1:10000 и крупнее [2].

Геофизические методы, применяемые при детальном поиске урановых месторождений секущего типа

Метод	Решаемые задачи	Особенности геофизических полей
Гамма-съемка спектрометрическая	Обнаружение урановой минерализации, картирование интрузивных массивов	Гамма-аномалии
Эманиационная съемка (шпуровая)	Выявление ореолов рассеивания урана	Локальные аномальные зоны
Гравиразведка	Картирование субинтрузий, крупных разрывных нарушений	Положительные аномалии над субинтрузиями, ослабление поля над зонами разломов
Магниторазведка	Картирование субинтрузий, обнаружение признаков ореолов гидротермалитов	Положительные аномалии над субинтрузиями, нарушение корреляции магнитных и гравиметровых аномалий над ореолами
Электроразведка (ЭП, ВЭЗ, ВП, заряд, ЕП, ЗСП, МПП и др.)	Литолого-петрографическое картирование, прослеживание рудоносных ореолов, зон трещиноватости, участков окисления и восстановления в зонах минерализа-	Дифференциация пород по удельному сопротивлению от высокоомных субинтрузий до низкоомных метасоматитов и зон трещиноватости, выявление участ-

	ции, определение мощностей рыхлых отложений и коры выветривания.	ков с сульфидной минерализацией как признака околорудных изменений
Сейсморазведка	Расчленение геологического разреза на глубину	Выделение границ толщ, фиксация зон тектонических нарушений в разрезе

Поиски начинаются со специализированного геологического картирования, задача которого является уточнение существующих геологических карт в масштабах 1:25000 и 1:10000 с последующей локализацией площадей под поиски. Основными являются гравиразведка, магниторазведка, электропрофилирование по системе редких профилей, метод ВЭЗ в отдельных точках в помощь электропрофилированию, радиометрия. По результатам предварительной интерпретации материалов съемки всех геофизических методов строятся прогнозные разрезы, для уточнения которых задаются мелкометражные скважины.

Интерпретация геофизических данных осуществляется с целью выделения и оконтуривания участков проявления поисковых признаков, преимущественно косвенных. На выявленных перспективных площадях проводятся детальные поиски масштаба 1:5000 и 1:2000 в комплексе с разведочным бурением, проходкой канав. На этих площадях сгущается сеть ранее применявшихся методов, в комплекс вводятся детализационные методы: заряда, ВП, ЕП, эманационная съемка в шпурах и мелких скважинах. В глубоких скважинах выполняются каротажные работы комплексом методов, включая метод ГК.

Эффективность комплекса поисковых геофизических методов показана на примере материалов, на основе которых сформирована ФГМ для одного из районов, в пределах которого было открыто урановое месторождение (см. раздел 3).

6. ТОЧНОСТЬ НАБЛЮДЕНИЙ

Вопрос о точности наблюдений возникает как в период проектирования геофизических работ, так и по их завершении. При планировании точности наблюдений необходимо знать уровень аномалий от объектов, представляющих интерес для решения стоящих задач, погрешности измерений, которые возникают при применении имеющейся аппаратуры и планируемой технологии измерений, а также вероятный диапазон геологических помех, типичный для фоновых образований из-за их неоднородности.

Сведения об интенсивности аномалий, подлежащих обнаружению, получают исходя из анализа сформированной ФГМ и опыта предшественников. Обычно ориентируются на некоторую минимальную по интенсивности аномалию, которая характерна для объекта, представляющего интерес при решении поисковой задачи.

Необходимо учитывать, что искомую аномалию придется обнаруживать на фоне нормального поля, присущего среде, вмещающей искомый аномалиеобразующий объект. Нормальное поле всегда имеет некоторую дисперсию D_0 , которую можно охарактеризовать через среднеквадратичную погрешность измерения нормального поля S_0 , поскольку $D_0 = S_0^2$. Как уже отмечалось в разделе 2, величину S_0 можно оценить несколькими способами. К стандартным относится аналитический способ, основанный на использовании данных n измерений поля A в пределах фоновой среды и формулы (1). В случае малой выборки вместо n применяют значение $n-1$.

Дисперсия значений в пределах нормального поля складывается из дисперсии геологических помех S_Γ , вызванных неоднородностью фонового объекта, и дисперсии показаний, связанных с аппаратурно-методическими (условно приборными) погрешностями измерений S_Π . Поэтому общая дисперсия измерений фона равна: $S_0^2 = S_\Gamma^2 + S_\Pi^2$.

Приборная погрешность оценивается по результатам независимых контрольных n измерений поля по формуле

$$S_\Pi = \pm \sqrt{\sum_1^n (A_1 - A_2)^2 / (2n - 1)},$$

A_1 и A_2 – соответственно первичное и контрольное измерение на i -ой точке.

По величине составляющей S_Γ , которая равна $S_\Gamma = (S_0^2 - S_\Pi^2)^{1/2}$, получают представление о влиянии геологических помех.

Для успешного выделения аномальных значений A_a , как это уже отмечалось в разделе 2, необходимо чтобы выполнялись условия: $A_a < (\bar{A}_0 - 2 S_0)$ или $A_a > (\bar{A}_0 + 2 S_0)$. В первом случае выделяется отрицательная, а во втором случае положительная аномалии.

Для снижения общей погрешности измерений S_0 руководствуются следующими положениями [1,3].

1. Если $S_{\Gamma} > S_{\Pi}$, то для снижения S_{Γ} полезным оказывается применение специальных методов обработки данных съемки с целью подавления геологических помех, носящих часто случайный характер. Например, простое сглаживание измеренного поля по N точкам уменьшает S_{Γ} почти в N раз.

2. Если $S_{\Pi} > S_{\Gamma}$, то есть смысл применить более точную аппаратуру или усовершенствовать технологию измерений. Например, за счет многократного (N кратного) измерения поля на одной точке и использования осредненного его значения удастся уменьшить величину S_{Π} приблизительно в $\sqrt{N}$ раз.

Среднеквадратичная приборная погрешность S_{Π} вычисляется по результатам каждой съемки. Обычно планируется для выполненного объема наблюдений провести приблизительно в 5 % точках контрольные измерения.

7. ОБОСНОВАНИЕ СЕТИ НАБЛЮДЕНИЙ

Как правило, сеть наблюдений представляет систему параллельных профилей, на которых намечаются с определенным шагом точки наблюдения. Условно принимают, что профили параллельны оси x и перпендикулярны оси y . Тогда расстояния между профилями – Δy , а между точками – Δx .

Обычно геофизическая съемка проводится в помощь геологическому картированию определенного масштаба. Исходя из этого масштаба расстояние между профилями должна составлять на отчетной карте съемки 1 см. Например, при масштабе 1:50000 необходимо иметь $\Delta y = 500$ м. Шаг наблюдений обычно в 2 раза меньше межпрофильного расстояния. В рассматриваемом примере $\Delta x = 250$ м.

При непрерывной регистрации характеристик физического поля (на борту самолета, вертолета, судна, автомобиля) в силу инерционности регистрирующей аппаратуры условным шагом съемки можно

считать величину $\Delta x = V \cdot \tau$, учитывающую скорость и постоянную времени движущегося измерителя.

В условиях резкой изменчивости свойств геологической среды масштаб геофизической съемки может быть принят вдвое крупнее, чем для геологического картирования.

При проектировании поисковых геофизических работ, проводимых, как правило, в масштабах 1:10000 и 1:5000, необходимо предвидеть вид и величину ожидаемых аномалий от объектов, представляющих первоочередной интерес для решения поисковой задачи. Этими объектами могут быть не только тела полезных ископаемых, но и связанные с ними генетически и пространственно малые интрузии, разрывные нарушения, ореолы окolorудных изменений и др., имеющие обычно меньшую контрастность по аномальным признакам. Представления о форме и размерах аномальных зон искомых геологических объектов формируются на основе анализа ФГМ.

Сеть наблюдений выбирают такой, чтобы в контур аномальной зоны попал хотя бы один профиль с двумя точками наблюдений, на которых аномальный объект будет зафиксирован.

Существует возможность теоретически оценить вероятность P обнаружения объекта [1, 6]. Обычно форму аномальной зоны объекта отождествляют с эллипсом, оси которого равны L (длина зоны) и B (ширина зоны). В наиболее простом случае вероятность пересечения аномальной зоны одним из профилей, ориентированных перпендикулярно большей оси (т.е. вкост простирания), когда $L \leq \Delta y$, выражается простой дробью: $P = L / \Delta y$. При неизвестной ориентировке такого объекта вероятность его пересечения определяется классическим решением «задачи об игле», сформулированной монахом Ж. Бюффеном еще в 18 веке:

$$P = 2L / \pi \Delta y. \quad (7)$$

Можно отметить, что только за счет неизвестной ориентировки объекта поисков по отношению к направлению съемочных профилей при $L = \Delta y$ вероятность его обнаружения снижается с 1 до $P = 2/\pi = 0,637$.

Если известен угол β отклонения профилей от нормали к простиранию объекта в радианах, то при $L \leq \Delta y$ вероятность обнаружения объекта равна:

$$P = L \sin \beta / (\beta \Delta y). \quad (8)$$

Полезно заметить, что для значения $\beta = \pm \pi/6$ величина $\frac{\sin \beta}{\beta} = 0,955$, т.е. мало отличается от 1. Поэтому на практике достаточно чтобы сеть профилей была ориентирована только приближенно правильно. Если это условие соблюдается, то при $\Delta y = 0,9 L$ пересечение аномальной зоны профилем гарантировано.

Общее решение задачи о вероятности пересечения контура аномалии профилем при произвольном значении угла β , когда $L / \Delta y \geq 1$, приводит к выражению:

$$P = \frac{2}{\pi} \left[\frac{L}{\Delta y} + \cos^{-1} \frac{\Delta y}{L} - \sqrt{\left(\frac{L}{\Delta y} \right)^2 - 1} \right]. \quad (9)$$

При $L = \Delta y$ снова получаем $P = 2/\pi = 0,637$.

Общее выражение для вероятности пересечения аномальной зоны эллиптического вида с осями L , B и периметром Π при произвольной ориентировке профилей съемки имеет вид:

$$P = \Pi / \pi \Delta y, \quad (10)$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2} [1,5(L + B) - \sqrt{L \cdot B}]. \quad (11)$$

Две точки профиля, пересекающего аномальную зону, окажутся внутри ее контура, если $\Delta x \leq B/2$.

Для более скупуплезной оценки вероятности P имеется серия номограмм, учитывающих возможные варианты соотношения размеров контура аномалии, параметров сети и углов β [1, 3].

Оценим для примера вероятность обнаружения аномальной зоны размером 200×50 м сетью с ячейкой 100×25 м при неизвестном простираии оси зоны. В этом случае $L = 200$ м, $\Delta y = 100$ м. и по формуле (9) получим $P = 0,83$. С использованием специальных номограмм можно установить, что объект будет обнаружен с вероятностью $P = 1$, если отклонение профилей от нормали к простираанию объекта будет меньше 60° .

Следующая задача может быть сформулирована в виде задания. Необходимо определить какого минимального размера аномальная зона с неизвестным простираанием может быть обнаружена с помощью сети размером в м 250×50 . Для решения найдем величину периметра зоны Π из формулы (10) для случая $P = 1$, полагая $B = 100$ м и $\Delta y = 250$ м. Эта величина равна $\Pi = 785$ м. Решая уравнение для Π от-

носителем L (методом подбора или составив квадратное уравнение относительно $\sqrt{L}$), получим искомую величину: $L = 360$ м.

На стадиях детальных поисков и разведки сеть наблюдений бывает самой разнообразной. Помимо прямоугольной сети при детальных съемках возможно проложение радиальных и криволинейных профилей, допустимо отклонения от равномерности изучения площади съемки. Повышенная детальность принята для интерпретационных профилей, шаг наблюдений на которых допустимо устанавливать таким, чтобы выявить характерные точки измеряемого физического поля (экстремумы, точки перегиба, перехода через ноль и т. п.). Обычно пункты наблюдения сгущают в районе эпицентра аномалий и разряжают на участках выхода в нормальное поле. В результате детальных работ необходимо установить конфигурацию, размеры аномалии, ее амплитуду и другие особенности, которые затем используют в процессе интерпретации.

Шаг наблюдений подбирают с таким расчетом, чтобы при аппроксимации поля между двумя фиксированными точками прямой линией отклонение фактических его значений от этой прямой не превышало 5 % средней величины значений поля. Например, при съемке естественного поля с шагом 20 м амплитуда аномалии составила 58 мВ, откуда следует, что среднее значение аномалии на профиле приблизительно равно 29 мВ. Между двумя рядовыми точками съемки, на которых получены значения 27 и 39 мВ, выполнено промежуточное измерение с результатом 36 мВ. Разница между последним значением и средней величиной рядовых измерений равна 3 мВ, что составляет 10,3 % от среднего значения аномалии. Следовательно, необходимо сгустить сеть, уменьшив шаг наблюдений по крайней мере в 2 раза.

8. ВЫДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ АНОМАЛИЙ И ИХ КОМПЛЕКСНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Конечным результатом геофизических съемок является выявление и геологическое истолкование тех неоднородностей геологической среды, которые по размерам и контрастности свойств способны создавать ощутимые аномалии.

Важнейшими проблемами анализа измеренных полей являются исключение или ослабление их составляющих, связанных с влиянием

геологических помех, разделение выделенных на фоне помех аномалий на региональные и локальные (возможно нескольких порядков). Необходимы классификация выделенных аномалий на перспективные (отвечающие целевым задачам) и неперспективные, выполнение качественной и количественной интерпретация аномалий и определение их геологической природы.

Выделение аномалий

При анализе поля A принимается аддитивная (суммирующая) его модель, согласно которой существующая в рядовой точке функциональная величина аномалии A_a имеет региональную A_{ap} , локальную $A_{ал}$ и случайную $A_{ас}$ (помеха) составляющие:

$$A_a = A_{ap} + A_{ал} + A_{ас}. \quad (12)$$

Помехи обычно отождествляют со случайными функциями и эта их особенность позволяет применять специальные методы математической фильтрации, основанные на исключении составляющих поля с высокочастотным спектром и некоррелируемостью характеристик поля по площади. Простейшей операцией по ослаблению случайной составляющей является сглаживание в окне из нескольких точек. Если взять 5 точек и применить полином третьей степени, то формула для сглаживания измеренных значений A в рядовой точке с номером i с использованием данных по соседним точкам имеет вид:

$$A_{сгл}(i) = 0,486A(i) + 0,343\{A(i+1) + A(i-1)\} - 0,086\{A(i+2) + A(i-2)\}. \quad (13)$$

Процедура сглаживания приводит к уменьшению дисперсии фона главным образом за счет снижения геологической погрешности при незначительном изменении неслучайной аномалии. В результате уменьшения общей среднеквадратической погрешности наблюдений увеличивается контрастность аномалии и, следовательно, улучшаются условия для ее выделения.

Примером могут служить результаты выделения слабой аномалии кажущейся поляризуемости, приводимые на рис. 21. Согласно исходным измерениям (график *a*), диапазон колебаний фоновых значений η_k составляет 0,5-2,5 %, а среднее значение равно 1,5 %. Выше верхнего предела фона зафиксированы 2 точки со значениями около 3 %. Полагая, что аномальные значения в этих точках равны 1,5 %, а среднеквадратичное отклонение для фона составляет 0,5 %, вычисленный показатель контрастности аномалии (см. (6)) для данных условий равен 3.

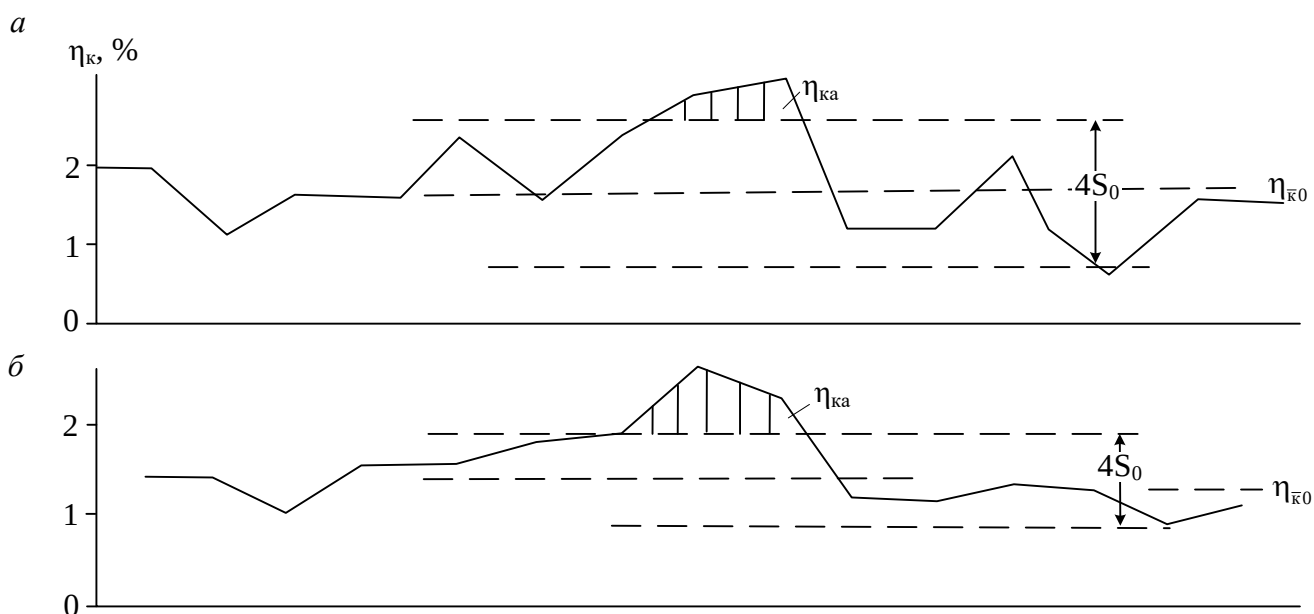


Рис. 21. Результаты выделения слабой аномалии кажущейся поляризуемости η_k по данным измеренного поля (график *а*) и после его сглаживания (график *б*)

После сглаживания исходного графика η_k по 5 точкам (график *б*), фоновые значения находятся в пределах 1-2 % при среднем 1,5 %, а аномальные значения остаются близкими к 3 %. Заметно, что на сглаженном графике аномалия проявляется более отчетливо. Этот эффект подтверждается и вычислением показателя контрастности, который становится близким к 6, то есть увеличивается в 2 раза относительно первоначального значения.

В инструкциях по ряду полевых методов к достоверной (надежность 99,5 %) аномалии относятся такие совокупности значений в не менее чем 3 точках, для каждого из которых выполняется условие: $A_a/S_0 \geq 3$. Если за аномалию принимать значения в 2 раза превышающее среднеквадратическую погрешность фона, то есть $A_a/S_0 \geq 2$, то надежность выделения такой аномалии согласно теории вероятности составляет 95 %. Оценивая надежность с точки зрения энергетического отношения аномалия/помеха, получим для последнего условия 82 %.

При выделении геофизических аномалий в общем случае проводится разделение региональных и локальных аномалий, отличающихся областью их проявления. Наилучшие условия разделения этих аномалий существуют в случае резкого их различия по размерам и интенсивности. В зависимости от целевой задачи подавляется либо одна либо другая составляющая геофизического поля. Нередко инте-

рес представляют как региональные аномалии, отражающие крупные структурные особенности геологической среды, так и локальные аномалии, которые связаны с влиянием мелких геологических тел, например рудных залежей.

Выделение региональных аномалий проводится на основе сглаживания наблюденного поля, предполагающего существенное ослабление влияния помех и локальных объектов. К основным способам выделения региональных аномалий относятся следующие.

1. Усреднение поля вдоль профилей или по площади. Часто используют поточечное усреднение в пределах круга определенного радиуса.

2. Тренд-анализ, под которым понимается процедура аппроксимации эмпирических данных вполне определенными функциями, аргументами которых являются координаты точек наблюдения. Аппроксимация может осуществляться с помощью алгебраических полиномов, как правило, невысоких степеней. При кусочно-полиномиальной аппроксимации применяют сплайн-функции, представляющие кубические полиномы для ограниченных участков площади.

3. Пересчет в верхнее полупространство позволяет существенно ослабить влияние небольших геологических неоднородностей и упростить процесс интерпретации региональной аномалии, которая проявляется более отчетливо.

Локальные аномалии определяют после исключения из измеренного поля региональной составляющей. Для того чтобы подчеркнуть существование локальной аномалии осуществляют пересчет измеренного поля в нижнее полупространство и вычисляют производные высшего порядка. Это позволяет усилить высокочастотную составляющую, связанную с геологическими телами небольших размеров.

Пример совместного проявления региональной и локальных аномалий в поле силы тяжести в районе медноколчеданного месторождения показан на рис. 22. На фоне плавного почти линейного уменьшения поля Δg в краевой части крупного массива базальтов (основные породы с повышенной плотностью) фиксируется локальная отрицательная аномалия (условно первого порядка), связанная с субинтрузией гранитоидов (породы кислого состава менее плотные по сравнению с базальтами). Региональная аномалия от массива ба-

зальтов показана на рис. 22, б штриховой линией (Δg_p). Висячем боку субинтрузии гранитоидов внутри зоны гидротермально измененных пород (метасоматиты с минимальной для разреза плотностью) находится рудная залежь (с максимальной для разреза плотностью). Ореол метасоматитов создает отрицательную аномалию (условно второго порядка), на фоне которой проявляется локальная положительная аномалия (условно третьего порядка) от рудной залежи. Для наглядности все три локальные аномалии (1, 2, 3) изображены отдельно на рис. 22, в.

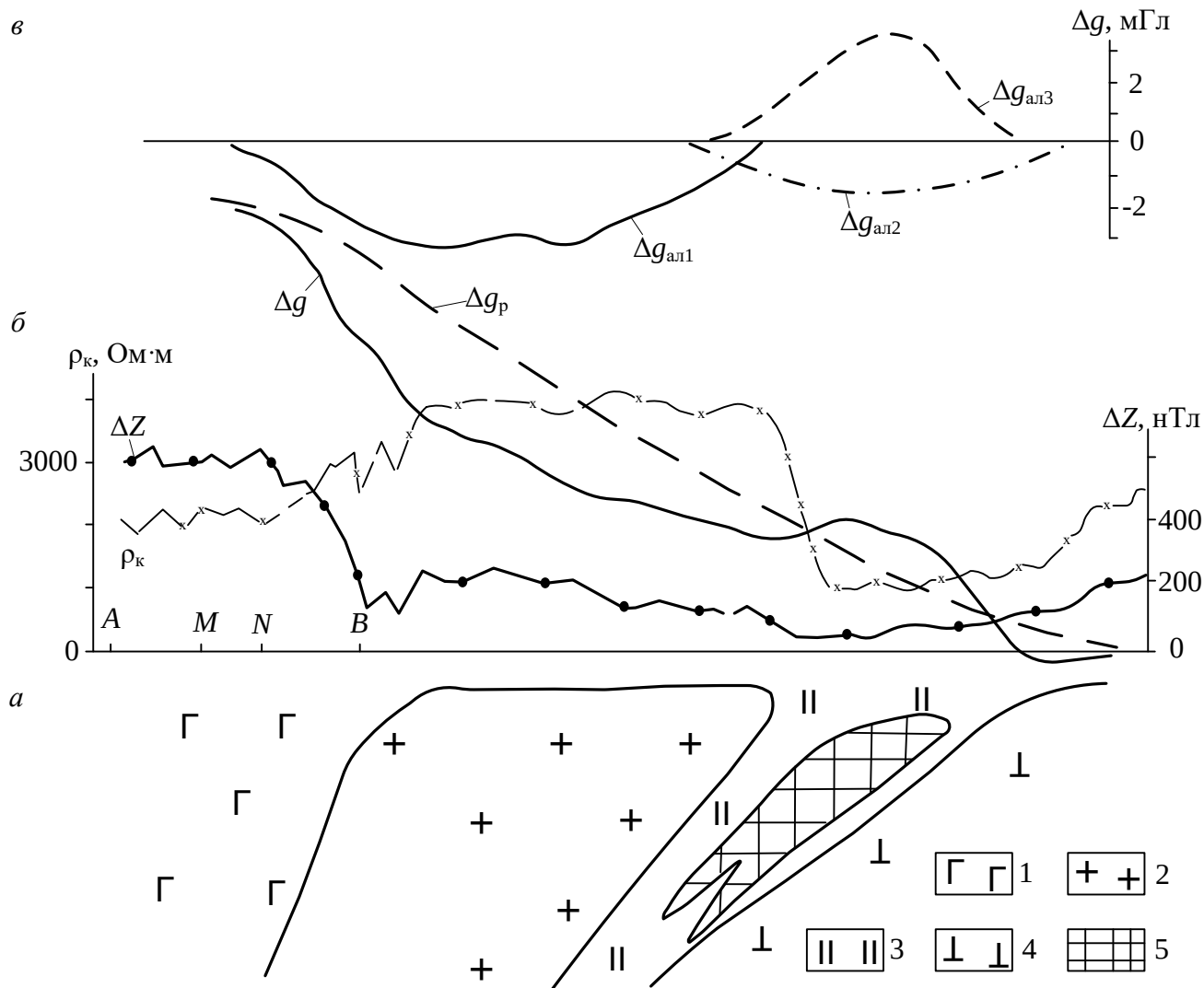


Рис. 22. Пример сложной аномалии силы тяжести, которая в совокупности с данными магниторазведки и электроразведки отражает присутствие в разрезе медноколчеданного месторождения комплекса геологических тел:

а – геологический разрез: 1 – базальты; 2 – гранитоиды; 3 – гидротермально измененные породы; 4 – туфы; 5 – руды; б – графики измеренного поля силы тяжести (Δg) и его регионального фона (Δg_p), магнитного поля (ΔZ), удельного сопротивления (ρ_k); в – графики локальных аномалий поля силы тяжести, отражающие присутствие в раз-

резе субинтрузии ($\Delta g_{ал1}$), зоны гидротермально измененных пород ($\Delta g_{ал2}$), рудной залежи ($\Delta g_{ал3}$)

О существовании нескольких локальных аномалий поля силы тяжести можно предположить по данным других геофизических методов. Так присутствие субинтрузии гранитоидов, которым соответствует обширная отрицательная локальная аномалия гравитационного поля (1), отчетливо фиксируется ступенчатым понижением магнитного поля относительно уровня, характерного для базальтов, и увеличением в этом районе кажущегося сопротивления. Выход к дневной поверхности зоны гидротермально измененных пород, которому соответствует локальная отрицательная аномалия (2), совпадает с областью минимальных значений магнитного поля и кажущегося сопротивления, что является довольно типичным признаком для ореолов околорудных изменений. Существование в этой же области слабой локальной положительной аномалии силы тяжести (3) является следствием влияния рудных масс с аномально высокой плотностью. Слабость влияния рудной залежи связано с тем, что над ее верхней кромкой залегают низкоплотные породы (метасоматиты и кора выветривания), а также эффектом наложения положительной аномалии от руды на более обширную отрицательную аномалию от зоны гидротермалитов.

Необходимо подчеркнуть важность разделения аномалий силы тяжести, поскольку результаты их количественной интерпретации позволяют сформировать представления о пространственных контурах геологических тел, создающих эти аномалии. Данные же большинства других методов имеют значение для картирования неоднородностей в верхней части разреза.

Принципы комплексной интерпретации геофизических аномалий

Цель комплексной интерпретации данных различных методов состоит в том, чтобы выполнить классификацию геологических объектов, создающих достоверные аномалии, уделяя первоочередное внимание перспективным аномалиям.

Использование эталонных аномалий. Комплексная интерпретация может осуществляться с помощью как аналитических, так и вероятностно-статистических методов. Первым этапом интерпретации является построение рабочих (интерпретационных) физико-геологических моделей, которые позволяют задать некоторые априорные рамки и сузить неопределенность решения обратной задачи, выбрав

наиболее вероятные варианты. В аналитических способах комплексной интерпретации геологические объекты и их параметры для ФГМ задаются в виде начальных приближений итерационного цикла решения обратной задачи. Интерпретатор должен представлять вид типичных аномалий, характерных для некоторого класса моделей геологических тел, подходящих для условий изучаемой среды. При этом учитываются ограничения, которые вытекают из представлений об априорной ФГМ и данных, полученных применявшимися геологическими (результаты проходки канав, шурфов, скважин), геохимическими и геофизическими методами.

Примером приемов решения обратных задач на участке проведения съемки методом заряда служит геологический разрез, построенный на основе комплексной интерпретации аномального поля заряда с учетом данных измерений магнитного поля и проходки скважин глубокого и картировочного бурения (рис. 5, б). При интерпретации аномального поля заряда использован набор некоторых теоретических аномалий электрического потенциала над типовыми объектами геологических разрезов рудных полей, приведенный на рис. 23.

Пособием по интерпретации локальных аномалий комплекса геофизических методов может служить таблица-схема, представляющая подборку аномалий от тел простейшей геометрической формы с аналитическими выражениями для вычислений полей в некоторых характерных точках (приложение 1).

Традиционными являются приемы визуального сопоставления аномалий, выделяемых по различным измеренным физическим полям. При анализе аномалий ориентируются по совпадению определенных признаков на установлении меры аналогии исследуемых и эталонных объектов. В качестве эталонов используют геологические тела, детально изученные как геофизическими, так и геологическими методами, подтвержденные бурением и горными выработками.

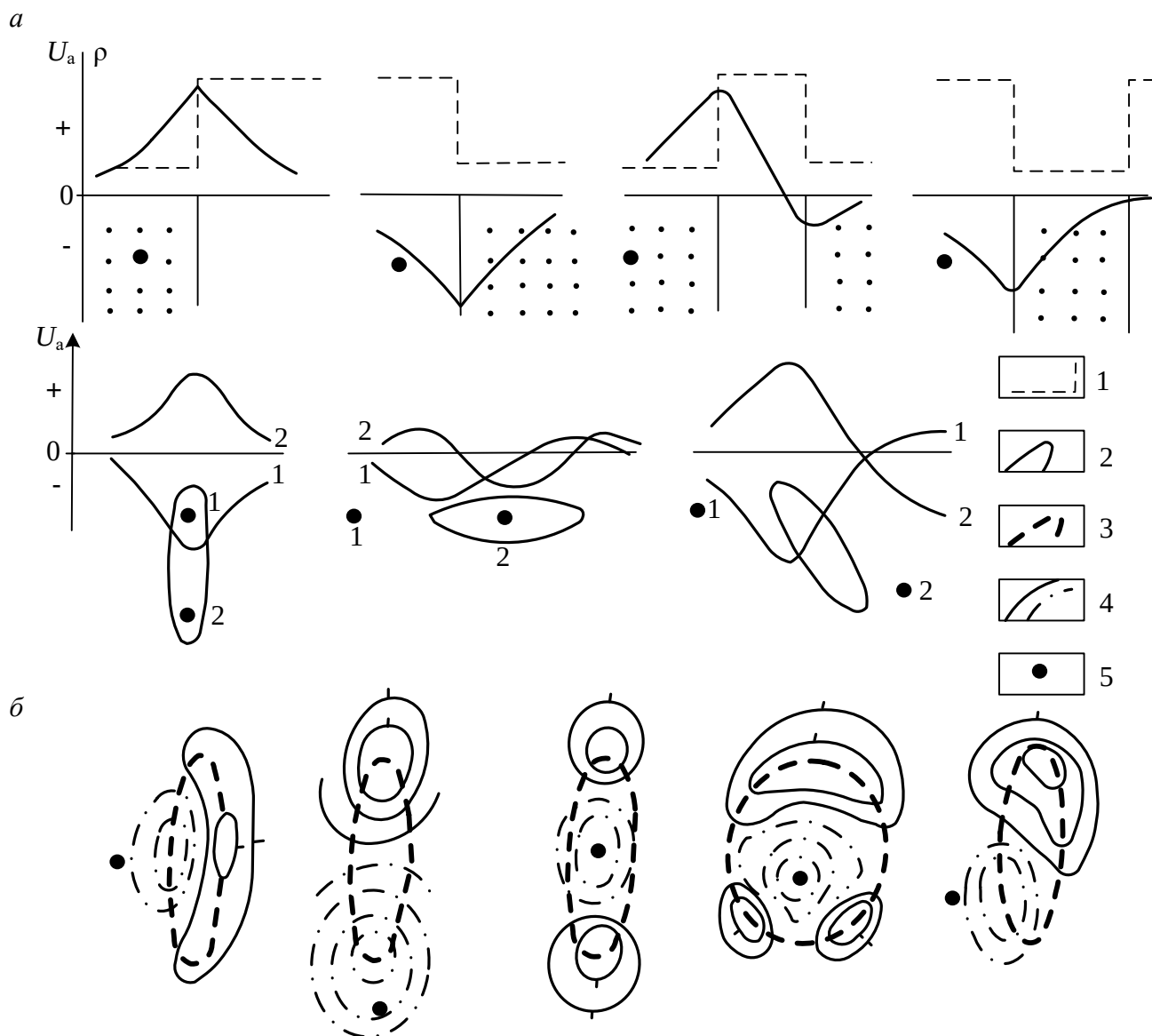


Рис. 23. Графики (а) и планы изолиний (б) аномального электрического потенциала (U_a) поля заряда в присутствии пластовых и сфероидальных тел:

1 – графики удельного сопротивления (ρ) слоистых сред; 2, 3 – погруженный сфероидальный проводник в разрезе (2) и плане (3); 4 – изолинии положительного (сплошные линии) и отрицательного (штрихпунктирные линии) аномального потенциала; 5 – заряд

Фактически задача подготовки к комплексной интерпретации сводится к созданию физико-геологических моделей типовых объектов-эталонов. Например, составляется сводка признаков, по которым могут быть откартированы тектонические нарушения. К их признакам обычно относят: отрицательные аномалии гравитационного, магнитного полей, кажущегося сопротивления, связанные с разрыхлением пород в зоне нарушения, увеличением над ним коры выветривания. В ряде случаев нарушениям в плане соответствуют узкие полосы

резкого изменения поля, связанного с различием свойств двух блоков, разделенных разрывом. Для тектонических нарушений характерна линейность в проявлении отмеченных признаков. В качестве эталонных аномалий гравитационных и магнитных полей, фиксирующих проявления разрывной тектоники, может служить подборка, приведенная на рис. 24. Признаки разрывов выражаются в сгущении изолиний, смене ориентировки большой группы локальных аномалий, повторяющимся изломом аномалий, наличием линейно вытянутых аномалий большой протяженности, смещении осей локальных аномалий или характерные деформации изолиний в определенном направлении. Все эти особенности аномальных полей можно видеть на рис. 24.

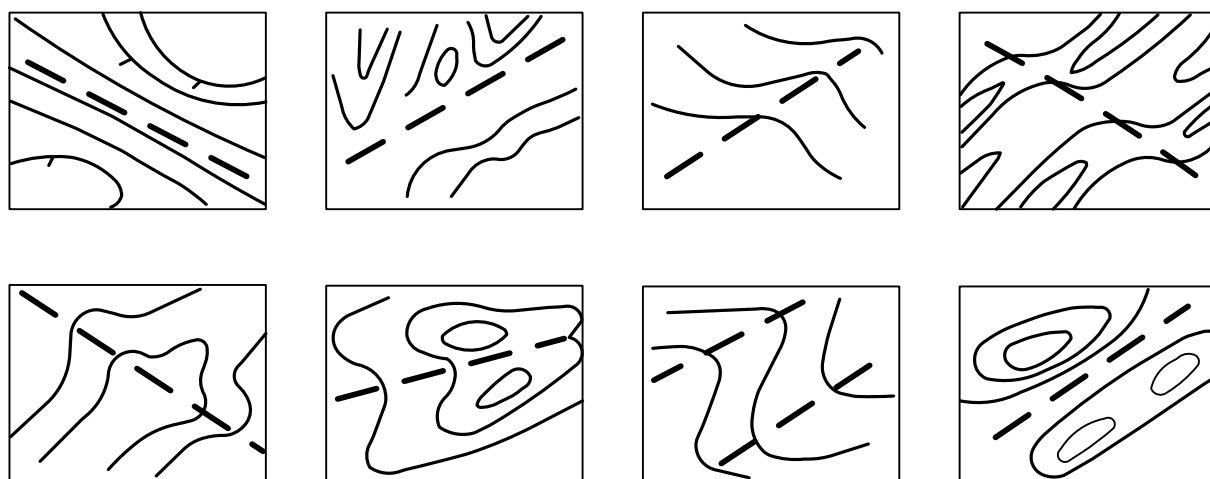


Рис.24. Примеры проявления тектонических нарушений (штриховые линии) в аномальных гравитационном и магнитном полях (по Г. Г. Кассину)

Разработаны специальные программы, позволяющие выделять и классифицировать комплексные аномалии в автоматическом режиме на основе некоторого набора эталонных образов типовых объектов. Результатом компьютерных способов распознавания образов являются прогнозные карты изученной территории с разбиением на несколько классов, характеризующихся различным набором признаков и имеющие определенное геологическое значение [2].

Одним из путей решения задачи диагноза геофизических аномалий является вычисление функций комплексного показателя (ФКП) θ , интегрировано обобщающих результаты измерений несколькими методами одновременно. Они служат для: 1) свертывания информации, полученной несколькими методами исследования; 2) приведения

наблюдений к уровню нормального поля; 3) выделения слабых аномалий; 4) разделения выявленных комплексных аномалий на перспективные и неперспективные [1].

Техника вычисления ФКП рассмотрена в разделах 3 и 5, а пример ее использования рассмотрен на материалах, послуживших основой при построении ФГМ для поисков месторождений урана (см. раздел 3, рис. 6). Полезность определения ФКП продемонстрирована также на рис 19.

Приводимое на рис. 6 отдельное вычисление ФКП для данных гравимагнитных исследований и поисковых методов электроразведки и радиометрии связано с различием задач, которые ставятся перед этими комплексами. С помощью первых методов можно картировать выходы к дневной поверхности потенциально рудоносных сланцев и подстилающих карбонатных отложений. Как показано на рис.6, эта задача решается успешно и выявляемые аномалии ФКП (Θ_1) являются перспективными и локализуют участки для детальных поисков.

В случае применения поискового комплекса обнаружение аномалий ФКП для этого комплекса (Θ_2), подобной той, которая изображена на рис. 6, позволяет отнести ее к перспективным и рассматривать как признак присутствия уранового оруденения.

Количественная комплексная интерпретация наиболее эффективна для сильных аномалий, то есть при больших значениях показателей контрастности. Данные совокупности методов позволяют более надежно установить возможные ограничения, которые необходимо учитывать при применении интерпретационного аппарата математической физики. Наиболее успешным является метод подбора параметров аномалиеобразующих объектов, позволяющий получить решение прямой задачи, соответствующее эмпирическим данным об изучаемых полях.

Прежде чем перейти к построению детальной ФГМ осуществляется экспресс-интерпретация полей путем оценочных вычислений ожидаемых для модели аномалий и их сопоставления с реально измеренными полями на участке работ. Для этих целей можно воспользоваться уже упоминавшейся выше таблицей-схемой аномалий для тел правильной геометрической формы. Таблица дает представление о виде геофизических аномалий и их амплитуде при известных форме, размерах, условиях залегания и аномальности физических (плотност-

ных, магнитных, электрических) свойств большой группы объектов, моделирующих геологические тела.

Способ подбора. Для уточнения форм аномалиеобразующих геологических тел используется способ подбора, который предполагает отыскание их границ по полям для отдельных методов с учетом ограничений, вытекающих из данных других методов. Например, при интерпретации сложных гравиметровых аномалий по профилю необходимо предварительно определиться с уровнем региональной аномалии и создающей ее неоднородностью, а также с количеством и видом локальных аномалий, подлежащих количественной интерпретации. Существенную помощь при этом могут оказать данные других геофизических методов. Например, как это показано по материалам рис. 22, можно обосновать возможность выделения локальных аномалий от нескольких объектов и высказать предположения об их геологической природе.

По данным электрозондирования часто удается установить положение кровли коренных горных пород и вероятные физические характеристики скрытых под наносами геологических тел (на основе корреляционных зависимостей между электрическими и другими физическими свойствами). Часто по аномалиям методов естественного электрического поля и вызванной поляризации проявляются участки рассеянной сульфидной минерализации, типичные для оклорудно-измененных пород. Пример подобных аномалий приведен в разделе 3 на рис. 10. Естественно, что имеет смысл геометризовать в пространстве эти участки, данные о выходах к дневной поверхности которых устанавливаются электроразведкой. Особый интерес представляет задача определить положение в пространстве рудных залежей, признаки существования которых заметны в аномальном поле силы тяжести и могут проявиться по данным специальных методов, например метода переходных процессов.

Для реализации способа подбора в рамках каждого метода разработаны разнообразные программы. Например, применительно к методу ВЭЗ разработан набор программ, как для ручной, так и машинной (компьютерной) интерпретации. Подбор сводится к сопоставлению наблюдаемых кривых с теоретически рассчитанными графиками для горизонтально-слоистой среды с известными параметрами (удельное сопротивление и мощность) слоев. Для снижения неоднозначности интерпретации используют данные о сопротивлении не-

которых опорных слоев или точно установленных границах на отдельных участках работ. Наиболее достоверные данные получают при наличии скважин.

Классификация геологических объектов на принципе самообучения

Этот принцип позволяет по совокупности геофизических данных разделить площадь исследований на некоторое число однородных (по совокупности признаков) классов (объектов), причем их геологическая природа может до определенного времени оставаться неясной. Для установления природы таких классов требуется выполнить геологические исследования (анализ проб, проходка скважин и др.), однако объем заверочных исследований невелик. Достаточно проанализировать данные по типичным представителям классов.

Примером реализации такого подхода могут служить материалы петрофизической классификации и картирования горных пород по данным измерений физических полей в скважинах [10]. Так при разведке медноколчеданного месторождения Осеннее на Южном Урале было установлено, что рудовмещающая структура представляет сложно построенную вулкано-тектоническую депрессию, осложненную крутопадающими и межслоевыми нарушениями. Всего в разрезе месторождения выделялось около десятка разновидностей литотипов [11], представлявших сложный комплекс геологических тел. Определенные сложности возникали с установлением наименования пород, подвергшихся гидротермальному метасоматозу, а также с определением роли субвулканических липарито-дацитов в формировании месторождения.

Для классификации геологических объектов на месторождении были привлечены данные каротажа естественной радиоактивности (ГК), которые, как известно, наиболее тесно связаны с литологическими особенностями горных пород. По этому свойству легче всего определить тип породы, подвергшейся эпигенетическим преобразованиям и принявшей черты метаморфизованной разновидности. Построенная по результатам статистической обработки диаграмм ГК, по методике изложенной в разделе 3, дифференциальная кривая распределения радиоактивности изображена на рис. 25. Из этой кривой следует, что все рудовмещающие породы можно разделить на три статистически однородные совокупности (А, Б, В) и определить границы

между ними (9 и 25 мкР/час) для построения петрорадиоактивных разрезов.

Результаты анализа химического состава показали, что радиоактивность рудовмещающих пород возрастает пропорционально увеличению кремнезема (47,6, 57,3, 65,7 %) и калия (1,9, 3,3, 4,8 % K_2O) и положительно коррелируется с повышением кислотности пород, которая в свою очередь отражает последовательность поступления в изучаемый массив магматических инъекций. Построенные петрофизические разрезы значительно проще геологических разрезов и наглядно отражают структурные особенности и историю формирования месторождения. Для этого на петрорадиоактивный разрез наложены контуры зон, отражающие степень сульфидной минерализации пород, установленные в результате статистической обработки диаграмм метода электродных потенциалов (МЭП). Данные метода фиксируют степень рудной концентрации ($>0,65$, $0,65-0,3$, $<0,3$), соответствующей уровню сплошных руд (класс Р), сильно измененных и сульфидизированных пород (класс С) и слабо измененных околорудными процессами участков разреза.

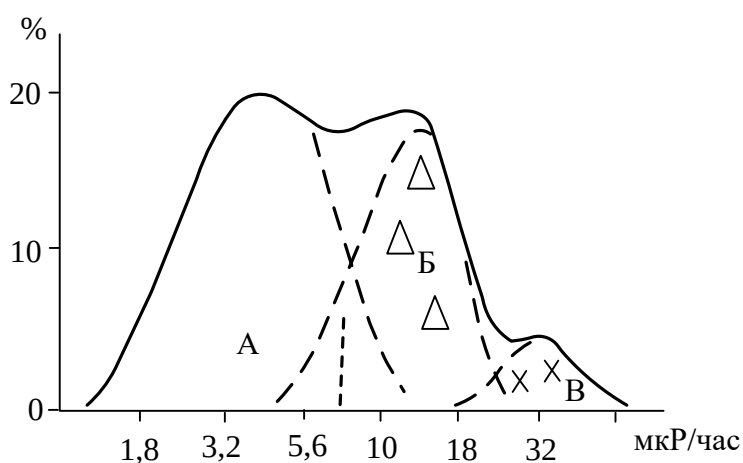


Рис. 25. Дифференциальная кривая распределения гамма-активности рудовмещающих пород медноколчеданного месторождения Осеннее

Результаты классификации геологических объектов по данным измерений двух геофизических полей на принципах самообучения с помощью статистического способа позволили построить петрофизические разрезы, на которых породы разделены на обоснованное огра-

ниченное число классов, отражающих главные черты рудоносной структуры.

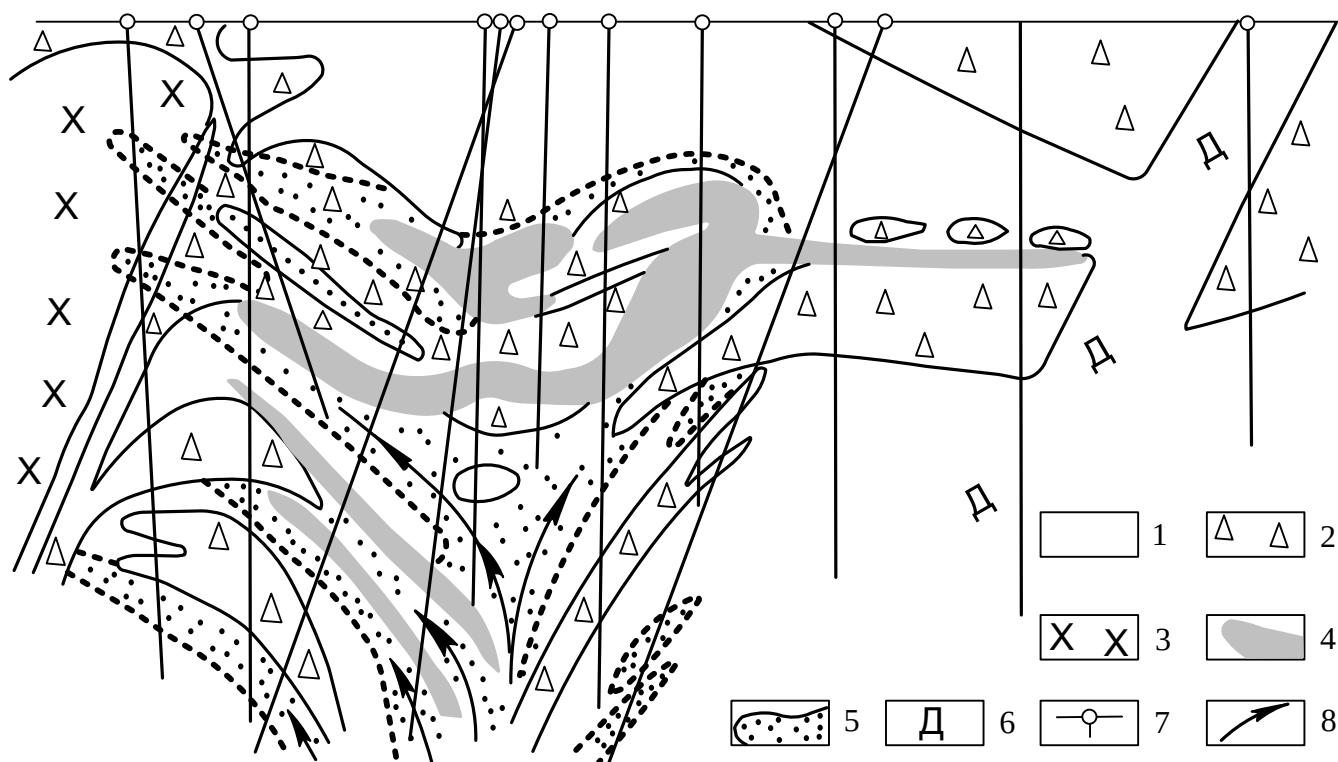


Рис. 26. Петрофизический разрез (классификация по двум геофизическим полям: ГК и МЭП) медноколчеданного месторождения Осеннее:

1, 2, 3 – петрорадиоактивные группы пород А, Б и В, соответственно; 4 – сплошные руды (класс Р); 5 – богатая сульфидная минерализация (класс С); 6 – дайка основных пород; 7 – скважины; 8 – предполагаемые пути движения рудоносных растворов

Один из таких разрезов приведен на рис. 26. Из него видно, что в массив, сложенный комплексом вулканогенных пород основного состава (комплекс пород класса А с низкой радиоактивностью) на завершающей стадии активного вулканизма по субвертикальной тектонической зоне внедрились субинтрузии кислых пород (липарито-дацитовые порфиры – класса Б по радиоактивности). Эти породы имеют силлобразную форму с корнями, уходящими на глубину. На заключительной стадии вулканизма ранее формированная толща была прорвана интрузией (сиенит-диориты класса В с наибольшей радиоактивностью). Поступление рудоносных растворов происходило по каналу уже пройденному субинтрузиями липарит-дацитов, кото-

рые перекрыли сквозную тектоническую зону, образовав экранированную структуру с участками повышенной проницаемости на контактах кислых и основных пород. Эти участки брекчирования и явились теми самыми резервуарами, в которых накапливались руообразующие смеси.

Контуры зон, отражающих классы пород с высокой и умеренной степенью сульфидной минерализации (классы Р и С, соответственно) фиксируют картину проникновения рудных растворов с глубоких горизонтов вверх по узкому субвертикальному каналу. Очевидно, что в верхней части разреза происходило распределение этих растворов по экранированным пологим участкам брекчирования на контактах вулканогенных и субинрузивных пород, где увеличивалась концентрация рудного вещества. По данным комплексной интерпретации геофизических полей медноколчеданное месторождение Осеннее является типичным представителем корневых рудных полей II рода, геологические модели которых рассмотрены в разделе 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. *Вахромеев Г. С.* Основы методологии комплексирования геофизических исследований при поисках рудных месторождений. М.: Недра, 1978. 152 с.

2. *Комплексирование методов разведочной геофизики: Справочник геофизика* / под ред. В. В. Бродового, А. А. Никитина М.: Недра, 1984, 384 с.

3. *Никитин А. А., Хмелевской В. К.* Комплексирование геофизических методов: учебник для вузов. Тверь: ООО Изд. «ГЕРС», 2004, 294 с.

Дополнительной

4. *Виноградов А. М.* Геополя и колчеданы Южного Урала. Екатеринбург: УрО РАН, 2004, 187 с.

5. *Геофизические методы разведки рудных месторождений.* / В. В. Бродовой, В. Д. Борцов, Л. Е. Подгорная и др. под ред. В. В. Бродового. М.: Недра, 1990, 296 с.

6. *Геофизические методы поисков и разведки неметаллических полезных ископаемых* / под ред. П. В. Вишневого, Г. С. Вахромеева, И. Л. Шаманского. М.: Недра, 1984, 223 с.

7. *Геофизические поиски рудных месторождений* / под ред. В. А. Кличникова. Алма-Ата: Каз.ФВИРГ, 1970, 610 с.

8. *Кассин Г. Г.* Геофизические методы на региональном этапе геологоразведочного процесса. Екатеринбург: УГГА, 1996, 104 с.

9. *Рудные месторождения СССР* / под ред. В. И. Смирнова. Том 3. М.: Недра, 1974, 392 с.

10. *Сапожников В. М.* Использование диаграмм каротажа для петрофизического картирования рудовмещающих горных пород. / Методика поисков и разведки глубокозалегающих рудных месторождений. Вып.1. Межвуз. науч. темат. сб. Свердловск: изд. УПИ, 1977, с. 11-19.

11. *Сапожников В. М., Голиков Ю. В., Берг Л. Я.* Опыт объемного петрофизического картирования рудовмещающих пород месторождения Осеннее / Методика поисков и разведки глубокозалегаю-

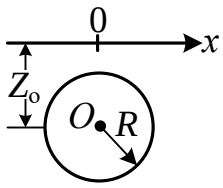
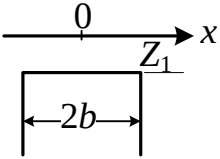
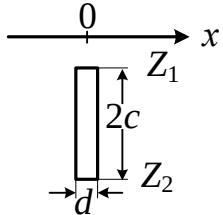
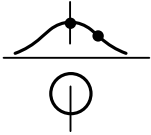
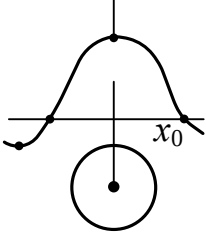
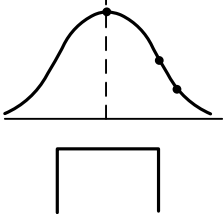
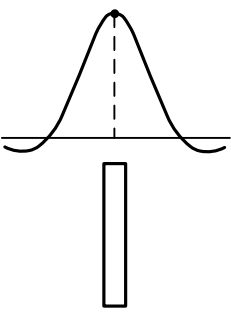
щих рудных месторождений. Вып.1. Межвуз. науч. темат. сб. Свердловск: изд. УПИ, 1977, с. 20-27.

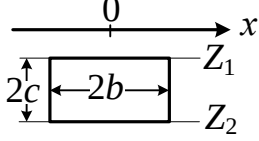
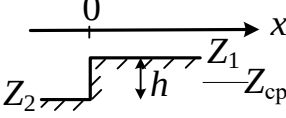
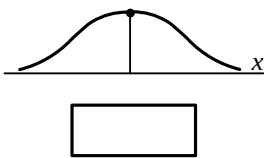
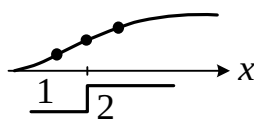
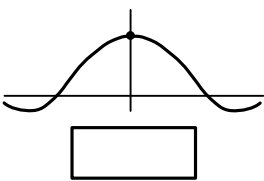
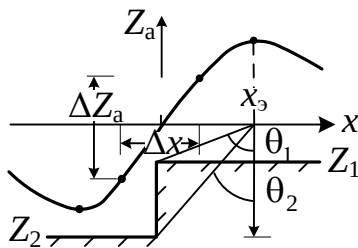
12. Сапожников В. М., Шевченко В. Г. Теория и методика электроразведки в градиентных средах. Л.: Недра, 1992, 135 с.

13. *Электроразведка рудных полей методом заряда* / М. В. Семенов, В. М. Сапожников, М. М. Авдевич, Ю. В. Голиков. Л.: Недра, 1984, 216 с.

**Сводка формул для вычисления значений
аномальных полей в характерных точках**

1		III	III _Г	III _В
2	разрез			
3	Δg_a^3	$\frac{4G\pi a^3 \Delta \sigma}{3Z_0^2}$ $x_{1/2} = 0,77Z_0$	$\frac{2G\pi a^3 \Delta \sigma}{3Z_0^2} \left(1 \pm \frac{3a}{4Z_0} \right)$	$\frac{2G\pi a^3 \Delta \sigma}{3Z_0^2}$ $x_3 = \frac{3}{8}a$
4	Z_a^3	$\frac{8\pi a^3 J}{3Z_0^3}$ $x_0 = \pm Z_0 \sqrt{2}$ $x_{32} = \pm 2Z_0$ $Z_{a2}^3 = -0,036Z_a^3$	$\frac{4\pi a^3 J}{3Z_0^3} \left(1 \pm \frac{9a}{8Z_0} \right)$	$\frac{4\pi a^3 J}{3Z_0^3}$ $x_3 = \frac{3}{8}a$
5	ρ_k^3 η_k^3	$\frac{2\kappa_1 \rho_1 a^3}{Z_0^3}$	$\frac{2\rho_1(\mu-1)a^3}{5\mu+1} \times$ $\times \left(\frac{1}{Z_0^3} \pm \frac{9a}{8Z_0^4} \right)$	$\frac{\rho_1(\mu-1)a^3}{(\mu+2)Z_0^3}$

1		Ц	МП	ТП
2	разрез			
3	Δg_a^3	$\frac{2G\pi R^2 \Delta \sigma}{Z_0^2}$ $x_{1/2} = \pm Z_0$ 	$\pm \infty$	$2Gd\Delta\sigma \ln \frac{Z_2}{Z_1}$ $x_{1/2} = \pm \sqrt{Z_1 Z_2}$ 
4	Z_a^3	$\frac{2\pi R^2 J}{Z_0^2}$ $x_{\min} = \pm Z_0 \sqrt{3}$ $x_0 = \pm Z_0$ 	$4J \operatorname{arctg} \frac{b}{Z_1}$ $x_{1/2} = \pm \sqrt{b^2 + Z_1^2}$ $x_{1/4} = \pm \sqrt{x_{1/2}^2 + 2Z_1 x_{1/2} }$ 	$2J d \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right)$ 
5	ρ_k^3 η_k^3	$\frac{2\kappa \rho_1 R^2}{Z_0^2}$	$\frac{2\rho_1(\mu-1)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{Z_1}$	$\frac{\rho_1 d}{\pi m} \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right)$ $m = \frac{\mu}{\mu-1} - \frac{c}{b+c}$ $d = 2b$

1		Пр	У
2	разрез		
3	Δg_a^3	$2G\Delta\sigma \left\{ b \ln \frac{Z_2^2 + b^2}{Z_1^2 + b^2} + 2(f_2 - f_1) \right\}$ $f_i = Z_i \operatorname{arctg} \frac{b}{Z_i}$ 	$2\pi G h \Delta \sigma$ $x_3 \rightarrow \infty$ $x_{1/2} = 0$ $x_0 \rightarrow -\infty$ $x_{1/4} = -Z_{cp}$ $x_{3/4} = Z_{cp}$ 
4	Z_a^3	$4J \left(\operatorname{arctg} \frac{Z_2}{b} - \operatorname{arctg} \frac{Z_1}{b} \right)$ 	$Z_a = 2J(\theta_1 - \theta_2)$ $\theta_{1,2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{Z_{1,2}}$ $x_0 = 0$ $x_3 = \pm \sqrt{Z_1 Z_2}$ $x = 0 \quad \Delta Z_a / \Delta x = \frac{2J}{Z_1}$ 
5	ρ_k^3 η_k^3	$\frac{2\rho_1}{\pi m} \left(\operatorname{arctg} \frac{Z_2}{b} - \operatorname{arctg} \frac{Z_1}{b} \right)$ $m = \frac{\mu}{\mu - 1} - \frac{c}{b + c}$	$\rho_{ка} = \rho_1 \frac{(\mu - 1)(\theta_1 - \theta_2)}{\mu \pi}$ при $\rho_2 = \rho_1$ $\eta_{ка} = (\eta_2 - \eta_1) \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi}$

Пояснения

Аномальные геофизические поля: гравитационное (Δg_a), магнитное (Z_a), удельное сопротивление ($\rho_{ка}$) и поляризуемость ($\eta_{ка}$).

Тела: шар (Ш), полушары вертикальный (ПШВ) и горизонтальный (ПШГ), цилиндр (Ц), мощный пласт (МП), тонкий пласт (ТП), прямоугольная прямая призма (ПР), вертикальный уступ (У).

Размерности: линейные величины в м, $\Delta\sigma$ -избыточная плотность в г/см³; $G=6.67\cdot 10^3$ внесистемный вариант гравитационной постоянной, позволяющий получать Δg_a в мГл.; $\Delta\chi$ -избыточная магнитная восприимчивость в системе СГС ($\Delta\chi_{СГС}=4\pi\cdot\Delta\chi_{СИ}$); J_i -интенсивность вертикального намагничивания: $J_i=\Delta\chi\cdot Z_n$; Z_n – нормальное поле Земли: $Z_n\approx 0.5$ Э; 1 Эрстед=10⁵ нТл.; $\text{artg } x$ в радианах; ρ_1 и ρ_2 – удельное сопротивление вмещающей среды и тела, соответственно; $\mu=\rho_2/\rho_1$; $K=(\mu-1)/(\mu+1)$; $K_1=(\mu-1)/(2\mu+1)$; $\rho_k=\rho_1+\rho_{ка}$; $\eta_k=1-\rho_k/\rho_k^*$; $\rho_1^*=\rho_1/(1-\eta_1)$; $\rho_2^*=\rho_2/(1-\eta_2)$; $\mu^*=\rho_2^*/\rho_1^*$; $\rho_k^*=\rho_1^*+\rho_{ка}^*$; $\eta_{ка}=\eta_k-\eta_1$; графики $\rho_{ка}$ и $\eta_{ка}$ подобны графикам Z_a ; $x_э=0$ (кроме уступа).

Учебное издание

Сапожников Вадим Михайлович

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Учебное пособие

Редактор _____
Компьютерная верстка Г. А. Косаревой,

Подписано в печать _____ 2019 г. Бумага писчая. Формат 60х84 1/16.
Печать офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж _____. Заказ № _____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ



Министерство образования и науки РФ

ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный
горный университет»**

А. Г. Талалай

Комплексная интерпретация геофизических данных

**Методические указания
по выполнению индивидуальных заданий курса
«Комплексная интерпретация
геофизических данных»
для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
специализации
Геофизические методы исследования скважин**

**Екатеринбург
2020**

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
методической комиссией
факультета геологии и геофизики
Председатель комиссии

 В. И. Бондарев
«20» марта 2020 г.

Комплексная интерпретация геофизических данных

**Методические указания
по выполнению индивидуальных заданий курса
«Комплексная интерпретация
геофизических данных»
для студентов специальности
21.05.03 Технология геологической разведки
специализации
Геофизические методы исследования скважин**

Методические указания по
выполнению индивидуальных
заданий по курсу
«Комплексная интерпретация
геофизических данных»
для студентов специальности
21.05.03 Технология
геологической разведки,
специализации «Геофизические
методы исследования скважин»

Методические указания содержат работы по построению физико-геологической модели объекта поисков, статистической обработке результатов измерений физических свойств горных пород, оценке геологической информативности геофизических методов, выделению аномалий на фоне нормальных значений геофизических полей и комплексной интерпретации геофизических наблюдений с использованием функции комплексного показателя.

Методические указания предназначены для студентов 21.05.03 Технология геологической разведки, специализации Геофизические методы исследования скважин.

Составитель: А. Г. Талалай, проф., д.г.-м.н.

I. Работа в I. ПОСТРОЕНИЕ АПРИОРНОЙ ФГМ ОБЪЕКТА ПОИСКОВ

Под физико-геологической моделью объекта геофизических поисков (ФГМ) понимается абстрактное возмущающее тело, обобщенные размеры, форма и физические свойства которого с той или иной степенью приближения аппроксимируют реальные геологические и рудные образования, подлежащие обнаружению. ФГМ является обобщенным, типизированным и формализованным представлением о целой группе подобных геологических объектов. Это абстракция типа "описание-обобщение".

От реальных геологических объектов ФГМ отличается определенными размерами и обобщенной формой. Сложные по морфологии и вещественному составу геологические объекты заменяются сочетанием геометрически правильных объектов (сфера, цилиндр) с измененными статистически усредненными физическими свойствами. Это позволяет использовать простые алгоритмы для решения обратных задач на ЭВМ.

ФГМ характеризуется следующими свойствами: носит вероятностный характер, обусловленный стохастичностью используемых для ее построения геологических и петрофизических данных, отличается простотой расчета ожидаемых физических полей, характеризуется схематизированным и обобщенным характером полей, которые отражают наиболее существенные черты данного класса объектов.

Физико-геологическая модель должна соответствовать целям и задачам геофизических исследований, типу района поисков и условиям ведения работ, отражать состояние геолого-геофизической изученности данного класса объектов, отличаться по физическим свойствам от вмещающих пород и характеризоваться оптимальной сложностью.

Отличительной чертой ФГМ является ее полиморфность в отношении физических свойств и геометрических параметров объекта. Количественные параметры ФГМ зависят от факторов, которые можно объединить в три группы: физические свойства пород и руд (ϵ , μ , ρ , σ , γ , $\dots$), размеры объекта (x , y , z , $\dots$) и его форма (Z_1 , Z_2 , Z_3 , $\dots$). Например, крутилопроводящая линза сплошных медноколчеданных руд является в одно и то же время проводящим электрический ток пластом с положительной избыточной плотностью,

сжатым эллипсоидом с повышенной поляризуемостью, генератором естественного электрического поля, источником формирования ореолов рассеяния меди и т.д. Пример физико-геологической модели линзы медноколчеданных руд (по данным Г.С. Вахрамеева) приведен на рис. 1.

Построение априорной ФГМ объекта поисков производится на базе справочных и литературных источников. При построении используются принципы аналогии, корреляции и обратной связи.

Принцип аналогии состоит в том, что выбор модели объекта исследований производится на основе данных, полученных на объектах со сходными геолого-геофизическими условиями. Как показывает практика ФГМ, разработанная на примере месторождения определенного класса крупности по запасам (например, среднего), может быть справедлива для аналогичных месторождений других классов крупности (например, мелких) при условии кратного изменения размеров, формы и физических свойств модели и сохранения общих условий залегания месторождений (мощность рыхлых отложений, перекрывающих и подстилающих пород).

Принцип корреляции состоит в использовании регрессионных зависимостей параметров и физических свойств объекта исследований от наблюдаемых физических полей и от других физических свойств того же объекта. Например, при разведке железорудных месторождений можно использовать связь между магнитной восприимчивостью и содержанием железа в руде. Установлены связи между скоростью распространения продольных волн и плотностью, между электрическим сопротивлением, скоростью продольных волн и плотностью, между плотностью и магнитной восприимчивостью. Например, Н.Н. Пузыревским установлена взаимосвязь скорости и плотности в виде $V = 6\sigma - 11$, связь эта может меняться в зависимости от возраста горных пород и района исследований. В поверженных породах по мере роста основности возрастают плотность и намагниченность. Породы осадочного происхождения характеризуются обратной зависимостью плотности, электрического сопротивления и скорости распространения упругих волн от пористости и т.д.

Принцип обратной связи заключается в использовании результатов обработки и интерпретации материалов экспериментальных полевых исследований с целью совершенствования ФГМ. Полученные в результате интерпретации геофизических измерений геологические выводы используются для уточнения физических свойств, размеров и формы

объекта исследований.

Физические свойства пород и руд определяются путем исследования образцов, по данным каротажа, параметрических измерений в обнажениях и по итогам интерпретации полевых геофизических методов. Данные о физических свойствах должны характеризовать все необходимые физические параметры, обеспечивающие построение комплексной модели, обеспечивать по точности измерений решение поставленной геологической задачи, иметь пространственную и геологическую привязку, быть представленными для статистической обработки, т.е. замеры должны быть массовыми и достаточно представительными. Сведения о размерах и форме объекта поисков получают при его разведке.

1.1. Задачи

Построить априорную физико-геологическую модель объекта геофизических поисков, используя для этой цели основные принципы построения ФГМ, материалы преддипломной производственной практики, материалы по физическим свойствам и литературные источники.

1.2. Содержание работы

Составить объяснительную записку, в которой сформулировать геологические задачи, которые ставятся перед геофизическими исследованиями в районе работ, например: поиски и разведка месторождений полезных ископаемых, опробование горных пород и руд, определение процентного содержания полезных компонентов, уточнение геологического разреза по измерениям в скважинах и т.д. Разделить геологические задачи на основные и дополнительные. Перечислить материалы, на основе которых строится ФГМ.

Оценить геологические условия региона и участка работ. Дать характеристику горных пород региона и участка, проанализировать размеры и условия залегания геологических объектов, вещественный состав и наличие минералов, оказывающих влияние на физические свойства горных пород района. Охарактеризовать предполагаемый объект поисков: его физические свойства, размеры, форму, глубину залегания рудных тел, запасы руд, наличие перепревающих и подстилающих горных пород, глубины и типы коры выветривания, мощность поверхностных рыхлых отложений, наличие ореолов рассеяния элементов, рельеф местности и т.д.

Проанализировать результаты предшествующих геофизических работ в районе и аналогичных районах, физические и геологические предпосылки, характер аномальных и нормальных полей, установить регрессионные зависимости параметров и физических свойств объекта поисков от наблюдаемых физических полей и других физических свойств того же объекта. Обработать и проинтерпретировать данные предшествующих экспериментальных геофизических исследований с целью уточнения физических свойств, размеров и формы объекта исследований.

На основании имеющихся материалов и литературных источников составить априорную физико-геологическую модель объекта поисков. Результаты работы обобщить и представить в форме таблицы 1.

1.3. Материалы и оборудование

1.3.1. Геологические карты региона и участка работ

Результаты геофизических исследований района работ: графики измерений физических полей по профилям, карты физических полей с нанесенными изолиниями равных значений потенциала поля, карты векторов напряженностей физических полей, вариационные кривые и histograms физических свойств горных пород и руд, корреляционные зависимости физических свойств от вещественного состава горных пород и другие материалы производственных практик.

1.3.2. Микрокалькулятор типа БЗ-21

1.4. Порядок выполнения работы

- 1) Ознакомиться с понятием физико-геологической модели по настоящей инструкции.
- 2) Сформулировать геологические задачи.
- 3) Оценить физические свойства, размеры и форму предполагаемого объекта поисков.
- 4) Проанализировать, обработать и проинтерпретировать результаты предшествующих геофизических работ в районе. Рассчитать вариационные кривые и построить histograms физических свойств объекта поисков.
- 5) Составить объяснительную записку.

1.5. Содержание отчета

В отчете следует сформулировать геологические задачи, стоящие перед геофизическими методами в районе работ.

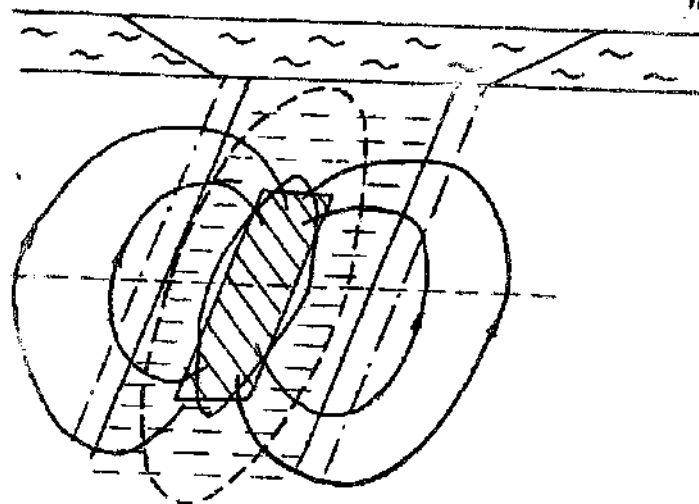
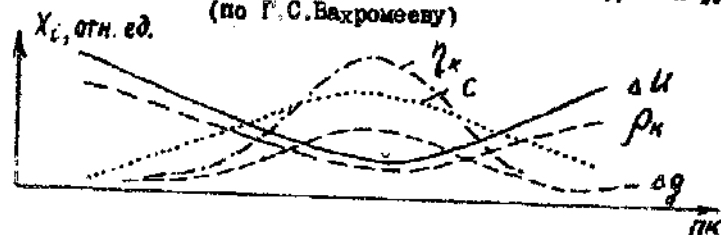
Кратко указать значение выбранного объектом поисков полезного ископаемого для народного хозяйства. Дать определение ФГМ. Привести сведения о физических свойствах, размерах и форме искомого объекта. Отчет должен содержать графики исходных данных, необходимых для построения ФГМ, результаты измерений геофизических полей по профилям или в плане, расчетные или взятые из справочников таблицы физических свойств и итоговое, схематизированное обобщенное описание комплексной полиморфной ФГМ в виде таблицы I.

Таблица I

Параметры физико-геологической модели
объекта геофизических поисков

Физические свойства ($\chi_1, \chi_2, \chi_3 \dots$)	Размеры ($y_1, y_2, y_3 \dots$)	Форма ($z_1, z_2, z_3 \dots$)
χ_1 Магнитная восприимчивость χ	y_1 Горизонтальная мощность $2b$	z_1 Показатель горизонтальной протяженности
χ_2 Остаточная намагниченность J_r	y_2 Глубина залегания верхней кромки h	$L/2b$
χ_3 Избыточная плотность $\Delta \sigma$	y_3 Глубина залегания нижней кромки H	z_2 Показатель вертикальной протяженности $\frac{H-h}{h}$
χ_4 Удельное электрическое сопротивление ρ	y_4 Длина по простра- нию L	z_3 Показатель погруженности $\frac{H-h}{2b}$
χ_5 Поляризуемость φ	y_5 Угол падения α	
χ_6 Естественная радиоактивность J	y_6 Радиус (для изометрических тел) R	z_4 Показатель изометричности $c:d:l$
χ_7 Скорость распространения упругих колебаний v	y_7 Размеры по большой c , средней d и малой l осям (для трехмерных объектов)	
χ_8 Длина замедления быстрых нейтронов L_1		
χ_9 Длина диффузии тепловых нейтронов L	y_9 Расстояние до центра H_0	
.....		

Физико-геологическая модель линзы медноколчеданных руд
(по Г.С.Вахромееву)



- | | | | | | | | | | |
|--|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|-----|
| | - 1 | | - 2 | | - 3 | | - 4 | | - 5 |
| | - 6 | | - 7 | | - 8 | | - 9 | | |

1 - контур промышленной залежи, 2 - наклонный пласт положительной избыточной плотности, 3 - зона повышенной проводимости, 4 - контур острого эллипсоида повышенной поляризуемости, 5 - первичный ореол рассеяния элементов, 6 - вторичный ореол рассеяния элементов, 7 - токовые линии естественного электрического поля, 8 - уровень подземных вод, 9 - современный элювио-дельтовый

Δg - аномалия силы тяжести, ρ_k - аномалия электрического сопротивления, η_k - аномалия вызванной поляризации, ΔU - аномалия естественного поля, C - аномалия содержания меди.

Рис. I

2. ГЛАВА II

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРНЫХ ПОРОД

Необходимым и достаточным условием успешного применения геофизических методов является заметная дифференциация (контрастность) физических свойств горных пород в районе работ. Физические свойства пород зависят от многих геологических факторов: возраста, глубины залегания, метаморфизма горных пород, степени их выветренности, пористости, влагонасыщенности и т.д. По этой причине частные значения физических параметров обычно колеблются в широких пределах. Для получения достаточной представительности результатов необходимо, чтобы измерения носили массовый характер. Для каждой разновидности горных пород желательно иметь не менее 30-50 определений.

Перечень основных физических свойств горных пород и руд приведен в таблице 2.

Физические свойства определяются обычно путем исследований на образцах, в естественном залегании (параметрические замеры), по данным каротажа и по итогам интерпретации результатов полевых геофизических наблюдений соответствующими методами. Образцы берут из коренных обнажений пород и руд, по возможности слабо затронутых вторичными процессами. Места отбора образцов равномерно распределяют по площади и отмечают на карте с целью изучения закономерностей изменения физических параметров по площади исследований.

Изменяемость физических свойств пород и руд обуславливает широкое использование статистических методов обработки с целью компактного представления данных о физических свойствах, выявления в общей совокупности самостоятельных групп пород, определения доверительных границ изменения физических параметров горных пород, установления корреляционной зависимости между различными физическими параметрами и изучения зависимости физических свойств от состава и структуры горных пород.

2.1. Эмпирические распределения

Множество значений физического признака, обладающего свойствами случайной величины, будем называть статистической совокупностью. В статистической совокупности значения физического признака располагаются в порядке их получения и зависят при изучении геологического

Таблица 2

Перечень основных физических свойств горных пород

Вид	Физический параметр	Единица измерения
Магниторазведка	1. Магнитная восприимчивость, χ	СИ
Гравитационная разведка	2. Остаточная намагниченность, J	А/м
Электроразведка	1. Плотность, ρ	г/см ³
	1. Удельное электрическое сопротивление, ρ	Ом м
	2. Поляризуемость, η	%
Сейсморазведка	1. Скорость распространения упругих колебаний, V	м/с
	2. Модуль Юнга	кг/м ²
Радиометрия	1. Естественная радиоактивность, γ	мкр/ч
	2. Коэффициент радиоактивного равновесия, K_{pp}	
	3. Коэффициент замедления, α	%
Ядерная геофизика	1. Длина замедления быстрых нейтронов, L_s	см
	2. Длина диффузии тепловых нейтронов, L_d	см
	3. Время замедления быстрых нейтронов, τ_s	с
	4. Время жизни тепловых нейтронов, τ	с

объекта поисков. Для удобства математической обработки производят упорядочение статистической совокупности, которое заключается в том, что отдельные значения признака располагают в возрастающем или убывающем порядке. Упорядочение совокупностей непрерывных физических признаков производится методом группирования и последующего построения вариационных рядов и соответствующих им графиков.

Упорядочение непрерывных физических признаков производится в интервальной форме. Число интервалов K можно оценить по формуле $K = \sqrt{N}$, где N — объем совокупности равный общему числу наблюдений. Для выбора ширины интервала группирования используется формула Стрессека:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,3 \lg N}$$

где x_{max} , x_{min} — максимальное и минимальное значения физического параметра x . Вычисленные значения Δx округляют до удобной величины.

Вариационный ряд статистической совокупности непрерывного физического признака представляется в виде таблицы, в которой в возрастающем порядке перечислены интервалы или середины интервалов группирования и соответствующие им частоты и частоты встречи физических признаков. Перед составлением таблицы вычисляют значения середины интервалов $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, где a_i и b_i — соответственно, начало и конец i -го интервала группирования, подсчитывают частоту n_i и частоту $\omega_i = n_i / N$ попадания физического признака на i -ый интервал группирования. Пример построения вариационного ряда приведен в таблице 3. Проверка правильности построения вариационного ряда осуществляется по формулам $\sum_{i=1}^K n_i = N$, $\sum_{i=1}^K \omega_i = 1$.

Для компактного и наглядного представления результатов массовых измерений физических свойств горных пород вариационный ряд может быть представлен графически в виде полигона, гистограммы или кумуляты.

Полигоник называется ломаный график, построенный в декартовой системе координат. По оси абсцисс откладываются в возрастающем порядке середины интервалов группирования физического параметра, а по оси ординат соответствующие им частоты или частоты.

Таблица 3

Вариационный ряд распределения плотности перидотитов
Баженковского месторождения хризотил-асбеста

Номера интерва- лов,	Границы интерва- лов, г/см ³	Средины интервалов X_i , г/см ³	Частоты n_i	Частоты $\omega_i = \frac{n_i}{N}$
1	2,5-2,7	2,6	2	0,04
2	2,7-2,9	2,8	6	0,12
3	2,9-3,1	3,0	8	0,16
4	3,1-3,3	3,2	13	0,26
5	3,3-3,5	3,4	11	0,22
6	3,5-3,7	3,6	7	0,14

 $N = 50$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1,0$$

Гистограммой вариационного ряда называется ступенчатый график, состоящий из серии примыкающих друг к другу прямоугольников с основаниями на оси абсцисс, равными ширине интервала группирования, и высотами по оси ординат, соответствующими значениями частот или частотостей.

Кумулятой называют монотонно растущий график, который образуется, если по оси абсцисс откладывать середины интервалов группирования, а по ось ординат сумму частот или частотостей с нарастающей итогом.

Пример построения полигона, гистограммы и кумуляты вариационного ряда распределения плотности перидотитов Баженковского месторождения хризотил-асбеста приведен на рис. 2.

Наряду с построением вариационных рядов и графиков при обработке результатов измерений физических свойств вычисляются статистические характеристики положения (средняя величина, медиана, мода) и рассеяния результатов измерений (дисперсия, стандарт, коэффициент вариации, показатель асимметрии и показатель эксцесса).

Средняя величина $\bar{X}$ характеризует массовый уровень физического признака в статистической совокупности. Для вариационных рядов совокупностей с непрерывным или дискретным признаком средняя величина признака подсчитывается, как средняя взвешенная по формуле

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i X_i}{N} \quad (2.1)$$

где K — число интервалов или отдельных значений вариант.

Медиана (Me) — значение признака, соответствующее середине упорядоченного вариационного ряда. Медиана делит упорядоченную совокупность физических признаков на две равные по объему части.

Мода (Mo) — значение признака, которое характеризуется наибольшей частотой или частотостью и совпадает с абсциссой максимума вариационной кривой.

Статистические характеристики рассеяния указывают на степень и характер концентрации или рассеяния отдельных значений физического параметра относительно характеристик положения.

Дисперсия (S^2) — это средний квадрат отклонений отдельных вариантов от средней величины. Для упорядоченной в вариационном

Пример построения полигона (а), гистограммы (б) и кумуляты (в) вариационного ряда распределения плотности периодитов Баженовского месторождения хризотил-асбеста

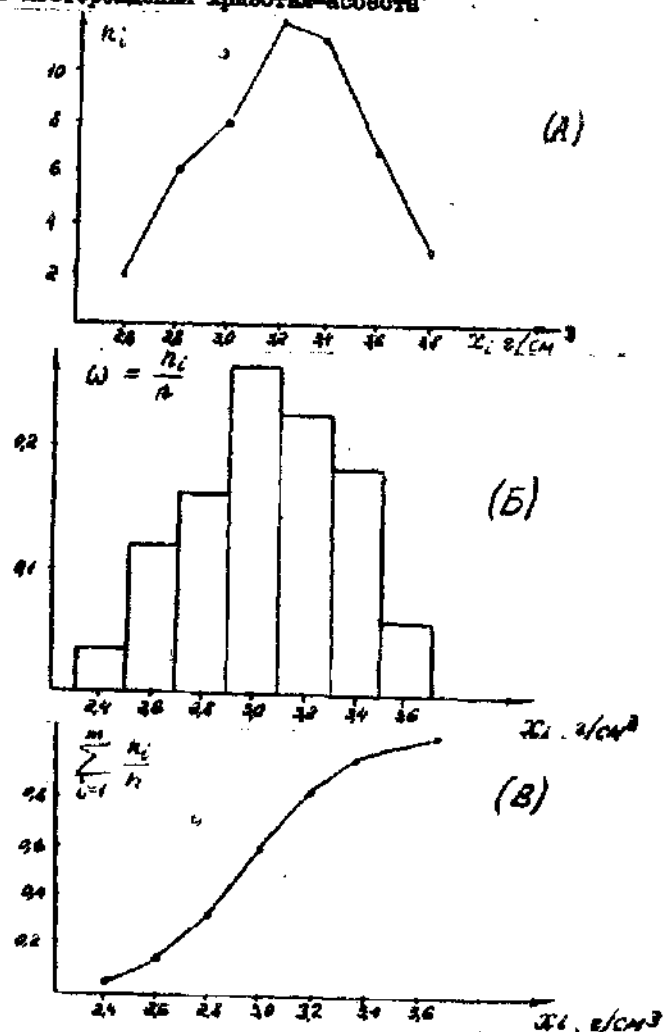


Рис. 2

совокупности дисперсия вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad (2)$$

Стандарт (S) - среднее квадратическое отклонение, равное корню квадратному из дисперсии.

Коэффициент вариации (V) - это относительное среднее квадратическое отклонение, которое подсчитывается в процентах по формуле:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (3)$$

Показатель асимметрии (A) указывает на характер и степень симметрии вариационной кривой. Для упорядоченной совокупности показатель асимметрии вычисляется по формуле:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3 N} \quad (4)$$

Показатель эксцесса ($\mathcal{E}$) характеризует степень крутовершинности вариационной кривой по отношению к вершине кривой нормального распределения. Для вариационных рядов эксцесс вычисляют по формуле:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4 N} - 3 \quad (5)$$

Все статистические характеристики, кроме моды и медианы, вычисляются методом моментов. Статистический момент порядка p подсчитывается по формуле:

$$M_p = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i^p}{N} \quad (6)$$

где $\sigma_i = x_i - x_0$ - отклонение i -го интервала вариационного ряда x_i от интервала x_0 , принятого за начало отсчета, k - количество интервалов вариационного ряда.

Различают начальные m_p и центральные μ_p моменты вариационного ряда. Момент называется начальным, если начало отсчета совпадает с нулем $x_0 = 0$ и центральным, если начало отсчета

совпадает со средней величиной ряда $x_0 = \bar{x}$.

Первый начальный момент совпадает со средним взвешенным значением измеряемого физического параметра. Второй центральный момент совпадает с дисперсией значений физического параметра.

Частные от деления центральных моментов ρ -го порядка на стандарт в ρ -ой степени называют основными моментами $\rho_p = \mu_p / S^p$. Первый основной момент ρ_1 соответствует показателю асимметрии, четвертый основной момент ρ_4 используется для вычисления показателя эксцесса.

Вычисление статистических характеристик выполняется в следующем порядке. После составления вариационного ряда и занесения данных в таблицу вычисляют условные варианты, нормированные к ширине интервала группирования, по формуле:

$$\delta_i = \frac{x_i - x_0}{\Delta x} \quad (7)$$

где x_i - середина i -го интервала вариационного ряда, x_0 - принятое начало отсчета, Δx - ширина интервала группирования.

Вычисляют начальные моменты условных вариантов m_p^{δ} до четвертого порядка включительно по формуле:

$$m_p^{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \delta_i^p}{N} \quad (p=1,2,3,4) \quad (8)$$

Вычисляют среднее значение физического параметра по формуле:

$$\bar{x} = x_0 + \Delta x m_1^{\delta} \quad (9)$$

Вычисляют второй, третий и четвертый центральные моменты, используя формулы их связи с начальными моментами условных вариантов

$$\mu_2 = (\Delta x)^2 [m_2^{\delta} - (m_1^{\delta})^2] = S^2 \quad (10)$$

$$\mu_3 = (\Delta x)^3 [m_3^{\delta} - 3m_2^{\delta} m_1^{\delta} + 2(m_1^{\delta})^3] \quad (11)$$

$$\mu_4 = (\Delta x)^4 [m_4^{\delta} - 4m_3^{\delta} m_1^{\delta} + 6m_2^{\delta} (m_1^{\delta})^2 - 3(m_1^{\delta})^4] \quad (12)$$

Вычисляют стандарт S , показатель асимметрии A и показате-

ль эксцесса $\mathcal{E}$ по формулам:

$$S = \sqrt{\mu_2} \quad (13)$$

$$A = \rho_3 = \frac{\mu_3}{S^3} \quad (14)$$

$$\mathcal{E} = \rho_4 - 3 = \frac{\mu_4}{S^4} - 3 \quad (15)$$

Для вариационного ряда нормального распределения $\rho_4 = 3$. Поэтому при оценке крутовершинности вариационной кривой из основного момента четвертой степени вариационной кривой вычитается основной момент четвертой степени нормального распределения физического параметра.

Вычисляют коэффициент вариации по формуле (2.3).

Подсчитывают значение моды по формуле:

$$M_0 = X_{M_0} + \Delta x \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \quad (16)$$

где X_{M_0} - начало интервала группирования, в котором находится мода, Δx - ширина интервала, Δ_1 - разность частот модального и помодального интервала, Δ_2 - разность частот модального и постемодального интервала.

Подсчитывается значение медианы по формуле:

$$M_e = X_{Me} + \Delta x \left(\frac{\frac{N}{2} - n_{sMe}}{n_{Me}} \right) \quad (17)$$

где X_{Me} - начало медианного интервала, N - объем совокупности, n_{sMe} - накопленная частота интервала, предшествующего медианному, n_{Me} - частота медианного интервала. Под накопленной частотой для данного интервала понимается сумма частот, начиная с первого интервала, включая данный. Накопленная частота подсчитывается по формуле:

$$n_{s_i} = \sum_{j=1}^i n_j \quad (18)$$

Накопленные частоты служат основой для построения интегрального полигона (кумуляты) вариационного ряда.

Пример. Вычислить статистические характеристики вариационного ряда распределения содержания железа в сплошных медноколчеданных рудах Гайского месторождения меди.

Составим таблицу для вычисления исходных данных.

Таблица 4

Вариационный ряд распределения содержания железа в сплошных медноколчеданных рудах Гай

	Интервалы, %	n_i	x_i	δ_i	$n_i \delta_i$	$n_i \delta_i^2$	$n_i \delta_i^3$	$n_i \delta_i^4$
1	38-40	6	39	-2	-12	+24	-48	+96
2	40-42	10	41	-1	-10	+10	-10	+10
3	42-44	15	43	0	0	0	0	0
4	44-46	13	45	+1	+13	+13	+13	+13
5	46-48	6	47	+2	+12	+24	+48	+96
	Сумма	50			+3	+71	+3	+215

Выберем место нуля совпадающим с серединой центрального интервала $x_0 = 43$ и подсчитаем условные варианты δ_i . Проверка правильности вычисления исходных данных производится по формуле Шарлье:

$$\sum_{i=1}^k n_i (\delta_i + 1)^4 = \sum_{i=1}^k n_i \delta_i^4 + 4 \sum_{i=1}^k n_i \delta_i^3 + 6 \sum_{i=1}^k n_i \delta_i^2 + 4 \sum_{i=1}^k n_i \delta_i + \sum_{i=1}^k n_i \quad (9)$$

При правильной подготовке данных формула Шарлье обращается в тождество. Вычисляем начальные моменты ряда в условных вариантах

$$m_1^{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i \delta_i}{N} = \frac{+3}{50} = +0,06$$

$$m_2^{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i \delta_i^2}{N} = \frac{+71}{50} = +1,42$$

$$m_3^{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i \delta_i^3}{N} = \frac{+3}{50} = +0,06$$

$$m_4^{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i \delta_i^4}{N} = \frac{+215}{50} = +4,3$$

Вычисляем среднее значение содержания железа $\bar{x}$, стандарт S и центральные моменты μ_3 и μ_4 , используя формулы связи начальных моментов в условных вариантах m_p^{δ} с центральными моментами μ_p .

$$\bar{x} = m_1 = x_0 + \Delta x m_1^{\delta} = 43 + 2(+0,06) = 43,12 \% \text{ Fe}$$

$$S = \sqrt{\mu_2} = \Delta x \sqrt{m_2^{\delta} - (m_1^{\delta})^2} = 2 \sqrt{1,42 - (0,06)^2} = 2,38 \% \text{ Fe}$$

$$\mu_3 = (\Delta x)^3 [m_3^{\delta} - 3 m_2^{\delta} m_1^{\delta} + 2 (m_1^{\delta})^3] =$$

$$= 2^3 [+0,06 - 3(+1,42)(+0,06) + 2(+0,06)^3] = -1,56$$

$$\mu_4 = (\Delta x)^4 [m_4^{\delta} - 4 m_3^{\delta} m_1^{\delta} + 6 m_2^{\delta} (m_1^{\delta})^2 - 3 (m_1^{\delta})^4] =$$

$$= 2^4 [+4,3 - 4(+0,06)(+0,06) + 6(+1,42)(+0,06)^2 - 3(+0,06)^4] =$$

$$= 69,12$$

Определяем основные моменты и показатели асимметрии A и эксцесса E .

$$A = \rho_3 = \frac{M_3}{S^3} = \frac{-1,56}{(2,38)^3} = -0,12$$

$$E = \rho_4 - 3 = \frac{M_4}{S^4} - 3 = \frac{69,12}{(2,38)^4} - 3 = 2,15 - 3 = -0,85$$

Находим коэффициент вариации:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{2,38}{43,12} \cdot 100 = 5,5\%$$

По формуле (2.16) определяем модальное значение:

$$M_0 = x_{M_0} + \Delta x \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 42 + \frac{2(N-10)}{(15-10) + (15-13)} = 43,43\% \text{ Fe}$$

Для вычисления медианы составим таблицу накопленных частот расследуемого вариационного ряда:

Таблица 5

Интервалы вариационного ряда, %	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48
Частоты, n_i	6	10	15	13	6
Накопленные частоты, $n_{\Sigma i}$	6	16	31	44	50

По формуле (17) находим значение медианы:

$$M_e = x_{M_e} + \Delta x \frac{\left(\frac{N}{2} - n_{\Sigma i/M_e}\right)}{n_{M_e}} = 42 + \frac{2(25-16)}{15} = 43,2\% \text{ Fe}$$

Таким образом вариационный ряд распределения содержания железа в сплошных медноколчеданных рудах Гайского месторождения меди практически симметричный, так как значение средней величины содержания, моды и медианы совпадают друг с другом в пределах погрешности $\pm 1,0\%$ нейтронного активационного метода сгорания, который использовался для определения содержания железа в рудах. О симметрии вариационного ряда свидетельствует также

небольшое значение показателя асимметрии $A = -0,12$. Степень изменчивости содержания железа в сплошных медных колчеданах весьма равномерна, так как вычисленные значения коэффициента вариации $V = 5,5\%$ не превышают 6% . По значению показателя эксцесса $E = -0,84$ вариационный ряд относится к плосковершинному.

2.2. Теоретические распределения

Результаты измерений физических свойств горных пород осложнены погрешностями наблюдений, поэтому они носят случайный характер и обладают свойствами случайной величины. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, заранее неизвестное.

Если перечислить все возможные значения случайной величины и указать вероятности этих значений, то получится распределение случайной величины. Характеристикой непрерывной случайной величины является плотность вероятности с которой распределяется её значения в окрестности данной точки $f(x)$. Плотность распределения вероятностей называют дифференциальной функцией распределения или дифференциальным законом распределения. Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется дифференциальной кривой распределения.

Вероятность того, что случайная величина x примет значение, лежащее в границах от a до b , равна определённому интервалу в тех же пределах от плотности вероятности

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Геометрически эта вероятность выражается площадью криволинейной фигуры (рис.3).

Кроме дифференциальной функции распределения вероятностей часто используется кумулятивная функция распределения случайной величины, которая подсчитывается по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (10)$$

Кумулятивная функция непрерывной случайной величины харак-

характеризует вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше $X < x$.

Кумулятивная функция распределения называется также интегральной функцией или интегральным законом распределения. Она является универсальной характеристикой случайной величины. Кумулятивная функция монотонно возрастает в пределах $0 \leq F(x) \leq 1$. При $x \rightarrow -\infty$ она убывает до нуля, при $x \rightarrow +\infty$ стремится к единице (рис. 3).

Аналогично статистическим характеристикам при описании случайных величин вводятся их числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатель асимметрии и показатель эксцесса).

Математическое ожидание M_x непрерывной случайной величины определяется по формуле:

$$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (I1)$$

По смыслу математическое ожидание является мерой положения и эквивалентно среднему значению вариационного ряда.

Дисперсия $D(x)$ непрерывной случайной величины характеризует степень рассеяния отдельных значений от математического ожидания случайной величины и подсчитывается по формуле:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^2 f(x) dx \quad (I2)$$

Среднее квадратическое отклонение σ_x и коэффициент вариации V_x являются мерами рассеяния случайной величины около ее математического ожидания и определяются по формулам $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ и $V_x = \sigma_x / M_x$. Мерами рассеяния случайной величины являются также показатель асимметрии A_x и показатель эксцесса $\mathcal{E}_x$, которые по своему смыслу аналогичны показателям асимметрии и эксцесса вариационного ряда. Для непрерывной случайной величины:

$$A_x = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^3 f(x) dx \quad (I3)$$

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{\sigma_x^4} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^4 f(x) dx \quad (I4)$$

График дифференциальной и интегральной функции распределения непрерывной случайной величины

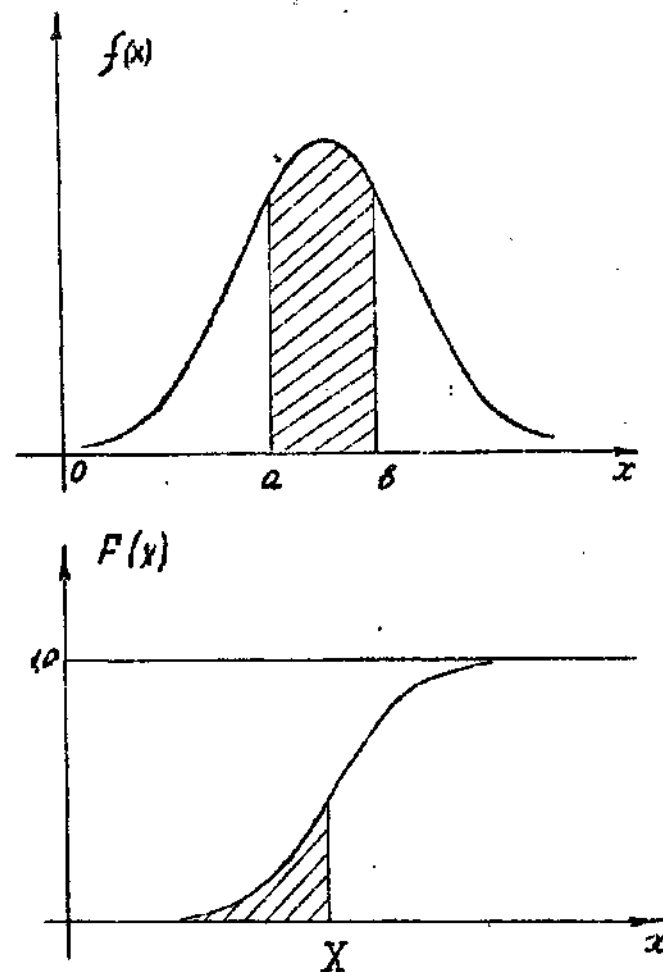


Рис. 3

Статистические характеристики вариационных рядов при достаточной статистике отсчетов стремятся, как к пределу, к числовым характеристикам случайных величин, распределение которых является предметом исследования теории вероятностей и носит закономерный характер.

Законы распределения случайной величины могут быть различными. Для непрерывных случайных величин, к которым относятся физические свойства горных пород, чаще всего встречаются нормальное (Гауссово) распределение и логарифмически нормальное распределение случайной величины.

Случайная величина x распределена нормально, если функция плотности вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - M_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (15)$$

где M_x - математическое ожидание, σ_x - среднее квадратическое отклонение (стандарт). Математическое ожидание соответствует среднему арифметическому отдельных измерений случайной величины:

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (16)$$

Стандарт подсчитывается по формуле:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2}{n}} \quad (17)$$

Функция нормального распределения характеризуется двумя параметрами M_x и σ_x и имеет колоколообразную форму. При всех значениях x функция $f(x)$ принимает только положительные значения. Ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. При $x = M_x$ нормальное распределение достигает максимума $f(x)_{\max} = 1/\sigma_x \sqrt{2\pi}$. Ветви кривой симметричны относительно прямой $x = M_x$, так как $x - M_x$ содержится в формуле (15) в квадрате. Параметр M_x не оказывает влияния на форму кривой $f(x)$, но сдвигает её вдоль оси x . Параметр σ_x определяет вытянутость или скатость кривой по оси x . Математическое ожидание величины x совпадает с модой и медианой $M_x = M_o = M_e$. Асимметрия и эксцесс нормального распределения равны нулю $A = 3 = 0$ (Рис 4).

Внешний вид дифференциальной функции нормального распределения

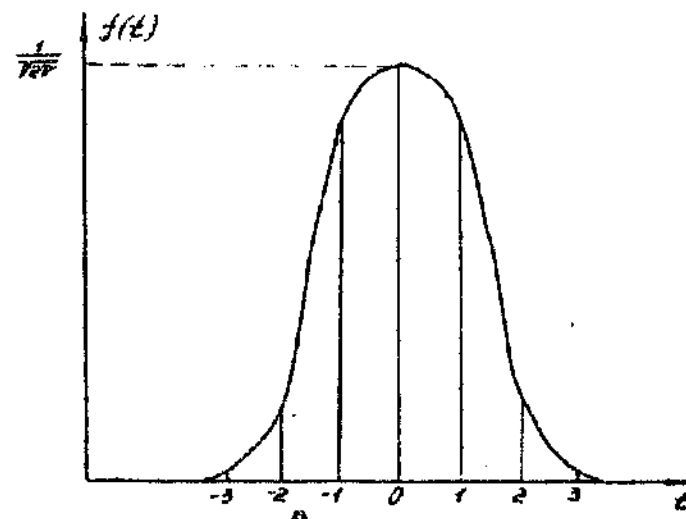
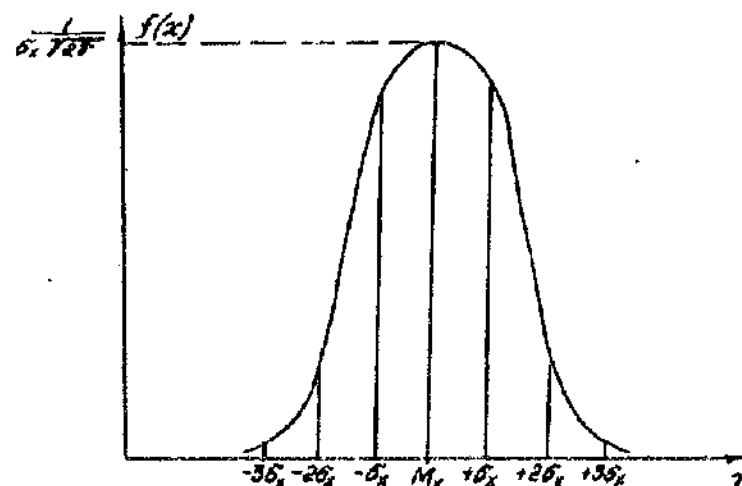


Рис. 4

Заменой переменных $t = \frac{x - M_x}{\sigma_x}$ любое нормальное распределение может быть приведено к простейшему виду

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (18)$$

Такое преобразование переменной называется нормированием случайной величины к её среднему квадратическому отклонению. При этом начало отсчета переносится в точку M_x , а в качестве единицы масштаба используется среднее квадратическое отклонение σ_x . Функция нормированного нормального распределения зависит от одного параметра, аргумента $t = (x - M_x)/\sigma_x$. Кривая простейшего нормального распределения симметрична относительно оси ординат. При $t=0$ она имеет максимум равный $f(t)_{max} = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0,4$. Площадь, ограниченная кривой $f(t)$ и осью t равна 0,683 в пределах от -1 до +1, 0,954 в пределах от -2 до +2, 0,997 в пределах от -3 до +3 и единица в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 4).

Кумулятивная функция нормального распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \quad (19)$$

Нормированная кумулятивная функция нормального распределения подсчитывается по формуле

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (20)$$

Функция табулирована [1, 2].

Непрерывная случайная величина x распределена логарифмически нормально, если логарифмы её значений распределены по закону Гаусса

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - M_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad (21)$$

где $y = \lg x$, M_y - математическое ожидание случайной величины y , σ_y - среднее квадратическое отклонение y от его математического ожидания (логарифмический стандарт), M - переводной коэффициент от натуральных логарифмов к десятичным.

Математическое ожидание $\lg x$ соответствует среднему гео-

метрическому самой случайной величиной x .

$$\text{antlg}(M_{\lg x}) = \tilde{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (22)$$

Логарифмический стандарт подсчитывается по формуле

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\lg x_i - M_{\lg x})^2}{n}} \quad (23)$$

Кривая логарифмически нормального распределения имеет положительную (правостороннюю) асимметрию, причем $M_0 < M_0 < M_x$ тем сильнее, чем больше σ_y . Эта кривая симметризуется с помощью логарифмического масштаба по оси абсцисс (рис. 5).

Кумулятивная функция логарифмически нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \int_0^{\lg x} e^{-\frac{(\lg x - M_{\lg x})^2}{2\sigma_y^2}} d \lg x \quad (24)$$

2.3. Сопоставление эмпирических и теоретических распределений

Распределение физических параметров однородного геологического объекта чаще всего подчиняется нормальному закону (например, плотность горной породы) или логнормальному закону (магнитная восприимчивость, удельное электрическое сопротивление, концентрация химических элементов). Для правильной обработки результатов измерений необходимо знать какому закону соответствует распределение данного физического свойства. В соответствии с законом распределения при построении вариационных кривых интервалы группирования физических свойств выбираются равными между собой в линейном масштабе при нормальном распределении. При построении полигонов и кумулянт всегда показывают точки, по которым они строятся.

Для сравнения распределений графики накопления частот удобно строить на вероятностном трафарете, который характеризуется вероятностной шкалой по оси ординат. На вероятностном трафарете нормальное распределение описывается прямой линией.

Совокупление результатов эксперимента в виде гистограммы и графика накопления частот с теоретическим нормальным распределением позволяет выявить отклонения.

Кривые плотности вероятностей логарифмически нормального распределения

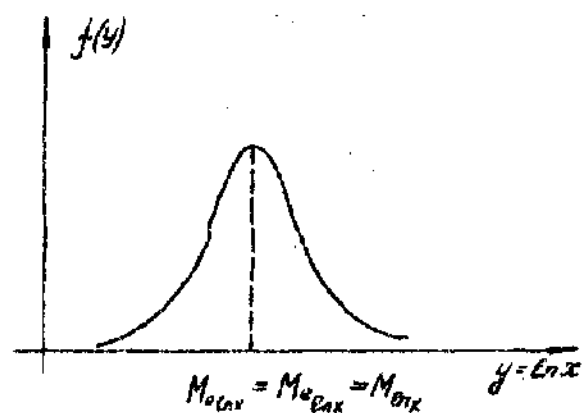
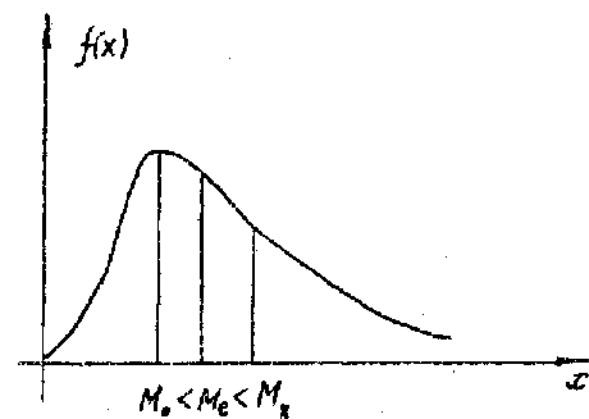


Рис. 5

Характер экспериментального (1) и теоретического нормального (2) распределений физического свойства X в виде гистограммы (а), графиков накопления частот в обычном масштабе (б) и на вероятностном бланке (в)

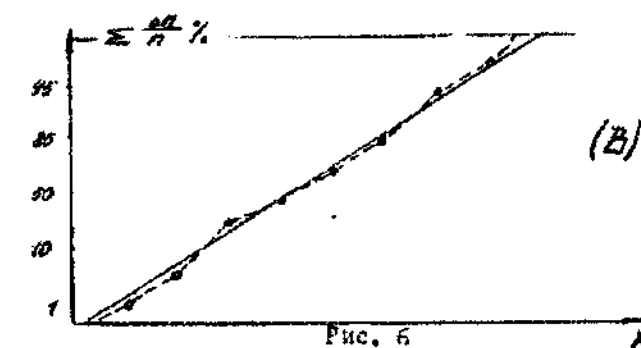
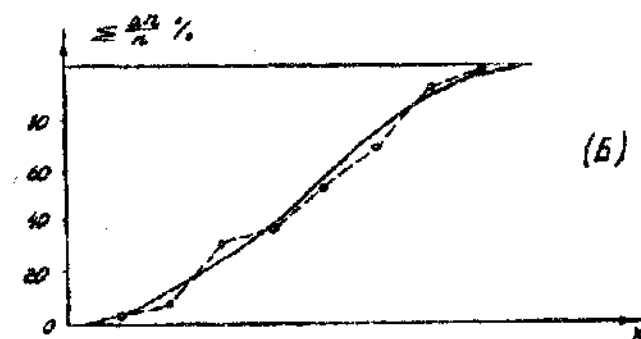
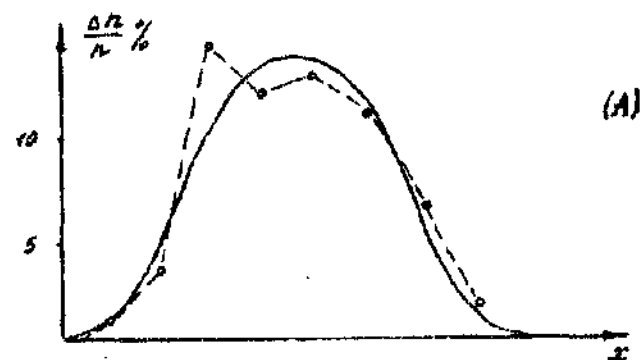


Рис. 6

Для проверки близости эмпирического и теоретического распределений используется критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона или А.Н. Колмогорова.

Критерий Пирсона основан на оценке статистической значимости расхождений эмпирических частот n_i вариационного ряда и частот n_i' соответствующего теоретического распределения, рис. 6, в. Разности $n_i - n_i'$ возводятся в квадрат и делятся на n_i откуда получают формулу критерия согласия χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i} \quad (25)$$

где χ^2 - найденное значение критерия Пирсона, k - число интервалов вариационного ряда.

Критерий Пирсона зависит от числа степеней свободы f и уровня значимости α . Число степеней свободы определяют по формуле

$$f = k - 1 \quad (26)$$

в которой k - количество наложенных связей при вычислении теоретических частот. Для нормального распределения количество наложенных связей равно двум, так как при расчете теоретических частот необходимо знать два параметра: математическое ожидание M_x и стандарт σ_x . Поэтому при оценке близости эмпирической кривой к нормальному распределению число степеней свободы определяется по формуле $f = k - 2$. Уровень значимости обычно задается в виде $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$. Зная α и f определяют теоретическое значение $\chi^2_{\alpha, f}$ для чего используют специальные таблицы / 1 /.

Найденное значение χ^2 сравнивают с табличным $\chi^2_{\alpha, f}$. Если $\chi^2 < \chi^2_{\alpha, f}$, то эмпирическое распределение не противоречит теоретическому, если $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, f}$, то наблюдается статистически значимое различие между эмпирическим распределением и теоретическим. Если гипотеза о нормальном распределении не подтверждается, то необходимо провести проверку исходных данных и выявить причины приходящие к нарушению нормального распределения.

Для проведения вычисления составляется специальная таблица 6. В качестве примера рассмотрим вариационный ряд распределения

таблица 6

Расчет исходных данных для определения критерия согласия χ^2

№ п/п	Интервалы содержания, %	X_i	n_i	...	$A_i = \bar{X} - X_i$	$\frac{A_i}{\sigma}$	$\varphi(t)$	$n_i' = k \varphi(t)$	$n_i - n_i'$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$
1	38-40	39	6	...	-4,12	1,73	0,0893	3,75	2,25	5,06
2	40-42	41	10	...	-2,12	0,89	0,2685	11,28	1,28	1,64
3	42-44	43	15	...	-0,12	0,05	0,3384	16,73	1,73	2,99
4	44-46	45	13	...	+1,88	0,80	0,2897	12,17	0,83	0,69
5	46-48	47	6	...	+3,88	1,63	0,1057	4,44	1,56	2,43
Σ	2	3	4	...	8	9	10	11	12	13
										14
Сумма										$\chi^2 = 2,29$

Примечание. $\bar{X} = 43,12\% Fe$, $\sigma = 2,38\% Fe$, $k = \frac{N \cdot x}{S} = \frac{50 \cdot 2}{2,38} = 42$, $f = 5 - 2 = 3$

содержания железа в окисных медноколчеданных рудах Гайского месторождения меди (таблица 4). Первые семь графов таблицы 6 совпадают с графами таблицы 4. Эти графы необходимы для нахождения среднего значения содержания железа $\bar{X} = 43,12 \%$ и стандарта $S = 2,38 \%$. Затем вычисляют для каждого интервала вариационного ряда отклонения Δ_i , значений середины интервалов X_i от среднего значения $\bar{X}$ $\Delta_i = X_i - \bar{X}$ (графа 8). Подсчитывают нормированное отклонение $z = \frac{\Delta_i}{S}$, где S — стандарт вариационного ряда (графа 9). Подсчитывается нормированная плотность вероятности нормального распределения $\varphi(z)$ без учета знака z (графа 10). Значения функции $\varphi(z)$ приведены в таблице 8. Подсчитывается переходный коэффициент K от функции $\varphi(z)$ к теоретическим частотам нормального распределения по формуле

$$K = \frac{N \Delta X}{S} \quad (.27)$$

где N — объем выборки, ΔX — ширина интервала группирования, S — стандарт. Вычисляются теоретические частоты n_i' нормального распределения $n_i' = K \varphi(z)$ (графа 11). Находятся отклонения эмпирических частот от теоретических $n_i - n_i'$ (графа 12), квадраты этих отклонений (графа 13) и частные от деления этих квадратов на n_i' (графа 14). Наблюдаемое значение критерия Пирсона находится как сумма значений четырнадцатой графы.

Найденное значение критерия Пирсона χ^2 сравнивается с теоретическим $\chi^2_{\alpha, f}$, приведенным в таблице 9. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $f = 5 - 2 = 3$ $\chi^2_{0,05, 3} = 7,82 > 2,26 = \chi^2$. Следовательно, вариационный ряд распределения содержания железа в рудах Гайского месторождения не противоречит нормальному закону. Вероятность случайного расхождения между теоретическим и статистическим распределением достаточно велика и можно считать правдоподобной гипотезу о нормальном распределении статистической совокупности.

Критерий согласия λ А.Н. Колмогорова основан на подсчете максимального значения модуля разности между графиком накопленных частот (кумулятой) вариационного ряда (рис. 6) и теоретической функцией распределения

$$D = \max |W - F(x)| \quad (.28)$$

W — кумулята вариационного ряда, $F(x)$ — нормированная кумулятивная функция нормального распределения (интеграл вероятности).

Значения кумулятивной функции нормального распределения подсчитываются по формуле

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (.29)$$

В таблице 10 приведены значения функции

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (.30)$$

Используя эту таблицу можно найти кумулятивную функцию нормального распределения по формулам

$$\begin{aligned} F(x) &= 0,5 + F'(x) \\ F(-x) &= 0,5 - F'(x) \end{aligned} \quad (.31)$$

Критерий согласия А.Н. Колмогорова определяется соотношением $\lambda = D\sqrt{N}$, где N — число независимых наблюдений (объем выборки). Найденное значение критерия λ_n сравнивается с теоретическим при уровне значимости $\alpha = 0,05$ $\lambda_{0,05} = 1,36$. Если найденное значение $\lambda_n < \lambda_{0,05}$, то вариационный ряд не противоречит нормальному распределению. Если $\lambda_n > \lambda_{0,05}$, то вариационный ряд не согласуется с нормальным распределением.

Для проведения вычислений составляется таблица 7.

Максимальное значение модуля разности между кумулятой вариационного ряда и нормированной кумулятивной функцией распределения в рассматриваемом случае равно $D = \max |W - F(x)| = 0,025$. При этом найденное значение критерия А.Н. Колмогорова равно

$\lambda_n = D\sqrt{N} = 0,025 \sqrt{59} = 0,18$. Поскольку найденное значение λ_n меньше критического для 5% -ного уровня значимости $\lambda_n < \lambda_{0,05}$ (1,36), то вариационный ряд распределения содержания железа в рудах Гайского месторождения не противоречит нормальному закону.

Способ построения кумулятивных кривых на вероятностном графике рис. 6, 8 имеет ряд преимуществ перед методом построения

Таблица 7

Расчет исходных данных для определения критерия согласия χ^2

Номер г/г	Интервалы содержания, % $a - b$	n_i	Частость n_i/n	Наполненная частость w	$z = \frac{b - \bar{x}}{S}$	$F(z)$	$ w - F(z) $
1	2	3	4	5	6	7	8
1	38-40	6	0,12	0,12	-1,31	0,095	0,025
2	40-42	10	0,20	0,32	-0,47	0,319	0,001
3	42-44	15	0,30	0,62	0,37	0,644	0,024
4	44-46	13	0,26	0,88	+1,21	0,889	0,007
5	46-48	6	0,12	1,00	+2,05	0,998	0,020
Сумма		50					

Примечание. a и b - соответственно начало и конец i -го интервала.
 $\bar{x} = 43,12\% Fe$; $S = 2,58\% Fe$ $N = 50$

вариационных кривых. Главными преимуществами являются: универсальность, пригодность для обработки нормального и логнормального распределений, простота аппроксимации семейства точек прямой линией, особенно в крайних частях распределения, возможность группировки в неравных интервалах группирования, возможность простой, но строгой оценки гипотезы нормальности (или логнормальности) с использованием критериев А.Н.Колмогорова.

ЗАДАНИЕ

по статистической обработке результатов измерения физических свойств горных пород.

1. Выполнить статистическую обработку результатов измерения физических свойств горных пород медноколчеданного месторождения Абей-Сая-Таш-Тау (Баймакский район ЯкуССР). Составить вариационные ряды значений электропроводности и плотности кварцевых альбитофинов, которые приведены в таблице II. Построить графики, вычислить статистические характеристики, подсчитать критерии согласия эмпирических вариационных рядов и теоретических распределений

2. Выполнить статистическую обработку результатов измерения физических свойств горных пород. Для этого построить графики, вычислить статистические характеристики и подсчитать критерии согласия эмпирических вариационных рядов с нормальным распределением физических параметров.

Варианты заданий по статистической обработке.

Вариант 1. Распределение плотности хромовой руды, г/см³.

Вариант 2. Распределение плотности оникитной никелевой руды, г/см³.

Вариант 3. Распределение влажности силикатной никелевой руды, %.

Таблица вариационных рядов

Таблица 8.

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
классы	частоты	классы	частоты	классы	частоты
3,0-3,1	1	1-1,2	1	10-20	1
3,1-3,2	2	1,2-1,4	2	20-30	8
3,2-3,3	7	1,4-1,6	3	30-40	29
3,3-3,4	11	1,6-1,8	8	40-50	23
3,4-3,5	19	1,8-2,0	33	50-60	10
3,5-3,6	16	2,0-2,2	14	60-70	3
3,6-3,7	8	2,2-2,4	10	70-80	2
3,7-3,8	7	2,4-2,6	4		
3,8-3,9	2	2,6-2,8	1		
	$\Sigma = 73$		$\Sigma = 76$		$\Sigma = 76$

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989	0,3989
0,1	0,3970	0,3970	0,3970	0,3970	0,3970	0,3970	0,3970	0,3970	0,3970
0,2	0,3943	0,3943	0,3943	0,3943	0,3943	0,3943	0,3943	0,3943	0,3943
0,3	0,3909	0,3909	0,3909	0,3909	0,3909	0,3909	0,3909	0,3909	0,3909
0,4	0,3868	0,3868	0,3868	0,3868	0,3868	0,3868	0,3868	0,3868	0,3868
0,5	0,3821	0,3821	0,3821	0,3821	0,3821	0,3821	0,3821	0,3821	0,3821
0,6	0,3769	0,3769	0,3769	0,3769	0,3769	0,3769	0,3769	0,3769	0,3769
0,7	0,3713	0,3713	0,3713	0,3713	0,3713	0,3713	0,3713	0,3713	0,3713
0,8	0,3654	0,3654	0,3654	0,3654	0,3654	0,3654	0,3654	0,3654	0,3654
0,9	0,3592	0,3592	0,3592	0,3592	0,3592	0,3592	0,3592	0,3592	0,3592
1,0	0,3528	0,3528	0,3528	0,3528	0,3528	0,3528	0,3528	0,3528	0,3528
1,1	0,3462	0,3462	0,3462	0,3462	0,3462	0,3462	0,3462	0,3462	0,3462
1,2	0,3394	0,3394	0,3394	0,3394	0,3394	0,3394	0,3394	0,3394	0,3394
1,3	0,3324	0,3324	0,3324	0,3324	0,3324	0,3324	0,3324	0,3324	0,3324
1,4	0,3252	0,3252	0,3252	0,3252	0,3252	0,3252	0,3252	0,3252	0,3252
1,5	0,3179	0,3179	0,3179	0,3179	0,3179	0,3179	0,3179	0,3179	0,3179
1,6	0,3104	0,3104	0,3104	0,3104	0,3104	0,3104	0,3104	0,3104	0,3104
1,7	0,3028	0,3028	0,3028	0,3028	0,3028	0,3028	0,3028	0,3028	0,3028
1,8	0,2950	0,2950	0,2950	0,2950	0,2950	0,2950	0,2950	0,2950	0,2950
1,9	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871	0,2871
2,0	0,2790	0,2790	0,2790	0,2790	0,2790	0,2790	0,2790	0,2790	0,2790
2,1	0,2708	0,2708	0,2708	0,2708	0,2708	0,2708	0,2708	0,2708	0,2708
2,2	0,2625	0,2625	0,2625	0,2625	0,2625	0,2625	0,2625	0,2625	0,2625
2,3	0,2541	0,2541	0,2541	0,2541	0,2541	0,2541	0,2541	0,2541	0,2541
2,4	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456
2,5	0,2370	0,2370	0,2370	0,2370	0,2370	0,2370	0,2370	0,2370	0,2370
2,6	0,2283	0,2283	0,2283	0,2283	0,2283	0,2283	0,2283	0,2283	0,2283
2,7	0,2195	0,2195	0,2195	0,2195	0,2195	0,2195	0,2195	0,2195	0,2195
2,8	0,2106	0,2106	0,2106	0,2106	0,2106	0,2106	0,2106	0,2106	0,2106
2,9	0,2016	0,2016	0,2016	0,2016	0,2016	0,2016	0,2016	0,2016	0,2016
3,0	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925	0,1925
3,1	0,1833	0,1833	0,1833	0,1833	0,1833	0,1833	0,1833	0,1833	0,1833
3,2	0,1740	0,1740	0,1740	0,1740	0,1740	0,1740	0,1740	0,1740	0,1740
3,3	0,1646	0,1646	0,1646	0,1646	0,1646	0,1646	0,1646	0,1646	0,1646
3,4	0,1552	0,1552	0,1552	0,1552	0,1552	0,1552	0,1552	0,1552	0,1552
3,5	0,1457	0,1457	0,1457	0,1457	0,1457	0,1457	0,1457	0,1457	0,1457
3,6	0,1362	0,1362	0,1362	0,1362	0,1362	0,1362	0,1362	0,1362	0,1362
3,7	0,1266	0,1266	0,1266	0,1266	0,1266	0,1266	0,1266	0,1266	0,1266
3,8	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170
3,9	0,1073	0,1073	0,1073	0,1073	0,1073	0,1073	0,1073	0,1073	0,1073
4,0	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976
4,1	0,0878	0,0878	0,0878	0,0878	0,0878	0,0878	0,0878	0,0878	0,0878
4,2	0,0780	0,0780	0,0780	0,0780	0,0780	0,0780	0,0780	0,0780	0,0780
4,3	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681
4,4	0,0582	0,0582	0,0582	0,0582	0,0582	0,0582	0,0582	0,0582	0,0582
4,5	0,0483	0,0483	0,0483	0,0483	0,0483	0,0483	0,0483	0,0483	0,0483
4,6	0,0384	0,0384	0,0384	0,0384	0,0384	0,0384	0,0384	0,0384	0,0384
4,7	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285
4,8	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186	0,0186
4,9	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087	0,0087

Таблица 10
Значения статистики χ^2 -квдрат ($f_{\alpha, f}$)

f	f^2	f	f^2	f	f^2
Уровень значимости $\alpha = 0,05$					
1	3,84	11	19,67	21	32,67
2	5,99	12	21,03	22	33,92
3	7,82	13	22,36	23	35,17
4	9,49	14	23,68	24	36,41
5	11,07	15	25,00	25	37,65
6	12,59	16	26,30	26	38,88
7	14,07	17	27,59	27	40,11
8	15,51	18	28,87	28	41,34
9	16,92	19	30,14	29	42,56
10	18,31	20	31,41	30	43,77
Уровень значимости $\alpha = 0,01$					
1	6,63	11	24,73	21	38,93
2	9,21	12	26,22	22	40,29
3	11,34	13	27,69	23	41,64
4	13,28	14	29,14	24	42,96
5	15,09	15	30,58	25	44,31
6	16,81	16	32,00	26	45,64
7	18,48	17	33,41	27	48,96
8	20,00	18	34,80	28	48,28
9	21,57	19	36,19	29	49,59
10	23,07	20	37,57	30	50,89

Таблица значений функции $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188
0,1	03583	04380	04776	05172	05567	05962	06358	06753	07148
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11027
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14804
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30786	31059
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37903	38107
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43057
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45253	45351
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46247
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48871
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49306	49324	49343
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49507
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	4999997								

Таблица 12

Физические свойства кварцевых альбифиризов кестороруденне
Абсф-Саб-Тайг-Тай

Номер	ρ (г/см ³)	σ (г/см ³)	Номер	ρ (г/см ³)	σ (г/см ³)
1	920	2,67	31	1100	2,74
2	970	2,69	32	1300	2,75
3	1200	2,63	33	700	2,73
4	1300	2,65	34	660	2,81
5	4200	2,61	35	1100	2,64
6	3700	2,64	36	1600	2,72
7	2200	2,71	37	810	2,80
8	3500	2,71	38	1300	2,94
9	5700	2,68	39	740	2,77
10	5800	2,69	40	920	2,90
11	6000	2,68	41	560	2,75
12	4800	2,71	42	940	2,75
13	3900	2,73	43	930	2,74
14	7600	2,71	44	1300	2,74
15	3900	2,58	45	450	2,59
16	840	2,72	46	2400	2,68
17	420	2,65	47	5800	2,67
18	660	2,74	48	1600	2,73
19	3000	2,95	49	5400	2,77
20	830	2,75	50	3200	2,68
21	1000	2,75	51	420	2,97
22	670	2,81	52	1600	2,89
23	1200	2,74	53	1600	2,83
24	1400	2,75	54	1500	2,71
25	750	2,91	55	400	2,72
26	2500	2,75	56	370	2,75
27	1900	2,74	57	2000	2,68
28	1000	2,75	58	480	2,73
29	1700	2,74	59	690	2,76
30	1000	2,75	60	2000	2,68

Номер	ρ (г/см ³)	σ (г/см ³)	Номер	ρ (г/см ³)	σ (г/см ³)
61	1300	2,77	91	350	2,91
62	1500	2,64	92	480	2,81
63	2500	2,78	93	190	2,77
64	9600	2,72	94	300	2,80
65	680	2,73	95	640	2,90
66	5000	2,80	96	160	2,74
67	500	2,75	97	800	2,70
68	1500	2,75	98	1200	2,70
69	890	2,76	99	1100	2,71
70	1000	2,70	100	1000	2,92
71	3500	2,72	101	750	2,70
72	2900	2,73	102	610	2,81
73	7700	2,58	103	930	2,73
74	1100	2,60	104	1100	2,74
75	1200	2,74	105	8500	2,72
76	5700	2,70	106	10000	2,73
77	580	2,66	107	10000	2,70
78	230	2,75	108	12000	2,60
79	240	2,70	109	2000	2,77
80	200	2,87	110	4100	2,66
81	200	2,84	111	8700	2,63
82	350	2,73	112	12000	2,78
83	1100	2,82	113	10000	2,67
84	220	2,73	114	8000	2,69
85	220	2,70	115	9000	2,56
86	91	2,71	116	9500	2,65
87	180	2,80	117	2200	2,72
88	370	2,66	118	9300	2,68
89	400	2,87	119	4200	2,70
90	17	2,86	120	7700	2,71

Номер	ρ (г/см ³)	σ (г/см ³)	Номер	ρ (г/см ³)	σ (г/см ³)
I21	3700	2,67	I51	610	2,60
I22	4400	2,66	I52	360	2,90
I23	6100	2,71	I53	940	2,82
I24	9300	2,65	I54	660	2,84
I25	1400	2,73	I55	900	2,75
I26	6400	2,67	I56	1000	2,83
I27	210	2,68	I57	930	2,93
I28	260	2,76	I58	150	2,89
I29	220	2,83	I59	470	2,81
I30	450	2,81	I60	630	2,84
I31	360	2,85	I61	770	2,82
I32	270	2,81	I62	690	2,79
I33	490	2,76	I63	300	2,83
I34	370	2,77	I64	63	2,86
I35	400	2,82	I65	290	2,85
I36	170	2,72	I66	310	2,84
I37	400	2,78	I67	380	2,80
I38	240	2,80	I68	5200	2,81
I39	210	2,81	I69	5500	2,80
I40	450	2,79	I70	3300	2,81
I41	310	2,84	I71	7100	2,69
I42	260	2,83	I72	4400	2,79
I43	260	2,81	I73	4800	2,71
I44	410	2,87	I74	4000	2,81
I45	400	2,86	I75	59	2,75
I46	270	2,84	I76	41	2,77
I47	980	2,83	I77	193	2,90
I48	820	2,83	I78	220	2,70
I49	630	2,86	I80	316	2,71
I50	720	2,83	I81	336	2,79
			I82	270	2,77
			I83	240	2,72

3. Работа № 3. ОЦЕНКА ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИВНОСТИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

При картировании горных пород геологическая эффективность геофизических методов может быть оценена по их информативности. Расчет информативности основан на оценке среднего количества информации о системе горных пород Y , содержащейся в сообщении о состоянии системы значений физического поля X . Для численных расчетов необходимо ознакомиться с некоторыми понятиями теории информации.

3.1. Теоретические предпосылки

Из курса теории информации известно понятие физической системы [1]. Для геофизиков-разведчиков физической системой может быть система значений физического поля, набор геологических объектов, система типов горных пород и т.д.

Пусть X физическая система, которая случайным образом может оказаться в том или ином состоянии, т.е. системе X присуща какая-то степень неопределенности. Мера неопределенности состояния физической системы будем называть энтропией. Сведения тем ценнее и содержательнее, чем больше была неопределенность системы X априори до их получения.

Степень неопределенности состояния системы определяется числом ее возможных состояний и вероятностью этих состояний. Например, монета может оказаться в одном из двух состояний "герб" или "решка". Кубик имеет шесть возможных состояний. Степень неопределенности состояний кубика больше, чем монеты. Априорные вероятности состояний монеты равны 0,5. Двигатель внутреннего сгорания тоже может оказаться в одном из двух состояний рабочем или нерабочем. Однако вероятность запущенного двигателя оказаться в рабочем состоянии равна 0,99. Степень неопределенности такой системы значительно меньше, чем у монеты. Таким образом, для описания неопределенности состояния системы необходимо знать количество возможных состояний и их вероятности.

В общем случае система X принимает состояния $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, где $p_i = P(X \sim x_i)$ - вероятность того, что система X примет состояние x_i . Символом $X \sim x_i$ будем обозначать событие, состоящее в том, что система X находится в состоянии x_i . При этом все состояния образуют полную группу попарно несовмест-

ных событий, которые в сумме дают достоверное событие

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Запишем данные о состоянии системы X в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

В верхней строке таблицы записаны возможные состояния системы, а в нижней строке вероятности возможных состояний. Эта таблица сходна с рядом распределения непрерывной случайной величины X с возможными значениями $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, имеющими вероятности $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Для того, чтобы свести состояние физической системы к случайной величине X , достаточно приписать каждому состоянию какое-то числовое значение, например, его номер.

Мерой априорной неопределенности состояния системы является энтропия. Энтропией системы называется сумма произведений вероятностей различных состояний системы на логарифмы этих вероятностей, взятая с обратным знаком

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_a p_i \quad (3.1)$$

Знак минус перед суммой поставлен для того, чтобы энтропия была положительной, т.к. $p_i < 1$ и $\log p_i < 0$. Основание логарифма может быть любым $a > 1$. Перемена основания равносильна умножению энтропии на постоянное число, а выбор основания равносильно выбору единицы измерения энтропии. Например, при $a = 10$ единицы называются десятичными, при $a = 2$ единицы называются двоичными.

Двоичные единицы хорошо совпадают с двоичной системой счисления ЭВМ. При выборе основания логарифма $a = 2$ за единицу измерения энтропии принимается энтропия физической системы X , которая имеет два равновероятных состояния, например, энтропия монеты, ячейки памяти на ферритах или энтропия одного разряда двоичного числа, которое может принимать значения 0 или 1.

Систему с двумя равновероятными состояниями можно представить в виде:

x_i	x_1	x_2
p_i	0,5	0,5

Энтропия такой системы равна единице, которая называется двоичной единицей энтропии

$$H(X) = - \left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) = 1$$

Двоичная единица энтропии называется битом, от слова *bit* (сокращения от *binary digit* - двоичный знак). Это энтропия одного разряда двоичного числа.

В качестве примера подсчитаем в двоичных единицах энтропию системы X , имеющую n равновероятных состояний:

X_1	X_1	X_2	...	X_n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

По формуле (3.1)

$$H(X) = -n \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = -\log_2 1 + \log_2 n = \log_2 n \quad (3.2)$$

т.е. энтропия такой системы равна двоичному логарифму числа состояний.

Энтропия физической системы, подсчитанная по формуле (3.1), удовлетворяет трем основным свойствам:

- она обращается в нуль, когда одно из состояний системы достоверно, а другие состояния невозможны;
- при заданном числе состояний n , она обращается в максимум, когда состояния равновероятны;
- обладает свойством аддитивности, т.е. при объединении независимых систем их энтропии складываются.

Таким образом, подсчет энтропии по формуле (3.1) правильно характеризует степень неопределенности физического состояния системы, что и обусловило выбор формулы (3.1) для количественных подсчетов энтропии.

Для подсчета энтропии удобно использовать функцию:

$$\eta(p) = -p \log_2 p,$$

значения которой табулированы от нуля до единицы через 0,01 и приведены в приложении (таблица 3.1). Используя функцию $\eta(p)$, выражение (3.1) можно переписать в виде

$$H(X) = \sum_{i=1}^n \eta(p_i) \quad (3.3)$$

Рассмотрим примеры количественных подсчетов энтропии геофизических систем.

Пример 1. Определить энтропию системы, состоящей из двух методов магниторазведки и гравиразведки, привлеченных к помощи геофизическому картированию участка работ. В результате съемки система геофизических измерений X может оказаться в одном из четырех возможных состояний: $X \sim X_1$ - оба измерения высокие, $X \sim X_2$ - магниторазведка представлена высокими значениями, а гравиразведка низкими, $X \sim X_3$ - магниторазведка представлена низкими значениями, а гравиразведка высокими, $X \sim X_4$ - оба измерения низкие. Вероятности этих состояний, соответственно равны 0,2, 0,3, 0,4, 0,1.

Решение. Запишем условие задачи в виде таблицы состояний

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

По формуле (3) находим:

$$H(X) = \sum_{i=1}^n \eta(p_i) = \eta(0,2) + \eta(0,3) + \eta(0,4) + \eta(0,1)$$

Используя таблицу (3.1) получаем

$$H(X) = 0,4644 + 0,5211 + 0,5288 + 0,3322 = 1,85 \text{ bit}$$

Пример 2. Определить максимальную возможную энтропию системы из трех геофизических методов (магниторазведка, гравиразведка и электроразведка), каждый из которых может быть в четырех возможных состояниях.

Решение. Общее число возможных состояний равно $n = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Максимальная возможная энтропия системы будет в том случае, когда все состояния системы равновероятны. При этом по формуле (3.2) находим $H(X) = \log_2 64 = 6 \text{ bit}$.

Под объединением двух систем X и Y с возможными состояниями $X_1, X_2, \dots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ понимается сложная система (X, Y) , состояние которой (X_i, Y_j) представляет собой набор всех возможных состояний X_i и Y_j . Число таких комбинаций будет $n \cdot m$.

Обозначим $P_{ij} = P(X \sim X_i, Y \sim Y_j)$ вероятностью того, что система (X, Y) будет в состоянии (X_i, Y_j) . Вероятности P_{ij} можно представить в виде таблицы.

y_j	x_i			
	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Энтропия сложной системы по определению равна

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log p_{ij} \quad (3.4)$$

Если X и Y независимы, то при объединении систем их энтропии складываются

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \quad (3.5)$$

Если объединяются зависимые системы, то энтропия объединенная меньше энтропий составных частей.

Обозначим $P(y_j/x_i)$ условную вероятность того, что система Y примет состояние y_j при условии, что система X находится в состоянии x_i

$$P(y_j/x_i) = P(Y \sim y_j / X \sim x_i)$$

Условную энтропию системы Y при условии, что система X находится в состоянии x_i , обозначим $H(Y/x_i)$.

По определению

$$H(Y/x_i) = - \sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i) \quad (3.6)$$

Условная энтропия системы Y зависит от того, какое состояние x_i приняла система X . Таких состояний n . Вероятность этих состояний известна. Система Y может принимать разные состояния с вероятностью p_i .

Полную (среднюю) энтропию системы Y обозначим $H(Y/X)$. По определению среднего

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^n p_i H(Y/x_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i) \quad (3.7)$$

Условная энтропия $H(Y/X)$ характеризует степень неопределенности системы Y , оставшейся после того, как состояние системы X полностью определится. Это полная условная энтропия системы Y . Порядок выполнения расчетов по формуле (3.7) проиллюстрируем на примере.

Пример. Имеются две системы Y и X , объединенные в одну (X, Y) , где Y - система типов горных пород, X - система интервалов значений физического поля.

Каротажные диаграммы измерений радиоактивности и электрического поля исследуемых типов горных пород приведены на рис. 3.1. Горные породы сложены глинами y_1 , песчаниками y_2 и известняками y_3 . По скважине выполняется каротаж ГК (гамма-каротаж), ПС (каротаж потенциалов собственной поляризации горных пород), КС (каротаж кажущегося сопротивления) и НГК (нейтронный гамма-каротаж).

Требуется оценить степень неопределенности состояния системы горных пород Y , оставшейся после того, как состояние системы интервалов значений физического поля X полностью определится, т.е. все измерения выполнены.

Для определенности в качестве системы X выберем интервалы значений радиоактивного поля. Глины имеют повышенное значение радиоактивности 20-30 мкР/ч и выше, песчаники средние значения 10-20 мкР/ч, известняки имеют низкую радиоактивность 0-10 мкР/ч. Учитывая сказанное, интервалы значений естественной радиоактивности горных пород выберем следующим образом: x_1 в пределах 20-30 мкР/ч и выше, x_2 в пределах 10-20 мкР/ч, x_3 в пределах 0-10 мкР/ч.

Решение. Посчитаем вероятности состояний $P_{ij} = P(X \sim x_i, Y \sim y_j)$ объединенной системы (X, Y) . Для этого воспользуемся геометрической трактовкой понятия вероятности. Геометрическая вероятность обобщает классическое определение вероятности, как частоты появления события при многократном воспроизведении эксперимента, на бесконечное множество исходов эксперимента.

К понятию геометрической вероятности приложим задачу о бросании точки в некоторую ограниченную область G , содержащую

в себе меньшую по размерам область g . Если событие A состоит в попадании точки в область g , то $P(A) = \text{mes } g / \text{mes } G$, где $\text{mes } g$ и $\text{mes } G$ - меры областей g и G ; Это могут быть отрезки длин, площади, объемы. В нашем случае это отрезки длин по оси скважины.

С учетом сказанного, вероятность встречи горной породы j -го типа y_j равна:

$$P(y_j) = L(y_j) / L, \quad (3.8)$$

вероятность наблюдения гамма-поля в i -ом интервале значений x_i равна

$$P(x_i) = L(x_i) / L \quad (3.9)$$

вероятность одновременной встречи горной породы j -го типа и наблюдения гамма-поля в i -ом интервале значений x_i равна

$$P(y_j, x_i) = L(y_j, x_i) / L \quad (3.10)$$

где $L(y_j)$ - суммарный интервал встречи скважины с породой j -го типа, $L(x_i)$ - суммарный интервал наблюдения гамма-поля в интервале значений x_i , L - полная длина профиля наблюдений.

Составим таблицу P_{ij} вероятностей состояния системы (X, Y)

y_j		X_i			$P_j = P(Y=y_j)$
		$X \sim x_i$			
		x_1 (0-10)	x_2 (10-20)	x_3 (20-30)	
$Y \sim y_j$	y_1 (глина)	0	0,02	0,43	0,45
	y_2 (песчаник)	0	$P_{ij}=0,39$	0,03	0,42
	y_3 (известняк)	0,12	0,01	0	0,13
$P_i = P(X \sim x_i)$		0,12	0,42	0,46	1,0

По теореме умножения вероятностей

$$p_i P(y_j/x_i) = P_{ij} \quad (3.11)$$

откуда следует, что условные вероятности того, что система типов горных пород Y примет состояние y_j при условии, что система интервалов радиоактивного поля X находится в состоянии x_i , будут равны

$$P(y_j/x_i) = P_{ij}/p_i \quad (3.12)$$

Помножив каждое значение таблицы P_{ij} на вероятности появления интервалов значений радиоактивного поля p_i , получим таблицу условных вероятностей $P(y_j/x_i)$, которая имеет вид:

y_j		X_i			
		$X \sim x_i$			
		x_1 (0-10)	x_2 (10-20)	x_3 (20-30)	
$Y \sim y_j$	y_1 (глина)	0	0,05	0,94	
	y_2 (песчаник)	0	$P(y_j/x_i)=0,93$	0,06	
	y_3 (известняк)	1	0,02	0	
	$P_i = P(X \sim x_i)$	0,42	0,42	0,46	

Подсчитаем условную энтропию системы типов горных пород Y , оставшуюся после того, как состояние системы интервалов значений радиоактивного поля X полностью определялось. Для этого используем формулу полной условной энтропии (3.7):

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i \gamma [P(y_j/x_i)] \quad (3.13)$$

где $p(p) = -p \log_2 p$ - табулированная функция, приведенная в таблице 3.1.

Воспользуемся таблицей 3.1, находим:

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= 0,12[\eta(0) + \eta(1) + \eta(2)] + 0,42[\eta(0,05) + \eta(0,93) + \\ &+ \eta(0,02)] + 0,46[\eta(0,94) + \eta(0,06) + \eta(0)] = 0,42[0,2161 + \\ &+ 0,0974 + 0,1128] + 0,46[0,0839 + 0,2436] = 0,328 \text{ bit} \end{aligned}$$

Таким образом, неопределенность системы Y , оставшаяся после того, как состояние системы X полностью определялось, характеризуется энтропией 0,328 bit.

Установим связь между энтропией и информацией. Любые сведения (информация) уменьшают неопределенность системы (энтропию). Поэтому, естественно, количество информации измерять уменьшением энтропии.

Если до получения информации (априори) энтропия была $H(X)$, а после получения сведений состояние системы полностью определилось, т.е. энтропия стала равной нулю, то

$$I_X = H(X) - 0 = H(X) \quad (3.14)$$

где I_X - информация о системе X .

Таким образом, количество информации, приобретаемое при полном выяснении состояния системы равно энтропии этой системы

$$I_X = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (3.15)$$

где $p_i = P(X \sim x_i)$ - вероятность того, что система находится в состоянии x_i .

Естественно, каждое слагаемое выражения (3.15) рассматривать как частную информацию I_{x_i} отдельного сообщения о том, что система X находится в состоянии x_i

$$I_{x_i} = - \log p_i \quad (3.16)$$

Тогда I_X будет средней (полной) информацией, получаемой от всех возможных отдельных сообщений с учетом их вероятностей. Если все возможные состояния априори равновероятны $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, то частная информация от отдельного сообщения $I_{x_i} = -\log p_i = \log n$ равна средней информации $I_X = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$.

Измеряя информацию в двоичных единицах, мы характеризуем ее числом ответов "да" или "нет".

Действительно, для того чтобы выяснить состояние системы X , которая может оказаться в одном из двух состояний

x_1	x_1	x_2
p_1	p_1	p_2

Надо задать вопрос. Находится ли система X в состоянии x_1 ? Ответ "да" или "нет" доставляет информацию, которая достигает своего максимального значения $I_X = 1$, когда оба состояния априори равновероятны $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ например, состояние системы "монета". Таким образом, максимальная информация, даваемая ответом "да" или "нет", равна одной двоичной единице. Если информации равна n bit, то она равносильна информации, даваемой n ответами "да" или "нет" на вопросы, поставленные таким образом, что ответы "да" или "нет" одинаково вероятны.

Информация равна разности энтропий до и после получения сообщения о результатах измерений физического поля. Подсчитаем информацию, которую доставляют результаты измерений физического поля при определении типов исследуемых горных пород на участке работ. Такой подсчет позволяет оценить геологическую информативность используемого геофизического метода или комплекса методов.

Сформулируем задачу следующим образом. Получены сведения о результатах наблюдений физического поля X , которое связано с системой типов горных пород на участке работ Y . Какую информацию о системе Y дает наблюдение системы X ?

Определим среднюю (полную) информацию о системе Y , содержащейся в системе X , как уменьшение энтропии системы Y в результате получения сведений о X

$$I_{X-Y} = H(Y) - H(Y/X) \quad (3.17)$$

где $H(Y)$ - априорная энтропия системы Y , $H(Y/X)$ - апостериорная (остаточная) энтропия системы Y , оставшаяся после получения сведений о системе X .

Заметим, что $I_{X \rightarrow Y} = I_{Y \rightarrow X}$. Из двух систем каждая содержит относительно другой одну и ту же информацию, т.е. $H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$.

Пример. Найти информации о системе типов горных пород Y , которая содержится в результатах измерений их естественной радиоактивности X .

Решение. Полная (средняя) информации о системе Y , содержащаяся в системе X , подсчитывается по формуле (3.17). Энтропия системы Y априори равна:

$$H(Y) = \sum_{j=1}^n p_j [p(y_j)]$$

где $q(p) = -p \log_2 p$ - табулированная функция, приведенная в таблице 3.1. Априорные геометрические вероятности состояний системы Y равны: для глины $p_1 = 0,45$, для песчанников $p_2 = 0,42$, для известняков $p_3 = 0,13$.

Воспользовавшись таблицей 3.1 находим априорную энтропию системы Y

$$H(Y) = q(0,45) + q(0,42) + q(0,13) = 0,5184 + 0,5266 + 0,3826 = 1,4266 \text{ в.и.т.}$$

Апостериорная энтропия системы Y , оставшаяся после выполнения измерений естественной радиоактивности горных пород, подсчитана ранее и равна $H(Y/X) = 0,328 \text{ в.и.т.}$

Таким образом, информация о системе Y , содержащаяся в системе X , равна

$$I_{X \rightarrow Y} = 1,4266 - 0,328 = 1,0986 \text{ в.и.т.}$$

Для сравнения геологической информативности различных геофизических методов удобно использовать понятие относительной информации, которая получается путем нормировки абсолютной информации к априорной энтропии системы типов горных пород Y . Относительная информация, доставляемая измерением естественной радиоактивности горных пород, в рассматриваемом случае равна

Каротажные диаграммы в терригенных отложениях

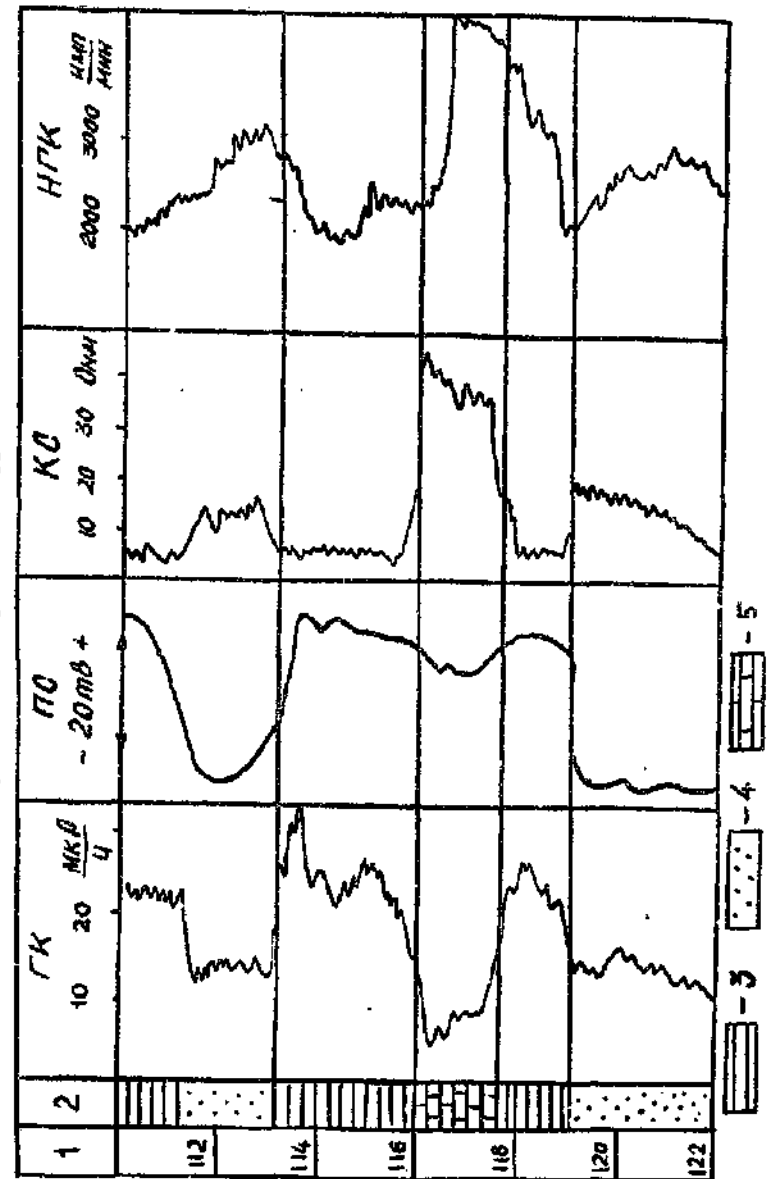


Рис. 3.1

$$I_{\gamma \rightarrow \gamma} / H(\gamma) = \frac{1,0986}{1,4266} \cdot 100\% = 77\%$$

Затем подсчитывается относительная геологическая информативность других геофизических методов. В комплексе геофизических методов для решения задачи литологического расчленения горных пород, изображенных на рис. 3.1, кроме гамма-каротажа /ГК/ входят методы электрического каротажа кажущегося сопротивления /КС/, потенциалов собственной поляризации горных пород /КС/ и нейтронный гамма-каротаж /НГК/. Если в результате расчета относительная информация, доставляемая измерениями КС, КС и НГК окажется выше, чем у метода ГК, то предпочтение отдается тому методу, у которого информативность при решении задачи литологического расчленения горных пород будет максимальной.

Удобство относительной информации заключается в том, что она не зависит от априорной энтропии системы горных пород.

3.2. Задание

Расчитать абсолютную и относительную геологическую информативность каротажа потенциалов собственной поляризации горных пород (КС), каротажа кажущегося сопротивления (КС) и нейтронного гамма-каротажа (НГК) при расчленении территориальных горных пород, приведенных на рис. 3.1. С этой целью определить априорную энтропию системы горных пород и апостериорную энтропию, возникающую после применения каждого метода в отдельности. Для определения вероятностей встречи горных пород j -го типа, вероятностей наблюдения физического поля в i -ом интервале значений и вероятностей одновременной встречи горных пород j -го типа и наблюдений физического поля в i -ом интервале значений использовать геометрическое определение вероятности. Сравнить относительные геологические информативности использованных геофизических методов и выделить наиболее информативный метод для решения задачи о литологическом расчленении горных пород по данным каротажа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Физматгиз, 1962. - 564 с.

Таблица №3.1

Таблица значений функции $\gamma(p) = -p \log_2 p$

p	$\gamma(p)$	p	$\gamma(p)$	p	$\gamma(p)$
0	0	0,34	0,5292	0,68	0,3784
0,01	0,0664	0,35	0,5301	0,69	0,3694
0,02	0,0664	0,36	0,5306	0,70	0,3602
0,03	0,1518	0,37	0,5307	0,71	0,3508
0,04	0,1858	0,38	0,5305	0,72	0,3412
0,05	0,2161	0,39	0,5298	0,73	0,3314
0,06	0,2435	0,40	0,5288	0,74	0,3215
0,07	0,2686	0,41	0,5274	0,75	0,3113
0,08	0,2915	0,42	0,5256	0,76	0,3009
0,09	0,3126	0,43	0,5236	0,77	0,2903
0,10	0,3322	0,44	0,5210	0,78	0,2796
0,11	0,3503	0,45	0,5184	0,79	0,2687
0,12	0,3671	0,46	0,5153	0,80	0,2575
0,13	0,3826	0,47	0,5120	0,81	0,2462
0,14	0,3971	0,48	0,5083	0,82	0,2348
0,15	0,4105	0,49	0,5043	0,83	0,2231
0,16	0,4230	0,50	0,5000	0,84	0,2112
0,17	0,4346	0,51	0,4954	0,85	0,1992
0,18	0,4453	0,52	0,4906	0,86	0,1871
0,19	0,4552	0,53	0,4854	0,87	0,1748
0,20	0,4644	0,54	0,4800	0,88	0,1623
0,21	0,4728	0,55	0,4744	0,89	0,1496
0,22	0,4806	0,56	0,4686	0,90	0,1368
0,23	0,4877	0,57	0,4623	0,91	0,1238
0,24	0,4941	0,58	0,4558	0,92	0,1107
0,25	0,5000	0,59	0,4491	0,93	0,0974
0,26	0,5053	0,60	0,4422	0,94	0,0839
0,27	0,5100	0,61	0,4350	0,95	0,0703
0,28	0,5142	0,62	0,4276	0,96	0,0565
0,29	0,5179	0,63	0,4199	0,97	0,0426
0,30	0,5211	0,64	0,4121	0,98	0,0286
0,31	0,5238	0,65	0,4040	0,99	0,0144
0,32	0,5260	0,66	0,3957	1,00	0
0,33	0,5276	0,67	0,3871		

4. Работа и 4. НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ, АНОМАЛИИ, ПОМЕХА

4.1. Общие сведения

При геологическом истолковании геофизических данных важное значение имеют понятия нормального поля, аномалии и помехи.

Под геофизической аномалией понимается отклонение физического поля от его нормальных значений. Нормальным полем считается геофизическое поле, обусловленное однородными по физическому параметру горными породами.

Нормальное поле может быть искусственным и естественным. Нормальное искусственное поле определяется полем заданного источника в однородной бесконечной среде. Нормальное естественное поле задается полем Земли.

В частности нормальное поле силы тяжести g_0 вычисляется по Ф.Гельмерту

$$g_0 = g_{\text{экв}} (1 - \beta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2 \sin^2 2\varphi) \quad (4.1)$$

где $g_{\text{экв}}$ — значение силы тяжести на экваторе,
 φ — широта местности,

β_1, β_2 — константы по Ф.Гельмерту.

Аномалией считается отклонение измеренного значения g от нормального $\Delta g = g - g_0$ с поправкой за высоту точки наблюдения (аномалия Фая) и за промежуточный слой (аномалия Буге).

Нормальное магнитное поле T_0 является суммарным магнитным полем диполя Земли T_d , материков T_m и космического пространства T_e

$$T_0 = T_d + T_m + T_e \quad (4.2)$$

Аномалией считается отклонение измеренного магнитного поля T от нормального $\Delta T = T - T_0$. В настоящее время составлены подробные карты нормального магнитного поля (изодинамы) и градиента нормального поля (изопоры).

Аномалии делятся на региональные и локальные. В качестве модели поля принимается аддитивная модель, т.е. результаты измерений в i -ой точке f_i имеют вид

$$f_i = a_{i, \text{рег}} + a_{i, \text{лок}} + n_{i, \text{пом}} \quad (4.3)$$

где $a_{i, \text{рег}}$ — региональная (фоновая) составляющая аномалии,

$a_{i, \text{лок}}$ — локальная аномалия,

$n_{i, \text{пом}}$ — помеха.

При разделении полей на региональную и локальную составляющие модель поля упрощается. При выделении региональной составляющей локальную составляющую относят к помехам

$$f_i = a_{i, \text{рег}} + n_{i, \text{пом}} \quad (4.4)$$

При выделении локальной составляющей региональная составляющая относится к помехам

$$f_i = a_{i, \text{лок}} + n_{i, \text{пом}} \quad (4.5)$$

При выделении аномалий действует принцип относительности. От крупных и мелких структурных единиц выделяются аномалии различных порядков. Поэтому часто используют понятие местного нормального поля, под которым понимают относительно спокойное поле, типичное в среднем для участка геофизической съемки.

При выделении локальных и региональных аномалий следует помнить, что локальная аномалия по своим линейным размерам в пять раз и более меньше изучаемой площади (профиля). Региональная аномалия по линейным размерам в пять раз и более превышает локальные аномалии.

По физико-геологической природе аномалии делятся на три группы. Одни связаны с месторождениями полезных ископаемых (рудные), другие с геологическими структурами, нарушениями, контактами (структурные), а третьи с глубинным строением Земли, земной коры (глубинные).

Под помехами понимаются факторы, осложняющие измерения геофизических полей и интерпретацию результатов измерений.

Помехи делятся на геологические, связанные с влиянием геологических неоднородностей или рельефом, и негеологические, связанные с вариацией геофизических полей во времени, слуддан-

ными токами и т.д.

Помехи бывают случайными и неслучайными. Случайные помехи обусловлены большим числом неконтролируемых факторов, действия каждого из которых незначительно. К неслучайным помехам относятся фоновые помехи и систематические расхождения.

Для выделения аномалий на фоне помех используются статистические критерии. Аномальными считаются точки, на которых амплитуда измеренного поля превышает уровень разрешенной изменчивости нормального поля. Уровень изменчивости характеризуется величиной общей дисперсии наблюдаемого поля $\mathcal{D}_0$, которая складывается из природной дисперсии $\mathcal{D}_2$, определяемой геологическими факторами, и дисперсии геофизической съемки $\mathcal{D}_c$, определяемой точностью измерений,

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_c \quad (4.6)$$

По определению $\mathcal{D} = \sigma^2$, где σ — среднеквадратическое отклонение случайной величины от ее математического ожидания. Поэтому выражение (4.6) можно переписать в виде

$$\sigma_0^2 = \sigma_2^2 + \sigma_c^2 \quad (4.7)$$

где σ_0 — общее среднеквадратическое отклонение наблюдаемого поля (стандарт),

σ_2 — среднеквадратическая погрешность геологических помех,

σ_c — среднеквадратическая погрешность съемки

Если фоновые значения поля распределены по нормальному закону, нижний аномальный предел A_{min} , ограничивающий уровень разрешенных колебаний нормального поля, определяется соотношением

$$A_{min} = A_p \pm 3\sigma_0 \quad (4.8)$$

где A_p — среднее арифметическое частных значений нормального фона,

σ_0 — общий стандарт наблюдаемого поля.

Если фоновые значения поля подчинены логнормальному

закону, нижний аномальный предел, ограничивающий уровень разрешенных колебаний нормального поля, определяется

$$A_{min} = A_p \varepsilon^{\pm 3} \quad (4.9)$$

где A_p — среднее геометрическое частных значений нормального поля,

ε — стандартный множитель.

Фоновые значения могут превышать предел A_{min} . Однако вероятность этого равна 0,0028, а вероятность закономерной эволюции 0,9972.

Требования к уровню A_{min} могут быть снижены в случае коррелируемости точек с повышенными значениями поля по m профилям или при наличии m высоких значений подряд по профилю. При этом

$$A_{min} = A_p \pm \frac{3\sigma_0}{\sqrt{m}} \quad (m \leq 9) \quad (4.10)$$

если фоновые значения распределены по нормальному закону и

$$A_{min} = A_p \varepsilon^{\pm 3/\sqrt{m}} \quad (m \leq 9) \quad (4.11)$$

если фоновые значения подчинены логнормальному закону.

В требованиях (4.10) и (4.11) $m \leq 9$, т.к. вероятность того, что 9 пикетов подряд в области нормального поля будут превышать нижний аномальный предел незначительна. По теореме умножения вероятностей $P(A_p > A_{min}) = 5 \cdot 10^{-8}$, т.е. высокие помехи одного знака, как независимые события маловероятны.

При планировании точности наблюдений следует руководствоваться следующими положениями.

Наблюдения с неоправданно высокой точностью ведут к увеличению затрат средств и времени, а недостаточная точность приводит к пропуску объекта.

Точность геофизической съемки определяется уровнем помех. При интенсивных помехах повышение точности измерений приводит к увеличению затрат труда и времени, но не дает желаемого ре-

зультата. Возрастает лишь фиктивная, кажущаяся, а не истинная точность.

Планирование точности наблюдений основано на трех параметрах: минимальной амплитуде аномалии, подлежащей обнаружению, или нижнем аномальном пределе A_{min} , среднеквадратической погрешности геофизической съемки σ_c , среднеквадратической погрешности геологических помех σ_2 .

Нижний аномальный предел определяется путем решения прямой задачи для заданной физико-геологической модели (ФГМ) объекта поисков при наиболее неблагоприятных условиях от минимальных промышленных рудных тел или из опыта предыдущих геофизических работ.

Среднеквадратическая погрешность съемки оценивается по результатам повторных наблюдений и подсчитывается по формуле:

$$\sigma_c = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_i^o - f_i^n)^2}{2n}} \quad (4.12)$$

где f_i^o и f_i^n — основной и повторный замеры,
 n — число парных замеров.

Повторные наблюдения выполняются в пределах нормальных или фоновых значений в количестве 3–5% от числа основных замеров.

Среднеквадратическая погрешность геологических помех определяется из соотношения (4.7)

$$\sigma_2^2 = \sigma_o^2 - \sigma_c^2 \quad (4.13)$$

Общая среднеквадратическая погрешность наблюдений определяется по разности N наблюденных значений f_i от их нормальных (фоновых) значений f_p по формуле

$$\sigma_o = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - f_p)^2}{N-1}} \quad (4.14)$$

где f_p — среднее арифметическое результатов измерений в нормальном поле, которое подсчитывается по формуле

$$f_p = \frac{\sum_{i=1}^N f_i}{N} \quad (4.15)$$

Обычно точность наблюдений, методику работ и аппаратуру подбирают так, чтобы расчетная аномалия от заданной физико-геологической модели объекта поисков превышала нижний аномальный предел

$$A \geq A_{min} \geq A_p \pm 3\sigma_o \quad (4.16)$$

При выполнении геофизических работ возможны два случая, определяемые уровнем геологических помех.

Если уровень помех геологического происхождения мал $\sigma_2^2 \gg \sigma_c^2$, то разрешающая способность геофизической съемки σ_c определяется аппаратурой и методикой работ. В этом случае целесообразно применять высокоточную прецизионную аппаратуру. Например, высокоточная магниторазведка $\sigma_c = 1 + 2n^{-1/2}$ позволяет разделять слабомagnetитные бокситы на фоне немагнитных известняков.

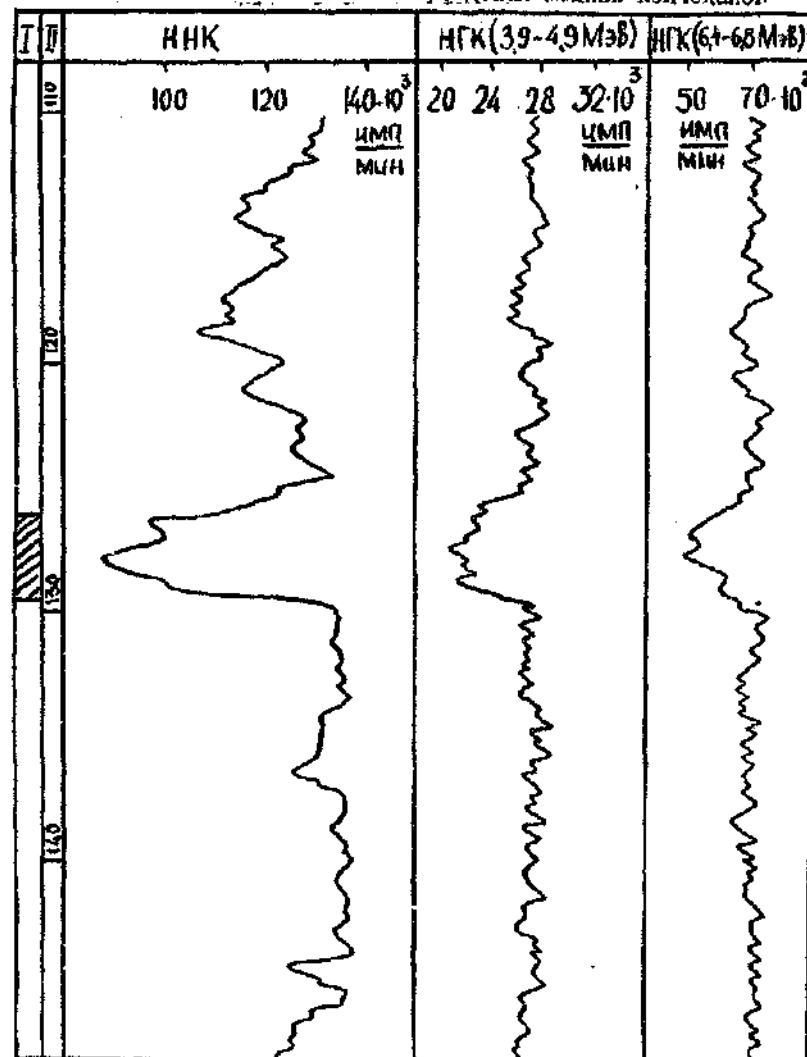
Если дисперсия геологических помех велика $\sigma_2^2 \gg \sigma_c^2$, то использовать прецизионную съемку не имеет смысла. Например, нецелесообразно применять высокоточную магниторазведку в горных районах из-за помех, связанных с рельефом местности.

В качестве примера рассмотрим результаты измерений в методе вызванных потенциалов. Путем измерений установлено, что $\sigma_c^2 = 0,12$, общая дисперсия наблюдений $\sigma_o^2 = 1,3$. При этом $\sigma_2^2 = \sigma_o^2 - \sigma_c^2 = 1,18$, т.е. дисперсия геологических помех велика $\sigma_2^2 \gg \sigma_c^2$ и повышение точности наблюдений нецелесообразно.

Для снижения дисперсии съемки σ_c^2 и дисперсии геологических помех σ_2^2 используются следующие приемы.

Дисперсия съемки зависит от порога чувствительности прибора, количества измерений на точке n с последующим усред-

Результаты ядерно-геофизических измерений по скв. 242А
Восточно-Семеновского месторождения медных колчеданов



□ - 1 ▨ - 2

1 - геологическая колонка; 11 - глубина, м; 1 - серицито-кварцевая порода, 2 - медно-цинковый колчедан

Рис. 4.1

нением $\overline{\sigma_c^2} = \frac{\sigma_c^2}{n}$, и мешающих факторов, таких как вариации поля во времени, градиентов поля, установки и центровки прибора на точку и других. Поэтому снижение дисперсии съемки достигается с помощью более точной аппаратуры, методики работ и введения поправок за влияние мешающих факторов. Влияние каждого фактора оценивается отдельно при неизменности влияния остальных факторов.

Уменьшение дисперсии геологических помех достигается статистической обработкой исходных данных. Обычное осреднение в пределах скважины из n точек позволяет уменьшать дисперсию геологических помех в n раз $\overline{\sigma_c^2} = \sigma_c^2/n$. Кроме того помехи могут коррелировать между собой и отличаться от аномалий по частотной характеристике (по спектру). Поэтому, помехи геологического происхождения можно уменьшить путем соответствующих приемов обработки исходных данных (корреляционный и спектральный анализ).

4.2. Содержание задания

По данным ядерно-геофизических измерений в скважине определить расположение вероятностей залежи медноколчеданной руды путем выделения аномальных значений регистрируемого нейтронного или гамма-поля. Полевые измерения проведены на Восточно-Семеновском месторождении медно-цинковых колчеданов нейтрон-нейтронным и нейтронным гамма-методом. Результаты измерений изображены в виде диаграмм нейтрон-нейтронного (ННК) и нейтронного гамма-каротажа (НГК) на рис.4.1 и приведены в табл.4.1.

Измерения нейтронного поля выполнены по тепловым нейтронам в интегральном варианте. Нейтронные гамма-измерения выполнены в спектрометрическом варианте в области захватного гамма-излучения породобразующих элементов (3,3-4,9 МэВ) и в области рудных элементов (6,4-6,8 МэВ).

Для исследования скважины методом НГК использовалась аппаратура СГСМ-2 и каротажный подъемник СК-1. Нейтронное поле создавалось с помощью Рс-Ве-источника мощностью $4 \cdot 10^7$ нейтрон/с. Методикой работ предусматривалось выполнение нейтрон-нейтронного каротажа по тепловым нейтронам. Для регистрации нейтронов использовался детектор типа ДДНМ.

Наличие шиха и кадмия в медных рудах месторождений приводит к тому, что рудные интервалы выделяются минимумами скорости счета тепловых нейтронов и захватного гамма-излучения. Содержание породобразующих элементов определялось по скорости счета захватного гамма-излучения в области аналитических линий кремния 3,9-4,9 МэВ. Для определения содержания меди использовалась область спектра 6,4-6,8 МэВ.

Таблица 4.1

РЕЗУЛЬТАТЫ

ЯДЕРНО-ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ОКРАЖИНЕ № 2428
ВОСТОЧНО-СЕМЕНОВСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ МЕДНО-ЦИНКОВЫХ КОМПЛЕКСОВ

Глубина м	Значения НКК, имп/мин		Значения НГК, (3,9-4,9 МэВ), имп/мин		Значения НГК (6,4-6,8 МэВ), имп/мин	
	основн.	повторн.	основн.	повторн.	основн.	повторн.
I11	129.10 ³	128.10 ³	27,0.10 ³	27,5.10 ³	73.10 ²	72.10 ²
I12	126	126	26,5	26,8	68	70
I13	119	120	27,2	27,0	70	71
I14	113	114	27,2	27,0	70	71
I15	120	119	27,6	27,5	76	74
I16	121	122	27,0	28,0	70	70
I17	114	114	26,0	27,0	73	72
I18	113	111	27,0	26,0	75	74
I19	109	111	28,0	27,0	68	70
I20	122	121	27,0	27,0	73	72
I21	115	115	27,8	27,6	70	70
I22	123	122	28,5	28,3	75	74
I23	126	125	26,0	26,0	70	72
I24	127	125	27,8	27,6	75	74
I25	121	121	26,0	26,0	70	70
I26	110	107	24,0	24,5	62	62
I27	97	98	22,0	22,5	52	50
I28	87	89	22,0	22,0	55	53
I29	100	102	22,0	21,5	60	61
I30	134	134	27,5	27,4	78	76

Продолжение таблицы 4.1

Глубина м	Значения НКК, имп/мин		Значения НГК (3,9-4,9 МэВ), имп/мин		Значения НГК (6,4-6,8 МэВ), имп/мин	
	основн.	повт.	основн.	повторн.	основн.	повторн.
I31	133.10 ³	134.10 ³	27,0.10 ³	27,0.10 ³	74.10 ²	74.10 ²
I32	134	134	26,7	26,5	72	72
I33	135	135	26,5	26,3	67	68
I34	133	134	28,0	27,5	68	68
I35	130		27,8		72	
I36	128		27,5		73	
I37	134		28,0		70	
I38	136		27,0		70	
I39	135		27,5		72	
I40	136		27,5		73	
I41	135		27,5		70	
I42	136		27,0		75	
I43	133		28,0		70	
I44	130		28,0		72	
I45	135		28,0		75	
I46	128		27,0		73	
I47	126		27,0		75	
I48	120		27,5		68	
I49	121		28,0		73	
I50	128		28,0		72	
I51	123		27,2		75	
I52	129		26,5		70	
I53	125		27,2		75	
I54	118.10 ³		26,5.10 ³		72.10 ²	

В таблице приведены результаты основных и повторных измерений нейтронного и гамма-поля при выполнении нейтрон-нейтронного и нейтронного гамма-каротажа. Результаты повторных наблюдений предназначены для оценки точности данных НКК и НГК.

Требуется выполнить следующее.
Скопировать на кальку диаграммы нейтрон-нейтронного каро-

така по тепловым нейтронам и нейтронного гамма-каротажа в интервалах энергий 3,9–4,9 МэВ и 6,4–6,8 МэВ. Оценить структуру поля. Выделить местное нормальное поле для каждой диаграммы каротажа, учитывая, что рудная залежь выделяется понижениями значения поля на диаграммах ННК и НГК.

Для каждой из наблюдаемых кривых вычислить значения общей среднеквадратической погрешности наблюдений σ_0 , среднеквадратической погрешности съемки σ_s и среднеквадратической погрешности геологических помех σ_g , используя для этого соотношения (4.14), (4.12), (4.13). Найти нижний аномальный предел для каждого вида ядерногеофизических измерений, используя для этого соотношение (4.8). Сопоставить уровень помех геологического происхождения с точностью геофизических наблюдений. Дать рекомендации о необходимой точности измерений в каждом методе и целесообразности увеличения точности для решения поставленной задачи.

По вычисленным значениям нижнего аномального предела выделить аномалии нейтронного и гамма-поля на диаграммах ННК и НГК. Дать геологическое истолкование выделенных аномалий.

5. Работа № 5. КОМПЛЕКСНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

5.1. Общие положения

Функция комплексного показателя (ФКП) применяется в тех случаях, когда объект исследований не создает устойчивых сигналов в полях разных методов, когда эти сигналы малы и сопоставимы с инструментальными и геологическими помехами. Способ предложен Г.С. Вахромеевым [1]. Суть способа заключается в составлении обобщенной функции комплексного показателя θ , которая представляет собой результат смещения сигналов разной природы, выраженных в цифровой форме.

Функция комплексного показателя служит для свертывания информации, полученной несколькими геофизическими методами, приведения наблюдений к уровню нормального поля, выделения слабых аномалий на фоне помех и разделения выявленных комплексных аномалий на перспективные и неперспективные.

Для определения ФКП необходимо предварительно перевести результаты всех частных методов в равнозначные безразмерные величины показателей контрастности γ . Показатель контрастности γ_j -го метода в i -ой точке подсчитывается по формуле

$$\gamma_{ji} = \frac{A_{ji} - \bar{A}_j}{S_j} \quad (5.1)$$

где γ_{ji} — показатель контрастности j -го метода в i -ой точке,

A_{ji} — значение j -го измеренного признака в i -ой точке профиля,

$\bar{A}_j$ — среднеарифметическое (фоновое) значение j -го признака,

S_j — стандарт j -го признака, который подсчитывается по формуле

$$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_{ji} - \bar{A}_j)^2}{n-1}} \quad (5.2)$$

где n — число измерений j -го признака по профилю.

Преимуществом использования понятия контрастности в виде (5.1), когда значения сигнала нормируются по стандарту, является то, что значения показателя контрастности δ_{ji} распределены по закону Гауса с нулевым средним $\overline{\delta_{ji}} = 0$ и единичным стандартом $S(\delta_{ji}) = 1$.

Вид функции комплексного показателя выбирается над эталонным объектом по материалам натурального моделирования или исходя из физико-геологической модели искомого объекта так, чтобы добиться максимальной контрастности аномалий ФКП над объектом при одновременном подавлении аномалий ФКП над объектами-помехами.

В зависимости от формы и знака аномалий отдельных методов различают четыре возможных случая.

1. Полезные сигналы частных методов имеют одинаковую форму и одинаковый знак. В этом случае

$$Q_i = \sum_{j=1}^P \delta_{ji} \quad (5.3)$$

где Q_i - значение функции комплексного показателя в точке i профиля,

P - количество частных методов,

δ_{ji} - значение j -го частного метода в i -ой точке профиля в безразмерных величинах показателя контрастности.

Примером для рассматриваемого случая могут служить аномалии Δg и ΔZ над вертикально намагниченным шаром с избыточной плотностью, которые имеют сходный вид.

2. Полезные сигналы частных методов имеют примерно одинаковую форму, но различны по знаку, тогда

$$Q_i = \sum_{j=1}^P |\delta_{ji}| \quad (5.4)$$

Примером может служить положительная гравитационная аномалия и отрицательная аномалия естественного поля над залежью медной руды.

3. Полезные аномалии имеют примерно одинаковую форму и знак, но для некоторых методов наличие сигнала - не положи-

Пример обработки сигналов при подсчете ФКП над обводненным контактом двух горных пород

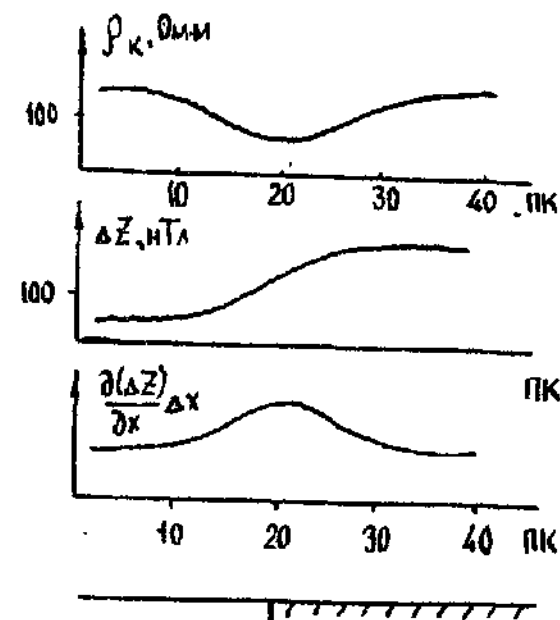


Рис. 5.1

тельный фактор контроля искомого объекта, а отрицательный. При этом

$$Q_i = \sum_{j=1}^p \gamma_{ji} - \sum_{k=1}^q \gamma_{ki} \quad (5.5)$$

где p и q - число методов, аномалии которых являются, соответственно, положительными и отрицательными факторами контроля искомого объекта. Например, при поисках сульфидных кобальто-пиритовых зон, положительные аномалии ΔZ является фактором неперспективности оруденения, так как связаны с дайками диабазов. Перевод магниторазведки в разряд негативных факторов подчеркивает комплексную аномалию над кобальто-пиритовыми рудами и одновременно подавляет неперспективные ореолы кобальта над дайками диабазов, которые в рассматриваемом случае относятся к разряду помех.

4. Полезные сигналы различны по форме и знаку. В этом случае один из сигналов обрабатывается так, чтобы в результате обработки его вид был сходен с видом других сигналов.

Например, контакт двух горных пород выделяется по данным электроразведки (СЭП) минимумом.

По данным магниторазведки (ΔZ) аномалия имеет вид ступени, рис.5.1. Для получения сходных кривых достаточно результаты магниторазведки графически продифференцировать

$$\Delta Z'_x = \frac{d(\Delta Z)}{dx} \Delta x$$

а затем перейти к расчету ФКП по формуле, соответствующей второму случаю (5.4)

$$Q = |\gamma_{\rho_x}| + |\gamma_{\Delta Z'_x}|$$

Другим примером может служить мощный намагнитченный пласт с избыточной плотностью. Он выделяется по данным гравитационной разведки положительной аномалией Δg .

По данным магниторазведки (ΔZ) аномалия имеет несимметричный вид с двумя экстремумами, рис.5.2. Для получения сходного вида кривых из аномалии ΔZ следует выделить кривую арктангенса и после этого перейти к подсчету ФКП по формуле (5.5).

Пример обработки сигналов при подсчете ФКП на мощном намагнитченном вертикально намагнитченном пластом с избыточной плотностью

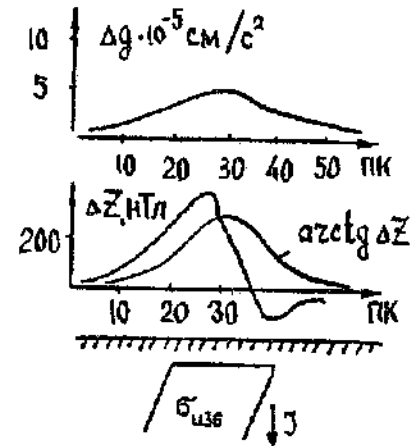
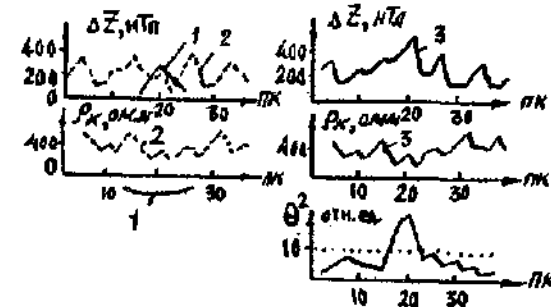


Рис. 5.2

Модельный пример использования ФКП в виде при поисках кимберлитовых тел в траппах /по Г.С.Рахмоеву/



1 - вид искомой аномалии от кимберлитовых тел, 2 - график помехи, 3 - суммарный сигнал аномалии и помехи

Рис. 5.3

$$Q = \chi_{ag} + \chi_{act} \chi_{az}$$

Учет знака полезных сигналов можно осуществить также с помощью ФКП, заданной в виде квадратов контрастностей отдельных методов. При этом подсчет ведется по формуле

$$Q_i^2 = \sum_{j=1}^m \chi_{ji}^2 - \sum_{k=1}^n \chi_{ki}^2 \quad (5.6)$$

где m и n — число методов, аномалии которых являются, соответственно, положительными и отрицательными факторами контроля искомого объекта.

Значимость результата оценивается по критерию χ^2 (или квадрат). При $Q^2 > \chi^2$ аномалия Q^2 значима.

Возможности методики задания ФКП в виде квадратов контрастностей отдельных методов рассмотрены на модельном примере, рис. 5.3, где решается задача поисков кимберлитовых тел в трапах по данным магниторазведки (ΔZ) и электроразведки (ρ_k). Согласно физико-геологической модели кимберлитовой трубки над ней складывается положительная аномалия ΔZ и пониженное значение ρ_k . В каждом из методов отмечается интенсивные помехи, превосходящие по величине аномалию от кимберлитовой трубки. На графике суммарного поля полезный сигнал визуально не обнаруживается. Расчет функции комплексного показателя в виде Q^2 дает в центральной части профиля отчетливую аномалию, надежно превышающую предельную величину χ^2 -критерия, который при 2%-ном уровне значимости равен $\chi^2_{0.02} = 9.8$. Аномалия ФКП в виде Q^2 позволяет локализовать местоположение кимберлитовой трубки.

Введем понятие показателя контрастности ФКП соотношением

$$\chi_{ai} = \frac{Q_i - Q_p}{S_Q} \quad (5.7)$$

где χ_{ai} — показатель контрастности ФКП в i -ой точке профиля, Q_i — значение ФКП в i -ой точке профиля, Q_p — фоновое значение ФКП, S_Q — стандарт ФКП.

Значимость аномалий ФКП оценивается по нижнему аномальному

пределу $Q_a = 3S_Q$, где S_Q — стандартное отклонение ФКП.

Для аномалий коррелированных по n точкам или профилям ($n \leq 9$) нижний аномальный предел можно снизить. Он будет равен $Q_a = 3\sqrt{m/n}$.

Преимуществом использования ФКП является то, что контрастность аномалий ФКП существенно превышает контрастность отдельных методов. Амплитуда аномалий ФКП складывается из амплитуд аномалий отдельных методов. Она пропорциональна числу методов m , т.е.

$Q \sim m$. Если значения сигналов отдельных методов представлены в виде показателей контрастности (5.1), то дисперсии их единичны, т.е. $D(\chi_1) = D(\chi_2) = D(\chi_3) = \dots D(\chi_m) = 1$, где m — число методов. При этом дисперсия ФКП для некоррелированных признаков будет равна

$$D_Q = \sum_{i=1}^m D(\chi_i) = m D(\chi_i) = m$$

Откуда следует

$$S_Q = \sqrt{m} \quad (5.8)$$

При подсчете ФКП показатели отдельных методов суммируются. Поскольку фоновые значения показателей контрастности отдельных методов равны нулю, то и сумма их равна нулю, т.е. фоновые значения ФКП равны нулю $Q_p = 0$.

При этом контрастность ФКП будет

$$\chi_Q = \frac{Q - Q_p}{S_Q} = \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \quad (5.9)$$

Таким образом, контрастность аномалии ФКП в $\sqrt{m}$ раз больше, чем контрастность отдельных методов.

Например, обнаружен комплексный рудный ореол, содержащий медь, цинк и свинец. В условных единицах фоновые содержания свинца, цинка и меди составляют $Pb_f = 10$, $Zn_f = 20$, $Cu_f = 50$. Максимальные концентрации, соответственно, равны $Pb_{max} = 15$,

$Zn_{max} = 30$, и $Cu_{max} = 65$. Стандартные отклонения примем равными единице $S_{Cu} = S_{Zn} = S_{Pb} = 1$. Подсчитаем контрастность суммарного ореола, если показатели контрастности отдельных измерений подсчитываются по формуле (5.1).

В рассматриваемом случае максимальные значения показателей контрастности отдельных измерений будут

$$\gamma_{ps} = \frac{15-10}{1} = 5$$

$$\gamma_{zn} = \frac{30-20}{1} = 10$$

$$\gamma_{cu} = \frac{65-50}{1} = 15$$

Фоновые значения контрастностей отдельных измерений равны нулю. Максимальное значение ФКП суммарного ореола будет равно

$$Q_{max} = \gamma_{ps} + \gamma_{zn} + \gamma_{cu} = 5 + 10 + 15 = 30$$

Фоновое значение ФКП суммарного ореола равно нулю $Q_p = 0$. Стандартное отклонение ФКП суммарного ореола будет

$$S_Q = \sqrt{S_{ps}^2 + S_{zn}^2 + S_{cu}^2} = \sqrt{3}$$

При этом контрастность ФКП суммарного ореола равна

$$\gamma_Q = \frac{Q_{max} - Q_p}{S_Q} = 17$$

Таким образом, контрастность аномалии ФКП превышает значения контрастностей отдельных методов.

Контрастность аномалии ФКП можно повысить трансформацией исходных данных, например, подавлением высокочастотной помехи путем сглаживания методом среднего арифметического.

Если n число точек в сглаживающем окне, то вычисление скользящего среднего уменьшает дисперсию фона в n раз.

Действительно, контрастность сглаженной аномалии будет

$$\tilde{\gamma}_{ji} = \frac{A_{ji} - \bar{A}_j}{\tilde{S}_j} \quad (5.11)$$

где $\tilde{\gamma}_{ji}$ - сглаженные значения контрастности j -го метода в i -ой точке,

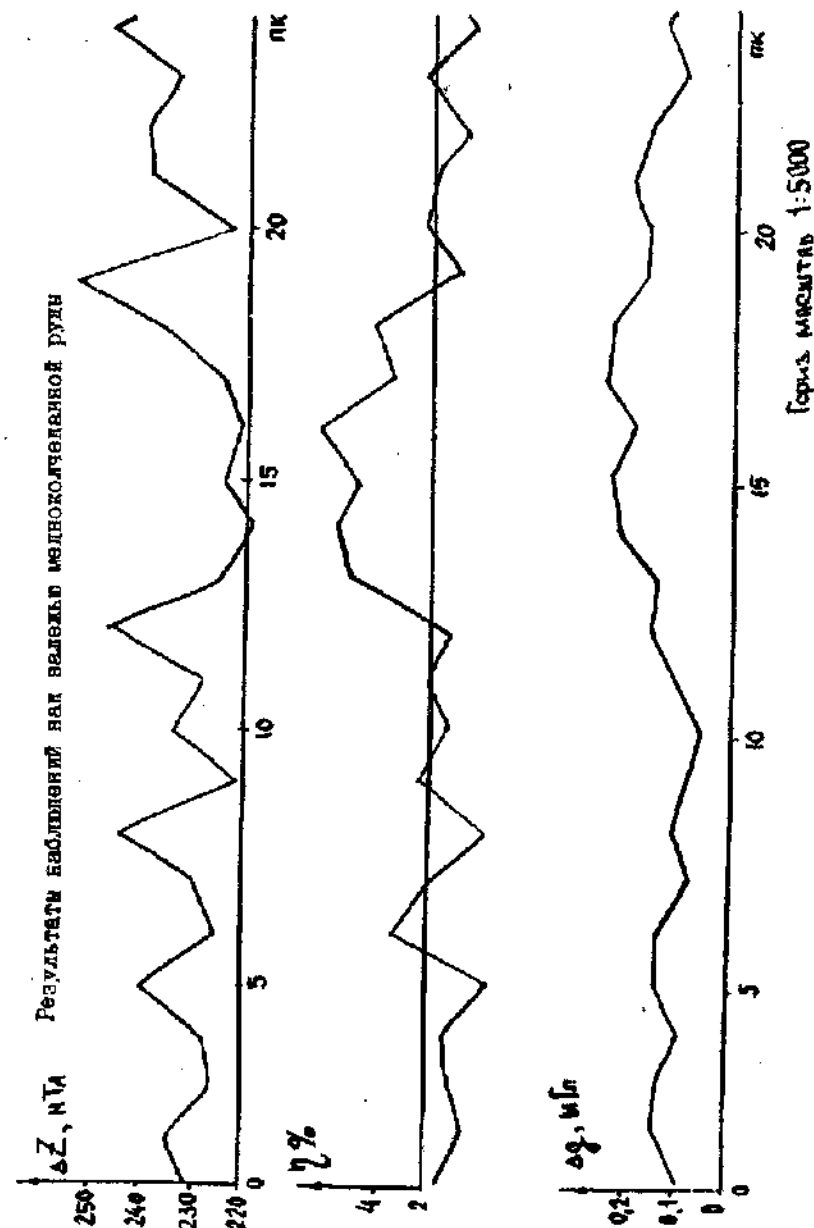


Рис. 5.4

$\tilde{S}_j$ - стандарт сглаженных значений контрастности, который связан со стандартом несглаженных значений соотношением

$$\tilde{S}_j = \frac{S_j}{\sqrt{n}} \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в (5.11) находим

$$\tilde{S}_{ji} = S_{ji} \sqrt{n} \quad (5.13)$$

Таким образом, простое сглаживание измеренных значений по точкам повышает контрастность аномалии в $\sqrt{n}$ раз.

ЗАДАНИЕ

Определить на профиле местоположение вероятной залежи медноколчеданной руды путем вычисления ФКП. Полевые измерения проводились тремя методами: магнитометрией, гравиметрией и электрометрией (метод вызванных потенциалов). Результаты наблюдений изображены в виде графиков на рис. 5.4 и приведены в таблице 5.1. Из значений Δg и ΔT предварительно была исключена региональная составляющая.

Требуется определить структуру ФКП, учитывая следующие физико-геологические условия. Залег медноколчеданной руды имеет форму круто-падающей линзы небольшой мощности до 15 метров в поперечнике, залегает внутри вулканогенной толщи и имеет первичный ореол сульфидной минерализации вдоль плоскости линзы. На участке залежи наблюдается повышение электропроводности и поляризуемости горных пород.

Руда представлена массивным медным и серным колчеданом. Минералы магнетита и пирротина в области залежи отсутствуют. Таким образом, зона рудной залежи характеризуется избыточной плотностью и относительным понижением магнитных свойств. Рудовмещающая толща покрыта рыхлыми осадками с переменной мощностью 10-20 м.

Необходимо вычислить значения показателя контрастности для каждого метода используя для этой цели данные таблицы 5.1. Оценить надежность выделения отдельных экстремумов наблюдаемых полей,

сравнив величины $(\Delta g_i - \Delta \bar{g})$, $(\Delta Z_i - \Delta \bar{Z})$ и $(\eta_i - \bar{\eta})$ со значениями тройного стандарта соответствующего метода. Экстремум можно считать надежной аномалией в том случае, если его амплитуда A превосходит величину тройного стандарта $A \geq 3\sigma$.

Определив структуру ФКП, подсчитать ее значения на всех пикетах профиля. Построить график ФКП по профилю. Указать на профиле положение предполагаемой залежи медноколчеданной руды, используя для оценки надежности выделения аномалии ФКП правило трех сигм. Для этого рассчитать и провести на профиле с результатами расчета ФКП линии тройного стандарта ФКП.

Таблица 5.1

Результаты наблюдения геофизических полей
по профилю на месторождении медных колчеданов

Пикеты	Значения $\Delta T, \text{ мГн}$		Значения $\Delta \rho, \text{ мГн}$		Значения $\varphi, \%$	
	варианты		варианты		варианты	
	1	2	1	2	1	2
1	10	21	1,2	2,1	5	7
2	13	23	0,7	1,8	2	5
3	5	16	1,4	1,5	4	6
4	7	15	0,5	1,4	5	8
5	20	30	2,2	3,1	0	3
6	5	15	1,7	2,6	10	12
7	10	20	1,0	2,0	6	8
8	25	35	1,7	2,7	1	3
9	2	12	1,9	2,8	6	9
10	15	25	1,2	2,1	5	8
11	8	18	2,2	3,2	6	9
12	14	24	2,3	3,4	9	12
13	5	15	2,7	3,7	15	17
14	0	10	4,2	5,2	16	18
15	4	14	3,6	4,6	14	16
16	1	11	5,7	6,6	17	21
17	4	14	3,2	4,2	10	13
18	15	25	1,9	2,9	12	15
19	20	30	2,1	3,0	4	7
20	2	12	1,7	2,7	7	10
21	20	30	1,5	2,5	6	9
22	20	30	1,7	2,7	3	6
23	13	23	0,7	1,6	7	10
24	26	36	2,1	3,2	2	5
25	5	16	1,6	2,6	6	8
26	16	26	1,0	1,1	2	6
27	16	25	1,7	2,5	5	7

ЛИТЕРАТУРА

1. Комплексная интерпретация геофизических данных: учебное пособие / Ю. Б. Давыдов, А. Г. Талалай, И. Е. Шинкарюк. Урал. госуд. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 128 с.
2. Сапожников В. М. Комплексирование геофизических методов: учебное пособие/ Уральский гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. – 76 с.
3. Никитин А.А., Хмелевской В.К. Комплексирование геофизических методов: учебник. – М.: ВНИИГеосистем, 2012. – 346 с. Гриф УМО.
4. Долгаль А. С. Комплексирование геофизических методов: учебное пособие. – Пермь: Пермский гос. нац. исслед. ун-т, 2012. – 167 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор
комплексу



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация

*Геофизические методы поиска и разведки месторождений
полезных ископаемых*

форма обучения: **очная, заочная**

Автор: Вандышева К. В., к.г.-м.н.

Одобрена на заседании кафедры

Геофизики

(название кафедры)

Зав.кафедрой

Талалай А. Г.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 01.09.2022

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией
факультета

Геологии и геофизики

(название факультета)

Председатель

Бондарев В.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 13.09.2022

(Дата)

Екатеринбург
2022

Для выполнения контрольной работы необходимо проработать материалы, полученные в процессе проведения производственной практики, рекомендуемую литературу.

ВВЕДЕНИЕ

Во введении должна быть дана четкая формулировка задания: местоположение участка работ (административная, географическая и геологическая привязка), цель, задачи для составления физико-геологической модели исследования, по данным полученным в процессе прохождения производственной практики.

1. ГЕОГРАФО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАЙОНА РАБОТ

Указывается административное положение района работ. Приводится краткая характеристика рельефа, климата, растительного и животного мира, населенности и путей сообщения, возможности найма рабочей силы на месте или их найма в другом районе. Приводится обзорная карта района работ. Этот раздел составляется по литературным источникам.

2. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЙОНА

Указывается геолого-структурное положение района работ.

Данный раздел содержит подразделы: “Стратиграфия”, “Магматизм”, “Тектоника”, “Геоморфология и гидрогеология”, “Полезные ископаемые”. В них приводятся краткие сведения по стратиграфии с указанием состава пород и их мощности, сведения об интрузивных образованиях, тектонике. Подробно описываются рудовмещающие комплексы, гидротермальные и метасоматические процессы, отмечаются рудоконтролирующие факторы. Особо отмечаются процессы метаморфизма, которые обуславливают изменение физических свойств горных пород.

В подразделе «Полезные ископаемые» приводится характеристика месторождений и рудопроявлений всех полезных ископаемых, встреченных в данном районе работ, отмечается их приуроченность к определенным комплексам пород, структурно-тектоническим и металлогеническим зонам. Выделяются полезные ископаемые, на которые площадь проектируемых работ является наиболее перспективной, и более подробно описываются месторождения, типичные для этого полезного ископаемого.

Необходимо уделить особое внимание анализу поверхностных рыхлых отложений, поскольку они могут иметь переменную мощность, неоднородны по составу и часто вносят существенные искажения в геофизические поля.

Текст необходимо иллюстрировать обзорной картой. На карте следует указать положение участка работ. Так же в данной главе необходимо привести один геологический разрез, который берется за основу составления Физико-геологической модели исследования.

3. ПЕТРОФИЗИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАЙОНА РАБОТ

На основании предоставленных с практики данных, геологических/геофизических отчетов прошлых лет, основываясь на справочные материалы дается характеристика по физическим свойствам горных пород.

Составляется упрощенная модель петрофизического разреза объекта исследований.

Физические свойства горных пород и полезных ископаемых района лучше описывать по их генетическим группам (осадочные, вулканогенно-осадочные, магматические и т. п.) Обязательно указываются источники, по которым приводятся данные по физическим свойствам, способы определения, представительность. Эти данные обычно приводят в виде таблицы. Если есть возможность, надо построить гистограммы или вариационные кривые и выполнить статистическую обработку. Наиболее наглядное представление о физических свойствах горных пород и полезных ископаемых дает диаграмма, которую надо обязательно построить. Для ее построения строится колонка, в которую включаются все горные породы района, и около нее – графики всех физических свойств.

Наличие различия физических свойств объекта и вмещающей среды еще не гарантирует возможности его обнаружения соответствующим геофизическим методом. Важное значение имеют и его геометрические параметры – форма, глубина от поверхности, элементы залегания, наличие мешающих геологических факторов (мощный слой приповерхностных рыхлых отложений, экраны из пород высокого сопротивления и т. д.). Поэтому для получения представления о возможностях геофизических методов необходимо дать комплексную **геолого-геофизическую характеристику объектов поисков**, включая их геометрические параметры, физические свойства и возможное влияние геологических помех.

4. ФИЗИКО ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной главе должна быть построена **физико-геологическая модель объекта поисков** и для нее выполнено решение прямой задачи. Для оценки глубинности методов в условиях района прямую задачу следует решить для нескольких положений эрозионного среза. Для характеристики возможностей методов хорошо также привести результаты наблюдений над реальными объектами. Желательно также построить физико-геологические модели для объектов, которые будут затруднять интерпретацию результатов (вызывать искажения, похожие на аномалии от объектов поисков или, маскировать их).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом раздела являются выводы о возможностях каждого геофизического метода в условиях района проектируемых работ

ЛИТЕРАТУРА

В данной главе описывается список использованной литературы при выполнении работы.

ОСОБЫЕ УКАЗАНИЯ

По мере написания контрольной работы расставляются ссылки на литературу (в квадратных скобках в конце цитируемого текста [1], что соответствует номеру в списке литературы)

В конце каждой главы должна быть дана самостоятельная оценка приведенной в главе информации.

В работе обязательно излагается цель проекта, задачи (введение), описывается теория, приведена характеристика, рассматриваются примеры, если нужно приво-

дится сравнительная характеристика, излагается самостоятельный анализ материала, сделаны выводы (заключение)

Работа выполняется шрифтом Times New Roman (12 ил 14) отступы с каждой стороны по 2 см, 1 см на “красную строку”.

Рисунки располагаются после упоминания в тексте (рис.1):



Рис.1. Название рисунка

Таблицы располагаются после упоминания в тексте (табл.2)

Таблица 2

Название таблицы

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЕ СТУДЕНТОВ**

ФИЛОСОФИЯ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Гладкова И. В., доцент, канд. филос. н.

Екатеринбург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	7
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	8
4	Методические рекомендации по написанию эссе	10
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	13
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	13
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	15
	Заключение	18
	Список использованных источников	19

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблеме;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельной работе, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить опiski, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тестов по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии ¹.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)².

¹ Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

² Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем времени на подготовку к устному опросу зависит от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3. Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласована с преподавателем и соответствовать теме занятия;
- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;
- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны соответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;
- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)
2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.
3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;
- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки). Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

<i>Критерии оценки доклада, сообщения</i>	<i>Количество баллов</i>
Содержательность, информационная насыщенность доклада	1
Наличие аргументов	1
Наличие выводов	1
Наличие презентации доклада	1
Владение профессиональной лексикой	1
Итого:	5

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов.

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершенно необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедиться в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

Источники. Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определяется жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогов обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия*, где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и

недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. *discussio* - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обуславливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,
- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;
- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;
- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;
- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии; определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным, выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы (проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неувоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала, кратко записав это на листе бумаги, создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неустойчивый физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточить внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее и ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное

обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или в учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства.

Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

- 1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;
- 2) добросовестное выполнение заданий;
- 3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;
- 4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;
- 5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;
- 6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;
- 7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://evolkov.net/case/case.study.html/>
2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml>
3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методическому
комплексу _____ С.А. Упоров

Автор: Железникова А.В.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Б1.О.02.02 ИСТОРИЯ РОССИИ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	6
ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ.....	10
САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ.....	18
ПОДГОТОВКА К ДОКЛАДУ.....	22
ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ.....	27
ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ.....	30
ПОДГОТОВКА ЭССЕ.....	31
ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ.....	34
ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ.....	36

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа в высшем учебном заведении – это часть учебного процесса, метод обучения, прием учебно-познавательной деятельности, комплексная целевая стандартизованная учебная деятельность с запланированными видом, типом, формами контроля.

Самостоятельная работа представляет собой плановую деятельность обучающихся по поручению и под методическим руководством преподавателя.

Целью самостоятельной работы студентов является закрепление тех знаний, которые они получили на аудиторных занятиях, а также способствование развитию у студентов творческих навыков, инициативы, умению организовать свое время.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- предполагает освоение курса дисциплины;
- помогает освоению навыков учебной и научной работы;
- способствует осознанию ответственности процесса познания;
- способствует углублению и пополнению знаний студентов, освоению ими навыков и умений;
- формирует интерес к познавательным действиям, освоению методов и приемов познавательного процесса,
- создает условия для творческой и научной деятельности обучающихся;
- способствует развитию у студентов таких личных качеств, как целеустремленность, заинтересованность, исследование нового.

Самостоятельная работа обучающегося выполняет следующие функции:

- развивающую (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);
- информационно-обучающую (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях, неподкрепленная самостоятельной работой, становится мало результативной);
- ориентирующую и стимулирующую (процессу обучения придается ускорение и мотивация);
- воспитательную (формируются и развиваются профессиональные качества бакалавра и гражданина);
- исследовательскую (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Организация самостоятельной работы студентов должна опираться на определенные требования, а, именно:

- сложность осваиваемых знаний должна соответствовать уровню развития студентов;
- стандартизация заданий в соответствии с логической системой курса дисциплины;
- объем задания должен соответствовать уровню студента;
- задания должны быть адаптированными к уровню студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов представляет собой, с одной стороны, совокупность теоретических и практических учебных заданий, которые должен выполнить студент в процессе обучения, объект его деятельности; с другой стороны – это способ деятельности студента по выполнению соответствующего теоретического или практического учебного задания.

Свое внешнее выражение содержание самостоятельной работы студентов находит во всех организационных формах аудиторной и внеаудиторной деятельности, в ходе самостоятельного выполнения различных заданий.

Функциональное предназначение самостоятельной работы студентов в процессе практических занятий по овладению специальными знаниями заключается в самостоятельном прочтении, просмотре, прослушивании, наблюдении, конспектировании, осмыслении, запоминании и воспроизведении определенной информации. Цель и планирование самостоятельной работы студента определяет преподаватель. Вся информация осуществляется на основе ее воспроизведения.

Так как самостоятельная работа тесно связана с учебным процессом, ее необходимо рассматривать в двух аспектах:

1. аудиторная самостоятельная работа – практические занятия;
2. внеаудиторная самостоятельная работа – подготовка к практическим занятиям, подготовка к устному опросу, участию в дискуссиях, решению практико-ориентированных задач и др.

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

Таким образом, самостоятельная работа студентов является важнейшей составной частью процесса обучения.

Методические указания по организации самостоятельной работы и задания для обучающихся по дисциплине *«История России»* обращают внимание студента на главное, существенное в изучаемой дисциплине, помогают выработать умение анализировать явления и факты, связывать теоретические положения с практикой, а также облегчают подготовку к выполнению *контрольной работы* и к сдаче *зачета*.

Настоящие методические указания позволят студентам самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю подготовки, опытом творческой и исследовательской деятельности, и направлены на формирование компетенций, предусмотренных учебным планом поданному профилю.

Видами самостоятельной работы обучающихся по дисциплине *«История России»* являются:

- повторение материала лекций;

- самостоятельное изучение тем курса (в т. ч. рассмотрение основных категорий дисциплины, работа с литературой);
- подготовка к практическим (семинарским) занятиям (в т. ч. подготовка доклада, подготовка к выполнению практико-ориентированного задания);
- подготовка к тестированию;
- подготовка эссе;
- подготовка контрольной работы;
- подготовка к зачету.

В методических указаниях представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Тема 1. Объект, предмет, основные понятия и методы исследования истории

- 1.История как наука. Сущность, формы, функции исторического знания.
- 2.Методы и источники изучения истории. Понятие и классификация исторического источника.
- 3.Концепции исторического процесса.
- 4.История России - неотъемлемая часть всемирной истории.
- 5.Историография отечественной истории.

Тема 2. Славянский этногенез. Образование государства у восточных славян

- 1.Этногенез восточных славян.
- 2.Славяне: расселение, занятия, общественное устройство, верования.
- 3.Предпосылки образования государственности у восточных славян
- 4.Норманнская и антинорманнская теории.
5. Первые князья династии Рюриковичей.
6. Русь и Византия. Первые договоры.

Тема 3. Киевская Русь

Социально-экономический и общественно-политический строй Киевской Руси (конец X – первая треть XII вв.).

- 2.Формирование системы государственного управления. Князья Игорь, Ольга, Святослав.
3. Князь Владимир. Крещение Руси и его значение.
4. Ярослав Мудрый. «Русская правда» - первый свод законов Древнерусского государства. Владимир Мономах.

Тема 4. Русь в эпоху феодальной раздробленности

- 1.Предпосылки распада Киевской Руси и начала феодальной раздробленности.
2. Политическая раздробленность на Руси
 - а) Новгородская боярская республика.
 - б) Владимиро-Суздальская Русь. Юрий Долгорукий, Андрей Боголюбский, Всеволод Большое Гнездо.
 - в) Галицко-Волынская земля. Ростислав Мстиславич, Даниил Романович.
 - г) Киевская земля в период феодальной раздробленности.
3. Последствия раздробленности.
4. Завоевательные походы монголов и нашествие Батыя на Русь.
5. Борьба с немецко-шведской агрессией. Деятельность А.Невского
6. Золотоордынское влияние на развитие средневековой Руси: оценки историков.

Тема 5. Складывание Московского государства в XIV - XVI вв. (XIV – начало XVI вв.)

1. Предпосылки и особенности процесса объединения русских земель.
2. Этапы политического объединения, их характеристика и содержание. Иван Калита, Дмитрий Донской.
3. Социально-экономическое развитие и формирование политических основ Российского государства при Иване III и Василии III.
4. Внутренняя и внешняя политика Ивана IV.
5. Культура Руси XIV – начала XVI вв.

Тема 6. Российское государство в XVII в.

1. Смутное время начала XVII в.
2. Развитие Российского государства при первых царях династии Романовых:
 - а) новые явления в социально-экономической жизни;
 - б) движение социального протеста;
 - в) государственно-общественное развитие;
 - г) реформы патриарха Никона и церковный раскол;
 - д) внешняя политика России в XVII в., присоединение новых территорий

Тема 7. Россия в XVIII в.

Реформы Петра I и начало российской модернизации

2. Внешняя политика Петра I. Рождение Российской империи.
3. «Эпоха дворцовых переворотов» (1725–1762 гг.).
4. Царствование Екатерины II:
 - а) социально-экономическое развитие России во 2-й половине XVIII в.;
 - б) «Просвещенный абсолютизм»: содержание, особенности, противоречия.
4. Российское государство в конце XVIII века. Павел I.
5. Внешняя политика России
6. Европеизация и секуляризация русской культуры: результаты и последствия.

Тема 8. Россия в XIX в.

1. Александр I и его преобразования. М.М. Сперанский.
2. Внешняя политика в первой четверти XIX в.
3. Внутренняя и внешняя политика императора Николая I.
4. Александр II. Отмена крепостного права и ее влияние на социально-экономическое развитие страны.
5. Либерально-буржуазные реформы 60–70-х гг. XIX в. и их последствия.
6. «Контрреформы» Александра III: корректировка реформаторского курса.
7. Общественно-политические движения (консервативный, либеральный, революционный лагерь).
8. Внешняя политика России во второй половине XIX в.

9. Культура и общественная жизнь России в XIX в.

Тема 11. Россия в XX в.

1. Проблемы российской модернизации на рубеже XIX –XX вв. Программа индустриализации С. Ю. Витте. Реформы П. А. Столыпина.
2. Революция 1905–1907 гг. в России. Становление многопартийности и парламентаризма в России.
3. Внешняя политика. Первая мировая война.
4. Февральская революция 1917 года. Октябрь 1917 года: приход к власти большевиков.
5. Гражданская война в России и первое десятилетие Советской власти
6. Новая экономическая политика: цели, направления, результаты.
7. Социально-экономические преобразования в СССР:
 - а) индустриализация страны: необходимость, источники, методы, итоги;
 - б) коллективизация сельского хозяйства;
 - в) формирование и упрочение административно-бюрократической системы.
8. Политическая система СССР в 1930-е годы. Завершение «культурной революции».
9. Образование СССР. Внешняя политика СССР в 1930-е гг.
10. СССР во Второй мировой войне
 - а) подготовка страны к войне, этапы войны;
 - б) крупнейшие сражения, партизанское движение, работа тыла;
 - в) СССР и союзники во Второй мировой войне;
 - г) итоги войны, цена Великой победы.
11. СССР в послевоенный период
12. Социально-экономическое и общественно-политическое развитие СССР в 1946–1953 гг.
13. Успехи и противоречия социально-экономического и внешне-политического развития страны под руководством Н. С. Хрущева
14. Советское общество в эпоху «застоя» в период руководства Л.И. Брежнева
15. СССР в середине 1980-1990 гг.
 - а) Экономические преобразования в стране. Политика «ускорения». «Перестройка» в СССР.
 - б) Концепция «Нового политического мышления» и ее претворение в жизнь.
 - в) Реформирование политической системы. Распад СССР.

Тема 17. Россия и мир в начале XXI в.

1. Геополитические последствия распада СССР. Провозглашение суверенитета Российской Федерации.
2. Формирование новой государственности. Конституция 1993 г.
3. Социально-экономические преобразования. Рыночная модернизация страны.

4. Внешнеполитическая деятельность в условиях новой геополитической ситуации. Россия и мир на рубеже XX– XXI.

ОСНОВНЫЕ КАТЕГОРИИ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Объект, предмет, основные понятия и методы исследования истории

История
Исторический факт
Исторический источник
Интерпретация
Этнос
Менталитет
Государство
Цивилизация
Формация
Классы
Прогресс
Регресс
Общественно-экономическая формация
Геополитика

Тема 2. Славянский этногенез. Образование государства у восточных славян

Великое переселение народов
Этногенез
Военная демократия
Язычество
Полюдь
Повоз
Погосты и уроки
Феодализм
Варяги
Верьвь
Вече
Племенной союз
Государство
Князь
Русь
Волхвы
Анты и венеды
Отроки
Смерды
Закупы
Рядовичи
Холопы

Тема 3. Киевская Русь

«Русская правда»

Вотчина

Боярская дума

Децентрализация

Уделы

Централизация

Поместье

Воевода

Ремесло

Феодализм

Феодальные отношения

Усложнение социальной структуры

Культура народная, культура религиозная

Фольклор

Храм

Икона фреска

Летописание

Эволюция государственности

Хазары, половцы, печенеги

Тема 4. Русь в эпоху феодальной раздробленности

Великий князь

Княжеский двор

Дружина

Междоусобные войны

Феодальная раздробленность

Феодальные центры

Боярская республика

Посадник

Тысяцкий

Сепаратизм

Последствия раздробленности

Держава Чингисхана

Золотая Орда

Монголо-татарское нашествие

Баскак

Выход

Подушная подать

Монголо-татарское иго

Ярлык

Проблема взаимовлияния

Вторжения с северо-запада

Ливонский орден

Рыцари

Тема 5. Складывание Московского государства в XIV - XVI вв. (XIV – начало XVI вв.)

Централизация
Приказы
Поместье
Дворяне
Местничество
Кормление
Крепостное право
Боярская дума
Натуральное хозяйство
Судебник
Государев дворец
Государева казна
Государственные символы
«Москва – третий Рим»
Сословно-представительная монархия
Земский собор
Митрополит
Крепостное право
Венчание на царство
Избранная рада
Реформа
Приказы
Стрелецкое войско
Стоглав
Опричина
Губные избы
Династический кризис

Тема 6. Российское государство в XVII в.

Смутное время
Интервенция
Крестьянская война
Семибоярщина
Самозванство
Народное ополчение
Сословно-представительная монархия
Патриарх
«Бунташный век»
Тягло
Урочные и заповедные лета
Мануфактуры
Юридическое закрепощение крестьян
Личная зависимость

Внеэкономическая эксплуатация
Стрельцы
Казаки
Полки нового строя
Раскол в Русской православной церкви
Старообрядчество
Ярмарка
Абсолютная монархия

Тема 7. Россия в XVIII в.

Абсолютизм
Империя
Регулярная армия
Синод
Сенат
Министерства
Коллегии
«Великое посольство»
Подушная подать
Табель о рангах
Рекруты
Ассамблеи
Кунсткамера
Протекционизм
Меркантилизм
Государственная монополия
Дворцовые перевороты
Гвардия
Верховный Тайный совет
Кондиции
«Бироновщина»
Просвещенный абсолютизм
Уложенная комиссия
Жалованная грамота
Приписные крестьяне
Обер-прокурор
Господствующее сословие
Податные сословия
Крестьянская война

Тема 8. Россия в XIX в.

Либеральные реформы
Конституционализм
Негласный комитет
Государственный Совет

Отечественная война
Конституция
Монархия
Крестьянский вопрос
Либерализм
Аракчеевщина
Реакция
Консерватизм
Общественное движение
Декабристы
Западники
Славянофилы
Теория «официальной народности»
Восточный вопрос
Бюрократизация
Кодификация
Финансовая реформа Е.Ф. Канкрин
Буржуазия
Капитализм
Рабочий класс
Промышленный переворот
Крестьянская реформа
Выкупные платежи
Временно-обязанные крестьяне
Уставные грамоты
Крестьянская община
Народничество, радикализм
Рабочее движение
Марксизм
Социал-демократия
Контрреформы
Легитимность
Выкупная сделка
Мировой суд
Земство
Всесословная воинская повинность
Буржуазия, пролетариат
Индустриализация и модернизация
Союз трех императоров

Тема 9. Россия в XX веке.

Монополия
Промышленный подъем
Депрессия
Модернизация

Революция
Манифест
Конституционная монархия
Политическая партия
Государственная Дума
Прогрессивный блок
Революционные партии
Антанта
Тройственный союз
Аграрная реформа
Отруб, хутор
Советы
Большевики, меньшевики
Временное правительство
Республика
Двоевластие
Учредительное собрание
Первая Мировая война

Совет народных комиссаров
Красная Армия
Белое движение
Гражданская война
Сепаратный мирный договор
Иностранная интервенция
Мировая революция
Декреты
Военный коммунизм
Продразверстка
Авторитаризм
Тоталитаризм
Коминтерн
Новая экономическая политика
Продналог
Индустриализация
Коллективизация
Культурная революция
«Мюнхенский сговор»
Лига Наций
Коллективная безопасность
Вторая Мировая война
Пакт о ненападении

Государственный Комитет обороны, Ставка Верховного
главнокомандования
Эвакуация

Антигитлеровская коалиция
Второй фронт
Коренной перелом
Партизанское движение, подпольное движение
Сопротивление
Фашизм, японский милитаризм
Ленд-лиз
Капитуляция
ООН
НАТО, ОВД
Репрессии
Либерализация политического режима
Десталинизация
Денежная реформа
Мировая социалистическая система
«Оттепель»
ГУЛАГ
Реабилитация
«Холодная война»
Совхоз
Целина
Мелиорация
Спутник
Освоение космоса
Паритет
Правозащитное движение
Диссиденты
Развитой социализм
Герантократия
Разрядка
«Теневая экономика»
Концепция развитого социализма
Разрядка международной напряженности
Стабильность кадров
Реформа хозяйственного механизма
Экстенсивный путь развития
Страны социалистической ориентации
Перестройка
Гласность
«Новое политическое мышление»
Плюрализм
СНГ
Приватизация
Прибыль и рентабельность
Госприемка

«Шоковая терапия»
Ваучер
Распад СССР
Многопартийность
Возрождение парламентаризма
Рыночная экономика
Борьба с экстремизмом и терроризмом
Дефолт
Стабилизация
Финансовый кризис
Содружество Независимых государств

Тема 17. Россия и мир в начале XXI в.

Правовое государство
Гражданское общество
Рыночная экономика
Дефолт
Вертикаль власти
Олигархи
Глобализация
Совет Федерации
Государственная Дума
Совет Европы
ВТО

САМООРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С ЛИТЕРАТУРОЙ

Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка рекомендуемой литературы к дисциплине. При работе с книгой необходимо научиться правильно ее читать, вести записи. Самостоятельная работа с учебными и научными изданиями профессиональной и общекультурной тематики – это важнейшее условие формирования научного способа познания.

Основные приемы работы с литературой можно свести к следующим:

- составить перечень книг, с которыми следует познакомиться;
- перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и выпускных квалификационных работ (ВКР), а что выходит за рамки официальной учебной деятельности, и расширяет общую культуру);
- обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и выпускных квалификационных работ это позволит экономить время);
- определить, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть;
- при составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и руководителями ВКР, которые помогут сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время;
- все прочитанные монографии, учебники и научные статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц);
- если книга – собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора;
- следует выработать способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать). Таким образом, чтение текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации.

От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Грамотная работа с книгой, особенно если речь идет о научной литературе, предполагает соблюдение ряда правил, для овладения которыми необходимо настойчиво учиться. Это серьёзный, кропотливый труд. Прежде всего, при такой работе невозможен формальный, поверхностный подход. Не

механическое заучивание, не простое накопление цитат, выдержек, а сознательное усвоение прочитанного, осмысление его, стремление дойти до сути – вот главное правило. Другое правило – соблюдение при работе над книгой определенной последовательности. Вначале следует ознакомиться с оглавлением, содержанием предисловия или введения. Это дает общую ориентировку, представление о структуре и вопросах, которые рассматриваются в книге.

Следующий этап – чтение. Первый раз целесообразно прочитать книгу с начала до конца, чтобы получить о ней цельное представление. При повторном чтении происходит постепенное глубокое осмысление каждой главы, критического материала и позитивного изложения; выделение основных идей, системы аргументов, наиболее ярких примеров и т.д. Непременным правилом чтения должно быть выяснение незнакомых слов, терминов, выражений, неизвестных имен, названий. Студентам с этой целью рекомендуется заводить специальные тетради или блокноты. Важная роль в связи с этим принадлежит библиографической подготовке студентов. Она включает в себя умение активно, быстро пользоваться научным аппаратом книги, справочными изданиями, каталогами, умение вести поиск необходимой информации, обрабатывать и систематизировать ее.

Выделяют четыре основные установки в чтении текста:

- информационно-поисковая (задача – найти, выделить искомую информацию);
- усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить, как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);
- аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);
- творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к тексту связано существование и нескольких видов чтения:

- библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
- просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
- ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц; цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
- изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять

изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

- аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач.

Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым, или, в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной и научной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках образовательной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с текстом. Научная методика работы с литературой предусматривает также ведение записи прочитанного. Это позволяет привести в систему знания, полученные при чтении, сосредоточить внимание на главных положениях, зафиксировать, закрепить их в памяти, а при необходимости вновь обратиться к ним.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения.

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала.

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала.

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора.

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Как правильно составлять конспект? Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план, представляющий собой перечень заголовков, подзаголовков, вопросов, последовательно раскрываемых затем в конспекте. Это первый элемент конспекта. Вторым элементом конспекта являются тезисы. Тезис - это кратко сформулированное положение. Для лучшего усвоения и запоминания материала следует записывать тезисы своими словами. Тезисы, выдвигаемые в конспекте, нужно доказывать. Поэтому третий элемент конспекта - основные доводы, доказывающие истинность рассматриваемого тезиса. В конспекте могут быть положения и примеры. Законспектируйте материал, четко следуя

пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Конспектирование - наиболее сложный этап работы. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы. Конспект ускоряет повторение материала, экономит время при повторном, после определенного перерыва, обращении к уже знакомой работе. Учитывая индивидуальные особенности каждого студента, можно дать лишь некоторые, наиболее оправдавшие себя общие правила, с которыми преподаватель и обязан познакомить студентов:

1. Главное в конспекте не объем, а содержание. В нем должны быть отражены основные принципиальные положения источника, то новое, что внес его автор, основные методологические положения работы. Умение излагать мысли автора сжато, кратко и собственными словами приходит с опытом и знаниями. Но их накоплению помогает соблюдение одного важного правила – не торопиться записывать при первом же чтении, вносить в конспект лишь то, что стало ясным.

2. Форма ведения конспекта может быть самой разнообразной, она может изменяться, совершенствоваться. Но начинаться конспект всегда должен с указания полного наименования работы, фамилии автора, года и места издания; цитаты берутся в кавычки с обязательной ссылкой на страницу книги.

3. Конспект не должен быть «слепым», безликим, состоящим из сплошного текста. Особо важные места, яркие примеры выделяются цветным подчеркиванием, взятием в рамочку, оттенением, пометками на полях специальными знаками, чтобы можно было быстро найти нужное положение. Дополнительные материалы из других источников можно давать на полях, где записываются свои суждения, мысли, появившиеся уже после составления конспекта.

ПОДГОТОВКА ДОКЛАДА

Одной из форм текущего контроля является доклад, который представляет собой продукт самостоятельной работы студента.

Доклад - это публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы.

Как правило, в основу доклада ложится анализ литературы по проблеме. Он должен носить характер краткого, но в то же время глубоко аргументированного устного сообщения. В нем студент должен, по возможности, полно осветить различные точки зрения на проблему, выразить собственное мнение, сделать критический анализ теоретического и практического материала.

Подготовка доклада является обязательной для обучающихся, если доклад указан в перечне форм текущего контроля успеваемости в рабочей программе дисциплины.

Доклад должен быть рассчитан на 7-10 минут.

Обычно доклад сопровождается представлением презентации.

Презентация (от англ. «presentation» - представление) - это набор цветных слайдов на определенную тему, который хранится в файле специального формата с расширением PP.

Целью презентации - донести до целевой аудитории полноценную информацию об объекте презентации, изложенной в докладе, в удобной форме.

Перечень примерных тем докладов с презентацией представлен в рабочей программе дисциплины, он выдается обучающимся заблаговременно вместе с методическими указаниями по подготовке. Темы могут распределяться студентами самостоятельно (по желанию), а также закрепляться преподавателем дисциплины.

При подготовке доклада с презентацией обучающийся должен продемонстрировать умение самостоятельного изучения отдельных вопросов, структурирования основных положений рассматриваемых проблем, публичного выступления, позиционирования себя перед коллективом, навыки работы с библиографическими источниками и оформления научных текстов.

В ходе подготовки к докладу с презентацией обучающемуся необходимо:

- выбрать тему и определить цель выступления.

Для этого, остановитесь на теме, которая вызывает у Вас больший интерес; определите цель выступления; подумайте, достаточно ли вы знаете по выбранной теме или проблеме и сможете ли найти необходимый материал;

- осуществить сбор материала к выступлению.

Начинайте подготовку к докладу заранее; обращайтесь к справочникам, энциклопедиям, научной литературе по данной проблеме; записывайте необходимую информацию на отдельных листах или тетради;

- организовать работу с литературой.

При подборе литературы по интересующей теме определить конкретную цель поиска: что известно по данной теме? что хотелось бы узнать? для чего нужна эта информация? как ее можно использовать в практической работе?

- во время изучения литературы следует: записывать вопросы, которые возникают по мере ознакомления с источником, а также ключевые слова, мысли, суждения; представлять наглядные примеры из практики;
- обработать материал.

Учитывайте подготовку и интересы слушателей; излагайте правдивую информацию; все мысли должны быть взаимосвязаны между собой.

При подготовке доклада с презентацией особо необходимо обратить внимание на следующее:

- подготовка доклада начинается с изучения источников, рекомендованных к соответствующему разделу дисциплины, а также специальной литературы для докладчика, список которой можно получить у преподавателя;

- важно также ознакомиться с имеющимися по данной теме монографиями, учебными пособиями, научными информационными статьями, опубликованными в периодической печати.

Относительно небольшой объем текста доклада, лимит времени, отведенного для публичного выступления, обуславливает потребность в тщательном отборе материала, умелом выделении главных положений в содержании доклада, использовании наиболее доказательных фактов и убедительных примеров, исключении повторений и многословия.

Решить эти задачи помогает составление развернутого плана.

План доклада должен содержать следующие главные компоненты: краткое вступление, вопросы и их основные тезисы, заключение, список литературы.

После составления плана можно приступить к написанию текста. Во вступлении важно показать актуальность проблемы, ее практическую значимость. При изложении вопросов темы раскрываются ее основные положения. Материал содержания вопросов полезно располагать в таком порядке: тезис; доказательство тезиса; вывод и т. д.

Тезис - это главное основополагающее утверждение. Он обосновывается путем привлечения необходимых цитат, цифрового материала, ссылок на статьи. При изложении содержания вопросов особое внимание должно быть обращено на раскрытие причинно-следственных связей, логическую последовательность тезисов, а также на формулирование окончательных выводов. Выводы должны быть краткими, точными, достаточно аргументированными всем содержанием доклада.

В процессе подготовки доклада студент может получить консультацию у преподавателя, а в случае необходимости уточнить отдельные положения.

Выступление

При подготовке к докладу перед аудиторией необходимо выбрать способ выступления:

- устное изложение с опорой на конспект (опорой могут также служить заранее подготовленные слайды);
- чтение подготовленного текста.

Чтение заранее написанного текста значительно уменьшает влияние выступления на аудиторию. Запоминание написанного текста заметно сковывает выступающего и привязывает к заранее составленному плану, не давая возможности откликаться на реакцию аудитории.

Короткие фразы легче воспринимаются на слух, чем длинные.

Необходимо избегать сложных предложений, причастных и деепричастных оборотов. Излагая сложный вопрос, нужно постараться передать информацию по частям.

Слова в речи надо произносить четко и понятно, не надо говорить слишком быстро или, наоборот, растягивать слова. Надо произнести четко особенно ударную гласную, что оказывает наибольшее влияние на разборчивость речи.

Пауза в устной речи выполняет ту же роль, что знаки препинания в письменной. После сложных выводов или длинных предложений необходимо сделать паузу, чтобы слушатели могли вдуматься в сказанное или правильно понять сделанные выводы. Если выступающий хочет, чтобы его понимали, то не следует говорить без паузы дольше, чем пять с половиной секунд.

Особое место в выступлении занимает обращение к аудитории. Известно, что обращение к собеседнику по имени создает более доверительный контекст деловой беседы. При публичном выступлении также можно использовать подобные приемы. Так, косвенными обращениями могут служить такие выражения, как «Как Вам известно», «Уверен, что Вас это не оставит равнодушными». Выступающий показывает, что слушатели интересны ему, а это самый простой путь достижения взаимопонимания.

Во время выступления важно постоянно контролировать реакцию слушателей. Внимательность и наблюдательность в сочетании с опытом позволяют оратору уловить настроение публики. Возможно, рассмотрение некоторых вопросов придется сократить или вовсе отказаться от них.

После выступления нужно быть готовым к ответам на возникшие у аудитории вопросы.

Стоит обратить внимание на вербальные и невербальные составляющие общения. Небрежность в жестах недопустима. Жесты могут быть приглашающими, отрицающими, вопросительными, они могут подчеркнуть нюансы выступления.

Презентация

Презентация наглядно сопровождает выступление.

Этапы работы над презентацией могут быть следующими:

- осмыслите тему, выделите вопросы, которые должны быть освещены в рамках данной темы;
- составьте тезисы собранного материала. Подумайте, какая часть информации может быть подкреплена или полностью заменена изображениями, какую информацию можно представить в виде схем;
- подберите иллюстративный материал к презентации: фотографии, рисунки, фрагменты художественных и документальных фильмов, материалы кинохроники, разработайте необходимые схемы;
- подготовленный материал систематизируйте и «упакуйте» в отдельные блоки, которые будут состоять из собственно текста (небольшого по объему), схем, графиков, таблиц и т.д.;
- создайте слайды презентации в соответствии с необходимыми требованиями;
- просмотрите презентацию, оцените ее наглядность, доступность, соответствие языковым нормам.

Требования к оформлению презентации

Компьютерную презентацию, сопровождающую выступление докладчика, удобнее всего подготовить в программе MS Power Point.

Презентация как документ представляет собой последовательность сменяющих друг друга слайдов. Чаще всего демонстрация презентации проецируется на большом экране, реже – раздается собравшимся как печатный материал.

Количество слайдов должно быть пропорционально содержанию и продолжительности выступления (например, для 5-минутного выступления рекомендуется использовать не более 10 слайдов).

На первом слайде обязательно представляется тема выступления и сведения об авторах.

Следующие слайды можно подготовить, используя две различные стратегии их подготовки:

1-я стратегия: на слайды выносятся опорный конспект выступления и ключевые слова с тем, чтобы пользоваться ими как планом для выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- объем текста на слайде – не больше 7 строк;
- маркированный/нумерованный список содержит не более 7 элементов;
- отсутствуют знаки пунктуации в конце строк в маркированных и нумерованных списках;
- значимая информация выделяется с помощью цвета, кегля, эффектов анимации.

Особо внимательно необходимо проверить текст на отсутствие ошибок и опечаток. Основная ошибка при выборе данной стратегии состоит в том, что выступающие заменяют свою речь чтением текста со слайдов.

2-я стратегия: на слайды помещается фактический материал (таблицы, графики, фотографии и пр.), который является уместным и достаточным средством наглядности, помогает в раскрытии стержневой идеи выступления. В этом случае к слайдам предъявляются следующие требования:

- выбранные средства визуализации информации (таблицы, схемы, графики и т. д.) соответствуют содержанию;
- использованы иллюстрации хорошего качества (высокого разрешения), с четким изображением (как правило, никто из присутствующих не заинтересован вчитываться в текст на ваших слайдах и всматриваться в мелкие иллюстрации).

Максимальное количество графической информации на одном слайде – 2 рисунка (фотографии, схемы и т.д.) с текстовыми комментариями (не более 2 строк к каждому). Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана.

Обычный слайд, без эффектов анимации, должен демонстрироваться на экране не менее 10 - 15 секунд. За меньшее время аудитория не успеет осознать содержание слайда.

Слайд с анимацией в среднем должен находиться на экране не меньше 40 – 60 секунд (без учета времени на случайно возникшее обсуждение). В связи с этим лучше настроить презентацию не на автоматический показ, а на смену слайдов самим докладчиком.

Особо тщательно необходимо отнестись к оформлению презентации. Для всех слайдов презентации по возможности необходимо использовать один и тот же шаблон оформления, кегль – для заголовков - не меньше 24 пунктов, для информации - не менее 18.

В презентациях не принято ставить переносы в словах.

Наилучшей цветовой гаммой для презентации являются контрастные цвета фона и текста (белый фон – черный текст; темно-синий фон – светло-желтый текст и т. д.).

Лучше не смешивать разные типы шрифтов в одной презентации.

Рекомендуется не злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже).

ПОДГОТОВКА К ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Практико-ориентированные задания выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций. Это могут быть ситуации, требующие применения умений и навыков, специфичных для соответствующего профиля обучения (знания содержания предмета), ситуации, требующие организации деятельности, выбора её оптимальной структуры личностно-ориентированных ситуаций (нахождение нестандартного способа решения).

Кроме этого, они выступают средством формирования у студентов умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач. Они строятся на основе ситуаций, возникающих на различных уровнях осуществления практики и формулируются в виде производственных поручений (заданий).

Под практико-ориентированными заданиями понимают задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием элементов производственных процессов.

Цель практико-ориентированных заданий – приобретение умений и навыков практической деятельности по изучаемой дисциплине.

Задачи практико-ориентированных заданий:

- закрепление, углубление, расширение и детализация знаний студентов при решении конкретных задач;
- развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности;
- овладение новыми методами и методиками изучения конкретной учебной дисциплины;
- обучение приемам решения практических задач;
- выработка способности логического осмысления полученных знаний для выполнения заданий;
- обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задания от стандартных задач (предметных, межпредметных, прикладных) являются:

- значимость (познавательная, профессиональная, общекультурная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию обучающегося;
- условие задания сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов основного предмета, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задания;

- информация и данные в задании могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;

- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задания.

Кроме выделенных четырех характеристик, практико-ориентированные задания имеют следующие:

1. по структуре эти задания – нестандартные, т.е. в структуре задания не все его компоненты полностью определены;

2. наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задания, что приводит к объемной формулировке условия;

3. наличие нескольких способов решения (различная степень рациональности), причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать.

При выполнении практико-ориентированных заданий следует руководствоваться следующими общими рекомендациями:

- для выполнения практико-ориентированного задания необходимо внимательно прочитать задание, повторить лекционный материал по соответствующей теме, изучить рекомендуемую литературу, в т.ч. дополнительную;

- выполнение практико-ориентированного задания включает постановку задачи, выбор способа решения задания, разработку алгоритма практических действий, программы, рекомендаций, сценария и т. п.;

- если практико-ориентированное задание выдается по вариантам, то получить номер варианта исходных данных у преподавателя; если нет вариантов, то нужно подобрать исходные данные самостоятельно, используя различные источники информации;

- для выполнения практико-ориентированного задания может использоваться метод малых групп. Работа в малых группах предполагает решение определенных образовательных задач в рамках небольших групп с последующим обсуждением полученных результатов. Этот метод развивает навыки сотрудничества, достижения компромиссного решения, аналитические способности.

Примером практико-ориентированного задания по дисциплине *«История России»* выступает **анализ исторического документа**.

Алгоритм анализа исторического документа:

1. Происхождение текста.

1.1. Кто написал этот текст?

1.2. Когда он был написан?

1.3. К какому виду источников он относится: письмо, дневник, официальный документ и т.п.?

2. Содержание текста.

Каково содержание текста? Сделайте обзор его структуры. Подчеркните наиболее важные слова, персоналии, события. Если вам не известны какие-то слова, поработайте со словарем.

3. Достоверна ли информация в тексте?

3.1. Свидетелем первой или второй очереди является автор текста? (Если автор присутствовал во время события, им описываемого, то он является первоочередным свидетелем).

3.2. Текст первичен или вторичен? (Первичный текст современен событию, вторичный текст берет информацию из различных первичных источников. Первичный текст может быть написан автором второй очереди, то есть созданным много позже самого события).

4. Раскройте значение источника и содержащейся в ней информации.

5. Дайте обобщающую оценку данному источнику.

- Когда, где и почему появился закон (сборник законов)?
- Кто автор законов?
- Чьи интересы защищает закон?
- Охарактеризуйте основные положения закона (ссылки на текст, цитирование).
- Сравните с предыдущими законами.
- Что изменилось после введения закона?
- Ваше отношение к этому законодательному акту (справедливость, необходимость и т.д.).

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ

Тесты – это вопросы или задания, предусматривающие конкретный, краткий, четкий ответ на имеющиеся эталоны ответов. При самостоятельной подготовке к тестированию студенту необходимо:

1. готовясь к тестированию, проработать информационный материал по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора учебной литературы;

2. четко выяснить все условия тестирования заранее. Студент должен знать, сколько тестов ему будет предложено, сколько времени отводится на тестирование, какова система оценки результатов и т. д.;

3. приступая к работе с тестами, внимательно и до конца нужно прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов; выбрать правильные (их может быть несколько); на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам;

- в процессе решения желательно применять несколько подходов в решении задания. Это позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант;

- не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, нужно переходить к другим тестовым заданиям; к трудному вопросу можно обратиться в конце;

- обязательно необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

ПОДГОТОВКА ЭССЕ

Эссе - прозаическое сочинение небольшого объема и свободной композиции на частную тему, трактуемую субъективно и обычно неполно. (Словарь Ожегова)

Жанр эссе предполагает свободу творчества: позволяет автору в свободной форме излагать мысли, выражать свою точку зрения, субъективно оценивать, оригинально освещать материал; это размышление по поводу когда-то нами услышанного, прочитанного или пережитого, часто это разговор вслух, выражение эмоций и образность.

Уникальность этого жанра в том, что оно может быть написано на любую тему и в любом стиле. На первом плане эссе – личность автора, его мысли, чувства, отношение к миру. Однако необходимо найти оригинальную идею (даже на традиционном материале), нестандартный взгляд на какую-либо проблему. Для грамотного, интересного эссе необходимо соблюдение некоторых правил и рекомендаций.

Особенности эссе:

- - наличие конкретной темы или вопроса;
- - личностный характер восприятия проблемы и её осмысления;
- - небольшой объём;
- - свободная композиция;
- - непринуждённость повествования;
- - внутреннее смысловое единство;
- - афористичность, эмоциональность речи.

Эссе должно иметь следующую структуру:

1. Вступление (введение) определяет тему эссе и содержит определения основных встречающихся понятий.

2. Содержание (основная часть) - аргументированное изложение основных тезисов. Основная часть строится на основе аналитической работы, в том числе - на основе анализа фактов. Наиболее важные обществоведческие понятия, входящие в эссе, систематизируются, иллюстрируются примерами. Суждения, приведенные в эссе, должны быть доказательны.

3. Заключение - это окончательные выводы по теме, то, к чему пришел автор в результате рассуждений. Заключение суммирует основные идеи. Заключение может быть представлено в виде суммы суждений, которые оставляют поле для дальнейшей дискуссии.

Требования, предъявляемые к эссе:

1. Объем эссе не должен превышать 1–2 страниц.

2. Эссе должно восприниматься как единое целое, идея должна быть ясной и понятной.

3. Необходимо писать коротко и ясно. Эссе не должно содержать ничего лишнего, должно включать только ту информацию, которая необходима для раскрытия вашей позиции, идеи.

4. Эссе должно иметь грамотное композиционное построение, быть логичным, четким по структуре.

5. Эссе должно показывать, что его автор знает и осмысленно использует теоретические понятия, термины, обобщения, мировоззренческие идеи.

6. Эссе должно содержать убедительную аргументацию для доказательства заявленной по проблеме позиции. Структура любого доказательства включает по меньшей мере три составляющие: тезис, аргументы, вывод или оценочные суждения.

- Тезис — это сужение, которое надо доказать.
- Аргументы — это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса.
- Вывод — это мнение, основанное на анализе фактов.
- Оценочные суждения — это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах.

Приветствуется использование:

- Эпиграфа, который должен согласовываться с темой эссе (проблемой, заключенной в афоризме); дополнять, углублять лейтмотив (основную мысль), логику рассуждения вашего эссе. Пословиц, поговорок, афоризмов других авторов, также подкрепляющих вашу точку зрения, мнение, логику рассуждения.
- Мнений других мыслителей, ученых, общественных и политических деятелей.
- Риторические вопросы.
- Непринужденность изложения.

Подготовка и работа над написанием эссе:

- изучите теоретический материал;
- уясните особенности заявленной темы эссе;
- продумайте, в чем может заключаться актуальность заявленной темы;
- выделите ключевой тезис и определите свою позицию по отношению к нему;
- определите, какие теоретические понятия, научные теории, термины помогут вам раскрыть суть тезиса и собственной позиции;
- составьте тезисный план, сформулируйте возникшие у вас мысли и идеи;
- для каждого аргумента подберите примеры, факты, ситуации из жизни, личного опыта, литературных произведений;
- распределите подобранные аргументы в последовательности;
- придумайте вступление к рассуждению;
- изложите свою точку зрения в той последовательности, которую вы наметили.
- сформулируйте общий вывод работы.

При написании эссе:

- напишите эссе в черновом варианте, придерживаясь оптимальной структуры;
- проанализируйте содержание написанного;
- проверьте стиль и грамотность, композиционное построение эссе, логичность и последовательность изложенного;
- внесите необходимые изменения и напишите окончательный вариант.

Требования к оформлению:

- Титульный лист.
- Текст эссе.
- Формат листов-A4. Шрифт- Times New Roman, размер-14, расстояние между строк- интерлиньяж полуторный, абзацный отступ-1,25см., поля-30мм(слева), 20мм (снизу), 20мм (сверху), 20мм (справа). Страницы нумеруются снизу по центру. Титульный лист считается, но не нумеруется.

Критерии оценивания эссе:

1. Самостоятельное проведение анализа проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария
2. Четкость и лаконичность изложения сути проблемы
3. Материал излагается логически последовательно
4. Аргументированность собственной позиции
5. Наличие выводов
6. Владение навыками письменной речи

ПОДГОТОВКА К ОПРОСУ

• *Письменный опрос*

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избежать грамматических ошибок в работе.

• *Устный опрос*

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С неизвестными терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии.

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала.

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание.

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу. Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы.

ПОДГОТОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

При подготовке к зачету по дисциплине «История России» обучающемуся рекомендуется:

1. повторить пройденный материал и ответить на вопросы, используя конспект и материалы лекций. Если по каким-либо вопросам у студента недостаточно информации в лекционных материалах, то необходимо получить информацию из раздаточных материалов и/или учебников (литературы), рекомендованных для изучения дисциплины «История России».

Целесообразно также дополнить конспект лекций наиболее существенными и важными тезисами для рассматриваемого вопроса;

2. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на зачете особое внимание необходимо уделять схемам, рисункам, графикам и другим иллюстрациям, так как подобные графические материалы, как правило, в наглядной форме отражают главное содержание изучаемого вопроса;

3. при изучении основных и дополнительных источников информации в рамках выполнения заданий на зачете (в случаях, когда отсутствует иллюстративный материал) особое внимание необходимо обращать на наличие в тексте словосочетаний вида «во-первых», «во-вторых» и т.д., а также дефисов и перечислений (цифровых или буквенных), так как эти признаки, как правило, позволяют структурировать ответ на предложенное задание.

Подобную текстовую структуризацию материала слушатель может трансформировать в рисунки, схемы и т. п. для более краткого, наглядного и удобного восприятия (иллюстрации целесообразно отразить в конспекте лекций – это позволит оперативно и быстро найти, в случае необходимости, соответствующую информацию);

4. следует также обращать внимание при изучении материала для подготовки к зачету на словосочетания вида «таким образом», «подводя итог сказанному» и т.п., так как это признаки выражения главных мыслей и выводов по изучаемому вопросу (пункту, разделу). В отдельных случаях выводы по теме (разделу, главе) позволяют полностью построить (восстановить, воссоздать) ответ на поставленный вопрос (задание), так как содержат в себе основные мысли и тезисы для ответа.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине
ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

форма обучения: очная, заочная

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Требования к оформлению контрольной работы	4
Содержание контрольной работы.....	4
Выполнение работы над ошибками.....	8
Критерии оценивания контрольной работы	9
Образец титульного листа	10

Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: повышение исходного уровня владения иностранным языком, достигнутого на предыдущей ступени образования, и достижение уровня иноязычной коммуникативной компетенции достаточного для общения в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах, а также для дальнейшего самообразования.

Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины:

общекультурные:

- способностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-6).

Для достижения указанной цели необходимо (задачи курса):

- владение иностранным языком как средством коммуникации в социально-бытовой, культурной и профессиональной сферах;
- развитие когнитивных и исследовательских умений с использованием ресурсов на иностранном языке;
- развитие информационной культуры;
- расширение кругозора и повышение общей гуманитарной культуры студентов;
- воспитание толерантности и уважения к духовным ценностям разных стран и народов.

Методические указания по выполнению контрольной работы предназначены для студентов очной и заочной формы обучения, обучающихся по специальности *21.05.03 Технология геологической разведки*.

Письменная контрольная работа является обязательной формой *промежуточной аттестации*. Она отражает степень освоения студентом учебного материала по дисциплине Б1.Б.1.03 Иностранный язык. А именно, в результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:

- особенности фонетического строя иностранного языка;
- лексические единицы социально-бытовой и академической тематики, основы терминосистемы соответствующего направления подготовки;
- основные правила грамматической системы иностранного языка;
- особенности построения устных высказываний и письменных текстов разных стилей речи;
- правила речевого этикета в соответствии с ситуациями межличностного и межкультурного общения в социально-бытовой, академической и деловой сферах;
- основную страноведческую информацию о странах изучаемого языка;
- лексико-грамматические явления иностранного языка профессиональной сферы для решения задач профессиональной деятельности;

Уметь:

- вести диалог/полилог и строить монологическое высказывание в пределах изученных тем;
- понимать на слух иноязычные тексты монологического и диалогического характера с различной степенью понимания в зависимости от коммуникативной задачи;
- читать аутентичные тексты прагматического, публицистического, художественного и научного характера с целью получения значимой информации;
- передавать основное содержание прослушанного/прочитанного текста;
- записывать тезисы устного сообщения, писать эссе по изученной тематике, составлять аннотации текстов, вести личную и деловую переписку;
- использовать компенсаторные умения в процессе общения на иностранном языке;

- пользоваться иностранным языком в устной и письменной формах, как средством профессионального общения;

Владеть:

- основными приёмами организации самостоятельной работы с языковым материалом с использованием учебной и справочной литературы, электронных ресурсов;

- навыками выполнения проектных заданий на иностранном языке в соответствии с уровнем языковой подготовки;

- умением применять полученные знания иностранного языка в своей будущей профессиональной деятельности.

Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «Иностранный язык (английский)» представлено три варианта контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы определяется для студентов в соответствии с начальными буквами их фамилий в алфавитном порядке. Например, студенты, у которых фамилии начинаются с букв А, выполняют контрольную работу № 1 и т.д. (см. таблицу №1).

Таблица №1

<i>начальная буква фамилии студента</i>	<i>№ варианта контрольной работы</i>
А, Г, Ж, К, Н, Р, У, Ц, Щ	№1
Б, Д, З, Л, О, С, Ф, Ч, Э, Я	№2
В, Е, И, М, П, Т, Х, Ш, Ю	№3

Содержание контрольной работы

Контрольная работа проводится по теме 1. *Бытовая сфера общения (Я и моя семья)* и теме 2. *Учебно-познавательная сфера общения (Я и мое образование)* и направлена на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Контрольная работа также направлена на проверку сформированности грамматического навыка в рамках тем: порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях, порядок слов в вопросительном предложении, безличные предложения, местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные), имя существительное, артикли (определенный, неопределенный, нулевой), функции и спряжение глаголов *to be* и *to have*, оборот *there+be*, имя прилагательное и наречие, степени сравнения, сравнительные конструкции, имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат), образование видовременных форм глагола в активном залоге.

Распределение выше указанных тем в учебнике:

- Агабекян И. П. Английский язык для бакалавров: учебное пособие для студентов вузов / И. П. Агабекян. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2017. - 384 с.: ил. - (Высшее образование) (200 экз. в библиотеке УГГУ) и учебнике:

- Журавлева Р.И. Английский язык: учебник: для студентов горно-геологических специальностей вузов / Р. И. Журавлева. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2013. - 508 с. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 502 (192 экз. в библиотеке УГГУ) представлено в таблице №2:

Таблица №2

Название темы	Страницы учебников	
	<i>Агабекян И. П.</i>	<i>Журавлева Р.И.</i>
Порядок слов в повествовательном и побудительном предложениях	148	9
Порядок слов в вопросительном предложении	163-170	10, 24
Безличные предложения	149	440
Местоимения (указательные, личные, возвратно-усилительные, вопросительные, относительные, неопределенные)	41-55	101, 439
Имя существительное	66-78	435
Артикли (определенный, неопределенный, нулевой)	78-84	433
Функции и спряжение глаголов <i>to be</i> и <i>to have</i>	102-104	6-8
Оборот <i>there+be</i>	105-107	100
Имя прилагательное и наречие	115	83
Степени сравнения, сравнительные конструкции	115-121	143
Имя числительное (количественные и порядковые; чтение дат)	261-271	-
Образование видовременных форм глагола в активном залоге	193-209	10, 36, 69

АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

Вариант №1

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Michael _____ everyone he meets because he is very sociable and easygoing. He has five brothers and two sisters, so that probably helped him learn how to deal with people.

A. gets divorced; **B. gets along well with;** C. gets married;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Заполните пропуски местоимениями *some, any, no* или их производными.

Пример: A: Is **anything** the matter with Dawn? She looks upset.

B: She had an argument with her friend today.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «неопределённые местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски личными местоимениями (*I, we, you, he, she, it, they, me, us, him, her, them*).

Пример: My teacher is very nice. I like – I like **him**.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «личные и притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках, обращая при этом внимание на использованные в предложениях маркеры.

Пример: Every morning George **eats** (to eat) cereals, and his wife only **drinks** (to drink) a cup of coffee.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Paul was tired when he got home. – **Was Paul tired when he got home? Yes, he was.**

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа

Вариант №2

Задание 1. Заполните пропуск, выбрав один вариант ответа.

Пример: A British university year is divided into three ____.

1) conferences; 2) sessions; **3) terms;** 4) periods;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Выберите правильную форму глагола.

Пример: A: I have a Physics exam tomorrow.

B: Oh dear. Physics **is**/are a very difficult subject.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя существительное, функции и спряжение глаголов to be и to have».

Задание 3. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Continuous, Past Continuous или Future Continuous.

Пример: I **shall be studying** (study) Japanese online from 5 till 6 tomorrow evening.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 4. Составьте вопросы к словам, выделенным жирным шрифтом.

Пример: **The Petersons** have bought a dog. – Who has bought a dog?

The Petersons have bought **a dog**. – What have the Petersons bought?

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Задание 5. Подчеркните правильный вариант ответа.

Пример: A: You haven't seen my bag anywhere, haven't you/**have you**?

B: No. You didn't leave it in the car, **did you**/didn't you?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

Контрольная работа

Вариант № 3

Задание 1. Заполните пропуски, выбрав один вариант ответа.

Пример: The University accepts around 2000 new ____ every year.

1) students; 2) teachers; 3) pupils; 4) groups;

Задание 1 направлено на проверку сформированности лексического навыка в рамках заданных тем.

Задание 2. Поставьте в предложения подходящие по смыслу фразы:

as red as a beet (свекла), as slow as a turtle, as sweet as honey, as busy as a bee, as clumsy as a bear (неуклюжий), as black as coal, as cold as ice, as slippery as an eel (изворотливый как угорь), as free as a bird, as smooth as silk (гладкий)

Пример: Your friend is so unemotional, he is **as cold as ice**.

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «имя прилагательное и наречие».

Задание 3. Переведите следующие предложения на английский язык.

Пример: Это самая ценная картина в Русском музее. **This is the most valuable picture in Russian Museum.**

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «степени сравнения имени прилагательного и наречий».

Задание 4. Раскройте скобки, употребив глагол в форме Present Perfect, Past Perfect или Future Perfect.

Пример: Sam **has lost** (lose) his keys. So he can't open the door.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «образование видовременных форм глагола в активном залоге».

Задание 5. Задайте вопросы к предложениям.

Пример: There are two books. The one on the table is Sue's.

a) 'Which book is Sue's?' 'The one on the table.'

b) 'Whose book is on the table?' 'Sue's.'

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «порядок слов в вопросительном предложении».

НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях, выбрав один ответ.

Пример: Mein Bruder ... Arzt geworden

A. hat; **B. ist**; C. wird;

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Пассивный залог».

Задание 2. Вставьте подходящее вопросительное слово.

Пример: Was machen Sie am Wochenende?

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Вопросительные местоимения».

Задание 3. Заполните пропуски возвратными местоимениями в нужной форме.

Пример: Wo wohnen deine Eltern?

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Притяжательные местоимения».

Задание 4. Поставьте в правильную форму глагол, представленный в скобках.

Пример: Kannst du mir bitte die Marmelade geben? (können)

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Модальные глаголы».

Задание 5. Составьте вопросительные предложения и дайте краткие ответы на них.

Пример: Sie wohnen in Berlin.

Ответ: Wo wohnen Sie? Wer wohnt in Berlin?

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по

теме «Вопросительные предложения».

ФРАНЦУЗСКИЙ ЯЗЫК

Задание 1. Заполните пропуски в предложениях следующими предлогами: de, à, chez, dans, pour, depuis, vers, avec, devant. en.

Пример: Monsieur Dupont est en mission.

Задание 1 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Предлоги».

Задание 2. Заполните пропуски, выберите правильно указательное прилагательное:

Пример: Peux-tu me passer ces dictionnaires?

Задание 2 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Указательные прилагательные».

Задание 3. Поставьте нужный артикль или предлог там, где это необходимо:

Пример: C'est la salle des études.

Задание 3 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Употребление слитного артикля».

Задание 4. Выберите правильную форму глагола:

Пример: Tous les matins, il s'est levé à 7 heures depuis un an.

Задание 4 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Спряжение глаголов 1,2,3 группы в Présent».

Задание 5. Ответьте на следующие вопросы:

Пример: Où passez-vous vos vacances d'été? - Je les passe en Crimée.

Задание 5 направлено на проверку сформированности грамматического навыка по теме «Личные местоимения le, la, les».

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Работа с оценкой «неудовлетворительно» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 1 балл. Максимум 44 балла.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»:

40-44 балла (90-100%) - оценка «отлично»;

31-39 балла (70-89%) - оценка «хорошо»;

22-30 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-21 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».



**Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра иностранных языков и деловой коммуникации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

**по дисциплине
ИНОСТРАННЫЙ ЯЗЫК**

Специальность:

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация № 3

Технология и техника разведки месторождений полезных ископаемых

формы обучения: очная, заочная

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа ТТР-18

Преподаватель: Петров Петр Петрович,
к.т.н, доцент

**Екатеринбург
2018**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

Проректор по
комплексу



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Специальность

21.05.03 Технология геологической разведки

Специализация

Геофизические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых

форма обучения: **очная, заочная**

год набора: 2021

Автор: Суднева Е.М., ст. преподаватель

Одобрена на заседании кафедры

Геологии и защиты в ЧС

(название кафедры)

Зав.кафедрой

(подпись)

Стороженко Л.А.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 10 от 24.04.2021

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией

факультета геологии и геофизики

(название факультета)

Председатель

(подпись)

д.г.-м.н., проф. Бондарев В.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 10 от 17.06.2021

(Дата)

Екатеринбург
2021

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 1

Практикум по теме: Здоровье и окружающая среда

В Уставе Всемирной организации здравоохранения говорится о высшем уровне здоровья как об одном из основных прав человека. Не менее важно право человека на информацию о тех факторах, которые определяют здоровье человека или являются факторами риска, то есть их воздействие может привести к развитию болезни.

Здоровье – это первая и важнейшая потребность человека, определяющая способность его к труду и обеспечивающая гармоническое развитие личности. Оно является важнейшей предпосылкой к познанию окружающего мира, к самоутверждению и счастью человека. Активная долгая жизнь – это важное слагаемое человеческого фактора.

Здоровье – такое состояние организма человека, когда функции всех его органов и систем уравновешены с внешней средой и отсутствуют какие-либо болезненные изменения.

Само понятие «здоровье» является условным и объективно устанавливается на основе антропометрических, клинических, физиологических и биохимических показателей.

По определению Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) "здоровье – это состояние физического, духовного и социального благополучия, а не только отсутствие болезней и физических дефектов".

Вообще, можно говорить о трех видах здоровья: о здоровье физическом, психическом и нравственном (социальном):

Физическое здоровье - это естественное состояние организма, обусловленное нормальным функционированием всех его органов и систем. Если хорошо работают все органы и системы, то и весь организм человека (система саморегулирующаяся) правильно функционирует и развивается.

Психическое здоровье зависит от состояния головного мозга, оно характеризуется уровнем и качеством мышления, развитием внимания и памяти, степенью эмоциональной устойчивости, развитием волевых качеств.

Нравственное здоровье определяется теми моральными принципами, которые являются основой социальной жизни человека, т.е. жизни в определенном человеческом обществе. Отличительными признаками нравственного здоровья человека являются, прежде всего, сознательное отношение к труду, овладение сокровищами культуры, активное неприятие нравов и привычек, противоречащих нормальному образу жизни. Физически и психически здоровый человек может быть нравственным уродом, если он пренебрегает нормами морали. Поэтому социальное здоровье считается высшей мерой человеческого здоровья.

Нравственно здоровым людям присущ ряд общечеловеческих качеств, которые и делают их настоящими гражданами.

Целостность человеческой личности проявляется, прежде всего, во взаимосвязи и взаимодействии психических и физических сил организма. Состояние здоровья определяется функцией физиологических систем организма с учётом их возрастных и половых факторов, а также зависит от географических и климатических условий.

На основе этих критериев даётся формальное заключение о состоянии здоровья при наборе в армию, приёме на работу и в учебные заведения. Состояние здоровья не исключает уже имеющегося в организме, но ещё не обнаруженного болезнетворного начала; оно не исключает также колебаний в самочувствии человека. Следовательно, хотя понятие «здоровье» и противопоставлено понятию «болезнь», но может быть связано с ним многочисленными переходными состояниями

Динамические наблюдения и периодические обследования могут констатировать границы здоровья и болезни в стартовых условиях, когда явная патология отсутствует.

Отсюда возникают понятия об объективном и субъективном здоровье, когда, с одной стороны, при плохом самочувствии отсутствуют объективные подтверждающие его данные, с другой – когда эти данные отличаются, а самочувствие остаётся до определённого времени хорошим.

Отсюда также возникает понятие «практически здоровый человек» – состояние, при котором объективно имеются патологические изменения, не отражающиеся на жизненном восприятии и работоспособности человека.

В понятие здоровья вкладываются не только абсолютные качественные, но и количественные признаки, т.к. существует понятие степени здоровья.

Степень здоровья – широта адаптивных возможностей организма, определяемая социальной средой, физической тренировкой, перенесёнными заболеваниями, трудовым навыком и т.д.

Важную роль в понятии здоровья играют и социальные факторы, т.к. в него входят и социальная полноценность человека. Однако социальный фактор не следует считать абсолютным, потому что социальная полноценность и общественная значимость человека далеко не всегда являются тождественными понятиями.

Индивидуальное здоровье не является точно детерминируемым, что связано с большой широтой индивидуальных колебаний важнейших показателей жизнедеятельности организма, а также с многообразием факторов, влияющих на него.

Здоровье населения – статистическое понятие, характеризующееся комплексом демографических показателей: рождаемость, смертность, детская смертность, уровень физического развития, заболеваемость, средняя продолжительность жизни и др.

Здоровье населения обеспечивает условия для роста производительности труда, улучшает качественные характеристики воспроизводства населения и трудовых ресурсов. В то же время имеет место и обратное влияние – прогресс в области экономики, науки и культуры способствует улучшению здоровья населения и страны.

Большое значение для сохранения жизни и здоровья населения имеет повышение качества оказания медицинской помощи. В этих целях проводится укрупнение и развитие больниц и поликлиник, совершенствование профилактических форм работы.

Одной из важных форм профилактики является диспансеризация населения. Это активный метод систематического наблюдения за состоянием здоровья как практически здорового населения, так и больных, страдающих длительно протекающими хроническими заболеваниями, составляющий основу профилактического направления отечественного здравоохранения.

Одним из важнейших приобретенных по наследству свойств здорового организма является постоянство внутренней среды. Это понятие ввел французский ученый Клод Бернар (1813 – 1878), считавший постоянство внутренней среды условием свободной и независимой жизни человека. Внутренняя среда образовалась в процессе эволюции. Она определяется в первую очередь составом и свойствами крови и лимфы.

Постоянство внутренней среды – замечательное свойство организма, которое в какой-то мере освободило его от физических и химических влияний внешней среды. Однако это постоянство – оно называется гомеостазом – имеет свои границы, определяемые наследственностью. А потому, наследственность является одним из важнейших факторов здоровья.

Организм человека приспособлен к определенным физическим (температура, влажность, атмосферное давление), химическим (состав воздуха, воды, пищи), биологическим (разнообразные живые существа) показателям окружающей среды.

Если человек длительно находится в условиях, значительно отличающихся от тех, к которым он приспособлен, нарушается постоянство внутренней среды организма, что может повлиять на здоровье и нормальную жизнь.

В наш век человек, как и все живые организмы, подвержен внешним воздействиям, которые приводят к изменениям наследственных свойств. Эти изменения называются мутационными (мутациями). Особенно возросло количество мутаций за последнее время. Отклонения от

определенных, привычных свойств окружающей среды можно отнести к факторам риска заболевания. Итак, заболеваемость и смертность связаны, прежде всего, с условиями среды и образом жизни людей.

Здоровье и окружающая среда.

Немаловажное значение оказывает на здоровье и состояние окружающей среды. Каждый из нас имеет право знать обо всех экологических изменениях, происходящих и в местности, где он живет, и во всей стране. Мы должны знать все о пище, которую употребляем, о состоянии воды, которую пьем, а медики обязаны объяснить опасность жизни в зонах, зараженных радиацией.

Вмешательство человека в регулирование природных процессов не всегда приносит желаемые положительные результаты. Нарушение хотя бы одного из природных компонентов приводит, в силу существующих между ними взаимосвязей, к перестройке сложившейся структуры природно-территориальных компонентов. Загрязнение поверхности суши, гидросферы, атмосферы и Мирового океана, в свою очередь, сказывается на состоянии здоровья людей, эффект "озоновой дыры" влияет на образование злокачественных опухолей, загрязнение атмосферы на состояние дыхательных путей, а загрязнение вод – на пищеварение, резко ухудшает общее состояние здоровья человечества, снижает продолжительность жизни.

В настоящее время хозяйственная деятельность человека все чаще становится основным источником загрязнения биосферы. В природную среду во все больших количествах попадают газообразные, жидкие и твердые отходы производств. Различные химические вещества, находящиеся в отходах, попадая в почву, воздух или воду, переходят по экологическим звеньям из одной цепи в другую, попадая, в конце концов, в организм человека.

На земном шаре практически невозможно найти место, где бы не присутствовали в той или иной концентрации загрязняющие вещества. Даже во льдах Антарктиды, где нет никаких промышленных производств, а люди живут только на небольших научных станциях, ученые обнаружили различные токсичные (ядовитые) вещества современных производств. Они заносятся сюда потоками атмосферы с других континентов.

Вещества, загрязняющие природную среду, очень разнообразны. В зависимости от своей природы, концентрации, времени действия на организм человека они могут вызвать различные неблагоприятные последствия. Кратковременное воздействие небольших концентраций таких веществ может вызвать головокружение, тошноту, першение в горле, кашель. Попадание в организм человека больших концентраций

токсических веществ может привести к потере сознания, острому отравлению и даже смерти. Примером подобного действия могут являться смоги, образующиеся в крупных городах в безветренную погоду, или аварийные выбросы токсичных веществ промышленными предприятиями в атмосферу.

Реакции организма на загрязнения зависят от индивидуальных особенностей: возраста, пола, состояния здоровья. Как правило, более уязвимы дети, пожилые и престарелые, больные люди.

Кроме химических загрязнителей в природной среде встречаются и биологические, вызывающие у человека различные заболевания. Это болезнетворные микроорганизмы, вирусы, гельминты, простейшие. Они могут находиться в атмосфере, воде, почве, в теле других живых организмов, в том числе и в самом человеке.

Специфика среды обитания человека заключается в сложнейшем переплетении социальных и природных факторов. На заре человеческой истории природные факторы играли решающую роль в эволюции человека. На современного человека воздействие природных факторов в значительной степени нейтрализуется социальными факторами. В новых природных и производственных условиях человек в настоящее время нередко испытывает влияние весьма необычных, а иногда чрезмерных и жестких факторов среды, к которым эволюционно он еще не готов.

Человек, как и другие виды живых организмов, способен адаптироваться, то есть приспосабливаться к условиям окружающей среды. Адаптацию человека к новым природным и производственным условиям можно охарактеризовать как совокупность социально-биологических свойств и особенностей, необходимых для устойчивого существования организма в конкретной экологической среде.

В настоящее время значительная часть болезней человека связана с ухудшением экологической обстановки в нашей среде обитания: загрязнением атмосферы, воды и почвы, недоброкачественными продуктами питания, возрастанием шума.

Приспосабливаясь к неблагоприятным экологическим условиям, организм человека испытывает состояние напряжения, утомления. Напряжение – мобилизация всех механизмов, обеспечивающих определенную деятельность организма человека. В зависимости от величины нагрузки, степени подготовки организма, его функционально-структурных и энергетических ресурсов снижается возможность функционирования организма на заданном уровне, то есть наступает утомление.

Кроме этого, необходимо учитывать еще объективный фактор воздействия на здоровье – наследственность. Это присущее всем организмам свойство повторять в ряду поколений одинаковые признаки и особенности развития,

способность передавать от одного поколения к другому материальные структуры клетки, содержащие программы развития из них новых особей.

Влияют на наше здоровье и биологические ритмы. Одной из важнейших особенностей процессов, протекающих в живом организме, является их ритмический характер.

В настоящее время установлено, что свыше трехсот процессов, протекающих в организме человека, подчинены суточному ритму.

Наследственные болезни, вызванные плохой экологической обстановкой:

Влияние солей тяжелых металлов на наследственность.

Тяжелые металлы – высокотоксичные вещества, долго сохраняющие свои ядовитые свойства. По данным Всемирной Организацией Здравоохранения, они уже сейчас занимают второе место по степени опасности, уступая пестицидам и значительно опережая такие широко известные загрязнители, как двуокись углерода и серы. В прогнозе же они должны стать самыми опасными, более опасными, чем отходы АЭС (второе место) и твердые отходы (третье место).

Отравление солями тяжелых металлов начинается еще до рождения человека. Соли тяжелых металлов проходят через плаценту, которая вместо того, чтобы оберегать плод, день за днем его отравляет. Нередко концентрация вредных веществ у плода даже выше, чем у матери. Младенцы появляются на свет с пороками развития мочеполовой системы, до 25 процентов малышей – с отклонениями от нормы при формировании почек. Зачатки внутренних органов появляются уже на пятой неделе беременности и с этого момента испытывают на себе влияние солей тяжелых металлов, а поскольку они влияют и на организм матери, выводя из строя почки, печень, нервную систему, не стоит удивляться, что сейчас практически не встретишь нормальных физиологических родов, а малыши приходят в эту жизнь с недостатком веса, с физическими и психическими пороками развития.

И с каждым годом жизни соли тяжелых металлов, растворенные в воде, прибавляют им болезней или усугубляют врожденные заболевания, прежде всего органов пищеварения и почек. Нередко у одного ребенка страдают 4-6 систем в организме. Мочекаменная и желчекаменная болезни – своего рода индикатор неблагополучия, а они теперь встречаются даже у дошколят. Есть и другие тревожные сигналы. Так, превышение уровня свинца приводит к снижению интеллекта. Психологическое обследование показало, что таких детей у нас до 12 процентов.

Какие же мероприятия должны обеспечить сегодня охрану здоровья человека и среды его обитания от вредного влияния техногенных металлов? Можно обозначить два основных пути: санитарно-технический – уменьшение содержания металлов в объектах внешней среды до

предельно допустимых (безопасных) уровней путем внедрения архитектурно-планировочных, технологических, технических и других мероприятий; гигиенический – научная разработка допустимых уровней содержания их во внешней среде, требований и рекомендаций в сочетании с постоянным контролем состояния и качества этой среды.

Профилактика хронических интоксикаций металлами и их соединениями должна обеспечиваться прежде всего их заменой, где это возможно, на безвредные или менее токсичные вещества. В случаях же, когда не представляется реальным исключить их применение, необходима разработка таких технологических схем и конструкций, которые бы резко ограничивали возможность загрязнения ими воздуха производственных помещений и наружной атмосферы. В отношении транспорта, являющегося, как об этом было сказано выше, одним из значительных источников выброса свинца в атмосферу, следует повсеместно внедрять экологически чистое горючее. Весьма радикальным средством является создание безотходных или малоотходных технологий.

Наряду с указанными выше мероприятиями необходимо постоянное осуществление эффективного контроля над уровнем содержания металлов в организме. С этой целью при медицинском обследовании работающих и населения в случаях их контакта с техногенными металлами должно проводиться определение их в биологических средах организма крови, моче, волосах.

Краткая характеристика экологической обстановки в России

Из всех предприятий России, выбрасывающих вредные вещества в атмосферу и водоемы – 33% дают предприятия металлургии, 29% – энергетические объекты, 7% – химические, 8% – угольной промышленности. Более половины выбросов приходится на транспорт. Особенно тяжелая обстановка складывается в городах, где велика концентрация населения. В России определены 55 городов, в которых уровень загрязнения очень велик. Ежегодно в нашей стране улавливается и обезвреживается лишь около 76 % общего количества вредных веществ, выбрасываемых в атмосферу. Значительно хуже дело обстоит с очисткой сточных вод: 82% сбрасываемых вод не подвергается очистке. Реки Волга, Дон, Енисей, Лена, Кубань, Печора загрязнены органикой, соединениями азота, тяжелыми металлами, фенолами, нефтепродуктами. В настоящее время свыше 70 миллионов человек дышат воздухом, насыщенным опасными для здоровья веществами, в пять и более раз превышающими предельно допустимые концентрации (ПДК). В окружающую среду человеком введено около 4 миллионов химических соединений, из которых лишь немногие изучены на токсическое воздействие.

В России имеется около 30 тысяч предприятий и объектов, использующих радиоактивные вещества и изделия на их основе.

Большой урон экосистемам на территории России нанесен ядерными испытаниями. На полигонах Новой Земли произвели 118 поверхностных и подземных ядерных взрывов – их последствия выяснены не до конца.

Санитарно-эпидемиологическая обстановка в РФ

XX век породил неоправданный оптимизм в отношении того, что с инфекционными болезнями в скором времени будет покончено. Однако события последних десятилетий показали, что в мире резко активизировались такие инфекции, как туберкулёз, малярия, которые становятся основной причиной смертности; как в России, так и в других странах вновь заявляет о себе дифтерия.

Эпидемиологическая ситуация, сложившаяся в последние годы, остаётся напряжённой. Ежегодно в РФ регистрируется от 33 до 44 миллионов случаев инфекционных заболеваний.

Одной из самых актуальных медицинских и социально-экономических проблем остаётся грипп и ОРВИ.

В РФ (в отличие от ведущих стран мира) до настоящего времени отсутствует производство отечественной вакцины против краснухи. В этих условиях краснуха остаётся неуправляемой инфекцией с возникновением каждые 10 - 12 лет эпидемий. Во время эпидемий краснуха может стать причиной уродств более чем у 2% детей, родившихся живыми.

Динамика заболеваемости почти по всей группе кишечных инфекций в истекшем году имела тенденцию к снижению. Стабилизировалась заболеваемость сальмонеллёзом, острой кишечной инфекцией неустановленной этиологии, ротовирусным инфекционным кампилобактериозом. Однако ежегодно в стране регистрируется до 100 вспышек кишечных инфекций пищевого и водного характера.

Серьёзной проблемой здравоохранения продолжают оставаться вирусные гепатиты, наносящие ущерб как здоровью населения, так и экономике страны.

Особенно тяжёлое положение складывается по социально обусловленным заболеваниям. Стремительность нарастания масштабов пандемии заболевания, вызываемого вирусом иммунодефицита человека (ВИЧ-инфекции), в мире, отсутствие надёжных средств профилактики и лечения позволяет отнести эту проблему к одной из самых острых. Состояние здоровья детей, проживающих в городах и населённых пунктах с высоким уровнем загрязнения атмосферного воздуха (Подольск, Ярославль, Воскресенск, Новокузнецк, Салават, Пермь, Казань, Мончегорск) характеризуется значительным снижением неспецифической сопротивляемости организма к развитию инфекционных и других заболеваний.

Проблема многих населенных пунктов – наличие многочисленных мобильных и стационарных источников шума. Более 30% жителей городов РФ подвержены действию сверхнормативных уровней шума и вибрации.

Безопасность и качество пищевых продуктов и продовольственного сырья является одним из основных факторов, определяющих здоровье населения и сохранение его генофонда. Более 5% продукции не отвечает гигиеническим требованиям по содержанию антибиотиков, что влияет также на аллергизацию населения, прежде всего детей.

Негативное влияние на состояние здоровья оказывают также неблагоприятные условия труда, повышающие риск появления профессиональной патологии.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ДОКЛАДА:

Здоровье населения России.

Здоровье населения Свердловской области.

Здоровье жителей города Екатеринбурга.

План:

1. Месторасположение населенного пункта
2. Демография
3. Состояние техносферной, природной, социальной среды области (города)
4. Здравоохранение (заболеваемость взрослых и детей)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 2

«О классификации чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера» от 21 мая 2007 года № 304 г. Москва.

Во исполнение Федерального закона «О защите населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера» Правительство Российской Федерации постановляет:

1. Установить, что чрезвычайные ситуации природного и техногенного характера подразделяются на:
 - а) чрезвычайную ситуацию локального характера
 - б) чрезвычайную ситуацию муниципального характера
 - в) чрезвычайную ситуацию межмуниципального характера
 - г) чрезвычайную ситуацию регионального характера
 - д) чрезвычайную ситуацию межрегионального характера
 - е) чрезвычайную ситуацию федерального характера

Задание: выбрать чрезвычайную ситуацию техногенного, природного или биолого-социального характера, данные внести в таблицу № 1. Код ЧС смотреть в приложении № 1.

Таблица № 1

Формы статистического учета данных о чрезвычайных ситуациях.
Техногенные чрезвычайные ситуации (форма № 7/ЧС)

№ п/п Наименование показателей Показатели

- 1 Классификация ЧС
- 2 Код ЧС
- 3 Дата возникновения ЧС
Дата ликвидации ЧС
- 4 Время возникновения ЧС:
московское (час, мин.)
местное (час, мин.)
- 5 Место: страна
субъект Федерации
город
населенный пункт
- 6 Общая площадь зоны ЧС (кв.км.)
- 7 Объект экономики (наименование)
отрасль
министерство (ведомство)
форма собственности
- 8 Номер лицензии, дата и кем выдана
Дата утверждения декларации, кем утверждена
Номер страхового документа, дата, кем выдан
- 9 Метеоданные: температура (град)
направление и скорость ветра (м/с)
влажность (%)
осадки (вид, количество)
- 10 Причины возникновения ЧС
- 11 Поражающие факторы источника ЧС
- 12 Основные характеристики ЧС
- 13 Мероприятия по ликвидации ЧС:

аварийно-спасательные работы (перечень/длительность, час)

аварийно-восстановительные работы (перечень/длительность час)

- 14 Силы и средства, задействованные в ликвидации ЧС:

личный состав РСЧС наименование/количество чел.

техника наименование/количество ед.

материальные ресурсы перечень/количество

израсходованных)

15 Работы по организации защиты населения:

инженерная защита:

укрытие в защитных сооружениях различных типов, (чел.)

радиационно-химическая защита:

выдано средств индивидуальной защиты (чел.)

медицинская защита:

население которому была оказана медицинская помощь (чел.)

госпитализировано (чел.)

в т.ч. детей до 14 лет, (чел.)

эвакуационные мероприятия:

всего эвакуировано из зоны ЧС, (чел.)

в том числе:

автомобильным транс-ом (чел.)

железнодорожным транс-ом (чел.)

авиационным транс-ом (чел.)

морским (речным) транс-ом (чел.)

транспортные средства эвакуации, кол-во единиц, по видам

расчетное время на проведение эвакуации (час, мин.)

районы размещения эвакуируемого населения

16 Состояние зданий и сооружений, ед.:

разрушено всего

повреждено всего

уничтожено всего

17 Нанесенный материальный ущерб, (тыс. (млн.) руб.)

18 Потери, чел. пострадавшие/пораженные/погибшие

население:

дети до 14 лет

взрослые от 14 до 60 лет

старше 60 лет

промперсонал

личный состав сил РСЧС

19 Дополнительная текстовая информация

20 Мероприятия по предупреждению ЧС

« _____ » _____ 20 ____ г. _____

(фамилия, И.О. № телефона и
телефона

и подпись исполнителя)
руководителя)

(фамилия, И., О., №

и подпись

Природные чрезвычайные ситуации (форма № 8/ЧС)

№ п/п Наименование показателей Показатели

1 Классификация ЧС

2 Код ЧС

3 Дата возникновения ЧС

Дата ликвидации ЧС

4 Время возникновения ЧС:

московское (час, мин.)

- местное (час, мин.)
- 5 Место: страна
- субъект Федерации
- город
- населенный пункт
- 6 Общая площадь зоны ЧС (кв.км.)
- 7 Метеоданные: температура (град)
- направление и скорость ветра (м/с)
- влажность (%)
- осадки (вид, количество)
- 8 Причины возникновения ЧС
- 9 Поражающие факторы источника ЧС
- 10 Основные характеристики ЧС
- 11 Мероприятия по ликвидации ЧС:
- аварийно-спасательные работы (перечень/длительность, час)
- аварийно-восстановительные работы (перечень/длительность час)
- 12 Силы и средства, задействованные в ликвидации ЧС:
- личный состав РСЧС (наименование/количество чел.)
- техника (наименование/количество ед.)
- расход материальных ресурсов (перечень/количество израсходованных)
- 13 Работы по организации защиты населения:
- инженерная защита:
- укрытие в защитных сооружениях различных типов, (чел.)
- радиационно-химическая защита:
- выдано средств индивидуальной защиты чел.)

медицинская защита:

население которому была оказана меди-цинская помощь (чел.)

госпитализировано (чел.)

в т.ч. детей до 14 лет, (чел.)

эвакуационные мероприятия:

всего эвакуировано из зоны ЧС, (чел.)

в том числе:

автомобильным транспортом (чел.)

железнодорожным транспортом (чел.)

авиационным транспортом (чел.)

морским (речным) транспортом (чел.)

транспортные средства эвакуации, кол-во единиц, по видам

расчетное время на проведение эвакуации (час, мин.)

районы размещения эвакуируемого населения

14 Состояние зданий и сооружений, ед.:

разрушено всего

повреждено всего

уничтожено огнем всего

15 Нанесенный материальный ущерб, (тыс. (млн.) руб.)

16 Потери, чел. пострадавшие/пораженные/погибшие

население:

дети до 14 лет

взрослые от 14 до 60 лет

старше 60 лет

промперсонал

личный состав сил РСЧС

17 Сельскохозяйственные животные:

погибло (тыс. голов)

эвакуировано из опасных зон (тыс. голов)

вынужденный забой (тыс. голов)

18 Уничтожено сельскохозяйственных угодий (тыс.га)

19 Дополнительная текстовая информация

20 Мероприятия по предупреждению ЧС

« _____ » _____ 200 _____ г.

(фамилия, И. О., № телефона и
и подпись исполнителя)

(фамилия, И. О., № телефона
и подпись руководителя)

Биолого-социальные чрезвычайные ситуации (форма № 9 ЧС)

№ п/п	Наименование показателей	Показатели
-------	--------------------------	------------

1	Классификация ЧС	
---	------------------	--

2	Код ЧС	
---	--------	--

3	Дата возникновения ЧС	
---	-----------------------	--

	Дата ликвидации ЧС	
--	--------------------	--

4	Место, страна	
---	---------------	--

	субъект Федерации	
--	-------------------	--

	город	
--	-------	--

	населенный пункт	
--	------------------	--

5	Общая площадь зоны ЧС (кв. км.)	
---	---------------------------------	--

6 Метеоданные: температура (град)

направление и скорость ветра (м/с)

влажность (%)

осадки (вид, количество)

7 Причины возникновения ЧС

8 Вид бактериального средства, возбудитель

9 Основные характеристики ЧС:

9.1 эпидемия:

выявлено заболевших (чел.)

в том числе детей до 14 лет

госпитализировано (чел.)

в том числе детей до 14 лет

умерло (чел.)

в том числе детей до 14 лет

9.2 эпизоотия:

всего по учету (тыс.голов)

выявлено заболевших (тыс. голов)

из них погибло (тыс. голов)

9.3 эпифитотия:

всего по учету (тыс. га)

потери всего (тыс. га)

10 Мероприятия по ликвидации ЧС:

10.1 противоэпидемические:

эвакуировано из опасных зон (чел.)

организована обсервация

- введен карантин
- 10.2 противозэпизоотические:
- эвакуировано из опасных зон (тыс. голов)
- оказана ветеринарная помощь (тыс. голов)
- 10.3 противозэпифитотические:
- обработано зараженных с/х культур (мест скопления вредителей) (тыс. га)
- 11 Силы и средства, участвовавшие в ликвидации ЧС:
- личный состав РСЧС наименование/количество чел.)
- техника (наименование количество ед.)
- расход материальных ресурсов (перечень/количество израсходованных)
- 12 Нанесенный материальный ущерб, (тыс. млн.) руб.)
- 13 Дополнительная текстовая информация
- 14 Мероприятия по предупреждению ЧС

« _____ » _____ 200 _____ г.

(фамилия, И., О., № телефона и
и подпись исполнителя)

(фамилия, И., О., № телефона
и подпись руководителя)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 3

Решения ситуационных задач по теме ДЕСМУРГИЯ с демонстрацией практических навыков (Фото или видео-сопровождение)

1. Наложить повязки на следующие части тела:

на голову, на глаз, на грудную клетку, на палец, на руку

1. Наложить жгут при артериальном кровотечении

Десмургия (греч. «desmos» – связь, повязка «ergon» – дело) — учение о повязках, их правильном применении и наложении при различных повреждениях и заболеваниях.

Цели наложения повязок — удерживать перевязочный материал на: поверхности тела (укрепляющие повязки), если нужно – с давлением на подлежащие ткани (давящие повязки); иммобилизовать какую-нибудь часть тела (неподвижные повязки) или создавать возможность тяги за конечность, голову и т. д. (вытягивающие повязки). Особый вид повязок — повязки с пленкообразующими веществами.

Термином «*повязка*» обозначают также ту или иную заготовку из перевязочного материала с лекарственными веществами или без них, накладываемую на рану или на какой-нибудь участок тела с лечебной или профилактической целью.

Процесс наложения повязки называется *перевязкой*.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ОБРАБОТКИ РАНЫ И НАЛОЖЕНИЯ ПОВЯЗКИ

Первая и доврачебная помощь при ранении включает обработку раны и наложения асептической повязки. *Асептика* – это мера, препятствующая проникновению микробов в рану. Правильно наложенная на рану повязка является одной из таких мер.

Перед наложением асептической повязки следует остановить кровотечение. После этого удаляют грязь с кожи, лучше всего это сделать салфеткой, смоченной водой или перекисью водорода. Кожу вокруг раны обрабатывают антисептическим раствором – йодином, йодонатом, хлоргексидином. Следует удалить свободно лежащие на ране инородные тела (осколки стёкол, обрывки одежды, щепки) пинцетом.

Нельзя промывать рану, вытирать её, засыпать порошком, накладывать мази и вату на рану, погружать выпавшие внутренние органы, вправлять костные отломки! При выступающих из раны инородных телах (кости, внутренние органы, осколки ранящего снаряда или предмета) перед тем как накладывать асептическую повязку следует обложить рану ватно-марлевым валиком, чтобы при транспортировке или при бинтовании инородные тела не проникли глубже в рану. После этих мер на рану накладывают сухую стерильную марлевую салфетку и производят бинтование.

Если рана находится на конечностях, то после наложения бинта лучше произвести иммобилизацию конечности способами, описанными ниже.

Необходимым мероприятием при ранении являются обезболивание: 2 таблетки анальгина по 0,5 г, введение внутримышечно 1 %-го раствора промедола, 50 %-го раствора анальгина. Такое обезболивание проводят при любых ранениях, кроме ранений брюшных полостей без явных признаков проникающего ранения.

При бинтовании следует придерживаться следующих правил:

- уложить пациента (в некоторых случаях нетяжёлого ранения – усадить).

Расположиться лицом к пострадавшему, чтобы наблюдать за его реакцией и изменениями в состоянии;

- бинтовать следует от периферии к центру, снизу вверх и слева направо, против часовой стрелки, за исключением наложения нескольких видов повязок: Дезо на левую руку, повязка на левый глаз, на правую молочную железу;

- первый тур бинтования всегда закрепляющий, каждый последующий тур должен прикрывать предыдущий на две трети;

- бинтовать следует двумя руками, при этом правой рукой вы разматываете бинт, раскатывая его по бинтуемой поверхности, а левой расправляете его ходы;

- бинтуемой области тела следует придать такое положение, в котором она останется после бинтования, туры бинтования надо накладывать равномерно, без давления и перегибов.

МЯГКИЕ ПОВЯЗКИ

Мягкие повязки очень разнообразны. В зависимости от вида перевязочного материала и способа фиксации его к телу различают *клеевые, косыночные, пращевидные, контурные, бинтовые и сетчато-трубчатые повязки.*

Клеевые повязки. Накладывают для защиты раны (чаще послеоперационной) от воздействия внешней среды. При этих повязках перевязочный материал фиксируют к коже вокруг раны при помощи различных клеев – клеола, коллодия, лейкопластыря. Их иногда называют наклейкой (рис. 1).

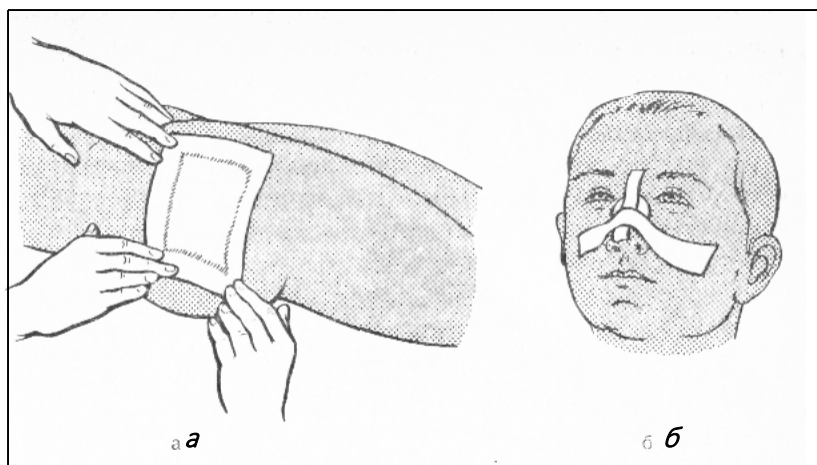


Рис. 1 Клеевые повязки:

а – клеоловая наклейка; *б* – лейкопластырная наклейка

Техника наложения клеоловой повязки. Рану закрывают несколькими слоями марли. Вокруг перевязочного материала на кожу неширокой полосой наносят слой клеола. Марлевую салфетку размером несколько большим, чем площадь перевязочного материала, в натянутом состоянии прикладывают к нанесенному слою клеола и удерживают так некоторое время. Салфетка прочно приклеивается к коже и надежно фиксирует перевязочный материал.

После снятия наклейки клеол с кожи легко удаляют тампоном, смоченным эфиром.

Техника наложения коллодиевой повязки. Коллодий (летучая жидкость, состоящая из смеси эфира, спирта и нитроцеллюлозы) тупфером наносят поверх натянутой фиксирующей салфетки, которую удерживают до тех пор, пока она прочно не приклеится к коже. Коллодий при высыхании несколько стягивает кожу, вызывая у больного неприятные ощущения. Снимается коллодиевая повязка с помощью эфира.

Техника наложения лейкопластырной повязки. Надежно фиксировать перевязочный материал можно с помощью лейкопластыря, который представляет собой полосу ткани, покрытую с одной стороны специальным клеем. Лейкопластырь выпускают в виде катушек. Клеевая сторона лейкопластыря стерильна и может накладываться непосредственно на рану. Полоски лейкопластыря накладывают поверх перевязочного материала и приклеивают с обеих сторон к коже. Лейкопластырные повязки удобны в случаях, когда необходимо сблизить края раны.

Проникающие ранения грудной клетки при оказании первой помощи должны быть закрыты окклюзионной повязкой. Лейкопластырь очень

удобен для этих целей. Полоски лейкопластыря должны быть значительно длиннее раны. Накладывание каждой полоски на рану сопровождают сближением краев раны. Начиная с нижнего угла раны последовательно закрывают ее на всем протяжении с таким расчетом, чтобы каждая последующая полоска перекрывала предыдущую на $\frac{1}{3}$ ее ширины (черепицеобразная повязка). Необходимо помнить, что длительное удержание лейкопластыря на коже вызывает раздражение, образование пузырей, мацерацию.

Лейкопластырь используют при наложении повязок с вытяжением при лечении переломов.

Для закрытия небольших ран, ссадин удобен бактерицидный пластырь, выпускаемый в специальной упаковке. В центре клеющей поверхности пластыря имеется пористый материал, пропитанный антисептическим веществом. В бактерицидном пластыре имеются мельчайшие поры, что предупреждает мацерацию кожи и не нарушает процесс заживления.

Косыночные повязки. Данный вид повязок накладывают с помощью куска ткани, вырезанного или сложенного в виде прямоугольного треугольника – косынки. Закрепление косыночной повязки осуществляется путем связывания углов косынки между собой или фиксацией их английской булавкой (рис. 2).

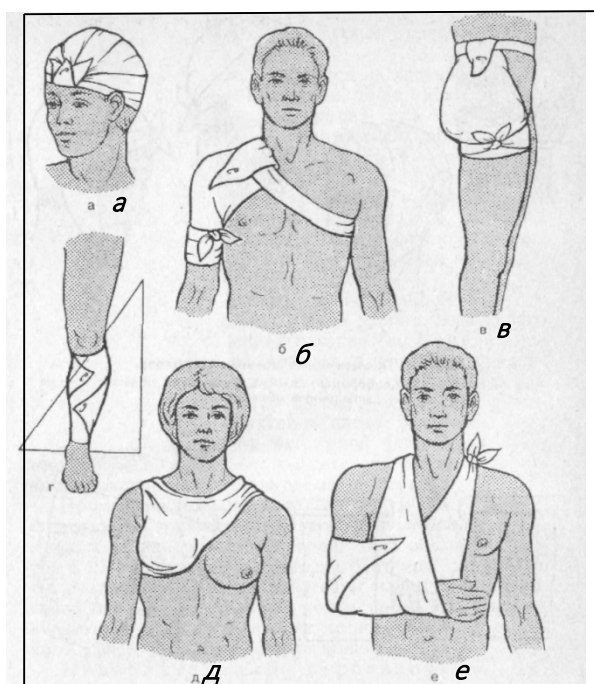


Рис. 2. Косыночные повязки:

а – на голову; *б* – на плечо и плечевой сустав (из двух косыночек); *в* – на ягодицу и область тазобедренного сустава (из двух косыночек); *г* – на голень; *д* – на молочную железу;

е – для фиксации верхней конечности

Выпускаемая промышленностью стандартная косынка для оказания первой помощи имеет размер 135х100х100 см, будучи прессованной в виде кубика размером 5х3х3 см.

Косынка (или несколько косыночек) позволяет наложить надежную повязку на любую область тела.

Наиболее часто косыночная повязка используется для подвешивания руки. Предплечье укладывают на середину косынки так, чтобы кисть находилась у самого края косынки (основания). Один конец косынки, находящийся сзади предплечья, проводят поверх здорового плеча, второй – поверх больного плеча, и связывают их между собой так, чтобы заключенное

в косынку предплечье было согнуто под прямым углом. Третий конец с некоторым натяжением обводят вокруг плеча и фиксируют его булавкой с передней части косынки.

Працевидные повязки. Для наложения працевидной повязки необходимы широкий бинт или полоска хлопчатобумажной ткани длиной 75 – 80 см. Полоску с обоих концов разрезают продольно так, чтобы центральная ее часть осталась неразрезанной на длину, необходимую для закрытия зоны повреждения. Неразрезанную часть накладывают в поперечном направлении на нужную область, надрезанные концы перекрещивают и связывают нижние с нижними, а верхние с верхними концами. Наиболее часто працевидные повязки накладывают на разные части головы (рис. 3).

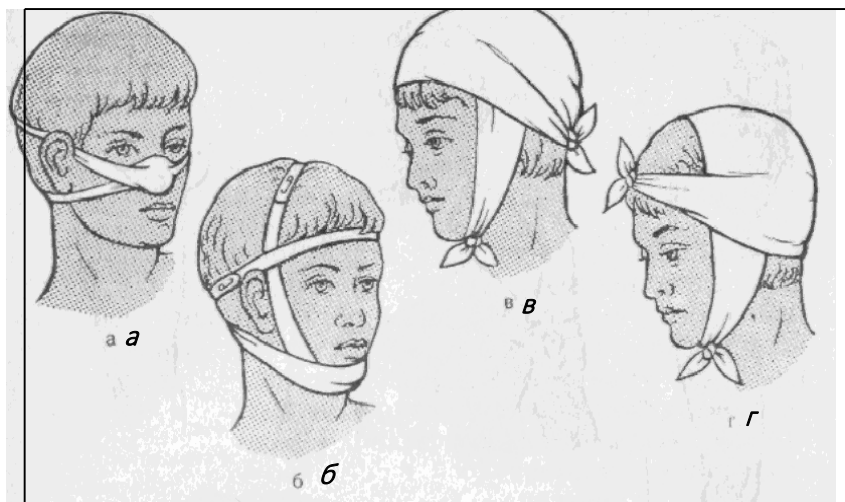


Рис. 3. Працевидные повязки на голову:

а – на нос; *б* – на подбородок; *в* – на теменную область; *г* – на затылочную область

Контурные повязки. Создаются из хлопчатобумажной ткани по контуру части тела, чаще имеют определенное назначение (поддержание или

укрепление части тела), но могут применяться для обычных целей, когда нет специального перевязочного материала. Закрепляют контурные повязки с помощью пришивных тесемок (рис. 4). К контурным повязкам относят бандаж и суспензорий – матерчатые повязки, сшитые по размеру больного. Бандаж применяют для укрепления брюшной стенки или прикрытия имеющихся в ней дефектов (грыж).

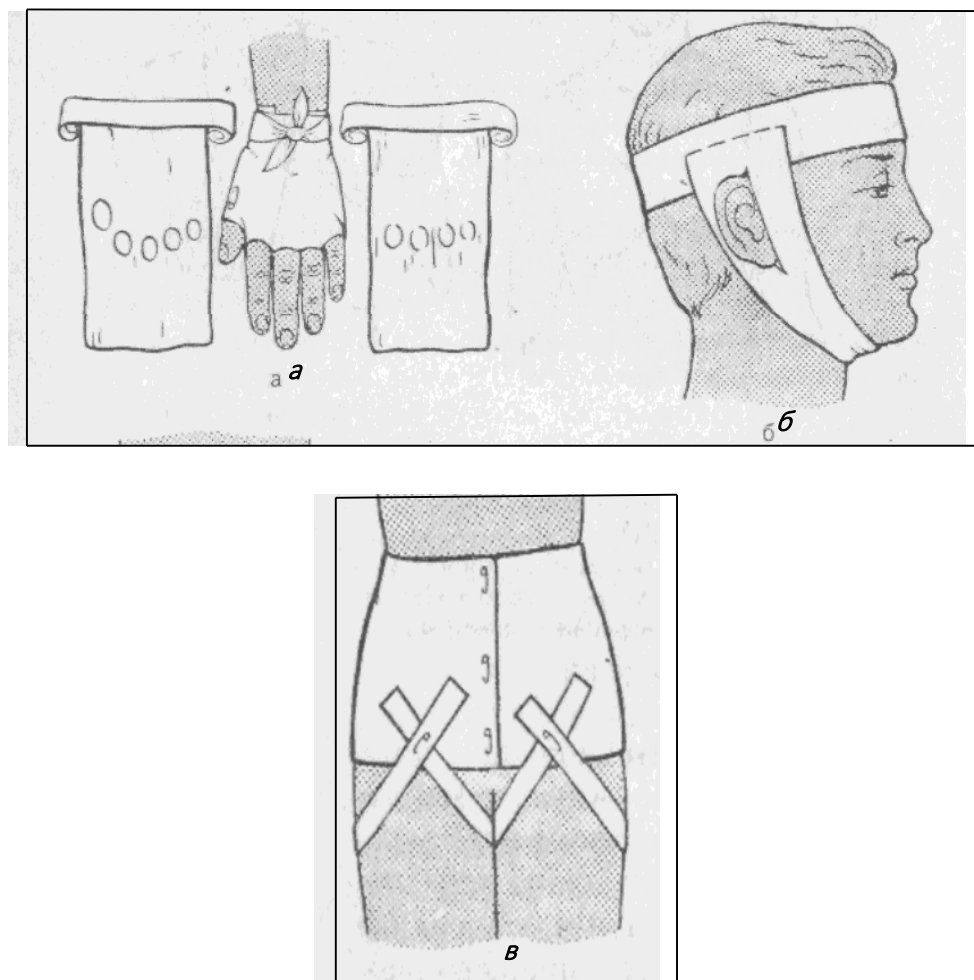


Рис. 4. Контурные повязки:

а – на кисть; *б* – на область уха и нижней челюсти; *в* – импровизированный бандаж

Бинтовые повязки. Бинт – узкая длиной в 5 – 7 м полоска марли, скатанная в виде рулона. Выпускаются бинты различной ширины:

- узкие (до 5 см) используются для наложения повязок на пальцы;
- средние (7 – 10 см) – на предплечье, кисть, голову, шею, голень, стопу;
- широкие (15 – 20 см) – на грудь, живот, бедро, таз, плечевой сустав и плечо.

Марлевый бинт легко принимает форму бинтуемой части тела. Бинтовая повязка позволяет создать равномерное давление на ткани и функциональный покой органу.

Промышленные стандартные бинты выпускаются стерильными, герметично завернутыми в вощеную бумагу, и не стерильными, упакованными обычной бумагой в пачки. При необходимости бинт можно приготовить из куска марли: ее разрезают на полосы одинаковой ширины, их сшивают между собой и скатывают в плотный валик. Узкий бинт легко сделать из широкого, разрезав скатку острым ножом.

Индивидуальный перевязочный пакет . Это готовый к употреблению специальный стерильный перевязочный материал, которым можно закрыть рану практически в любых условиях. Перевязочный пакет состоит из скатки бинта, к свободному концу которого пришта ватно-марлевая подушечка (компресс). Второй компресс нанизан на бинт и свободно перемещается по нему в любую сторону. Компрессы пропитаны каким-либо антисептическим веществом или в пакете имеется ампула с антисептическим средством. Весь перевязочный материал и булавка для закрепления повязки заключены в стерильную пергаментную бумагу и в прорезиненный мешочек, внутренняя

поверхность которого также стерильна. Такая упаковка обеспечивает длительную стерильность его содержимого даже в неблагоприятных условиях (влага, пыль и др.).

Основное правило при использовании пакета – не касаться руками той стороны компрессов, которая будет наложена на рану. Пакет берут в левую руку, правой рукой резким движением обрывают надрезанный край прорезиненного мешочка и извлекают пергаментный конверт. Осторожно развернув бумагу, левой рукой берут конец бинта с пришитой к нему ватно-марлевой подушечкой за сторону, обозначенную цветными нитками, правой – скатку бинта и руки быстро разводят в стороны. При этом между руками натягивают отрезок бинта с расположенными на нем компрессами. Компрессы помещают на рану и накладывают бинтовую повязку. При сквозном ранении один компресс накладывают на входное, второй – на выходное отверстие. Конец бинта закрепляют булавкой.

Правило наложения бинтовых повязок. Перед наложением повязки больному нужно придать наиболее удобное положение, при котором он может находиться в расслабленном состоянии, боли при этом не должны усиливаться. Накладывание повязки удобнее, если бинтуемая часть тела находится на уровне груди бинтующего.

Бинтуемой части тела, особенно конечности, придается такое положение, в котором она будет находиться после наложения повязки. Так, повязка, наложенная на коленный сустав в согнутом положении больному, которому можно ходить, будет вызывать боли, затруднит передвижение, а повязка, наложенная на локтевой сустав в разогнутом положении, сделает невозможным ношение руки на перевязи и т. д.

Повязки, длительно фиксирующие сустав в неподвижном состоянии, могут привести к развитию тугоподвижности, а иногда и полной неподвижности сустава, анкилозу. Поэтому при накладывании повязок конечностям придают наиболее выгодное физиологическое положение, позволяющее после снятия повязки легко ликвидировать полуподвижность или обеспечить удовлетворительную функцию конечности. На нижнюю конечность повязки накладывают при слегка согнутом коленном суставе и согнутой под прямым углом стопе. Повязки на плечо, предплечье и кисть следует накладывать при согнутом под прямым углом локтевом суставе, разогнутом лучезапястном суставе и несколько согнутых пальцах кисти.

Накладывая повязку, необходимо следить за реакцией больного, за выражением его лица и не причинять ему своими движениями новых болевых ощущений. Если повязка беспокоит больного, надо ее исправить – ослабить или изменить положение туров бинта.

Бинтовать следует двумя руками, осуществляя попеременно то одной, то другой рукой вращение скатки бинта вокруг бинтуемой части тела, свободной рукой расправляя туры бинта. Бинт необходимо разворачивать слева направо, головка бинта при этом будет как бы скатываться с тура бинта. Каждый накладываемый тур должен закрывать $1/2$ или $2/3$ ширины предыдущего.

Придерживаясь этих правил и используя разработанные типовые способы наложения бинтовых повязок, удастся всегда хорошо закрыть рану, прочно фиксировать повязку без лишнего расходования перевязочного материала. Повязка не должна вызывать нарушения кровообращения в конечности, которое проявляется побледнением кожи ниже повязки,

цианозом, чувством онемения, появлением пульсирующих болей. Такую повязку надо немедленно исправить или снять и наложить заново. Конец бинта можно зафиксировать, завязав узел или при помощи булавки. Узел и булавку следует располагать над здоровой частью тела.

Основные типы бинтовых повязок (рис. 5).

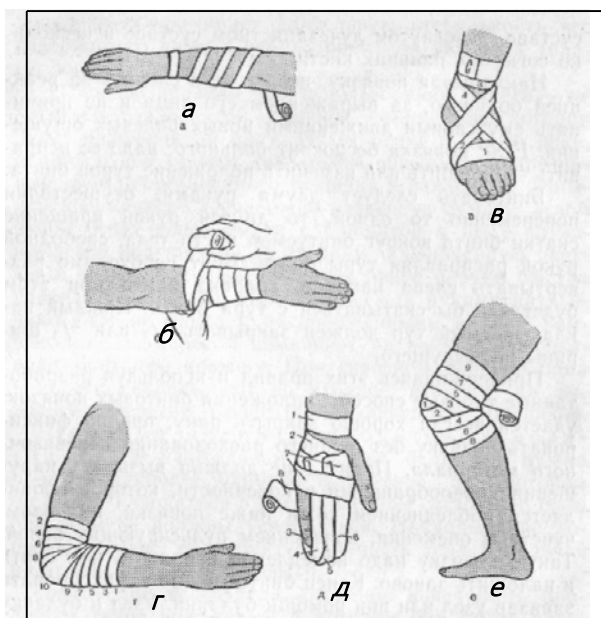


Рис. 5. Основные типы бинтовых повязок:

а — ползучая; *б* — спиральная с перегибом; *в* — восьмиобразная; *г* — сходящаяся;

д — возвращающаяся; *е* — расходящаяся.

Цифрами обозначен порядок накладывания туров бинта.

Наиболее простой по технике выполнения является *циркулярная* (круговая) повязка, при которой все туры бинта ложатся на одно и то же место, полностью прикрывая все предыдущие. Такие повязки накладывают на лоб, шею, лучезапястный сустав, нижнюю треть голени, живот.

Спиральная повязка применяется при необходимости забинтовать значительную часть тела. Такую повязку обычно накладывают снизу вверх. Начинают повязку наложением 2 – 3 циркулярных туров, затем туры бинта направляют несколько косо вверх с таким расчетом, чтобы каждый следующий тур закрывал $\frac{2}{3}$ ширины предыдущего. Спиральная повязка легко выполняется на участках с одинаковой толщиной, однако при разной толщине (голень, предплечье) добиться плотного прилегания невозможно: бинт пузырится, вследствие чего повязка становится непрочной. Для этих случаев существует прием, называемый *перегибом*. В месте, где начинается более широкая часть конечности, большим пальцем свободной руки прижимают нижний край последнего тура, бинт переворачивают, при этом его верхний край становится нижним. Перегиб повторяют несколько раз в каждом туре и тем круче, чем резче выражено различие диаметров бинтуемой конечности. В дальнейшем вновь накладывают спиральные туры. Заканчивают повязку наложением нескольких циркулярных туров.

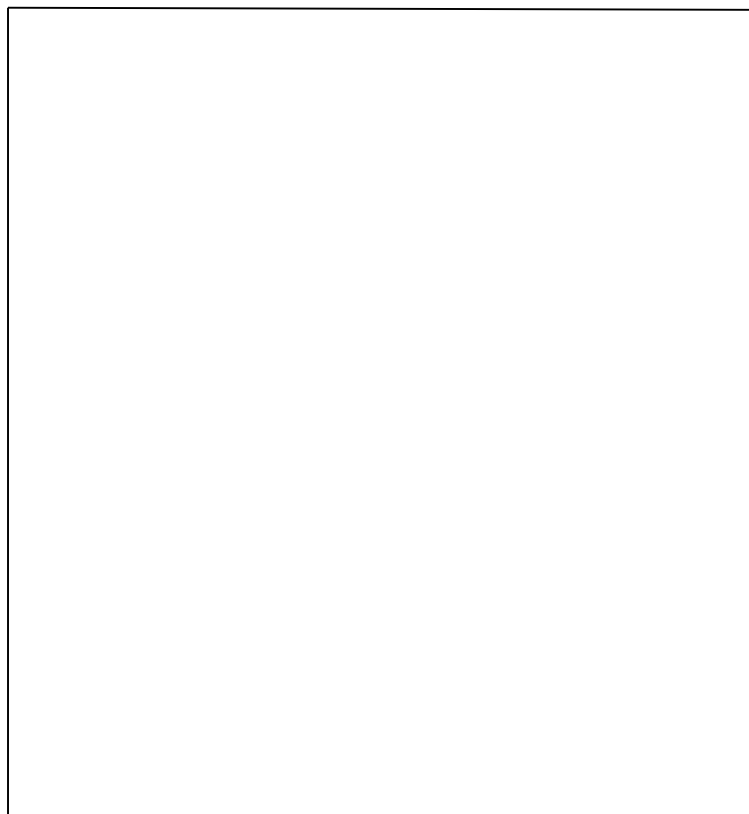
Перед наложением спиральной повязки, применяющейся с целью удержания перевязочного материала, смоченного мазью, эмульсией и др. лекарствами, для быстрого закрепления его накладывают *ползучую* (винтовую) повязку. Туры этой повязки не соприкасаются друг с другом и они могут быть быстро доведены до нижнего края перевязочного материала, после чего накладывается обычная спиральная повязка.

Восьмиобразная повязка удобна при бинтовании частей тела с неправильной и сложной формой голеностопного, плечевого, тазобедренного суставов, кисти, затылочной области и др. При этой повязке туры бинта накладывают в виде восьмерки.

Разновидностями восьмиобразной повязки являются колосовидная повязка, при которой места перекрещивания туров постепенно смещаются вверх или вниз по одной линии, сходящаяся или расходящаяся повязка, когда туры бинта, образующие восьмерку, приближаются друг к другу или расходятся.

Возвращающаяся повязка позволяет прочно фиксировать перевязочный материал на голове, культе конечности, стопе, кисти. При такой повязке туры бинта накладывают в перпендикулярных плоскостях, что достигают перегибом бинта под углом 90^0 и фиксированием области перегиба циркулярными или спиральными турами.

Сетчато-трубчатые повязки. Отечественной промышленностью выпускается новый вид перевязочного материала – сетчато-трубчатые эластичные бинты. Они предназначены для фиксации перевязочного материала и лекарственных средств практически на любых участках тела (рис. 6).



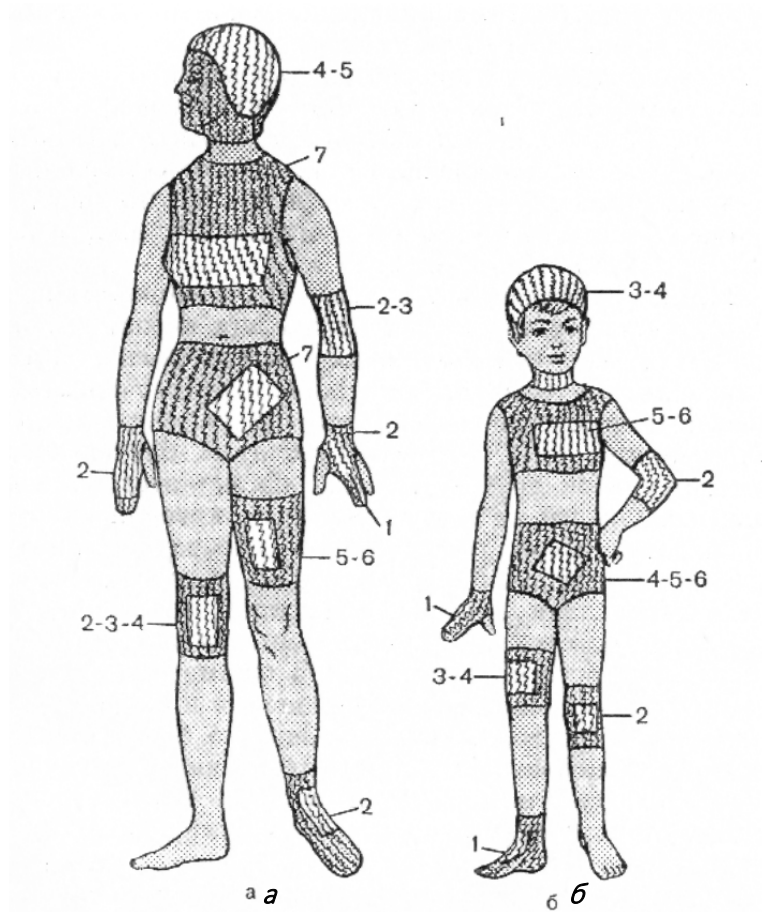


Рис. 6. Основные использования сетчато-трубчатых бинтов.

Цифрами обозначены номера бинтов, применяемых у взрослых (а) и детей (б).

Техника наложения мягких повязок на отдельные области тела

Повязки на голову и шею (рис. 7). Всю волосистую часть головы можно надежно закрыть с помощью простой бинтовой повязки – *чепца*. Отрезок узкого бинта длиной до 1 м средней его частью накладывают на теменную область, а концы впереди ушных раковин опускают вниз и удерживают в натянутом состоянии. На голову через лобную и затылочную области накладывают два циркулярных тура.

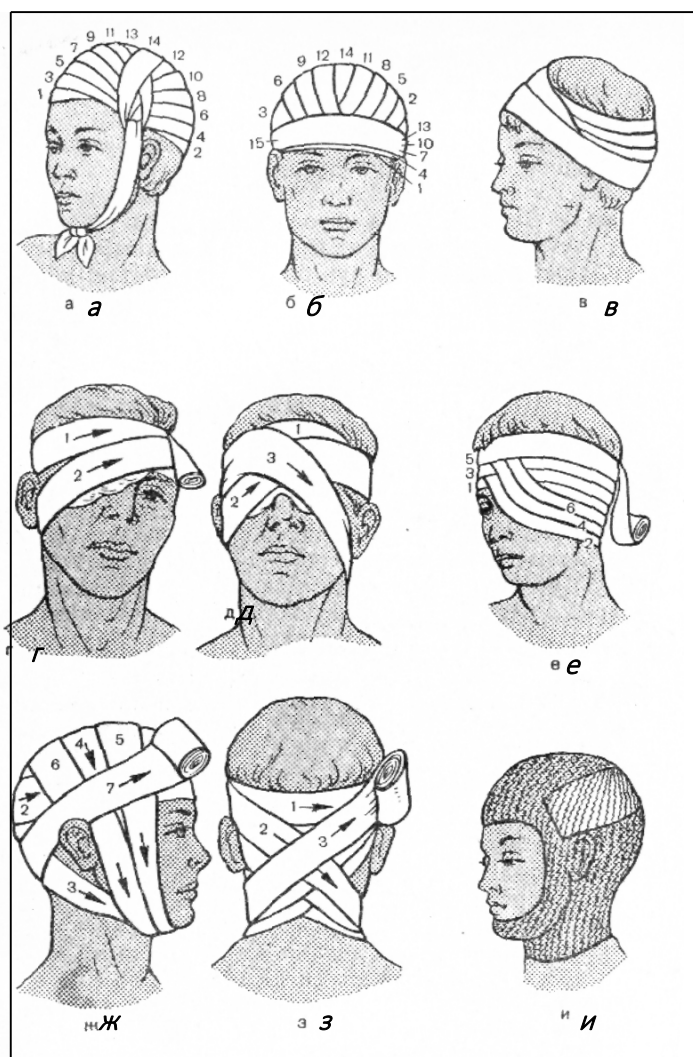


Рис. 7. Повязки на голову и на шею:

а – чепец; *б* – возвращающаяся повязка – «шапка Гиппократа»; *в* – на ухо и затылочную область – «Неаполитанская шапочка»; *г* – на глаз; *д* – на оба глаза; *е* – на глаз, ухо и затылочную область; *ж* – на нижнюю челюсть и свод черепа – «уздечка»;

з – на затылочную область и шею; *и* – сетчато-трубчатая повязка на волосистую часть головы и шею.

Третий тур доводят до бинта завязки, обводят вокруг него и через затылочную область ведут к противоположному концу бинта завязки. Здесь вновь бинт обводят вокруг завязки и накладывают следующий тур через лобно-теменную область, закрыв при этом на $\frac{2}{3}$ циркулярный тур.

Перекидывая бинт каждый раз через завязку, последовательно по типу сходящейся повязки закрывают весь свод черепа. Конец бинта привязывают к одному из концов бинта-завязки, а концы последнего связывают между собой под подбородком с некоторым натяжением.

Свод черепа можно закрыть возвращающейся повязкой, называемой *шапочкой*. Закрепив бинт двумя циркулярными турами, делают перегиб бинта в области лба и ведут его косо спереди назад до затылка, где вновь делают перегиб, и циркулярным туром закрепляют оба перегиба. Повторяя эти действия, закрывают весь свод черепа по типу сходящейся повязки. Заканчивают повязку наложением нескольких циркулярных туров. Повязка удерживается непрочно, поэтому применяется ограниченно. Более надежна повязка-шапочка, накладываемая двумя бинтами, когда каждый тур, идущий спереди назад, создаваемый одним бинтом, укрепляется циркулярными турами второго бинта.

Повязка на глаз начинается наложением циркулярного тура через лобную и затылочную области. Второй тур в затылочной области опускают ближе к шее и выводят под ухом на лицо, закрывая скуловую кость, глаз и частично переносицу, а затем выводят на лоб. Третий тур –циркулярный, закрепляющий. Следующий тур – вновь косой, закрывающий первый косой на половину его ширины, затем – опять закрепляющий. Постепенно смещая, косой тур вверх, полностью закрывают глаз. Завершают повязку циркулярным закрепляющим туром. При бинтовании левого глаза туры бинта ведут справа налево, а при бинтовании правого – слева направо. Повязка на оба глаза начинается так же, как при бинтовании правого глаза, т. е. туры идут из-под правой ушной раковины над глазом к левой половине лба, следующие два тура закрывают левый глаз. Бинт ведут из правой теменной

область сверху вниз через лоб над глазом под левую ушную раковину, и далее в затылочную область осуществляют циркулярный тур. Следующие туры вновь проводят под правым глазом и т. д.

Повязка на ухо начинается с наложения циркулярного тура через лобную и затылочную области. Последующие туры на большой стороне постепенно смещаются вниз, закрывая ухо и сосцевидный отросток. Повязку завершают наложением нескольких циркулярных туров.

Повязка на затылочную область и шею представляет собой восьмиобразную повязку. Начинают повязку с двух циркулярных туров вокруг головы, затем от левого уха бинт ведут косо вниз на затылочную область и под правым углом нижней челюсти на переднюю поверхность шеи и далее из-под челюсти вверх через затылочную область над правым ухом на лоб и т. д. Постепенно смещая место перекрестка косых туров, закрывают всю затылочную область. При необходимости закрыть шею к восьмиобразной повязке добавляют циркулярные туры вокруг шеи.

Повязку на нижнюю челюсть называют *уздечкой*.

Бинт закрепляют циркулярным туром через лобную и затылочную области, второй тур ведут через затылочную область косо вниз и под углом нижней челюсти переходят в вертикальные циркулярные туры впереди ушных раковин, закрывая теменную, височную области и нижнюю челюсть. Закрыв нижнюю челюсть, бинт из-под челюсти выводят на затылочную область и закрепляют повязку несколькими горизонтальными турами через лоб и затылок.

Сетчато-трубчатым бинтом перевязочный материал может быть надежно закреплен на любой части головы и лица.

Широко используются для закрытия ран и укрепления перевязочного материала на голове и лице пращевидные, косыночные и контурные повязки (см. рис. 7).

Повязки на грудную клетку (рис. 8). Наиболее часто используется *спиральная повязка*. Середину отрезка бинта длиной до 1,5 м накладывают через надплечье. Поверх висячего бинта на грудную клетку накладывают широким бинтом спиральную повязку снизу вверх до подмышечных впадин. Висящие концы бинта-завязки несколько натягивают, смещают к средней линии и, перекинув через другое надплечье, связывают между собой спереди над повязкой. Бинт-завязка прочно фиксирует спиральную повязку, делает ее неподвижной. Возможно применение двух бинтов-завязок.

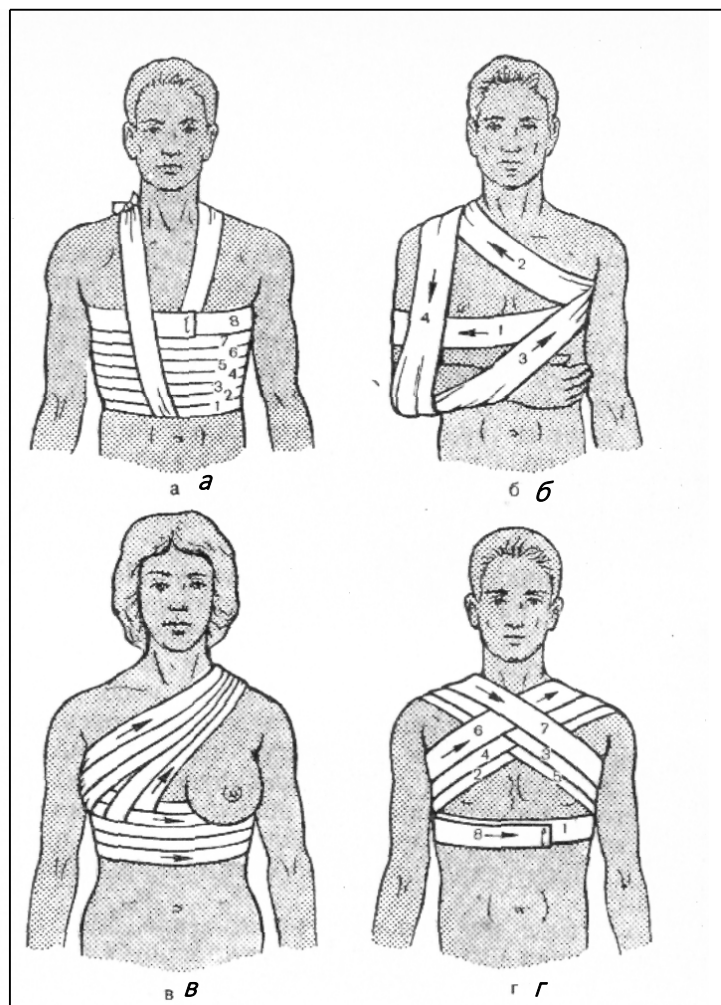


Рис. 8. Повязки на грудную клетку:

а – спиральная; *б* – повязка Дезо; *в* – на молочную железу; *г* – крестообразная на верхнюю часть грудной клетки.

Цифрами обозначен порядок накладывания туров бинта.

Повязка, фиксирующая плечевой пояс и руку к грудной клетке, – *повязка Дезо* – применяется при оказании первой медицинской помощи при переломе ключицы, плеча, после вправления вывиха плеча, удаления молочной железы. Бинтуемую руку сгибают под прямым углом в плечевом суставе, в подмышечную впадину закладывают валик из ваты величиной с кулак. Двумя циркулярными турами, которые начинают из подмышечной

впадины другой руки и ведут по передней поверхности груди, фиксируют плечо к грудной клетке. Из подмышечной впадины бинт направляют косо вверх и, перекинув через больное надплечье, опускают вертикально вниз под локоть и, охватывая предплечье снизу, приводят в подмышечную впадину. Сзади бинт ведут косо вверх, перекидывают через больное надплечье и опускают вертикально вниз впереди плеча под локоть и далее косо вверх поперек груди в подмышечную впадину выводят на переднюю поверхность грудной клетки. Этим заканчивается первый цикл туров повязки. Их повторяют несколько раз до полной фиксации плеча и предплечья. При повязке Дезо туры бинта никогда не проходят через здоровое надплечье, а косые туры на передней и задней поверхностях образуют правильные треугольники.

Повязки на молочную железу применяют с различными целями – с целью поддержания и сдавливания. Поддерживающая молочную железу повязка применяется при воспалительных процессах и после операций. Повязка на правую молочную железу выполняется в обычном направлении слева направо, на левую – справа налево. Молочную железу максимально отводят вверх и удерживают в этом положении до завершения наложения повязки. Бинт фиксируют циркулярными турами под железой, следующий тур проводят под железой косо вверх через надплечье здоровой стороны, далее косо вниз в подмышечную впадину и под больной железой переходят в циркулярный тур. Следующий тур вновь косой, но накладываемый несколько выше предыдущего, что приводит к подниманию железы. Смещая последовательно и косые и циркулярные туры вверх, удастся максимально поднять молочную железу. При необходимости сдавления молочной железы туры бинта продолжают накладывать до тех пор, пока вся железа не будет

закрыта повязкой. При этом туры накладывают с натяжением, подкладывают под эти туры несколько слоев марли.

Повязка на обе молочные железы начинается аналогично повязке на правую железу. После наложения туров на правую железу переходят к той же манипуляции на левой железе. Циркулярный тур проводят под левой молочной железой к левой подмышечной ямке, сзади бинт направляют косо вверх и через правое надплечье на переднюю поверхность грудной клетки, далее его ведут через промежуток между железами под левую молочную железу, переводя его в циркулярный тур вокруг спины, который является началом нового цикла туров, на правую железу. Поочередно повторяя циклы, закрывают обе железы.

Повязки на живот и таз (рис. 9). Верхняя и средняя части живота надежно могут быть закрыты спиральной повязкой, которая не смещается. Для предупреждения смещения циркулярной повязки, накладываемой на нижнюю половину живота, ее фиксируют к бедру. Накладывают спиральную повязку сверху вниз, последний тур со спины ведут через зону подвздошной кости, направляют вниз на переднюю поверхность бедра и выполняют циркулярный тур вокруг него, далее бинт направляют косо вверх по передней поверхности живота до верхней границы повязки, где выполняется несколько циркулярных туров. Далее следует еще один тур, фиксирующий повязку к бедру: его ведут по спине косо сверху вниз до подвздошной кости, а затем через паховую область на бедро. Закрепляют бинт циркулярным туром, переводят его на переднюю брюшную стенку, где завершают повязку наложением нескольких спиральных туров.

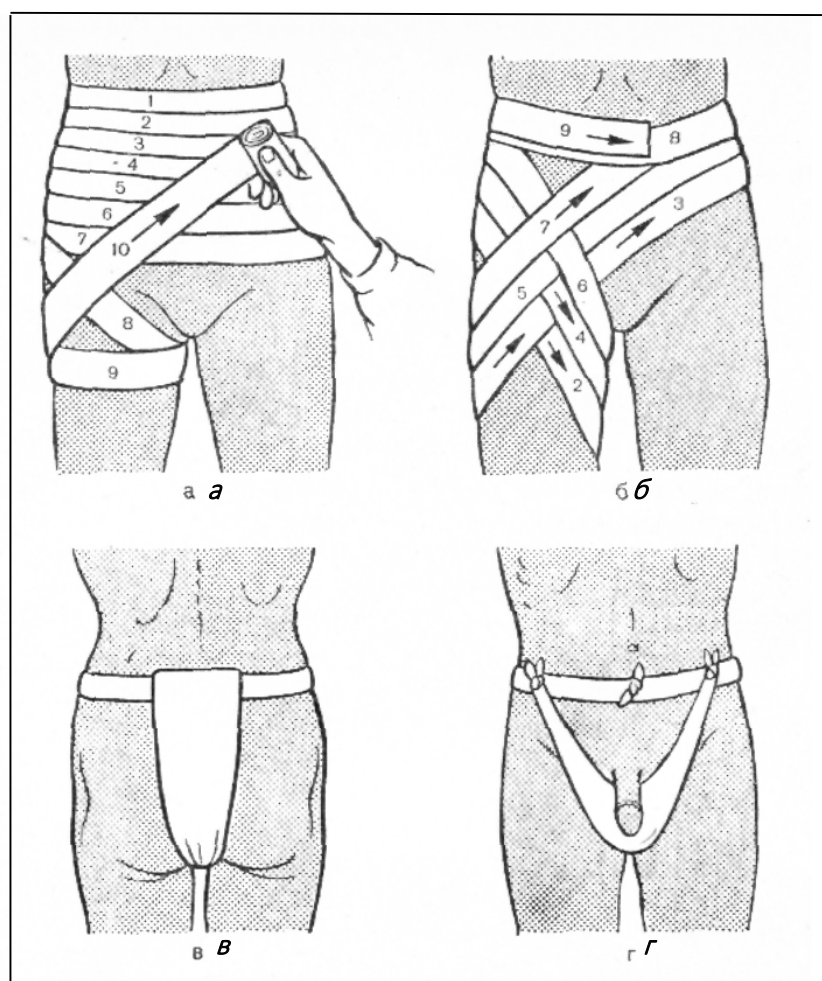


Рис. 9. Повязки на живот, таз и промежность:

а – спиральная с фиксацией к бедру; *б* – на нижнюю половину живота и паховую область;

в – Т-образная на промежность; *г* – суспензорий.

Цифрами обозначен порядок накладывания туров бинта.

Повязка на паховую область (см. рис. 9). Наиболее удобно закрыть паховую область колосовидной повязкой. Бинт закрепляют циркулярным туром на животе. Если необходимо закрыть правую область, ведут бинт слева направо, а левую – справа налево. Следующий тур – косой: тотчас после перехода в поясничную область его направляют косо вниз над крестцом, ягодицей и по большому вертелу, выводят на переднюю поверхность бедра и

далее бинт накладывают косо вниз, снаружи внутрь, обводят бедро сзади на переднюю поверхность к лонному сочленению и далее через подвздошную кость противоположной стороны на поясницу. Затем накладывают необходимое число туров по ходу первого косого тура с некоторым его смещением. Создавая колосовидную повязку, косые туры можно сочетать с циркулярными, что позволяет надежно закрыть нижние отделы живота, ягодицу, паховую область и верхнюю треть бедра. Заканчивают повязку циркулярными турами на животе.

Повязка на верхнюю конечность. Верхняя конечность имеет сложную конфигурацию, поэтому повязки на нее очень разнообразны и каждая из них включает в себя комбинацию различных типов повязок.

На палец можно наложить два вида повязок. *Спиральная повязка на палец* (рис. 10, а) накладывается узким бинтом. Несколькими круговыми турами бинт фиксируют в области запястья. При бинтовании правой кисти туры накладывают слева направо, левой – справа налево. От запястья бинт проводят косо по тыльной поверхности кисти к основанию пальца. Далее накладывают два винтовых нисходящих тура до ногтевой фаланги, а затем – спиральную восходящую повязку до основания пальца. Бинт выводят через межпальцевый промежуток на тыл кисти к запястью, где и фиксируют его циркулярным туром. Последовательно переходя на другие пальцы, можно наложить повязку на все пальцы – *перчатку*.

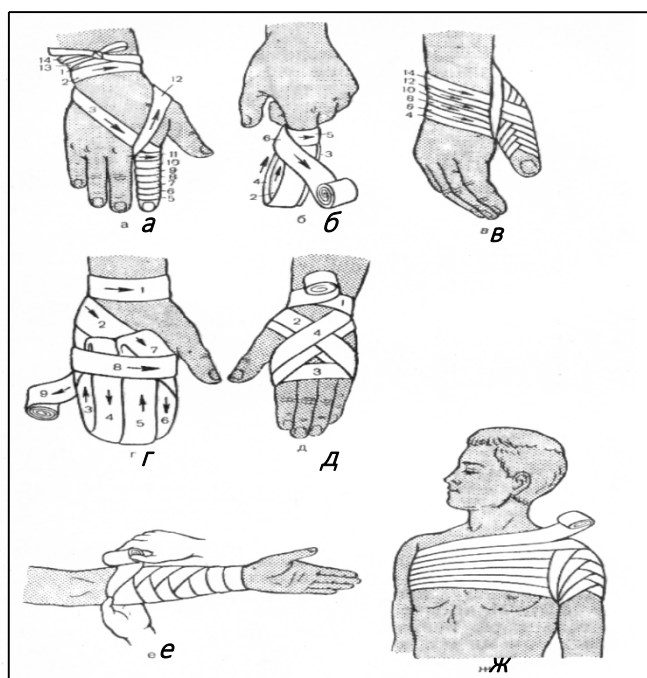


Рис. 10. Повязка на верхнюю конечность:

- а – спиральная на палец; б – возвращающаяся на палец; в – колосовидная на 1 палец;
 г – возвращающаяся на пальцы и кисть – «варежка»; д – на кисть и лучезапястный сустав;
 е – спиральная над предплечье; ж – колосовидная на плечевой сустав.

Возвращающаяся повязка на палец (см. рис. 10, б). Вначале накладывают несколько слоев бинта попеременно – то на тыльную, то на ладонную поверхность пальца, которые фиксируют круговым туром у основания, а затем винтовым – до ногтевой фаланги. Окончательно формируют повязку наложением спиральных восходящих туров. Фиксируют бинт завязыванием его у основания пальца. Аналогичную повязку можно наложить на все пальцы и кисть – повязка «варежка».

Колосовидная повязка на 1 палец начинается с фиксации бинта на запястье, затем бинт ведут косо через тыльную поверхность кисти и большого пальца к ногтевой фаланге, обводят вокруг пальца и возвращают через тыл кисти к лучезапястному суставу. В дальнейшем эти восьмиобразные туры

повторяют несколько раз, последовательно смещая перекрест бинтов на пальце к его основанию (рис. 10, в). Фиксируют бинт на запястье.

Повязка на кисть и лучезапястный сустав (рис. 10, д) представляет собой комбинацию круговой и восьмиобразной повязок. Наложив несколько круговых туров на область лучезапястного сустава, бинт через тыл кисти проводят через первый межпальцевый промежуток на ладонную поверхность кисти и накладывают несколько круговых туров на кисть. Бинт возвращают через тыл кисти на предплечье. Восьмиобразные туры повторяют несколько раз с переплетом их на тыле кисти. Бинт фиксируют круговыми турами в области лучезапястного сустава. Предплечье надежно можно закрыть спиральной повязкой (рис. 10, е).

Повязку на область локтевого сустава накладывают при сгибании руки в локтевом суставе под углом в 90°. Бинт несколькими круговыми турами фиксируют на плече тотчас выше сустава, а затем выполняют сходящуюся восьмиобразную повязку с перекрестом туров в зоне локтевой ямки. Последние туры закрывают локтевой отросток. Фиксируют бинт круговым туром на плече.

Колосовидная повязка на область плечевого сустава (рис. 10, ж). На плечо ближе к подмышечной впадине накладывают 3 круговых тура. Из подмышечной впадины начинают четвертый тур, ведут его косо вверх по наружной поверхности плеча на спину и далее вокруг груди до начала этого тура. Пятый тур бинта ведут через область плечевого сустава, несколько прикрыв предыдущий тур, косо вниз вокруг плеча и через подмышечную впадину на переднюю поверхность плечевого сустава, который переходит в

следующий тур, аналогичный четвертому. Последовательно смещая туры бинта, полностью закрывают область сустава.

Повязки на нижнюю конечность. На стопе отдельно бинтуют только *1 палец*. Повязка на 1 палец стопы начинается с закрепления бинта несколькими круговыми турами на уровне лодыжек (рис. 11, *а*). Следующий тур проводят по тылу стопы и 1 пальца, закрывая его полностью. Бинт накладывают на палец спиральной восходящей повязкой до его основания, после чего бинт выводят через межпальцевый промежуток на тыл стопы и фиксируют циркулярным туром на голени.

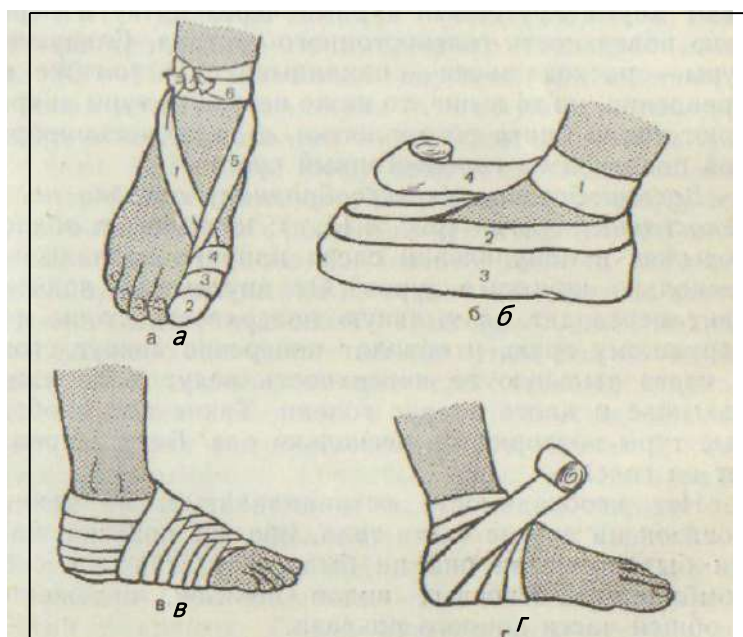


Рис. 11. Повязки на нижнюю конечность:

а – спиральная повязка на 1 палец; *б* – возвращающаяся повязка на всю стопу;

в – сходящаяся повязка на пятку; *г* – восьмиобразная повязка на тыл стопы и пятку.

Возвращающаяся повязка на дистальные отделы стопы. Закрепив бинт несколькими круговыми турами на голени, его выводят на тыльную

поверхность стопы, перекидывают через пальцы и закрывают подошвенную поверхность стопы, где бинт перегибают и возвращают на тыльную поверхность. Несколькими возвращающимися турами закрывают весь дистальный отдел стопы, после чего закрепляют эти туры восходящей спиральной повязкой. Бинт закрепляют круговыми турами на голени.

Повязка на всю стопу (рис. 11, б). Бинт круговыми турами закрепляют на голени, после чего укрывают боковые поверхности стопы циркулярными турами (без натяжения) через пятку и пальцы. Эти туры фиксируют восходящей спиральной повязкой от пальцев до голени.

Черепашью повязку на пятку (рис. 11, в) начинают двумя круговыми турами через пятку и переднюю поверхность голеностопного сустава. Следующие туры – расходящиеся – накладывают в том же направлении, но то выше, то ниже его. Эти туры закрепляют ходом бинта вокруг пятки, а далее восьмиобразной повязкой на голеностопный сустав.

Восьмиобразная (крестообразная) повязка на голеностопный сустав (рис. 11, г): на голень в области лодыжек в направлении слева направо накладывают несколько круговых туров. От внутренней лодыжки бинт переводят на тыльную поверхность стопы к ее наружному краю, обводят поперечно вокруг стопы и через тыльную ее поверхность ведут к наружной лодыжке и далее вокруг голени. Такие восьмиобразные туры повторяются несколько раз. Бинт закрепляют на голени.

Нет необходимости останавливаться на технике повязок на другие части тела, ибо все повязки, какими бы сложными они ни были, представляют собой комбинацию основных видов повязок, изложенных в общей части данного раздела.

ТВЕРДЫЕ ПОВЯЗКИ

Твердые повязки применяют при необходимости создания неподвижности какой-либо части тела (иммобилизующие повязки) или с целью исправления (коррекции) неправильного её положения (корректирующие повязки). При накладывании твердых повязок с лечебной целью чаще используют быстротвердеющие материалы: гипс, пластмассу, клей, крахмал. Иммобилизующие повязки, накладываемые на период транспортировки пострадавшего в медицинское учреждение, выполняют с помощью шин, сделанных из исходно твердых материалов – дерева, металла, пластмассы.

Транспортная иммобилизация – это обеспечение неподвижности какой-либо части тела пострадавшего до момента доставки его в лечебное учреждение. Благодаря созданию неподвижности резко уменьшаются боли, что является основным моментом в профилактике шока. Кроме того, иммобилизация предупреждает смещение отломков и тем самым уменьшает угрозу возможного ранения острыми краями отломков частей сосудов, нервов, мышц, удерживает отломки костей в соприкосновении друг с другом, что значительно облегчает дальнейшее лечение переломов.

Иммобилизацию можно проводить с помощью подручных средств (палки, лыжи и др.), путем аутоиммобилизации – прибинтовывание руки к туловищу пострадавшего, ноги к здоровой ноге или с применением специальных транспортных шин.

Основные правила проведения транспортной иммобилизации:

— шину накладывают на месте происшествия, прямо на одежду и обувь пострадавшего;

— пострадавшему обязательно дают обезболивающие средства: 2 таблетки анальгина по 0,5 г, внутримышечно 50 %-й раствор анальгина или 2 %-й раствор промедола;

— если на одежде присутствуют следы крови, то перед наложением шины следует разрезать одежду в этом месте, осмотреть рану, остановить кровотечение и наложить асептическую повязку;

— перед наложением шины осторожно придают конечности функционально выгодное положение. Руку сгибают в локте под углом 90° , в подмышечную область кладут валик, обеспечивающий отведение плеча на 5° . Если повреждена нога, под колено помещают валик, обеспечивающий сгибание в тазобедренном и коленном суставах под углом 5° , стопу устанавливают под углом 90° ;

— шина обязательно должна захватывать 2 соседних от места перелома сустава при переломах предплечья и голени и три сустава – при переломах бедра и плеча;

— прибинтовать шину следует надежно, но при этом надо следить, чтобы бинты и средства иммобилизации не вдавливались в кожу;

— все действия, в том числе перекладывание пострадавшего, выполняются, не причиняя ему лишних страданий.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА 4

Задание: выбрать четыре объекта и осуществить обследование и предписание.

Акт обследования объекта и предписание

Образец

Акт-предписание N _____

(наименование проверяемой организации
или индивидуального предпринимателя и
вышестоящей организации)

(должность, Ф.И.О. представителя
юридического лица или представителя
индивидуального предпринимателя)

Мною, государственным инспектором по энергетическому надзору
Управления государственного энергетического надзора _____ комиссией в
составе: _____

(фамилия, имя, отчество, должность)

на основании распоряжения (приказа) органа государственного
энергетического надзора

_____ от _____ 20__ г N _____

в присутствии _____

(должность, фамилия, имя, отчество)

в период с _____ по _____ 200__ г. проведена
проверка

(вид проверки)

(наименование проверяемой организации)

по теме _____

Краткая характеристика установленного оборудования, характеристика сетей:

В результате проведенной проверки установлено:

1. _____
2. _____
3. _____

Предписание

В порядке государственного энергетического надзора предлагается выполнить следующие мероприятия по устранению выявленных нарушений:

_____Срок
исполнения_____

Выводы:

1. _____
2. _____

Информацию о выполнении настоящего акта-предписания представлять

(Куда, кому, срок и порядок представления)

Инспектор
(старший группы, председатель комиссии,
члены комиссии)

(личный штамп) _____
(подпись) (Ф.И.О.)

При проверке присутствовали:

(должность) (подпись) (Ф.И.О.)

Акт-предписание (_____ экз.) для исполнения получил:

(руководитель) (подпись) (Ф.И.О.)

проверяемой организации)
Рег. N _____

Акт обследования объекта

г. _____ «____»
_____ 201__ года.

В _____ связи с _____

комиссией в составе:

Председатель _____ комиссии

Члены _____ комиссии

_____,
(далее – «Комиссия»), в присутствии собственника объекта, проведен его
обследование, а именно следующих помещений, расположенных по адресу

_____:

_____, находящиеся на
балансе _____, на предмет
фактического установления следующего факта

_____.
В результате осмотра комиссией, установлено следующее.

_____.

Подписи:

Председатель

КОМИССИИ

Члены

КОМИССИИ

_____.

Особое

мнение

_____.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ»**

Специальность
21.05.03 Технология геологической разведки

Авторы: Гребенкин С.М., Кузнецов А.М., Тетерев Н.А.

Екатеринбург
2020

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1. РАСЧЕТ ПОТРЕБНОГО ВОЗДУХООБМЕНА

Цель практического занятия — закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Человек и среда обитания: воздействия негативных факторов окружающей среды на человека», и формирование практических навыков расчета воздухообмена в производственных помещениях необходимого для очистки воздуха от вредных веществ: для удаления вредных веществ (выделяющихся вредных газов, паров и пыли); для удаления излишних водяных паров; для удаления избыточного тепла.

Общие сведения. Среда обитания — это окружающая человека среда, осуществляющая через совокупность факторов (физических, биологических, химических и социальных) прямое или косвенное воздействие на жизнедеятельность человека, его здоровье, трудоспособность и потомство. В жизненном цикле человек и окружающая среда обитания непрерывно взаимодействуют и образуют постоянно действующую систему «человек — среда обитания», в которой человек реализует свои физиологические и социальные потребности. В составе окружающей среды выделяют природную, техногенную, производственную и бытовую среду. Каждая среда может представлять опасность для человека. В данной работе рассматривается расчет потребного воздухообмена (L м³/ч), для очистки воздуха от вредных газов и паров и для удаления избыточного тепла с помощью механической общеобменной вентиляции.

Задание. В помещении объемом V работают n человек со средней производительностью a каждый. Они производят покраску и шпаклевку изделий нитро- (на основе ацетона) красками, эмалями и шпаклевками, для чего используется ручное и механизированное оборудование. В этом же помещении производится пайка N контактов припоем ПОС-60. Источники тепловыделения

– оборудование мощностью $P_{ном}$ и осветительная сеть мощностью $P_{осв}$ из люминесцентных ламп. Расчеты вести для холодного периода года. Помещение имеет K окон направленных на север размерами $2,5 \times 1,75$ м с двойным остеклением и деревянными рамами. Категория работ – III (тяжелая).

Рассчитать потребный воздухообмен и определить кратность воздухообмена для: 1) испарений растворителей и лаков; 2) при пайке припоем ПОС-60; 3) удаления выделяемой людьми углекислоты; 4) удаления избыточного тепла.

Методика и порядок расчета воздухообмена для очистки воздуха.

Потребный воздухообмен определяется по формуле

$$L = \frac{G \times 1000}{x_n - x_v}, \text{ м}^3/\text{ч}, \quad (1.1)$$

где L , $\text{м}^3/\text{ч}$ – потребный воздухообмен; G , $\text{г}/\text{ч}$ – количество вредных веществ, выделяющихся в воздух помещения; x_v , $\text{мг}/\text{м}^3$ – предельно допустимая концентрация вредности в воздухе рабочей зоны помещения, согласно ГОСТ 12.1.005-88 [1]; x_n , $\text{мг}/\text{м}^3$ – максимально возможная концентрация той же вредности в воздухе населенных мест (ГН 2.1.6.1338- 03) **4**.

Применяется также понятие кратности воздухообмена (n), которая показывает сколько раз в течение одного часа воздух полностью сменяется в помещении. Значение n **4** может быть достигнуто естественным воздухообменом без устройства механической вентиляции.

Кратность воздухообмена определяется по формуле

$$n = \frac{L}{V_n}, \text{ ч}^{-1}, \quad (1.2)$$

где n , $\text{раз}/\text{ч}$ – кратность воздухообмена; L , $\text{м}^3/\text{ч}$ – потребный воздухообмен; V_n – внутренний объем помещения, м^3 .

Согласно СП 2.2.1.1312-03, кратность воздухообмена $n > 10$ недопустима.

Так как x_n определяется по табл. 1.1 прил.1, а x_v по табл. 1.2 прил.1, то для расчета потребного воздухообмена необходимо в каждом случае определять

количество вредных веществ, выделяющихся в воздух помещения.

Таблица 1.0

Исходные данные для расчёта потребного воздухообмена

№ вар.	a , м ² /ч	Материал	n чел.	V м ³	N шт/час	Местность	$P_{\text{ном.}}$ кВт	$P_{\text{осв.}}$ кВт	m окон
1	2	Бесцветный	1	100	40	Сельские населенные пункты	10	0,5	2
2	1,5	аэролак, окраска кистью	2	200	35		20	0,5	3
3	1		3	300	400		30	1	4
4	2		4	400	45		40	1	5
5	3	Цветной	1	500	305	Малые города	200	1	6
6	4	аэролак, окраска механизир.	1	600	48		150	1,5	6
7	3,5		1	700	450	Большие города	200	1	6
8	5		1	800	480		100	2	8
9	0,2	Шпаклевка	3	80	325		10	0,5	2
10	0,3	кистью	4	200	420	Сельские населенные пункты	20	1	4
11	1,5	Шпаклевка	1	200	250		30	1	3
12	1	механизир,	2	300	450		40	1,5	4
13	0,8	Бесцветный	1	150	300	Малые города	50	0,6	2
14	1	аэролак, окраска	2	150	48		60	0,8	3
15	1,2		1	120	335		70	1	2
16	0,7	кистью	2	200	400	Большие города	80	1,2	4
17	2	Цветной	1	200	280		90	0,6	4
18	2,5	аэролак, окраска механизир.	2	400	480		100	0,8	6
19	2,2		1	400	290	Сельские населенные пункты	150	1,2	8
20	1,8		2	600	300		200	1,5	8
21	0,3	Шпаклевка	1	80	200		250	0,5	I
22	0,4	кистью	2	100	250	Малые города	300	0,6	2
23	1	Шпаклевка	1	150	242		60	1	2
24	1	механизир.	2	400	440	Большие города	80	1	3
25	1,5	Шпаклевка	1	100	270		100	1,2	4
26	2	кистью	3	200	180		150	0,5	6

Рассмотрим отдельные характерные случаи выделения вредных веществ в воздух помещения и определения потребного воздухообмена.

1.1. Определение воздухообмена при испарении растворителей и лаков

Испарение растворителей и лаков обычно происходит при покраске различных изделий. Количество летучих растворителей, выделяющихся в воздухе помещений можно определить по следующей формуле

$$G = \frac{a \times A \times m \times n}{100}, \text{ г/ч}, \quad (1.3)$$

где a , м²/ч – средняя производительность по покраске одного рабочего (при ручной покраске кистью – 12 м²/ч, пульверизатором – 50 м²/ч); A , г/м² – расход лакокрасочных материалов; m , % – процент летучих растворителей, содержащихся в лакокрасочных материалах; n – число рабочих, одновременно занятых на покраске.

Численные значения величин A и m определяются по табл. 1.3 прил. 1.

Пример. Определить количество выделяющихся в воздух помещения летучих растворителей.

Решение:

По табл. 3 прил. 1 для цветного аэролака при окраске распылением находим, что $A = 180$ г/м², $m = 75$ %, тогда $G = 50 \cdot 180 \cdot 75 \cdot 2 / 100 = 13500$ г/ч. Далее определяем потребный воздухообмен в помещении по формуле (1.3). Находим для ацетона из табл. 1.1 и 1.2 прил. 1, что $x_v = 200$ мг/м³, $x_n = 0,35$ мг/м³, тогда $L = 13500 \cdot 1000 / (200 - 0,35) = 67500$ м³/ч.

Ответ: $L = 67500$ м³/ч.

1.2. Определение потребного воздухообмена при пайке электронных схем

Пайка осуществляется свинцово-оловянным припоем ПОС-60, который

содержит $C = 0,4$ доли объема свинца и 60 % олова. Наиболее ядовиты аэрозоли (пары) свинца.

В процессе пайки из припоя испаряется до $B = 0,1$ % свинца, а на 1 пайку расходуется 10 мг припоя. При числе паяк – N , количество выделяемых паров свинца определяется по формуле

$$G = C \times B \times N, \text{ мг/ч}, \quad (1.4)$$

где G , г/ч – количество выделяемых паров свинца; C – содержание свинца; B – % свинца; N – число паяк.

Пример. В помещении объемом $V_{\text{п}} = 1050 \text{ м}^3$ три человека осуществляют пайку припоем ПОС-40 с производительностью по 100 контактов в час. Найти требуемую кратность воздухообмена.

Решение:

По формуле (1.4) определяем количество аэрозолей свинца, выделяемых в воздух: $G = 0,6 \cdot 0,001 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 3 = 1,8 \text{ мг/ч}$. Далее определяем потребный воздухообмен по формуле (1.1). Находим из табл. 1.1 и 1.2 прил. 1 для свинца и его соединений $x_{\text{в}} = 0,01 \text{ мг/м}^3$; $x_{\text{н}} = 0,001 \text{ мг/м}^3$. Тогда $L = 1,8 / (0,01 - 0,001) = 200,0 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Ответ: $L = 185,5 \text{ м}^3/\text{ч}$.

1.3. Определение воздухообмена в жилых и общественных помещениях

В жилых и общественных помещениях постоянным вредным выделением является выдыхаемая людьми углекислота (CO_2). Определение потребного воздухообмена производится по количеству углекислоты, выделяемой человеком и по допустимой концентрации её.

Количество углекислоты в зависимости от возраста человека и выполняемой работы, а также допустимые концентрации углекислоты для различных помещений приведены в табл. 1.4 и 1.5 прил. 1.

Содержание углекислоты в атмосферном воздухе можно определить по химическому составу воздуха. Однако, учитывая повышенное содержание углекислоты в атмосфере населенных пунктов, следует принимать при расчете содержания CO_2 следующие значения: для сельских населенных пунктов – $0,33 \text{ л/м}^3$, для малых городов (до 300 тыс. жителей) – $0,4 \text{ л/м}^3$, для больших городов (свыше 300 тыс. жителей) – $0,5 \text{ л/м}^3$.

Пример. Определить требуемую кратность воздухообмена в помещении, где работают 3 человека.

Решение:

По табл. 1.4 прил.1 определяем количество CO_2 , выделяемой одним человеком $g = 23 \text{ л/ч}$. По табл. 1.5 прил. 1 определяем допустимую концентрацию CO_2 . Тогда $x_{\text{в}} = 1 \text{ л/м}^3$ и содержание CO_2 в наружном воздухе для больших городов $x_{\text{н}} = 0,5 \text{ л/м}^3$. Определяем требуемый воздухообмен по формуле (1.1) $L = 23 \cdot 3 / (1 - 0,5) = 138 \text{ м}^3/\text{ч}$. Ответ: $L = 138 \text{ м}^3/\text{ч}$.

1.4. Определение требуемого воздухообмена при выделении газов (паров) через неплотности аппаратуры, находящейся под давлением

Производственная аппаратура, работающая под давлением, как правило, не является вполне герметичной. Степень герметичности аппаратуры уменьшается по мере ее износа. Считая, что просачивание газов через неплотности подчиняется тем же законам, что и истечение через небольшие отверстия, и, предполагая, что истечение происходит адиабатически, количество газов, просочившихся через неплотности, можно определить по формуле

$$G = k \times c \times \sqrt{\frac{M}{T}}, \text{ кг/ч,} \quad (1.5)$$

где k – коэффициент, учитывающий повышение утечки от износа оборудования

($k = 1-2$); c – коэффициент, учитывающий влияние давление газа в аппарате; v – внутренний объем аппаратуры и трубопроводов, находящихся под давлением, м^3 ; M – молекулярный вес газов, находящихся в аппаратуре; T – абсолютная температура газов в аппаратуре, К.

Таблица 1.2

Коэффициент, учитывающий влияние давление газа в аппарате

Давление p , атм	до 2	2	7	17	41	161
c	0,121	0,166	0,182	0,189	0,25	0,29

Пример. Система, состоящая из аппаратов и трубопроводов, заполнена сероводородом. Рабочее давление в аппаратуре $p_a = 3$ атм, а в проводящих трубопроводах $p_{\text{тр}} = 4$ атм. Внутренний объем аппаратуры $v_a = 5 \text{ м}^3$, объем трубопроводов, $v_{\text{тр}} = 1,2 \text{ м}^3$. Температура газа в аппаратуре – $t_a = 120 \text{ }^\circ\text{C}$, в трубопроводе – $t_{\text{тр}} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Определить потребный воздухообмен в помещении.

Решение:

Определяем величины утечек сероводорода (H_2S) из аппаратуры и трубопроводов. Принимаем $k = 1,5$; $c = 0,169$ (по табл. 1.2); $M = 34$, для H_2S ; Утечка газа из аппаратуры составляет:

$$G_a = 1,5 \times 0,169 \times \sqrt{\frac{34}{393}} = 0,372$$

Утечка газа из трубопроводов составляет:

$$G_{\text{тр}} = 1,5 \times 0,172 \times 1,2 = 0,104$$

$$G = G_a + G_{\text{тр}} = 0,372 + 0,104 = 0,476, \text{кг/ч}$$

Используя данные табл. 1.1 прил. 1, находим, что для сероводорода $x_v = 10 \text{ мг/м}^3$; $x_n = 0,008 \text{ мг/м}^3$. Потребный воздухообмен равен

$$L = \frac{4761000}{(10 - 0,008)} = 47638,1 \text{ м}^3/\text{ч}$$

Ответ: $L = 47638,1 \text{ м}^3/\text{ч}$

Вывод: В воздухе помещения одновременно могут выделяться несколько вредных веществ. По действию на организм человека они могут быть однонаправленными и разнонаправленными. Для однонаправленных веществ расчетные значения требуемого воздухообмена суммируются, а для разнонаправленных веществ выбирается наибольшее значение требуемого воздухообмена.

Пример. Для первой вредности в воздухе рабочей зоны – вредных (токсичны) веществ в рассмотренных примерах все относятся к веществам разнонаправленного действия, поэтому принимаем к дальнейшему расчету максимальное из полученных значений, т. е. $L = 67500 \text{ м}^3/\text{ч}$ (требуемый воздухообмен для паров растворителей при окраске).

Для проверки соответствия требованиям устройства вентиляции определим кратность воздухообмена $n = 67500/4800 = 14,1 \text{ ч}^{-1}$. Данное значение превышает установленную величину – 10 ч^{-1} , поэтому необходимо принять дополнительное решение по устройству вентиляции в помещении. Например, таким решением может быть исключение распространения от двух мест окраски растворителей по всему помещению за счет применения местной вытяжной вентиляции.

Расчет объема воздуха удаляемого местной вентиляцией определяется по формуле

$$L_{\text{МВ}} = F \times v \times 3600, \text{ м}^3/\text{ч}, \quad (1.6)$$

где F – площадь сечения всасывающих отверстий, м^2 ; v – скорость воздуха в сечении вытяжной вентиляции, $\text{м}/\text{с}$. Рекомендуется принимать значение скорости в интервале $0,8-1,5 \text{ м}/\text{с}$.

Таким образом, требуемый воздухообмен для оставшихся вредных веществ принимаем для выделений сероводорода: $L = 47638,1 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Проверка:

$$n = 47638, 1/4800 = 9,9 \text{ ч}^{-1}.$$

1.5. Расчёт потребного воздухообмена для удаления избыточного тепла

Расчет потребного воздухообмена для удаления избыточного тепла производится по формуле

$$L = \frac{Q_{\text{изб}}}{\gamma_B \times c \Delta t}, \text{ м}^3/\text{ч}, \quad (1.7)$$

где L , $\text{м}^3/\text{ч}$ – потребный воздухообмен; $Q_{\text{изб}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – избыточное тепло; $\gamma_B = 1,206 \text{ кг}/\text{м}^3$ – удельная масса приточного воздуха; $c_B = 0,24 \text{ ккал}/\text{кг} \cdot \text{град}$ – теплоемкость воздуха;

$$\Delta t = t_{\text{вых}} - t_{\text{пр}}, \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.8)$$

где $t_{\text{вых}}$, $^\circ\text{C}$ – температура удаляемого воздуха; $t_{\text{пр}}$, $^\circ\text{C}$ – температура приточного воздуха.

Величина Δt при расчетах выбирается в зависимости от теплонапряженности воздуха – Q_n : при $Q_n \leq 20 \text{ ккал}/\text{м}^3 \cdot \text{ч}$ $\Delta t = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$; при $Q_n > 20 \text{ ккал}/\text{м}^3 \cdot \text{ч}$ $\Delta t = 8 \text{ } ^\circ\text{C}$;

$$Q_n = \frac{Q_{\text{изб}}}{V_n}, \text{ ккал}/\text{м}^3 \cdot \text{ч}, \quad (1.9)$$

где V_n , м^3 – внутренний объем помещения.

Таким образом, для определения потребного воздухообмена необходимо определить количество избыточного тепла по формуле

$$Q_{\text{изб}} = Q_{\text{об}} + Q_{\text{осв}} + Q_{\text{л}} + Q_{\text{р}} - Q_{\text{отд}}, \text{ ккал}/\text{ч}, \quad (1.10)$$

где $Q_{\text{об}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, выделяемое оборудованием; $Q_{\text{осв}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, выделяемое системой освещения; $Q_{\text{л}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, выделяемое людьми в помещении; $Q_{\text{р}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – тепло, вносимое за счет солнечной радиации; $Q_{\text{отд}}$, $\text{ккал}/\text{ч}$ – теплоотдача естественным путем.

Определяем количество тепла, выделяемого оборудованием

$$Q_{об} = 860 \times P_{об} \times y_1, \text{ ккал/ч} \quad (1.11)$$

где Y_1 – коэффициент перехода тепла в помещение, зависящий от вида оборудования; $P_{об}$, кВт – мощность, потребляемая оборудованием;

$$P_{об} = P_{ном} \times y_2 \times y_3 \times y_4, \text{ кВт}, \quad (1.12)$$

где $P_{ном}$, кВт – номинальная (установленная) мощность электрооборудования помещения; Y_2 – коэффициент использования установленной мощности, учитывающий превышение номинальной мощности над фактически необходимой; Y_3 – коэффициент загрузки, т.е. отношение величины среднего потребления мощности (во времени) к максимально необходимой; Y_4 – коэффициент одновременности работы оборудования.

При ориентировочных расчетах произведение всех четырех коэффициентов можно принимать равным:

$$y_1 \times y_2 \times y_3 \times y_4 = 0,25 \quad (1.13)$$

Определяем количество тепла, выделяемого системой освещения

$$Q_{осв} = 860 \times P_{осв} \times \alpha \beta \times \cos(\varphi), \quad (1.14)$$

где α – коэф. перевода электрической энергии в тепловую для лампы накаливания $\alpha = 0,92 - 0,97$, люминесцентной лампы $\alpha = 0,46 - 0,48$; β – коэффициент одновременности работы (при работе всех светильников $\beta = 1$); $\cos(\varphi) = 0,7 - 0,8$ – коэффициент мощности; $P_{осв}$, кВт – мощность осветительной установки.

Определяем количество тепла, выделяемого находящимися в помещении людьми

$$Q_{л} = N \times q_{л}, \quad (1.15)$$

где N – количество людей в помещении; $q_{л}$, ккал/ч – тепловыделения одного человека табл. 1.6 прил. 1.

Определяем количество тепла, вносимого за счет солнечной радиации

$$Q_p = K \times S \times q_{ост}, \quad (1.16)$$

где K – количество окон; S , м² – площадь одного окна; $q_{ост}$, ккал/ч – солнечная

радиация через остекленную поверхность табл. 1.7 прил. 1.

Определяем теплоотдачу, происходящую естественным путем. Если нет дополнительных условий, то можно считать ориентировочно, что $Q_{отд} = Q_p$ для холодного и переходного периодов года (среднесуточная температура наружного воздуха ниже +10 °С). Для теплого периода года (среднесуточная температура воздуха выше +10 °С) принимаем $Q_{отд} = 0$.

Общий вывод: Среди полученных расчетных значений требуемого воздухообмена для вредных веществ и удаления избыточного тепла выбирается наибольшее значение требуемого воздухообмена.

**Предельно-допустимые концентрации вредных веществ в атмосферном
воздухе населенных мест (ГН 2.1.6.1338-03)**

Наименование вредных веществ	ПДКм.р., мг/м ³	ПДКс.с., мг/м ³	Агрегатн состояние
Азота диоксид	0,085	0,04	п
Азота оксид	0,6	0,06	п
Акролеин	0,03	0,03	п
Амилацетат	0,10	0,10	п
Аммиак	0,2	0,04	п
Ацетон	0,35	0,35	п
Бензин (углеводороды)	5,0	1,5	п
Бензол	1,5	0,1	п
Бутан	200	-	п
Бутилацетат	0,1	0,1	п
Винилацетат	0,15	0,15	п
Дихлорэтан	3,0	1,0	п
Ксилол	0,2	0,2	п
Марганец и его соединения	0,01	0,001	а
Метилацетат	0,07	0,07	п
Мышьяк и его неорг. соединения	-	0,003	а
Озон	0,16	0,03	п
Пыль (кремнесодержащая – более 70 %)	0,15	0,05	а
Пыль нетоксичная (фиброгенного действия)	0,5	0,15	а
Ртут хлорид (сулема)	-	0,0003	а
Сажа	0,15	0,05	а
Свинец и его соединения	0,001	0,0003	а
Сернистый ангидрид	0,5	0,15	п
Серная кислота	0,3	0,1	а

Продолжение табл. 1.1

Наименование вредных веществ	ПДКм.р., мг/м ³	ПДКс.с., мг/м ³	Агрегатн состояние
Сероводород	0,008	-	п
Сероуглерод	0,03	0,005	п
Спирт бутиловый	0,16	-	п
Спирт изобутиловый	0,1	0,1	п
Спирт метиловый	1,0	0,5	п
Спирт этиловый	5	5	п
Стирол	0,04	0,002	п
Толуол	0,6	0,6	п
Углерода оксид	5,0	3,0	п
Фенол	0,01	0,003	п
Фтористые соединения (газообразные)	0,02	0,005	п
Хлор	0,1	0,03	п
Хлористый водород	0,2	0,2	п
Этилацетат	0,1	0,1	п

Примечание: п – пары и/или газы; а – аэрозоль

**Предельно-допустимые концентрации вредных веществ в воздухе рабочей
зоны (ГОСТ 12.1.005-88)**

Наименование вредных веществ	ПДК., мг/м ³	Класс опасности	Агрегатн. состояние
Азота диоксид	2,0	3	п
Азота оксиды	5,0	3	п
Акролеин	0,2	2	п
Амилацетат	100	4	п
Аммиак	20	4	п
Ацетон	200	4	п
Бензин (углеводороды)	100	4	п
Бензол	15/5	2	п
Бутан	300	4	п
Бутилацетат	200	4	п
Винилацетат	10,0	4	п
Дихлорэтан	10,0	2	п
Ксилол	50,0	3	п
Марганец и его соединения (от 2-30 %)	0,1	2	а
Метилацетат	100	4	п
Мышьяк и его неорг. соединения	0,04/0,01	2	а
Озон	0,1	1	п
Пыль (кремнесодержащая – более 70 %)	1,5	4	а
Пыль нетоксичная (фиброгенного действия)	4,0	4	а
Ртут хлорид (сулема)	0,2/0,05	1	а
Сажа	4,0	3	а
Свинец и его соединения	0,01/0,005	1	а
Серная кислота	1,0	2	а
Сернистый ангидрид	10	3	п
Сероводород	10,0	3	п

Продолжение табл. 1.2

Наименование вредных веществ	ПДК, мг/м ³	Класс опасности	Агрегатн. состояние
Сероуглерод	1,0	3	п
Спирт бутиловый	10,0	3	п
Спирт изобутиловый	10,0	3	п
Спирт метиловый	5,0	3	п
Спирт этиловый	1000	4	п
Стирол	30/10	3	п
Толуол	50	3	п
Углерода оксид	20	4	п
Фенол	0,3	2	п
Фтористые соединения (газообразные)	0,5/0,1	2	п
Хлор	1,0	2	п
Хлористый водород	5,0	1	п
Этилацетат	200	4	п

Примечание: значение в числителе – максимально разовые; в знаменателе – среднесменные

Таблица 1.3

Расходы лакокрасочных материалов на один слой покрытия изделий и содержание в них летучих растворителей

Наименование лакокрасочных материалов/способ нанесения краски	Расход лакокрасочных материалов, A , г/м ²	Содержание летучей части, m , %
Нитролаки и краски		
Бесцветный аэролак /кистью	200	92
Цветные аэролаки/распыление пульверизатором	180	75
Нитрошпаклевка /кистью	100-180	10-35
Нитроклей /кистью	160	80-85
Масляные лаки и эмали		
Окраска распылением	60-90	35

Таблица 1.4

Количество углекислоты, выделяемой человеком при разной работе

Возраст человека и характер работы	Количество CO ₂	
	в л/ч	в г/ч
Взрослые:		
при физической работе	45	68
при легкой работе (в учреждениях)	23	35
в состоянии покоя	23	35
Дети до 12 лет	12	18

Таблица 1.5

Предельно-допустимые концентрации углекислоты

Наименование помещений	Количество CO ₂	
	в л/ч	в г/кг
Для постоянного пребывания людей (жилые ком.)	1	1,5
Для пребывания детей и больных	0,7	1
Для учреждений	1,25	1,75
Для кратковременного пребывания людей	2	3

Таблица 1.6

Количество тепловыделений одним человеком при различной работе

Категория тяжести работы		Количество тепловыделений $q_{\text{л}}$, ккал/ч в зависимости от окружающей температуры воздуха			
		15 °C	20 °C	25 °C	30 °C
Легкая	I	100	70	50	30
Средней тяжести	II-а	100	70	60	30
Средней тяжести	II-б	110	80	70	35
Тяжелая	III	110	80	80	35

Таблица 1.7

Солнечная радиация через остекленную поверхность

	Солнечная радиация, $q_{\text{ост}}$, ккал/ч от стороны света и широты, град.														
	ЮГ			ЮГО-ВОСТОК ЮГО-ЗАПАД				ВОСТОК ЗАПАД				СЕВЕР, СЕВЕР. ВОСТОК СЕВЕРО- ЗАПАД			
	45	55	65	35	45	55	65	35	45	55	65	35	45	55	65
Окна с двойным остеклени- ем и дере- вянными рамами	125	125	145	85	110	125	145	125	125	145	145	65	65	65	60
Окна с двойным остеклени- ем и метал- лическими рамами	160	160	180	110	140	160	180	160	160	180	180	80	80	80	70
Фо- нарь с двойным остекление м и метал- лическими переплет.	130	160	170	110	140	170	170	160	160	180	180	85	85	85	70

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долин П.А. Справочник по технике безопасности. – М.: Энергоиздат, 1982. – 342 с.
2. Каменев П.Н. Отопление и вентиляция. Часть II. Вентиляция. – М.: Издательство литературы по строительству, 1966. – 289 с.
3. ГОСТ 12.1.005-88 ССБТ. Санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны.
4. ГН2.1.6.1338-03. Предельно допустимые концентрации (ПДК) загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. ОЦЕНКА РИСКА

Цель практического занятия - закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Основы теории безопасности: системный анализ безопасности», и формирование практических навыков расчета индивидуального и группового (социального) риска в конкретных ситуациях.

Общие сведения. Опасность – одно из центральных понятий безопасности жизнедеятельности (БЖД).

Опасность хранят все системы, имеющие энергию, химически или биологически активные компоненты, а также характеристики (параметры), несоответствующие условиям жизнедеятельности человека. Можно сказать, что опасность – это риск неблагоприятного воздействия.

Практика свидетельствует, что абсолютная безопасность недостижима. Стремление к абсолютной безопасности часто вступает в антагонистические противоречия с законами техносферы.

В сентябре 1990 г. в г. Кельне состоялся первый Всемирный конгресс по безопасности жизнедеятельности человека как научной дисциплине. Девиз конгресса: «Жизнь в безопасности». Участники конгресса постоянно оперировали понятием «риск».

Возможны следующие определения риска:

1. Это количественная оценка опасности, вероятность реализации опасности;
2. При наличии статистических данных, это частота реализации опасностей.

Различают опасности реальные и потенциальные. В качестве аксиомы принимаются, что любая деятельность человека потенциально опасна. Реализация потенциальной опасности происходит через ПРИЧИНЫ и приводит к НЕЖЕЛАТЕЛЬНЫМ ПОСЛЕДСТВИЯМ.

Сейчас перед специалистами ставится задача – не исключение до нуля безопасности (что в принципе невозможно). А достижение заранее заданной величины риска реализации опасности. При этом сопоставлять затраты и получаемую от снижения риска выгоду. Во многих западных странах для более объективной оценки риска и получаемых при этом затрат и выгод, вводят финансовую меру человеческой жизни. Заметим, что такой подход имеет противников, их довод – человеческая жизнь свята, бесценна и какие-то финансовые оценки недопустимы. Тем не менее, по зарубежным исследованиям, человеческая жизнь оценивается, что позволяет более объективно рассчитывать ставки страховых тарифов при страховании и обосновывать суммы выплат.

Поскольку абсолютная безопасность (нулевой риск) невозможна, современный мир пришел к концепции приемлемого (допустимого) риска.

Суть концепции заключается в стремлении к такой безопасности, которую принимает общество в данное время. При этом учитывается уровень технического развития, экономические, социальные, политические и др. возможности. Приемлемый риск – это компромисс между уровнем безопасности и возможностями ее достижения. Это можно рассмотреть в следующей ситуации. После крупной аварии на Чернобыльской АЭС, правительство СССР решило повысить надежность всех ядерных реакторов. Средства были взяты из госбюджета и, следовательно, уменьшилось финансирование социальных программ здравоохранения, образования и культуры, что в свою очередь привело к увеличению социально-экономического риска. Поэтому следует всесторонне оценивать ситуацию и находить компромисс – между затратами и величиной риска.

Переход к «риску» дает дополнительные возможности повышения безопасности техносферы. К техническим, организационным, административным добавляются и экономические методы управления риском (страхование, денежные компенсации ущерба, платежи за риск и

др.). Есть здравый смысл в том, чтобы законодательно ввести квоты за риск. При этом возникает проблема расчета риска: статистический, вероятностный, моделирование, экспертных оценок, социологических опросов и др. Все эти методы дают приблизительную оценку, поэтому целесообразно создавать базы и банки данных по рискам в условиях предприятий, регионов и т.д.

Порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с общими сведениями. Записать определения.
2. Выполнить практические задачи.

Практические задачи

Задача 1. В таблице 2.0 приведен ряд профессий по степени индивидуального риска фатального исхода в год. Используя данные табл.1 методом экспертных оценок охарактеризуйте вашу настоящую деятельность и условия вашей будущей работы.

Таблица 2.0

Классификация профессиональной безопасности

Категория	Условия профессиональной деятельности	Риск смерти (на человека в год)	Профессия
1	Безопасные	$1 \cdot 10^{-4}$	Текстильщики, обувщики, работники лесной промышленности, бумажного производства и др.
2	Относительно безопасные	$1 \cdot 10^{-4}$ до $1 \cdot 10^{-3}$	Шахтеры, металлурги, судостроители и др.
3	Опасные	$1 \cdot 10^{-3}$ до $1 \cdot 10^{-2}$	Рыбопромысловики, верхолазы, трактористы и др.
4	Особо опасные	больше $1 \cdot 10^{-2}$	Летчики-испытатели, летчики реактивных самолетов.

После обсуждения письменно сформулируйте свою оценку.

Для решения следующих задач используйте формулу определения индивидуального риска

$$P = \frac{h}{H}, \quad (2.1)$$

где P – индивидуальный риск (травмы, гибели, болезни и пр.); h – количество реализации опасности с нежелательными последствиями за определенный период времени (день, год и т.д.); H – общее число участников (людей, приборов и пр.), на которых распространяется опасность.

Пример решения задачи по формуле (2.1).

Пример. Задача 1. Ежегодно неестественной смертью гибнет 250 тыс. человек. Определить индивидуальный риск гибели жителя страны при населении в 150 млн. человек.

Решение.

$$P_{ж} = 2,5 \cdot 10^5 / 1,5 \cdot 10^8 = 1,7 \cdot 10^{-3}$$

Или будет 0,0017. Иначе можно сказать, что ежегодно примерно 17 человек 10000 погибает неестественной смертью. Если пофантазировать и предположить, что срок биологической жизни человека равен 1000 лет, то по нашим данным оказывается, что уже через 588 лет (1:0,0017) вероятность гибели человека неестественной смертью близка к 1 (или 100%).

Примечание. Здесь и в задачах №2,3 данные приближены к России.

Задача 2. Опасность гибели человека на производстве реализуется в год 7 тыс. раз. Определить индивидуальный риск погибших на производстве при условии, что всего работающих 60 млн. человек. Сравните полученный результат с вашей экспертной оценкой из задачи 1.

Задача 3. Определить риск погибших в дорожно-транспортном происшествии (ДТП), если известно, что ежегодно гибнет в ДТП 40 тыс. человек при населении 150 млн. человек.

Задача 4. Используя данные индивидуального риска фатального

исхода в год для населения США (данных по России нет), определите свой индивидуальный риск фатального исхода на конкретный год. При этом можно субъективно менять коэффициенты и набор опасностей.

Таблица 2.1

Индивидуальный иск гибели в год

Причина	Риск	Причина	Риск
Автомобильный транспорт	$3 \cdot 10^{-4}$	Воздушный транспорт	$9 \cdot 10^{-6}$
Падения	$9 \cdot 10^{-5}$	Падающие предметы	$6 \cdot 10^{-6}$
Пожар и ожог	$4 \cdot 10^{-5}$	Электрический ток	$6 \cdot 10^{-6}$
Утопление	$3 \cdot 10^{-5}$	Железная дорога	$4 \cdot 10^{-6}$
Отравление	$2 \cdot 10^{-5}$	Молния	$5 \cdot 10^{-7}$
Огнестрельное оружие	$1 \cdot 10^{-5}$	Все прочие	$4 \cdot 10^{-5}$
Станочное оборудование	$1 \cdot 10^{-5}$	Ядерная энергетика	$2 \cdot 10^{-10}$
Водный транспорт	$9 \cdot 10^{-6}$	(пренебрегаемо мал. риск)	

Риск общий для американца: $P_{\text{общ}} = 6 \cdot 10^{-4}$

Сравнить полученный результат с результатом примера решения.

Задачи на риск гибели неестественной смертью в России и с риском гибели в год для американца ($P_{\text{общ}}$).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русак О.Н. Труд без опасности. Л. «Лениздат», 1986, 191 с.
2. Береговой Г.Т. и др. Безопасность космических полетов. М., «Машиностроение», 1977, 320 с.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МИКРОКЛИМАТА РАБОЧЕЙ ЗОНЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ

Цель практического занятия :закрепление теоретических знаний, полученных при изучении раздела “Гелиофизические и метеорологические фактора: микроклимат производственных помещений”, и формирование практических навыков расчета метеорологических условий в производственном помещении и гигиенической оценки параметров микроклимата.

Общие сведения:

Одним из основных условий эффективной производственной деятельности человека является обеспечение нормальных метеорологических условий в помещениях. Параметры микроклимата оказывают существенное влияние на терморегуляцию организма человека и могут привести кпереохлаждение или перегреву тела

Микроклимат производственных помещений - это климат внутренней среды этих помещений, определяемый действующими на организм человека факторами: сочетанием температуры воздуха, относительной влажности, скорости движения воздуха, интенсивности теплового облучения, температуры поверхности ограждающих конструкций (стены, пол, потолок, технологическое оборудование и т.д

Под рабочей зоной понимается пространство высотой до 2м над уровнем пола или площадки, на которых находятся места постоянного или временного пребывания рабочих.

Причиной ряда заболеваний является местное и общее охлаждение. Переохлаждение организма ведет к простудным заболеваниям: ангине, катару верхних дыхательных путей, пневмонии. Установлено, что при

переохлаждении ног и туловища возникает спазм сосудов слизистых оболочек дыхательного тракта.

Перегревание возникает при избыточном накоплении тепла в организме, которое возникает при действии повышенных температур. Основными признаками перегревания являются повышение температуры тела до 38°С и более, обильное потоотделение, слабость, головная боль, учащение дыхания и пульса, изменение артериального давления и состав крови, шум в ушах, искажение цветового восприятия

Тепловой удар – это быстрое повышение температуры тела 40°С и выше. В этом случае падает артериальное давление, потоотделение прекращается, человек теряет сознание.

Организм человека обладает свойством терморегуляции – поддержание температуры тела в определенных границах (36,1...37,2°С) Терморегуляция обеспечивает равновесие между количеством тепла, непрерывно образующегося в организме человека в процессе обмена веществ, теплопродукцией и излишком тепла, непрерывно выделяемого в окружающую среду, - теплоотдачей, т.е сохраняет тепловой баланс организма человека. Количество выделившейся теплоты меняется от 8Вт до 50 Вт.

Теплопродукция. Тепло вырабатывается всем организмом, но в наибольшей степени в мышцах и печени. В процессе работы в организме происходят различные биохимические процессы, связанные с деятельностью мышечного аппарата и нервной системы. Энергозатраты человека, выполняющего различную работу, могут быть классифицированы на категории.

Разграничение работ по категориям осуществляется на основе интенсивности общих энергозатрат организма: легкие физические работы, средние физические работы, тяжелые физические работы.

К категории 1а относятся работы с интенсивностью энергозатрат до 139 Вт, выполняемые сидя и сопровождающиеся незначительным физическим напряжением.

К категории 1б относятся работы с интенсивностью энергозатрат 140...174 Вт, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой и сопровождающиеся некоторым физическим напряжением (в полиграфической промышленности, на часовом, швейном производствах, в сфере управления)

К категории 2а относятся работы с интенсивностью энергозатрат 233...232 Вт, производимые сидя, стоя или связанные с ходьбой, перемещением мелких изделий или предметов в положении стоя или сидя и требующие определенного физического напряжения.

К категории 2б относятся работы с интенсивностью энергозатрат 233...290 Вт, связанные с ходьбой, перемещением и переноской тяжестей до 10 кг и сопровождающиеся умеренным физическим напряжением.

К категории 3 относятся работы с интенсивностью энергозатрат более 290 Вт, связанные с постоянными передвижениями, перемещением и переноской значительных (свыше 10 кг) тяжестей и требующие больших физических усилий.

Теплоотдача. Количество тепла, отдаваемого организмом человека, зависит от температуры, относительной влажности и скорости движения воздуха. Теплоотдача осуществляется путем радиации, конвекции, испарения пота и дыхания. Для человека, находящегося в состоянии покоя и одетого в обычную комнатную одежду, соотношение составляющих теплоотдачи имеет следующие распределения, % радиацией – 45, конвекцией – 30, испарением и дыханием – 25.

Основное значение имеет регулирование теплоотдачи, так как она является наиболее изменчивой и управляемой. Комфортные тепло ощущения у человека возникают при наличии теплового баланса организма, а также при условии его некоторого нарушения. Это обеспечивается тем, что в организме человека имеется некоторый резерв тепла, который используется им в случае охлаждения. Этот потенциальный запас тепла составляет в среднем 8360 кДж и находится главным образом во внешних слоях тканей организма на глубине 2-3

см от кожи. При известном уменьшении запаса тепла у человека появляются субъективно ощущения «прохлады», которые, если охлаждение продолжается, сменяются ощущениями «холодно», «очень холодно»

Действующими нормативными документами, регламентирующими метеорологические условия производственной среды, являются ГОСТ 12.1.005-88 «ССБТ. Общие санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны» и СанПиН 2.2.4.548-96 «Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений» Этими документами установлены влажности и скорости движения воздуха в рабочей зоне производственных помещений с учетом избытков явного тепла, тяжести выполняемой работы и сезонов года.

В соответствии с вышеуказанным стандартом теплым периодом года считается сезон, характеризуемый среднесуточной температурой наружного воздуха $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Допустимыми считаются такие параметры микроклимата, которые при длительном воздействии могут вызывать напряжения реакции терморегуляции человека, но к нарушению состояния здоровья не приводят.

Оптимальными являются такие микроклиматические параметры, которые не вызывают напряжения реакций терморегуляции и обеспечивают высокую работоспособность человека.

Расчет показателей микроклимата базируются на опытных данных о давлении, температуре и скорости движения воздуха на рабочем месте полученных при замерах на нем с помощью соответствующих приборов

Показатели микроклимата вычисляются в следующей последовательности:

1. Атмосферное давление B , Па, на рабочем месте, измеренное с помощью барометра-анероида БАММ-1

$$B = B_{\text{п}} + B_{\text{ш}} + B_{\text{т}} + B_{\text{д}}, \quad (3.1)$$

где В— исправленное значение замеренного давления, Па; Вп – отсчет по прибору, Па; Вш – шкаловая поправка; Вт – температурная поправка, равная произведению температуры прибора на удельную температуру поправки прибора; Вд – добавочная поправка, Па.



Рис. 3.1 Барометр-анероид «БААМ-1»

Барометр-анероид «БААМ-1» измеряет атмосферное давление в наземных условиях в диапазоне температур от 0 до +40 С° и при относительной влажности воздуха более 80%

2. Температура воздушной среды измеряется с помощью ртутных или спиртовых термометров, а также с помощью термографов, обеспечивающих непрерывную запись температуры на ленте за определенный период времени. Температуру воздушной среды можно измерить также с помощью психрометров и термометров

3. Влажность воздуха – абсолютная и относительная определяется с помощью психрометров. Психрометр состоит из сухого и влажного термометров. Резервуар влажного термометра покрыт тканью, которая опущена в мензурку с водой. Испаряясь, вода охлаждает влажный термометр, поэтому его показания всегда ниже показания сухого.

Психрометры бывают типа Августа (Рис 3.2) и переносными, типа Ассмана (Рис 3.3). Психрометр Ассмана является более совершенным и точным прибором по сравнению с психрометром Августа. Принцип его устройства тот же, но термометры заключены в металлическую оправу, шарики термометра находятся в двойных металлических гильзах, а в головке прибора помещается вентилятор с постоянно скоростью 4 м/с.

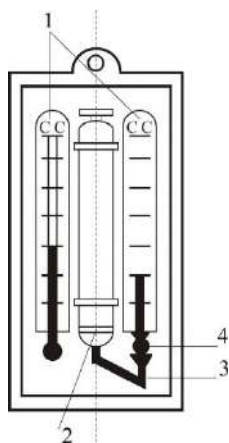


Рис. 3.2 Психрометры Августа

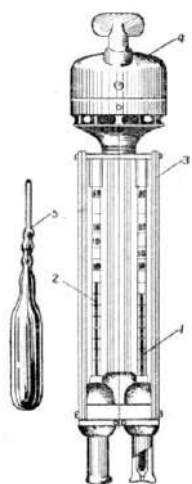


Рис. 3.3 Психрометр Ассмана

Влажность воздуха может быть рассчитана: 1) по давлению водяного пара, находящегося в воздухе или 2) по плотности водяного пара

При первом способе сначала определяется давление водяного пара, находящегося в воздухе при данной температуре

$$P_{\text{в.н}} = P_{\text{н.в}} - c(T_{\text{с}} - T_{\text{в}})B \quad (3.2)$$

где $P_{\text{н.в}}$ — давление насыщенного водяного пара при температуре $t_{\text{в}}$, зафиксированной влажным термометром, $P_{\text{в.н}}$ — коэффициент психрометра, зависящий от скорости движения воздуха около шарика мокрого термометра (при скорости движения воздуха до 4 м/с принимают $c = 0.00074$, свыше 4 м/с — 0,00066) $t_{\text{с}}$ и $t_{\text{в}}$ — температура сухого и влажного термометра, B —

барометрическое давление воздуха в момент измерения температур психрометром, Па

Определив парциальное давление водяного пара, находят относительную влажность воздуха

$$\varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\%, \quad (3.3)$$

где $p_{н.с}$ – давление насыщенного водяного пара при температуре t_c , зафиксированной влажным термометром,

При расчете влажности воздуха по плотности водяного пара определяются:

а) абсолютная влажность воздуха (масса водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре)

$$F = \frac{(1000 \cdot p_{н.с})}{(461,5(273 + t_c))}, \quad (3.4)$$

где 461,5 – удельная газовая постоянная водяного пара Дж/(кг *К);

б) максимальная абсолютная влажность воздуха

$$A_{\max} = \frac{1000 \cdot p_{н.с}}{461,5 \cdot (273 + t_c)}, \quad (3.5)$$

в) относительная влажность воздуха φ

$$\varphi = \frac{A}{A_{\max}} \cdot 100, \quad (3.6)$$

Таблица 3.0

Давление насыщенного водяного пара Р, Па при температуре воздуха

t, С	Р, Па	t, С	Р, Па	t, С	Р, Па	t, С	Р, Па
0	611	10	1228	20	2328	30	4242
1	657	11	1312	21	2486	31	4493
2	705	12	1403	22	2644	32	4754
3	759	13	1497	23	2809	33	5030
4	813	14	1599	24	2894	34	5320
5	872	15	1705	25	3168	35	5624
6	935	16	1817	26	3361	36	5941

7	1001	17	1937	27	3565	37	6275
8	1073	18	2064	28	3780	38	6625
9	1148	19	2197	29	4005	39	6991

Значение относительной влажности φ , найденного описанными способами, может быть проверено по данным психометрической таблицы

4. Скорость движения воздуха измеряется с помощью крыльчатых или чашечных анемометров (Рис 3.4). Крыльчатый анемометр принимается для измерения скорости воздуха до 10 м/с, а чашечный – до 30м/с. Принцип действия анемометров обоих типов основан на том, что частоты вращения крыльчатки тем больше, чем больше скорость движения воздуха. Вращение крыльчатки передается на счетный механизм. Разница в показаниях до и после измерения, деленная на время наблюдения, показывает число делений в 1 с. Специальный тарифовочный паспорт, предлагаемый к каждому прибору позволяет по вычисленной величине делений определить скорость движения воздуха.



Рис 3.4 Чашечный анемометр

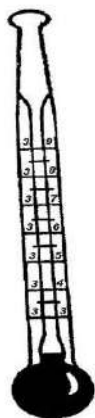


Рис. 3.5 Кататермометр

Скорость движения воздуха в интервале величин от 0.1 до 0.5 м/с можно определить с помощью кататермометра (Рис.3.5). Шаровой кататермометр представляет собой стартовый термометр с двумя резервуарами: шаровым внизу и цилиндрическим вверху. Шкала кататермометра имеет давление от 31 до 41 градуса. Для работы с этим прибором его предварительно нагревают на водяной бане, затем вытирают насухо и помещают в исследуемое место. По величине падения столба спирта в единицу времени на кататермометре при его охлаждении судят о скорости движения воздуха. Для измерения малых скоростей (от 0.03 до 5 м/с) при температуре в производственных помещениях не ниже 10С применяется термоанемометр. Это электрический прибор на полупроводниках, принцип его действия основан на измерении величины сопротивления датчика при изменении температуры и скорости движения воздуха.

Таблица 3.1

Значения относительной влажности

$t_c, ^\circ\text{C}$	Разность показаний сухого и влажного термометров $t_c - t_b, ^\circ\text{C}$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Относительная влажность $\varphi, \%$									
0	100	81	63	45	28	11				

1	100	83	65	48	32	16				
2	100	84	68	51	35	20				
3	100	84	69	54	39	24	10			
4	100	85	70	56	42	28	14			
5	100	86	72	58	45	32	19	6		
6	100	86	73	60	47	35	23	10		
7	100	87	74	61	49	37	26	14		
8	100	87	75	63	51	40	29	18	7	
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11	
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5

Продолжение табл. 3.1

11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39	32
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41

28	100	93	85	78	71	65	59	52	48	42
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44

Скорость движения воздуха V , м/с , при замере ее анемометром АСО-3 подсчитывается по формуле

$$V = an + b, \quad (3.7)$$

где n число делений в 1 с; $n = \frac{n_k - n_n}{t_{\text{зам}}}$; n_n и n_k – начальный и конечный отсчеты по анемометру; $t_{\text{зам}}$ – продолжительность замера по прибору.

При выполнении настоящего практического занятия рекомендуется использовать формулу:

$$V = 0,45n + 0,01$$

5. Гигиеническая оценка результатов расчета параметров микроклимата: производится по санитарным нормам, приведенным в ГОСТ 12.1.005-88.

Таблица 3.2

Оптимальные нормы температуры, относительно влажности и скорости движения воздуха по рабочей зоне производственных помещений

Период Года	Категория Работ	Температура, °C	Относительная влажность, %	Скорость движения воздуха м/с не более
Холодный (температура наружного воздуха ниже +10°C)	Легкая – 1	22-24	40-60	0,1
	Легкая – 1б	21-23	40-60	0,1
	Средней	18-20	40-60	0,2
	тяжести – Па	17-19	40-60	0,2
	Средней	16-18	40-60	0,3
	тяжести – Пб Тяжелая – III			

Теплый (температура наружного воздуха +10°C и выше)	Легкая – 1а	23-25	40-60	0,1
	Легкая – 1б	22-24	40-60	0,2
	Средней	21-23	40-60	0,3
	тяжести – Па	20-22	40-60	0,3
	Средней	18-20	40-60	0,4
	тяжести – Пб			
	Тяжелая - III			

Пример расчета:

Исходные данные: $B_n = 87937$ Па, $B_{ш} = -50$ Па, $t_c = 22$ °C, $t_b = 16$ °C,

$\Delta t = -\frac{10\text{Па}}{^\circ\text{C}}$, $B_d = +100$ Па, $n_n = 6000$, $t_{\text{зам}} = 200$ с, период года – теплый.

Решение:

1. Атмосферное давление на рабочем месте (при температурной поправке)

$$B_T = t_c * \Delta t = 22(-10) = -220 \text{ Па}$$

$$B = B_n + B_{ш} + B_T + B_d = 87837 - 50 - 220 + 110 = 87667 \text{ Па.}$$

2. Скорость движения воздуха по исходным данным, полученным при помощи анемометра АСО-3. При числе давлений в 1с

$$n = \frac{n_k - n_n}{t_{\text{зам}}} = 6040 - \frac{6000}{200} = 0,2 \text{ дел/с}$$

Скорость движения воздуха составляет;

$$V = 0,45n + 0,01 = 0,45 * 0,2 + 0,01 = 0,10 \text{ м/с}$$

3. Относительная влажность воздуха по давлению водяного пара. При давлении насыщенного водяного пара при температуре сухого термометра $P_{н.с} = 2644$ Па и температуре влажного термометра $P_{н.в} = 1817$ Па и парциальном давлении водяного пара в воздухе:

$$P_{в.п} = P_{н.в} - C(t_c - t_b) * B = 1817 - 0,00074 * (22 - 16) * 87837 = 1427 \text{ Па}$$

относительная влажность воздуха:

$$\varphi = \frac{P_{в.п}}{P_{н.с}} 100 = \frac{1427}{2644} 100 = 54\%$$

3б. Относительная влажность воздуха по плотности (массе) водяного пара. При абсолютной влажности воздуха:

$$A = \frac{1000 * P_{в.п}}{461,5(273 + t_c)} = \frac{1000 * 1527}{461,5(273 + 22)} = 10,48 \text{ г/м}^3$$

И максимальной влажности воздуха:

$$A_{max} = \frac{1000 * P_{н.с}}{461,5(273 + t_c)} = \frac{1000 * 2644}{461,5(273 + 22)} = 19,42 \text{ г/м}^3 \text{ относительная влажность}$$

воздуха равна:

$$\varphi = \frac{A}{A_{max}} 100 = \frac{10,48}{19,42} 100 = 54\%$$

3в. Правильность произведенных подсчетов φ подтверждают данные таблицы. При разности показаний сухого и влажного термометров $T_c - T_v = 22 - 16 = 6 \text{ }^\circ\text{C}$ относительная влажность воздуха φ равна 54%

Варианты заданий

Для выполнения задания даются следующие показатели: отсчет по барометру Вп Температура воздуха по сухому (T_c) и влажному (T_v) термометрам психрометра, начальный (N_n) и конечный (N_k) отсчеты по анемометру, продолжительность замера скорости движения воздуха $T_{зам}$, период года (холодный, теплый) Для отсчета скорости движения воздуха использовать формулу

$$V = 0,45n + 0,01$$

Интенсивность теплового излучения на рабочем месте полагать равной 50 Вт/м^2 . Числовые значения исходных данных приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Числовые значения поправок к барометру

вариант	Вв, Па	Вш, Па	$\Delta t, \text{Па/}^\circ\text{C}$	Вб, Па	Тс, $^\circ\text{C}$	Тв, $^\circ\text{C}$	Nн	Nк	Т зам, $^\circ\text{C}$	Период года
1	110146	-100	-10	+100	23	18	6000	6246	140	Холодный
2	105752	-100	-10	+100	22	16	6107	6138	155	То же
3	97989	+75	-10	+100	18	13	6357	6407	160	То же
4	90498	+25	-10	+100	17	11	6841	6909	170	То же
5	94232	+150	-10	+100	16	11	6944	7051	200	То же
6	103379	-50	-10	+100	24	17	6107	6387	150	Теплый
7	107509	-100	-10	+100	23	17	6305	6696	187	То же
8	89371	0	-10	+100	22	15	6421	6501	190	То же
9	94263	+150	-10	+100	20	15	6725	6830	175	То же
10	96946	+100	-10	+100	19	12	6100	6176	11	То же

Порядок выполнения работы

1. Расчет и оформление практической работы провести в соответствии с примером расчета. Варианты заданий определяются пр-ем.
2. Результаты расчетов микроклимата на рабочем месте в производственном помещении занести в таблицу.

Таблица 3.4

Пример заполнения таблицы

Температура воздуха		Относительная влажность %		Скорость движения воздуха	
Фактически данная	Оптимальна я по нормам	Фактически рассчитанна я	Оптимальна я по нормам	Фактически рассчитанна я	Оптимальна я по нормам

3. На основании полученных результатов определить категорию работ, в соответствии с периодом года.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под микроклиматом производственных помещений?
2. Опишите характер действия климатических факторов на организм человека.
3. В чем состоит нормирование воздействий климатических факторов на человека?
4. Как определяют давление, температуру, относительную влажность и скорость движения воздуха?
5. Назовите способы и средства нормализации микроклимата на рабочих местах.

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЙ И БОРЬБА С ИЗБЫТОЧНЫМ ТЕПЛОМ В ШАХТАХ

Цель практического занятия - закрепление теоретических знаний, полученных при изучении темы «Комфортные условия жизнедеятельности», и овладение методикой расчета тепловыделений в выработки глубоких шахт и выбора технических решений по борьбе с избыточным теплом.

Общие сведения. Климатические условия в подземных выработках, особенно в глубоких шахтах, как правило, отличаются от климатических условий на земной поверхности. Микроклимат горных выработок (т. е. действующее в них на организм человека сочетание температуры, влажности, скорости движения воздуха, его давления и температуры окружающих поверхностей) в значительной степени зависит от теплообменных процессов, происходящих на пути движения воздуха. Под воздействием этих процессов температура шахтного воздуха в выработках существенно повышается с увеличением глубины ведения горных работ.

Нагревание воздуха, движущегося по горным выработкам, происходит в результате:

- теплообмена между потоком шахтного воздуха и окружающим массивом горных пород, т. е. охлаждения пород;
- естественного адиабатического сжатия воздуха при движении его вниз по вертикальным и наклонным выработкам;
- изменения содержания влаги в воздухе;
- теплообмена между воздухом и подземной водой, текущей по выработкам;
- окисления угля, угольной пыли, сульфидных руд, крепежного леса и некоторых других веществ;
- охлаждения отбитых и транспортируемых масс угля и породы;
- работы горных машин и механизмов;
- выделения тепла осветительными установками, электрическими кабелями, трубопроводами сжатого воздуха, телом человека, а также действия других второстепенных факторов.
- Вызванное перечисленными факторами приращение температуры шахтного воздуха ($^{\circ}\text{C} = \text{K}$), может быть определено из выражения

$$\Delta t = \frac{\sum Q_i}{c_p \rho V}, \quad (4.1)$$

где $\sum Q_i$ - суммарное количество теплоты, идущее на нагревание воздуха, кДж/ч; C_p - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кДж/(кг·К); ρ - плотность воздуха, кг/м³; V - объемный расход воздуха, м³/ч.

Шахтный воздух уже при температуре свыше 25 °С оказывает отрицательное тепловое воздействие на физиологию и гигиену труда подземных рабочих. При задержке отдачи телом человека накопившегося в нем тепла возникает перегрев организма, осложняющий протекание жизненных процессов. Чрезмерный перегрев организма вызывает ухудшение самочувствия человека, приводит к серьезным заболеваниям (в наиболее тяжелых случаях - к

тепловому удару, или стрессу, или даже к смерти), увеличивает вероятность травматизма, снижает производительность труда.

Изменение температуры воздуха (и других параметров микроклимата) в подземных выработках оказывает влияние также на физико-механические свойства горных пород и на безопасное состояние сооружений и выработок.

Расчет выделения теплоты в выработки глубоких шахт ведется по следующим зависимостям.

1. Тепловыделение при охлаждении горных пород. Количество теплоты $Q_{\text{охл}}$, кДж/ч, выделяющееся вследствие охлаждения окружающих выработку горных пород, описывается уравнением Ньютона для конвективного теплообмена

$$Q_{\text{охл}} = K_{\tau} P l (t_{\text{п}} - t_{\text{в}}), \quad (4.2)$$

где K_{τ} - коэффициент нестационарного теплообмена между массивом горных пород и воздухом, кДж/(м²·ч·К) (рассчитывается по формуле, приводимой ниже); P и l - периметр и длина выработки, м; $t_{\text{п}}$ - естественная температура неохлажденных пород на данной глубине, (°С = К, расчет приводится ниже); $t_{\text{в}} = t_{\text{пб}}$ - допустимая температура воздуха в выработке, °С (принимается согласно Правилам безопасности).

Коэффициент K_{τ} , кДж/(м²·ч·К) определяется по формуле

$$K_{\tau} = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_{\text{э}}}} \cdot \left[\frac{1}{2R_{\text{э}}} + \frac{1}{\sqrt{\pi a \tau \left(1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_{\text{э}}}\right)}} \right], \quad (4.5)$$

где λ - коэффициент теплопроводности породы, кДж/(м·ч·К) (принимается по табл. 3.1); α_0 - суммарный коэффициент теплоотдачи от стен шахтной выработки к воздуху, кДж/(м²·ч·К) (расчет ниже); $R_{\text{э}}$ - эквивалентный радиус выработки, м: $R_{\text{э}} = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0.564\sqrt{S}$, a - коэффициент температуропроводности

породы, м²/ч: $\alpha = \frac{\lambda}{c_{\text{п}} \cdot \rho_{\text{п}}}$ (принимается по табл. 3.1); $c_{\text{п}}$ - удельная теплоемкость породы, кДж/(кг·К) (принимается по табл. 3.1); $\rho_{\text{п}}$ - плотность породы, кг/м³ (принимается по табл. 3.1); τ - расчетное время процесса теплообмена, ч (например, при длительности процесса теплообмена 4 года значение $\tau = 4 \cdot 365 \cdot 24 = 35040$ ч).

Таблица 4.0

Тепловая характеристика пород

Порода	ρ , кг/м ³	$c_{\text{п}}$, кДж/(кг·К)	λ , кДж/(м·ч·К)	a , м ² /ч
Песчаник (Центральный Донбасс)	2475	0,854	9,211	0,00436
Глинистые и песчанистые сланцы (там же)	2450	0,904	6,363	0,00287
Уголь (там же)	1225	1,184	1,051	0,00073
Бурый уголь (Челябинский бассейн)	1210	1,130	0,913	0,00067
Каменный уголь (Карагандинский бассейн)	1275	1,055	0,963	0,00072
Углистый сланец	1765	1,021	3,006	0,00167
Глинистый сланец	2433	0,992	3,354	0,00139
Змеевик	2690	0,950	5,694	0,00223
Гранит	2722	0,917	7,972	0,00319
Серный колчедан (Дегтярское месторождение)	4620	0,908	15,010	0,00358
Медный колчедан (там же)	4716	0,862	15,165	0,00373

Суммарный коэффициент теплоотдачи с поверхности горной выработки α_0 , кДж/(м²·ч·К), находится из выражения

$$\alpha_0 = \alpha_{\text{к}} + \alpha_{\text{н}},$$

где $\alpha_{\text{к}}$ - конвективный коэффициент теплоотдачи от стен выработки к воздуху, кДж/(м²·ч·К)

$$\alpha_k = 2,9 \cdot 4,1868 \frac{V^{0,8}}{D_3^{0,2}} = 12,14 \frac{V^{0,8}}{D_3^{0,2}}$$

где v - скорость движения воздуха в выработке, м/с; D_3 - эквивалентный диаметр выработки, м: $D_3 = \frac{4S}{\pi}$; $\alpha_{и}$ - коэффициент, учитывающий испарения влаги с мокрых стен выработки, кДж/(м²·ч·К)

$$\alpha_{и} = 1,3\beta \cdot r,$$

где β - коэффициент массоотдачи (коэффициент испарения), кг/(м²·ч·К), принимается равным 0,01 - для стволов, 0,15 - для капитальных выработок, 0,03 - для лав; r - теплота парообразования воды, принимается $r = 2256$ кДж/кг.

Температура горных пород в массиве $t_{п}$, °С, на заданной глубине H , м, от земной поверхности определяется по формулам:

$$t_{п} = h \cdot t_{н} + \frac{H-H_0}{\Gamma_{ст}} \quad \text{или} \quad t_{п} = h \cdot t_{н} + (H - H_0)\delta, \quad (4.6)$$

где $t_{п}$ - температура пород нейтрального слоя (зоны с постоянной температурой пород) в данной местности; принимается примерно равной среднегодовой температуре воздуха на земной поверхности в данном районе, °С; $t_{н} = 8,5; 2,5; 2,5; 3,0$ °С для условий соответственно Донбасса, Кузбасса, Караганды и Мосбасса; H_0 - глубина (толщина) нейтрального слоя, м: $H_0 = 20-40$ м; $\Gamma_{ст}$ - геотермическая ступень данного района, м/°С: в среднем $\Gamma_{ст}$ составляет для угольных месторождений 30–40 м/°С, рудных 50-140 м/°С, нефтяных 15-20 м/°С; δ - геотермический градиент, °С/м.

2. Тепловыделение при сжатии воздуха. Количество теплоты $Q_{сж}$, кДж/ч, выделяющееся при движении воздуха вниз по вертикальным и наклонным выработкам, определяется выражением

$$Q_{сж} = 9,81 \cdot \rho \frac{V_{в} \cdot H}{1000} = 0,00981 \cdot \rho \cdot V_{в} \cdot H, \quad (4.7)$$

где ρ - плотность воздуха, кг/м³; $V_{в}$ - количество воздуха, проходящего по выработке (объемный часовой расход воздуха), м³/ч: $V_{в} = 3600 \cdot v \cdot S$;

v - скорость движения воздуха в выработке, м/с; S - площадь поперечного сечения выработки, м²; H - глубина расположения выработки, м; для наклонной выработки

$$H = l_n \cdot \sin \psi, \quad (4.8)$$

где l_n - длина наклонной выработки; ψ - угол наклона выработки, град.

3. Тепловыделение при окислительных процессах. Количество теплоты $Q_{ок}$, кДж/ч, образующееся при окислении угля, угленосных сланцев, сульфидных руд и древесины, подсчитывается по формуле А. Ф. Воропаева

$$Q_{ок} = q_{ок} \cdot V^{0.8} \cdot P \cdot l, \quad (4.9)$$

где $q_{ок}$ - тепловыделение в результате окислительных процессов, приведенное к скорости движения воздуха в выработке, $V = 1$ м/с, кДж/(м²·ч); $q_{ок}$ можно принимать равным 12-21 кДж/(м²·ч).

4. Тепловыделение от местных источников. К местным источникам теплоты относят электродвигатели, трансформаторы, светильники, электрические кабели, трубопроводы сжатого воздуха, пневматические двигатели, другие тепловыделяющие машины, механизмы и устройства, а также работы, производимые с применением бетона на участке выработки или в призабойной зоне, когда тепло выделяется при его отвердении.

Расчетные формулы для определения количества теплоты от местных источников имеют следующий вид:

4.1. Тепловыделение при работе *электродвигателей* горных машин и освещения $Q_{эд}$, кДж/ч

$$Q_{эд} = \frac{3600 \cdot N_{потр} \cdot k_3}{\eta_э}, \quad (4.10)$$

где $N_{потр}$ - потребляемая мощность электродвигателей и осветительных установок, кВт; k_3 - коэффициент загрузки оборудования во времени: $k_3 = 0,8$; $\eta_э$ - к. п. д. электродвигателя: $\eta_э = 0,95$.

4.2. Тепловыделение в выработку (ствол, уклон, бремсберг и др.) при эксплуатации *лебедок* $Q_{л}$, кДж/ч:

- при подъеме груза лебедкой $Q_{лп} = 3600 \cdot N_{л} \cdot k_3(1 - \eta_m)$;

- при спуске груза лебедкой $Q_{лс} = 3600 \cdot N_{л} \cdot k_3$.

где $N_{л}$ - установленная мощность электродвигателя лебедки, кВт; η_m - механический к. п. д.: $\eta_m = 0,8$.

4.3. Тепловыделение при работе *трансформатора* $Q_{тр}$, кДж/ч

$$Q_{тр} = 3600 \cdot N_{тр} \cdot p_{тр}, \quad (4.11)$$

где $N_{тр}$ - мощность трансформатора, кВт; $p_{тр}$ - тепловые потери трансформатора: $p_{тр} = 0,04 \div 0,05$.

4.4. Тепловыделение при затвердевании монолитной *бетонной крепи* $Q_б$, кДж/ч

$$Q_б = q_б \cdot P \cdot l_{ц}, \quad (4.12)$$

где $q_б$ - удельное выделение теплоты при отвердевании бетона, кДж/(м²·ч); принимается $q_б = 200 \div 400$ кДж/(м²·ч); P - периметр выработки, м; $l_{ц}$ - длина участка бетонирования, контактирующего с вентиляционной струей за один цикл проходки, м.

4.5. Тепловыделение при *взрыве ВВ*. В выработке большого сечения при использовании более 100 кг ВВ тепловыделение при взрыве $Q_{взр}$, кДж/ч, рассчитывается по формуле

$$Q_{взр} = 0,8 \cdot q_{взр} \cdot m_з, \quad (4.13)$$

где $q_{взр}$ - удельное тепловыделение при взрыве 1 кг ВВ, кДж/кг; $m_з$ - масса заряда, кг.

Таблица 4.1

Рекомендуемые значения $q_{взр}$ для применяемых ВВ

Аммонит ПЖВ-20	3360		Аммонит АП-5ЖВ	3780
----------------	------	--	----------------	------

Угленит Э-6	2570		Аммонит скальный №1	5400
Победит ВП-4	3810		Аммонит № 6 ЖВ	4290
Аммонит АП-4ЖВ	3560		Игданит	3790

4.6. Тепловыделение при работе шахтных **вентиляторов** происходит в результате работы электродвигателя, внутренних потерь энергии в вентиляторе и аэродинамического сжатия воздуха. Количество теплоты $Q_{\text{вент}}$, кДж/ч, поступающее в выработку при работе вентилятора, выражается формулой

$$Q_{\text{вент}} = 3600 \cdot V_{\text{вс}} \frac{h_{\text{в}}}{1000 \eta_{\text{вв}}} = 3,6 \cdot V_{\text{вс}} \frac{h_{\text{в}}}{\eta_{\text{вв}}}, \quad (4.14)$$

где $V_{\text{вс}}$ - количество воздуха, проходящего по выработке (секундный расход), м³/с; $h_{\text{в}}$ - депрессия выработки, Па;

$$h_{\text{в}} = \alpha_{\text{в}} \cdot P \cdot l \frac{v^2}{S}, \quad (4.15)$$

где $\alpha_{\text{в}}$ - коэффициент аэродинамического сопротивления трения выработки, Н·с²/м⁴ = Па· с²/м²; P , l , S - периметр, длина и площадь поперечного сечения выработки, м, м, м²; v - средняя скорость движения воздуха по выработке, м/с;

$$\eta_{\text{вв}} = \eta_{\text{в}} \cdot \eta_{\text{дв}} \cdot \eta_{\text{п}}, \quad (4.16)$$

$\eta_{\text{в}} = 0,6 \div 0,8$; $\eta_{\text{дв}} = 0,85 \div 0,95$ и $\eta_{\text{п}}$ - к. п. д. соответственно вентиляторной установки, вентилятора, двигателя и редукторной ($\eta_{\text{п}} = 1$) или ременной ($\eta_{\text{п}} = 0,9 \div 0,95$) передач.

Подставляя (4.15) в (4.16) и учитывая, что

$$V_{\text{вс}} = v \cdot S \text{ м}^3/\text{с}, \quad (4.17)$$

получим (кДж/ч)

$$Q_{\text{вент}} = 3,6 \cdot \alpha_{\text{в}} \cdot P \cdot l \frac{v^3}{\eta_{\text{вв}}}. \quad (4.18)$$

4.7. Тепловыделение при работе **людей** $Q_{\text{л}}$, кДж/ч

$$Q_{\text{л}} = q_{\text{л}} \cdot n_{\text{л}}, \quad (4.19)$$

где $q_{\text{л}}$ - количество теплоты, выделяемое работающим человеком, кДж/ч·чел
 $q_{\text{л}} = 1050 \div 2500$ кДж/ч·чел.; $n_{\text{л}}$ - число одновременно работающих людей в выработке.

5. Общее тепловыделение в выработку $Q_{\text{общ}}$, кДж/ч, находится суммированием всех частных выделений теплоты

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (4.20)$$

Способы искусственного охлаждения шахтного воздуха

Целью искусственного охлаждения шахтного воздуха является отвод определенного («излишнего») количества теплоты от него при помощи охлаждающего вещества. Тепло от воздуха можно отвести путем соприкосновения последнего с какой-либо холодной поверхностью или путем смешения его с газообразной струей, имеющей температуру ниже температуры воздуха.

Борьба с избыточным выделением теплоты в горные выработки ведется по нескольким направлениям:

- предохранение воздуха от нагревания при его движении к местам потребления;
- охлаждение воздуха без применения специальных холодильных машин;
- охлаждение воздуха с применением холодильных машин (кондиционирование).

Способы предупреждения нагревания шахтного воздуха включают в себя следующее:

- увеличение количества подаваемого в выработки воздуха путем повышения мощности вентиляторных установок, увеличения скорости движения воздуха, расширения сечений воздухоподающих выработок;

- замена машин с электроприводам машинами с пневматическим приводом;
- тепло- и гидроизоляция стен выработок;
- теплоизоляция и тщательное уплотнение воздухоподающих трубопроводов;
- предупреждение возникновения интенсивных окислительных процессов;
- сокращение пути движения воздуха к местам потребления путем выбора соответствующей схемы проветривания, проведения дополнительных выработок и скважин;
- подача воздуха к местам потребления по специально пройденным выработкам, где скорость движения воздуха может быть существенно увеличена;
- замена восходящего проветривания очистных выработок нисходящим проветриванием (при соблюдении соответствующих требований ПБ).

Для предотвращения нагревания воздуха без применения холодильных машин используются следующие способы:

- осушение воздуха сорбентами, т. е. веществами, способными поглощать влагу из воздуха (например, хлористым кальцием);
- охлаждение воздуха льдом;
- охлаждение воздуха жидким воздухом, при испарении которого поглощается значительное количество теплоты;
- охлаждение воздуха сжатым воздухом (например, от пневмокондиционеров);
- охлаждение воздуха водой: путем непосредственного соприкосновения охлаждающей воды с воздухом либо через поверхность труб, где воздух охлаждается в специальных теплообменниках;

- пропускание воздуха через тепловыравнивающие каналы путем подвода воздуха к стволу по горизонтальным выработкам, пройденным на глубине среднегодовой температуры.

Наиболее эффективным является искусственное охлаждение воздуха в системах кондиционирования: в компрессорных и абсорбционных холодильных установках. Холодильные установки бывают передвижные и стационарные. Передвижные установки предназначены для охлаждения воздуха в тупиковых выработках или в отдаленных очистных забоях. Стационарные установки располагаются как на земной поверхности, так и в подземных условиях.

Хладопроизводительность (холодильная мощность) отечественных шахтных холодильных агрегатов и кондиционеров составляет:

- передвижных кондиционеров ВК-230 - 230 кВт, КПШ-3 – 105 кВт, КПШ-40 - 47 кВт, КПШ-40П с пневмоприводом - 52 кВт;
- турбокомпрессионных холодильных машин ШХТМ-1300 - 1500 кВт, ХТМФ-235М-2000 - 2325 кВт, ХТМФ-248-4000 - 4650 кВт;
- поршневой холодильной машины МФ-220-1РШ - 255 кВт;
- абсорбционной холодильной машины АБХА-2500-2В – 2800 кВт.

Для стационарной работы на поверхности используются машины ХТМФ-235-2000, ХТМФ-248-4000, АБХА-2500-2В, а машины ШХТМ-1300 и МФ-220-1РШ устанавливаются на глубоких горизонтах.

Охлаждение шахтного воздуха с применением холодильных машин становится необходимым, когда общее тепловыделение в выработку $Q_{\text{общ}}$ превышает тепловыделение в нее, допускаемое Правилами безопасности, $Q_{\text{пб}}$, т. е. при условии

$$Q_{\text{общ}} > Q_{\text{пб}}.$$

Поскольку эти количества теплоты описываются формулами:

$$Q_{\text{общ}} = c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{теп}} \cdot (t_{\text{пб}} - t_{\text{н}}) \text{ и } Q_{\text{пб}} = c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{в}} \cdot (t_{\text{пб}} - t_{\text{н}}),$$

то критерий необходимости кондиционирования воздуха в выработке может быть записан в виде соотношения

$$V_{\text{теп}} > V_{\text{в}},$$

где $V_{\text{теп}}$ - количество воздуха, которое необходимо подать в выработку по тепловому фактору без охлаждения воздуха, м³/ч;

$$V_{\text{теп}} = \frac{Q_{\text{общ}}}{c_p \cdot \rho \cdot \Delta t}, \quad (4.21)$$

где c_p - удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, кДж/(кг·К)
 $c_p = 0,241 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 4,1868 \text{ кДж/ккал} = 1,009 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; ρ - плотность воздуха, кг/м³; Δt - перепад температур между выходящим (отработанным) и входящим (свежим) воздухом, проходящим по выработке, К (°С):

для стволов $\Delta t = t_{\text{в}} - t_{\text{н}}$, для подземных выработок $\Delta t = t_{\text{п}} - t_{\text{в}}$.

При необходимости кондиционирования воздуха следует выбрать тип кондиционера, рассчитать потребное количество кондиционеров и проверить правильность их установки.

Требуемая хладопроизводительность кондиционера $N_{\text{к}}$, кВт, находится по формуле

$$N_{\text{к}}' = \frac{c_h \cdot \rho \cdot V_d (t_{\text{н}} - t_{\text{пб}})}{3600} \quad (4.22)$$

К установке принимают кондиционер хладопроизводительностью

$$N_{\text{к}} \geq N_{\text{к}}'$$

При установке кондиционера в выработку (обычно одного) температура смеси за кондиционером $t_{\text{см}}$, °С (=К), определяется соотношением

$$t_{\text{см}} = t_{\text{п}} - 3600 \frac{N_{\text{к}}}{c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{в}}} \quad (4.23)$$

Достаточность установки кондиционера проверяется по условию

$$t_{\text{см}} < t_{\text{в}}$$

Если $t_{\text{см}} > t_{\text{в}}$, то необходимо установить более мощный кондиционер.

Пример расчета. Исходные данные:

выработка - ствол шахты,

$$\lambda = 9,21 \text{ кДж}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot \text{К}),$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 38,5 \text{ м}^2,$$

$$a = \frac{\lambda}{c_{\pi} \cdot \rho_{\pi}} = 0,00477 \text{ м}^2/\text{ч},$$

$$r_3 = 3,5 \text{ м},$$

$$v = 2 \text{ м/с},$$

$$d = d_3 = 7 \text{ м},$$

$$\tau = 7 \text{ лет} = 7 \cdot 365 \cdot 24 = 61320 \text{ ч},$$

$$P = \pi \cdot d = 22 \text{ м},$$

$$t_{\text{н}} = 8,5 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$l = H = 1200 \text{ м},$$

$$t_{\text{в}} = t_{\text{пб}} = 24 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$\alpha = 0^{\circ},$$

$$N_{\text{потр}} = 100 \text{ кВт},$$

$$H_0 = 20 \text{ м},$$

$$N_{\pi} = 90 \text{ кВт},$$

$$\delta = \frac{1}{\Gamma_{\text{ст}}} = 0,035 \text{ м/}^{\circ}\text{C},$$

$$\alpha_6 = 0,0040 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4 =$$

$$= 0,0392 \text{ Па} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2,$$

порода - песчаник,

$$N_{\text{тр}} = 100 \text{ кВт},$$

$$\rho_{\pi} = 2400 \text{ кг/м}^3,$$

$$n = 7 \text{ человек.}$$

$$c_{\pi} = 0,858 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

Для обеспечения возможности выполнения расчета тепловыделений по приведенным выше формулам принимаем дополнительно следующие данные (параметры):

$$\beta = 0,01 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К}),$$

$$P_{\text{тр}} = 0,05,$$

$$r = 2256 \text{ кДж/кг},$$

$$q_6 = 200 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч}),$$

$$\rho = 1,25 \text{ кг/м}^3,$$

$$l_{\pi} = 5 \text{ м},$$

$$q_{\text{ок}} = 16 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч}),$$

$$q_{\pi} = 2000 \text{ кДж}/(\text{ч} \cdot \text{чел}),$$

$$\kappa_3 = 0,8,$$

$$\eta_{\text{ву}} = \eta_{\text{у}} \cdot \eta_{\text{дв}} \cdot \eta_{\pi} = 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,56,$$

$$\eta_{\text{дв}} = 0,95,$$

$$c_p = 1,009 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Подсчитываем количества теплоты, выделяющиеся в выработку.

1. Тепловыделение при охлаждении горных пород

$$\alpha_k = 12.4 \cdot \frac{V^{0.8}}{d_s^{0.2}} = 12.4 \cdot \frac{2^{0.8}}{7^{0.2}} = 14.32, \text{кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$\alpha_n = 1.3 \cdot \beta \cdot r = 1.3 \cdot 0.001 \cdot 2256 = 29.33, \text{кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$\alpha_0 = \alpha_k + \alpha_n = 14.32 + 29.33 = 43.65, \text{кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$K_\tau = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_s}} \cdot \left[\frac{1}{2R_s} + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau} \left(1 + \frac{\lambda}{2\alpha_0 R_s} \right)} \right] =$$
$$\frac{9.211}{1 + \frac{9.211}{2 \cdot 43.65 \cdot 3.5}} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot 3.5} + \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 0.00447 \cdot 61320} \left(1 + \frac{9.211}{2 \cdot 43.65 \cdot 3.5} \right)} \right] = 1.57,$$
$$\text{кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{К});$$

$$t_n = t_H + (H - H_0)\delta = 8.5 + (1200 - 20)0.035 = 50 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$Q_{\text{охл}} = K_\tau \cdot P \cdot l(t_n - t_b) = 1.57 \cdot 22 \cdot 1200(50 - 24) = 107764 \text{кДж}/\text{ч}.$$

2. Тепловыделение при сжатии шахтного воздуха

$$V_{\text{и}} = 3600 \cdot v \cdot S = 3600 \cdot 2 \cdot 38.5 = 277200 \text{м}^3/\text{ч};$$

$$Q_{\text{сж}} = 0.00981 \cdot \rho \cdot V_{\text{в}} \cdot H = 0.00981 \cdot 1.25 \cdot 277200 \cdot 1200 = 4078998$$
$$\text{кДж}/\text{ч}.$$

3. Тепловыделение при окислительных процессах

$$Q_{\text{ок}} = q_{\text{ок}} \cdot V^{0.8} \cdot P \cdot l = 16 \cdot 2^{0.8} \cdot 22 \cdot 1200 = 735441 \text{кДж}/\text{ч}.$$

4. Тепловыделение от местных источников:

- при работе электродвигателей горных машин и освещения

$$Q_{\text{эд}} = \frac{3600 \cdot N_{\text{потр}} \cdot K_s}{\eta_{\text{дв}}} = \frac{3600 \cdot 100 \cdot 0.8}{0.95} = 303158 \text{кДж}/\text{ч};$$

- при спуске груза лебедкой

$$Q_{\text{лс}} = 3600 \cdot N_{\text{н}} \cdot K_s = 3600 \cdot 90 \cdot 0.8 = 259200 \text{кДж}/\text{ч};$$

- при работе трансформатора

$$Q_{\text{тр}} = 3600 \cdot N_{\text{тр}} \cdot P_{\text{тр}} = 3600 \cdot 100 \cdot 0.5 = 18000 \text{кДж}/\text{ч};$$

- при работе шахтных вентиляторов

$$Q_{\text{ВЕН}} = 3,6 \cdot \alpha_{\text{В}} \cdot P \cdot l \frac{V^3}{\eta_{\text{ВУ}}} = 3,6 \cdot 0,0392 \cdot 22 \cdot 1200 \frac{2^3}{0,565} = 52751 \text{ кДж/ч};$$

- при затвердевании монолитной бетонной крепи

$$Q_{\text{б}} = q_{\text{б}} \cdot P \cdot l_{\text{ц}} = 200 \cdot 22 \cdot 5 = 22000 \text{ кДж/ч};$$

- при работе людей

$$Q_{\text{Л}} = q_{\text{Л}} \cdot n_{\text{Л}} = 2000 \cdot 7 = 14000 \text{ кДж/ч}.$$

5. Общее тепловыделение в ствол

$$Q_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{\text{охл}} + Q_{\text{сж}} + Q_{\text{ок}} + Q_{\text{зд}} + Q_{\text{лс}} + Q_{\text{тр}} + Q_{\text{ВЕН}} + Q_{\text{б}} + Q_{\text{Л}} = \\ 1077648 + 4078998 + 735441 + 303158 + 259200 + 18000 + 52751 + \\ 22000 + 14000 = 6561196 \text{ кДж/ч}.$$

Находим количество воздуха, необходимое для проветривания выработки по тепловому фактору без охлаждения воздуха

$$V_{\text{теп}} = \frac{Q_{\text{общ}}}{c_p \cdot \rho \cdot (t_{\text{нб}} - t_{\text{Н}})} = \frac{6561196}{1,009 \cdot 1,25 \cdot (24 - 8,5)} = 335611 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Проверяем условие достаточности расхода воздуха по тепловому фактору $V_{\text{теп}} < V_{\text{В}}$.

В рассматриваемом случае это условие не выполняется, так как

$$V_{\text{теп}} = 335611 < V_{\text{В}} = 277200$$

Следовательно, требуется искусственное охлаждение воздуха при помощи холодильных машин.

Определяем требуемую хладопроизводительность холодильной машины

$$N_{\text{к}} = \frac{c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{В}} (t_{\text{п}} - t_{\text{нб}})}{3600} = \frac{1,009 \cdot 1,25 \cdot 277200 (50 - 24)}{3600} = 2525 \text{ кВт}.$$

Принимаем $N_{\text{к}} = 2550 \text{ кВт}$. Температура смеси теплого и охлажденного воздуха за кондиционером составит

$$t_{\text{см}} = t_{\text{п}} - \frac{3600 \cdot N_{\text{к}}}{c_p \cdot \rho \cdot V_{\text{В}}} = 50 - \frac{3600 \cdot 2550}{1,009 \cdot 1,25 \cdot 277200} = 23,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

что удовлетворяет требованиям ПБ.

Варианты заданий

Перечень вариантов заданий к расчету тепловыделений в горные выработки приведен в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Исходные данные для расчетов тепловыделений

	Величины	Номер варианта									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Выработка	Штрек		Уклон		Квершлаг		Бремберг		Ствол	
2	$S, \text{ м}^2$	8	10	7	6	12	14	10	12	44,2	33,2
3	$P, \text{ м}$	11,8	13,2	11,0	10,2	14,4	15,6	13,2	14,4	23,6	20,4
4	$L, \text{ м}$	900	1000	300	500	700	600	1000	900	1100	1200
5	$\alpha, ^\circ$	6	8	40	50	10	8	15	20	90	90
6	$H, \text{ м}$	800	900	600	700	1000	800	1200	1500	1100	1200

Продолжение табл. 4.2

7	$H_0, \text{ м}$	20	21	22	23	24	25	30	35	28	30
8	$\Gamma_{\text{ст}}, \text{ м}/^\circ\text{C}$	30	25	26	27	31	29	32	28	34	27
9	Порода	Бурый уголь	Каменный уголь	Каменный уголь	Каменный уголь	Песчаник	Песчаник	Каменный уголь	Каменный уголь	Глинистый и песчаный сланец	Песчаник
10	$V, \text{ м/с}$	0,5	0,75	1,0	1,5	1,0	2,0	1,5	2,0	1,0	0,5
11	$\tau, \text{ м/с}$	3	2	6	8	5	9	10	7	6	4
12	$t_{\text{н}}, ^\circ\text{C}$	8,5	2,5	3,0	2,5	7,5	8,3	7,9	4,2	8,0	7,5
13	$t_{\text{в}} = t_{\text{пб}}, ^\circ\text{C}$	24	23	20	25	23	25	24	26	24	23
14	$N_{\text{потр}}, \text{ кВт}$	70	60	50	40	100	90	50	50	100	100
15	$N_{\text{л}}, \text{ кВт}$	-	-	50	50	-	-	-	-	-	100

16	$N_{\text{тр}}$, кВт	5	10	-	-	5	5	5	5	10	10
17	$\alpha_{\text{в}}$, Па·с ² /м ²	0,017	0,019	0,018	0,016	0,015	0,014	0,013	0,020	0,049	0,049
18	$n_{\text{л}}$, чел.	7	6	3	3	6	5	6	6	5	8

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте климатические условия в горных выработках глубоких шахт.
2. Как осуществляется теплоотдача тела человека в окружающую среду?
3. Какой микроклимат в выработках глубоких шахт считается допустимым?
4. Перечислите виды (формы) нагрева воздуха, движущегося по горным выработкам.
5. Как выполняется тепловое кондиционирование воздуха в горных выработках?

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. ЦВЕТА СИГНАЛЬНЫЕ И ЗНАКИ БЕЗОПАСНОСТИ

Цель работы – привить практические навыки в применении сигнальных цветов и знаков безопасности; изучить назначение, характеристики и порядок применения сигнальных цветов и знаков безопасности.

Теоретические положения.

Для предупреждения многих несчастных случаев на производстве и в быту эффективным средством является цветовое оформление машин, приборов, помещений и рациональное применение сигнальных цветов и знаков безопасности, которые устанавливает ГОСТ Р 12.4.026–01 [1].

Различают прямое психологическое воздействие цвета на человека, вызывающее, например, чувство радости или печали, создающее впечатление легкости или тяжести какого-либо предмета, удаленности или близости его, и вторичное воздействие, связанное с ассоциациями. Например, красный, оранжевый и желтый цвета ассоциируются с огнем, солнцем, т. е. теплом. Такие цвета создают впечатление тепла и называются теплыми цветами. Белый, голубой, зеленый и некоторые другие цвета ассоциируются с холодом и называются холодными цветами.

Сигнальные цвета применяются для окраски поверхностей конструкций, приспособлений и элементов производственного оборудования, которые могут служить источником опасности для работающих.

ГОСТом установлены красный, желтый, зеленый и синий сигнальные цвета. Для усиления контраста сигнальных цветов они применяются на фоне контрастных цветов. Контрастные цвета применяются также для выполнения символов и поясняющих надписей.

Красный сигнальный цвет применяется: для запрещающих знаков; надписей и символов на знаках пожарной безопасности, обозначений от-

ключающих устройств механизмов и машин, в том числе аварийных; внутренних поверхностей открывающихся кожухов и корпусов, ограждающих движущиеся элементы механизмов и машин и их крышек; рукояток кранов аварийного сброса давления; корпусов масляных выключателей, находящихся в рабочем состоянии под напряжением, и обозначения пожарной техники.

Желтый сигнальный цвет используется: для предупреждающих знаков элементов строительных конструкций, которые могут явиться причиной получения травм (низкие балки, выступы и перепады в полости пола, малозаметные ступени, пандусы), мест, в которых существует опасность падения, сужений проездов, колонн, стоянок и опор производственного оборудования (открытые движущиеся части оборудования); кромок штампов, прессов, ограждающих конструкций площадок для работ, проводимых на высоте, и т. п. элементов внутрицехового и межцехового транспорта, подъемно-транспортного оборудования и строительно-дорожных машин, кабин и ограждений кранов, боковых поверхностей электрокаров, погрузчиков, тележек и постоянных и временных ограждений или элементов ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, у проемов, ям, котлованов, выносных площадок, постоянных и временных ограждений лестниц, перекрытий строящихся зданий; балконов и других мест, где возможно падение с высоты, емкостей, содержащих вещества с опасными и вредными свойствами, на которые предупреждающую окраску наносят в виде полосы шириной 50–100 мм в зависимости от размещения емкости; границ подходов к эвакуационным или запасным выходам.

Зеленый сигнальный цвет применяется для предписывающих знаков дверей и светового табло эвакуационных или запасных выходов, сигнальных ламп.

Синий сигнальный цвет используется для указательных знаков. Символ на знаках безопасности – это простое, всем понятное изображение характера опасности, мер предосторожности, инструктивных указаний или информации

по безопасности. Знаки должны быть установлены в местах, пребывание в которых связано с возможной опасностью для работающих, а также на производственном оборудовании, являющемся источником такой опасности. Знаки безопасности, устанавливаемые на воротах и входных дверях помещений, обозначают, что зона их действия – все помещение. При необходимости ограничения зоны действия знака приводятся соответствующие указания с вышеуказанным ГОСТом. Они контрастно выделяются на окружающем их фоне и находятся в поле зрения людей, для которых предназначены. На местах и участках, являющихся временно опасными, устанавливаются переносные знаки и временные ограждения, окрашенные в сигнальный цвет. Всего предусмотрено четыре группы знаков безопасности:

- 1 запрещающий (в виде круга);
- 2 предупреждающий (в виде треугольника);
- 3 предписывающий (в виде квадрата);
- 4 указательный (в виде вертикального прямоугольника).

Для более полного усвоения формы символов на знаках и мест их установки следует дополнительно изучить раздел 3 ГОСТ Р 12.4.026-01 [1]. Для этого ниже дается необходимая выдержка из данного ГОСТа.

Стандарт не распространяется:

- на цвета, применяемые для световой сигнализации всех видов транспорта, транспортных средств и дорожного движения;
- цвета, знаки и маркировочные щитки баллонов, трубопроводов, емкостей для хранения и транспортирования газов и жидкостей;
- дорожные знаки и разметку, путевые и сигнальные знаки железных дорог, знаки для обеспечения безопасности движения всех видов транспорта (кроме знаков безопасности для подъемно-транспортных механизмов, внутризаводского, пассажирского и общественного транспорта);
- знаки и маркировку опасных грузов, грузовых единиц, требующих специальных условий транспортирования и хранения;

- знаки для электротехники.

Назначение сигнальных цветов, знаков безопасности и сигнальной разметки состоит в обеспечении однозначного понимания определенных требований, касающихся безопасности, сохранения жизни и здоровья людей, снижения материального ущерба без применения слов или с их минимальным количеством.

Сигнальные цвета, знаки безопасности и сигнальную разметку следует применять для привлечения внимания людей, находящихся на производственных, общественных объектах и в иных местах, к опасности, опасной ситуации, предостережения в целях избегания опасности, сообщения о возможном исходе в случае пренебрежения опасностью, предписания или требования определенных действий, а также для сообщения необходимой информации.

Применение сигнальных цветов, знаков безопасности и сигнальной разметки на производственных, общественных объектах и в иных местах не заменяет необходимости проведения организационных и технических мероприятий по обеспечению условий безопасности, использования средств индивидуальной и коллективной защиты, обучения и инструктажа по технике безопасности.

Размещение (установку) знаков безопасности на оборудовании, машинах, механизмах должна проводить организация-изготовитель. При необходимости дополнительное размещение (установку) знаков безопасности на оборудовании, машинах, механизмах, находящихся в эксплуатации, проводит эксплуатирующая их организация.

Графические символы и поясняющие надписи на знаках безопасности отраслевого назначения, не предусмотренные настоящим стандартом, необходимо устанавливать в отраслевых стандартах, нормах, правилах с соблюдением требований настоящего стандарта.

Назначение и правила применения сигнальных цветов.

Стандарт устанавливает следующие сигнальные цвета: красный, желтый, зеленый, синий. Для усиления зрительного восприятия цветографических изображений знаков безопасности и сигнальной разметки сигнальные цвета следует применять в сочетании с контрастными цветами – белым или черным. Контрастные цвета необходимо использовать для выполнения графических символов и поясняющих надписей.

Сигнальные цвета необходимо применять:

- для обозначения поверхностей, конструкций (или элементов конструкций), приспособлений, узлов и элементов оборудования, машин, механизмов и т. п., которые могут служить источниками опасности для людей, поверхности ограждений и других защитных устройств, систем блокировок и т. п.;
- обозначения пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов;
- знаков безопасности, сигнальной разметки, планов эвакуации и других визуальных средств обеспечения безопасности;
- светящихся (световых) средств безопасности (сигнальные лампы, табло и др.);
- обозначения пути эвакуации.

Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и соответствующие им контрастные цвета установлены в табл. 5.0.

Красный сигнальный цвет следует применять:

- для обозначения отключающих устройств механизмов и машин, в том числе аварийных;
- внутренних поверхностей крышек (дверец) шкафов с открытыми токоведущими элементами оборудования, машин, механизмов и т. п. (если оборудование, машины, механизмы имеют красный цвет, то внутренние поверхности крышек (дверец) должны быть окрашены лакокрасочными

материалами желтого сигнального цвета);

- рукояток кранов аварийного сброса давления;
- корпусов масляных выключателей, находящихся в рабочем состоянии под напряжением;

- обозначения различных видов пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов, требующих оперативного опознавания (пожарные машины, наземные части гидрант-колонок, огнетушители, баллоны, устройства ручного пуска систем (установок) пожарной автоматики, средств оповещения, телефоны прямой связи с пожарной охраной, насосы, пожарные стенды, бочки для воды, ящики для песка, а также ведра, лопаты, топоры и т. п.);

- окантовки пожарных щитов белого цвета для крепления пожарного инструмента и огнетушителей. Ширина окантовки – 30–100 мм (допускается выполнять окантовку пожарных щитов в виде чередующихся наклонных под углом 45–60° полос красного сигнального и белого контрастного цветов);

- орнаментовки элементов строительных конструкций (стены, колонны) в виде отрезка горизонтально расположенной полосы для обозначения мест нахождения огнетушителя, установки пожаротушения с ручным пуском, кнопки пожарной сигнализации и т. п. Ширина полос – 150–300 мм. Полосы должны располагаться в верхней части стен и колонн на высоте, удобной для зрительного восприятия с рабочих мест, проходов и т. п. В состав орнаментовки, как правило, следует включать знак пожарной безопасности с соответствующим графическим символом средства противопожарной защиты;

- сигнальных ламп и табло с информацией, извещающей о нарушении технологического процесса или нарушении условий безопасности:

- «Тревога», «Неисправность» и др.;

- обозначения захватных устройств промышленных установок и промышленных роботов;

Таблица 5.0

**Смысловое значение, область применения сигнальных цветов и
соответствующие им контрастные цвета**

Сигнальный цвет	Смысловое значение	Область применения	Контрастный цвет
Красный	Непосредственная опасность Аварийная или опасная ситуация Пожарная техника, средства противопо- ж. защиты, их элементы	Запрещение опасного поведения или действия. Обозначение непо- средственной опасности Сообщение об аварийном отключении или аварийном состоянии оборудования (технологического процесса) Обозначение и определение мест нахождения пожарной техники, средств противопожарной защиты, их элементов	Белый
Желтый	Возможная опас- ность	Обозначение возможной опасно- сти, опасной ситуации. Преду- преждение о возможной опасно- сти	Черный
Зеленый	Безопасность, безопасные усло- вия	Сообщение о нормальной работе оборудования, нормальном со- стоянии технологического про- цесса	Белый
	Помощь, спасение	Обозначение пути эвакуации, аптек, кабинетов, средств по оказанию первой медицинской помощи	
Синий	Предписание во избежание опасно- сти	Требование обязательных дейст- вий в целях обеспечения безо- пасности	Белый
	Указание	Разрешение определенных дей- ствий	

- обозначения временных ограждений или элементов временных ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, участков, территорий, ям, котлованов, временных ограждений мест химического, бактериологического и радиационного загрязнения, а также ограждений других мест, зон, участков, вход на которые временно запрещен.

Поверхность временных ограждений должна быть целиком окрашена красным сигнальным цветом или иметь чередующиеся наклонные под углом 45–60° полосы красного сигнального и белого контрастного цветов. Ширина полос – 20–300 мм при соотношении ширины полос красного и белого цветов от 1:1 до 1,5:1,0;

- запрещающих знаков безопасности и знаков пожарной безопасности.

Не допускается использовать красный сигнальный цвет:

- для обозначения стационарно устанавливаемых средств противопожарной защиты (их элементов), не требующих оперативного опознавания (пожарные извещатели, пожарные трубопроводы, оросители установок пожаротушения и т. п.);

- на пути эвакуации во избежание путаницы и замешательства (кроме запрещающих знаков безопасности и знаков пожарной безопасности).

Желтый сигнальный цвет следует применять:

- а) для обозначения элементов строительных и иных конструкций, которые могут явиться причиной получения травм работающими: низких балок, выступов и перепадов в плоскости пола, малозаметных ступеней, пандусов, мест, в которых существует опасность падения (кромки погрузочных платформ, грузовых поддонов, неогражденных площадок, люков, проемов и т. д.), сужений проездов, малозаметных распорок, узлов, колонн, стоек и опор в местах интенсивного движения внутризаводского транспорта и т. д.;

- б) обозначения узлов и элементов оборудования, машин и механизмов, неосторожное обращение с которыми представляет опасность для людей:

открытых движущихся узлов, кромок оградительных устройств, не полностью закрывающих движущиеся элементы (шлифовальные круги, фрезы, зубчатые колеса, приводные ремни, цепи и т. п.), ограждающих конструкций площадок для работ, проводимых на высоте, а также постоянно подвешенных к потолку или стенам технологической арматуры и механизмов, выступающих в рабочее пространство;

в) обозначения опасных при эксплуатации элементов транспортных средств, подъемно-транспортного оборудования и строительно-дорожных машин, площадок грузоподъемников, бамперов и боковых поверхностей электрокаров, погрузчиков, тележек, поворотных платформ и боковых поверхностей стрел экскаваторов, захватов и площадок автопогрузчиков, рабочих органов сельскохозяйственных машин, элементов грузоподъемных кранов, обойм грузовых крюков и др.;

г) подвижных монтажных устройств, их элементов и элементов грузозахватных приспособлений, подвижных частей кантователей, траверс, подъемников, подвижных частей монтажных вышек и лестниц;

д) внутренних поверхностей крышек, дверей, кожухов и других ограждений, закрывающих места расположения движущихся узлов и элементов оборудования, машин, механизмов, требующих периодического доступа для контроля, ремонта, регулировки и т. п.

Если указанные узлы и элементы закрыты съёмными ограждениями, то окрашиванию лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета подлежат сами движущиеся узлы, элементы и (или) поверхности смежных с ними неподвижных деталей, закрываемые ограждениями;

е) постоянных ограждений или элементов ограждений, устанавливаемых на границах опасных зон, участков, территорий: у проемов, ям, котлованов, выносных площадок, постоянных ограждений лестниц, балконов, перекрытий и других мест, в которых возможно падение с высоты.

Поверхность ограждения должна быть целиком окрашена

лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета или иметь чередующиеся наклонные под углом $45-60^\circ$ полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов.

Ширина полос – 20–300 мм при соотношении ширины полос желтого и черного цвета от 1:1 до 1,5:1,0;

ж) обозначения емкостей и технологического оборудования, содержащих опасные или вредные вещества.

Поверхность емкости должна быть целиком окрашена лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета или иметь чередующиеся наклонные под углом $45-60^\circ$ полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов.

Ширина полос – 50–300 мм в зависимости от размера емкости при соотношении ширины полос желтого и черного цвета от 1:1 до 1,5:1,0;

з) обозначения площадей, которые должны быть всегда свободными на случай эвакуации (площадки у эвакуационных выходов и подходы к ним, возле мест подачи пожарной тревоги, возле мест подхода к средствам противопожарной защиты, средствам оповещения, пунктам оказания первой медицинской помощи, пожарным лестницам и др.).

Границы этих площадей должны быть обозначены сплошными линиями желтого сигнального цвета, а сами площади – чередующимися наклонными под углом $45-60^\circ$ полосами желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина линий и полос – 50 – 100 мм;

и) предупреждающих знаков безопасности.

На поверхность объектов и элементов, перечисленных в а) и в), допускается наносить чередующиеся наклонные под углом $45-60^\circ$ полосы желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина полос – 50– 300 мм в зависимости от размера объекта и расстояния, с которого должно быть видно предупреждение.

Если оборудование, машины и механизмы окрашены лакокрасочными материалами желтого сигнального цвета, то перечисления б) и д), их узлы и

элементы должны быть обозначены чередующимися наклонными под углом 45–60° полосами желтого сигнального и черного контрастного цветов. Ширина полос – 20–300 мм в зависимости от размера узла (элемента) оборудования при соотношении ширины полос желтого и черного цветов от 1:1 до 1,5:1,0.

Для строительно-дорожных машин и подъемно-транспортного оборудования, которые могут находиться на проезжей части, допускается применять предупреждающую окраску в виде чередующихся красных и белых полос.

Синий сигнальный цвет следует применять:

- для окрашивания светящихся (световых) сигнальных индикаторов и других сигнальных устройств указательного или разрешающего назначения;
- предписывающих и указательных знаков безопасности.

Зеленый сигнальный цвет следует применять:

- для обозначения безопасности (безопасных мест, зон безопасного состояния);
- сигнальных ламп, извещающих о нормальном режиме работы оборудования, нормальном состоянии технологических процессов и т. п.;
- обозначения пути эвакуации;
- эвакуационных знаков безопасности и знаков безопасности медицинского и санитарного назначения.

Характеристики сигнальных и контрастных цветов.

Знаки безопасности следует размещать (устанавливать) в поле зрения людей, для которых они предназначены.

Знаки безопасности должны быть расположены таким образом, чтобы они были хорошо видны, не отвлекали внимания и не создавали неудобств при выполнении людьми своей профессиональной или иной деятельности, не загромождали проход, проезд, не препятствовали перемещению грузов.

Знаки безопасности, размещенные на воротах и на (над) входных(ми) дверях(ми) помещений, означают, что зона действия этих знаков

распространяется на всю территорию и площадь за воротами и дверями.

Размещение знаков безопасности на воротах и дверях следует выполнять таким образом, чтобы зрительное восприятие знака не зависело от положения ворот или дверей (открыто, закрыто). Эвакуационные знаки безопасности Е 22 «Выход» и Е 23 «Запасный выход» должны размещаться только над дверями, ведущими к выходу.

Знаки безопасности, установленные у въезда (входа) на объект (участок), означают, что их действие распространяется на объект (участок) в целом.

При необходимости ограничить зону действия знака безопасности соответствующее указание следует приводить в поясняющей надписи на дополнительном знаке.

Знаки безопасности, изготовленные на основе несветящихся материалов, следует применять в условиях хорошего и достаточного освещения.

Знаки безопасности с внешним или внутренним освещением следует применять в условиях отсутствия или недостаточного освещения.

Световозвращающие знаки безопасности следует размещать (устанавливать) в местах, где отсутствует освещение или имеется низкий уровень фоновое освещение (менее 20 лк по СНиП 23-05-95): при проведении работ с использованием индивидуальных источников света, фонарей (например, в туннелях, шахтах и т. п.), а также для обеспечения безопасности при проведении работ на дорогах, автомобильных трассах, в аэропортах и т. п.

Фотолюминесцентные знаки безопасности следует применять там, где возможно аварийное отключение источников света, а также в качестве элементов фотолюминесцентных эвакуационных систем для обеспечения самостоятельного выхода людей из опасных зон в случае возникновения аварий, пожара или других чрезвычайных ситуаций.

Для возбуждения фотолюминесцентного свечения знаков безопасности необходимо наличие в помещении, где они установлены, искусственного или естественного освещения.

Освещенность поверхности фотолюминесцентных знаков безопасности источниками света должна быть не менее 25 лк.

Основные и дополнительные знаки безопасности.

Основные знаки безопасности необходимо разделять на следующие группы: запрещающие знаки; предупреждающие знаки; знаки пожарной безопасности; предписывающие знаки; эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения; указательные знаки.

Геометрическая форма, сигнальный цвет, смысловое значение основных знаков безопасности должны соответствовать приведенным в табл. 5.1

Таблица 5.1

Геометрическая форма, сигнальный цвет, смысловое значение основных знаков безопасности

Группа	Геометрическая форма <*>	Сигнальный цвет	Смысловое значение
Запрещающие знаки	Круг с поперечной полосой	Красный	Запрещение опасного поведения или действия
Предупреждающие знаки	Треугольник	Желтый	Предупреждение о возможной опасности. Осторожность. Внимание
Предписывающие знаки	Круг	Синий	Предписание обязательных действий во избежание опасности
Знаки пожарной безопасности <*>	Квадрат или прямоугольник	Красный	Обозначение и указание мест нахождения средств противопожарной защиты, их элементов
Эвакуационные знаки и знаки медицинского и санитарного назначения	Квадрат или прямоугольник	Зеленый	Обозначение направления движения при эвакуации. Спасение, первая помощь при авариях или пожарах. Надпись, информация для обеспечения безопасности
Указательные знаки	Квадрат или прямоугольник	Синий	Разрешение. Указание. Надпись или информация

Примечание: <*> Рисунки не приводятся. <*> К знакам пожарной безопасности относят также:

- запрещающие знаки: Р 01 «Запрещается курить», Р 02 «Запрещается пользоваться открытым огнем», Р 04 «Запрещается тушить водой», Р 12 «Запрещается загромождать проходы (или) складировать» (табл. 5.2);

- предупреждающие знаки: W 01 «Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества», W 02 «Взрывоопасно», W 11

Запрещающие знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 01		Запрещается курить	Использовать, когда курение может стать причиной пожара. На дверях и стенах помещений, участках, где имеются горючие и легковоспламеняющиеся вещества, или в помещениях, где курить запрещается
Р 02		Запрещается пользоваться открытым огнем и курить	Использовать, когда открытый огонь и курение могут стать причиной пожара. На входных дверях, стенах помещений, участках, рабочих местах, емкостях, производственной таре
Р 03		Проход запрещен	У входа в опасные зоны, помещения, участки и др.
Р 04		Запрещается тушить водой	В местах расположения электрооборудования, складах и других местах, где нельзя применять воду при тушении горения или пожара
Р 05		Запрещается использовать в качестве питьевой воды	На техническом водопроводе и емкостях с технической водой, непригодной для питья и бытовых нужд
Р 06		Доступ постоянным запрещен	На дверях помещений, у входа на объекты, участки и т. п. для обозначения запрета на вход (проход) в опасные зоны или для обозначения служебного входа (прохода)

Продолжение таблицы 5.2

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 07		Запрещается движение средств напольного транспорта	В местах, где запрещается применять средства напольного транспорта (например, погрузчики или напольные транспортеры)
Р 08		Запрещается прикасаться. Опасно	На оборудовании (узлах оборудования), дверцах, щитах или других поверхностях, прикосновение к которым опасно
Р 09		Запрещается прикасаться. Корпус под напряжением	На поверхности корпусов, щитов и т. п., где есть возможность поражения электрическим током
Р 10		Не включать!	На пультах управления и включения оборудования или механизмов при ремонтных и пусконаладочных работах
Р 11		Запрещается работа (присутствие) людей со стимуляторами сердечной деятельности	В местах и на оборудовании, где запрещено работать или находиться людям с вживленными стимуляторами сердечной деятельности
Р 12		Запрещается загромождать проходы и (или) складировать	На пути эвакуации, у выходов, в местах размещения средств противопожарной защиты, аптек первой медицинской помощи и других местах
Р 13		Запрещается подъем (спуск) людей по шахтному стволу (запрещается транспортировка пассажиров)	На дверях грузовых лифтов и других подъемных механизмов

Продолжение табл. 5.2

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 14		Запрещается вход (проход) с животными	На воротах и дверях зданий, сооружений, помещений, объектов, территорий и т. п., где не должны находиться животные, где запрещен вход (проход) вместе с животными
Р 16		Запрещается работа (присутствие) людей, имеющих металлические имплантаты	На местах, участках и оборудовании, где запрещено работать или находиться людям с вживленными металлическими имплантатами
Р 17		Запрещается разбрызгивать воду	На местах и участках, где запрещено разбрызгивать воду
Р 18		Запрещается пользоваться мобильным (сотовым) телефоном или переносной радиацией	На дверях помещений, у входа на объекты, где запрещено пользоваться средствами связи, имеющими собственные радиочастотные электромагнитные поля
Р 21		Запрещение (прочие опасности или опасные действия)	Применять для обозначения опасности, не предусмотренной настоящим стандартом. Знак необходимо использовать вместе с поясняющей надписью или с дополнительным знаком безопасности с поясняющей надписью
Р 27		Запрещается иметь при (на) себе металлические предметы (часы и т. п.)	При входе на объекты, на рабочих местах, оборудовании, приборах и т. п. Область применения знака может быть расширена
Р 30		Запрещается принимать пищу	На местах и участках работ с вредными для здоровья веществами, а также в местах, где прием пищи запрещен. Область применения знака может быть расширена

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Р 32		Запрещается подходить к элементам оборудования с маховыми движениями большой амплитуды	На оборудовании и рабочих местах по обслуживанию оборудования с элементами, выполняющими маховые движения большой амплитуды
Р 33		Запрещается брать руками. Сыпучая масса (непрочная упаковка)	На производственной таре, в складах и иных местах, где используют сыпучие материалы
Р 34		Запрещается пользоваться лифтом для подъема (спуска) людей	На дверях грузовых лифтов и других подъемных механизмах. Знак входит в состав группового знака безопасности «При пожаре лифтом не пользоваться, выходить по лестнице»

Таблица 5.3

Предупреждающие знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 01		Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества	Использовать для привлечения внимания к помещениям с легковоспламеняющимися веществами. На входных дверях, дверцах шкафов, емкостях и т. д.

Продолжение табл.5.3

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 02		Взрывоопасно	Использовать для привлечения внимания к взрыво- опасным веществам, а так- же к помещениям и участ- кам. На входных дверях, стенах помещений, дверцах шкафов и т. д.
W 03		Опасно. Ядовитые вещества	В местах хранения, выделения, производства и применения ядовитых веществ
W 04		Опасно. Едкие и корро- зионные вещества	В местах хранения, выде- ления, производства и применения едких и корро- зионных веществ
W 05		Опасно. Радиоактивные вещества или ионизи- рующее излучение	На дверях помещений, дверцах шкафов и в других местах, где находятся и применяются радиоактивные вещества или имеется ионизирующее излучение. Допускается применять знак радиационной опасно- сти по ГОСТ 17925
W 06		Опасно. Возможно падение груза	Вблизи опасных зон, где используется подъемно-транспортное оборудование
W 07		Внимание. Автопогруз- чик	В помещениях и на участках, где проводятся погрузочно-разгрузочные работы

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 08		Опасность поражения электрическим током	На опорах линий электропередачи, электрооборудовании и приборах, дверцах силовых щитков, на электротехнических панелях и шкафах, а также на ограждениях токоведущих частей оборудования, механизмов, приборов
W 09		Внимание. Опасность (прочие опасности)	Применять для привлечения внимания к прочим видам опасности, не обозначенной настоящим стандартом. Знак необходимо использовать вместе с дополнительным знаком безопасности с поясняющей надписью
W 10		Опасно. Лазерное излучение	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где имеется лазерное излучение
W 11		Пожароопасно. Окислитель	На дверях помещений, дверцах шкафов для привлечения внимания на наличие окислителя

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 12		Внимание. Электромагнитное поле	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где действуют электромагнитные поля
W 13		Внимание. Магнитное поле	На дверях помещений, оборудовании, приборах и в других местах, где действуют магнитные поля
W 14		Осторожно. Мало- заметное препятствие	В местах, где имеются мало- заметные препятствия, о которые можно споткнуться
W 15		Осторожно. Возможность падения с высоты	Перед входом на опасные участки и в местах, где возможно падение с высоты
W 16		Осторожно. Биологическая опасность (инфекционные вещества)	В местах хранения, производства или применения вредных для здоровья биологических веществ
W 17		Осторожно. Холод	На дверцах холодильников и морозильных камер, компрессорных агрегатах и других холодильных аппаратах
W 18		Осторожно. Вредные для здоровья аллергические (раздражающие) вещества	В местах хранения, произ- водства или применения вредных для здоровья аллергических (раздражающих) веществ

Продолжение табл. 5.3

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 19		Газовый баллон	На газовых баллонах, складах и участках хранения и применения сжатых или сжиженных газов. Цвет баллона черный или белый, выбирается по ГОСТ 19433
W 20		Осторожно. Аккумуляторные батареи	В помещениях и на участках изготовления, хранения и применения аккумуляторных батарей
W 22		Осторожно. Режущие валы	На участках работ и оборудовании, имеющем незащищенные режущие валы
W 23		Внимание. Опасность зажима	На дверцах турникетов и шлагбаумах
W 24		Осторожно. Возможно опрокидывание	На дорогах, рампах, складах, участках, где возможно опрокидывание внутризаводского транспорта
W 25		Внимание. Автоматическое включение (запуск) оборудования	На рабочих местах, оборудовании или отдельных узлах оборудования с автоматическим включением
W 26		Осторожно. Горячая поверхность	На рабочих местах и оборудовании, имеющем нагретые поверхности

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
W 27		Осторожно. Возможно травмирование рук	На оборудовании, узлах оборудования, крышках и дверцах, где возможно получить травму рук
W 28		Осторожно. Скользко	На территории и участках, где имеются скользкие места
29		Осторожно. Возможно затягивание между вращающимися элементами	На рабочих местах и оборудовании, имеющем вращающиеся элементы, например на валковых мельницах
W 30		Осторожно. Сужение проезда (прохода)	На территориях, участках, в цехах и складах, где имеются сужения прохода (проезда) или присутствуют выступающие конструкции, затрудняющие проход (проезд)

Таблица 5.4

Предписывающие знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 01		Работать в защитных очках	На рабочих местах и участках, где требуется защита органов зрения

Продолжение табл. 5.4

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 02		Работать в защитной каске (шлеме)	На рабочих местах и участках, где требуется защита головы
М 03		Работать в защитных наушниках	На рабочих местах и участках с повышенным уровнем шума
М 04		Работать в средствах индивидуальной защиты органов дыхания	На рабочих местах и участках, где требуется защита органов дыхания
М 05		Работать в защитной обуви	На рабочих местах и участках, где необходимо применять средства индивидуальной защиты
М 06		Работать в защитных перчатках	На рабочих местах и участках работ, где требуется защита рук от воздействия вредных или агрессивных сред, защита от возможного поражения электрическим током
М07		Работать в защитной одежде	На рабочих местах и участках, где необходимо применять средства индивидуальной защиты
М 08		Работать в защитном щитке	На рабочих местах и участках, где необходима защита лица и органов зрения

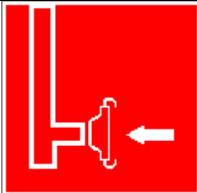
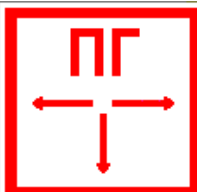
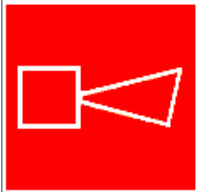
Продолжение табл. 5.4

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
М 09		Работать в предохранительном (страховочном) поясе	На рабочих местах и участках, где для безопасной работы требуется применение предохранительных (страховочных) поясов
М 10		Проход здесь	На территориях и участках, где разрешается проход
М 11		Общий предписывающий знак (прочие предписания)	Для предписаний, не обозначенных настоящим стандартом. Знак необходимо применять вместе с поясняющей надписью на дополнительном знаке безопасности
М 12		Переходить по надземному переходу	На участках и территориях, где установлены надземные переходы
М 13		Отключить штепсельную вилку	На рабочих местах и оборудовании, где требуется отключение от электросети при наладке или остановке электрооборудования и в других случаях
М 14		Отключить перед работой	На рабочих местах и оборудовании при проведении ремонтных или пусконаладочных работ
М 15		Курить здесь	Используется для обозначения места курения на производственных объектах

Знаки пожарной безопасности

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
F 01-01		Направляющая стрелка	Использовать только вместе с другими знаками пожарной безопасности для указания направления движения к месту нахождения (размещения) средства противопожарной защиты
F 01-02		Направляющая стрелка под углом 45°	Использовать только вместе с другими знаками пожарной безопасности для указания направления движения к месту нахождения (размещения) средства противопожарной защиты
F 02		Пожарный кран	В местах нахождения комплекта пожарного крана с пожарным рукавом и стволом
F 03		Пожарная лестница	В местах нахождения пожарной лестницы
F 04		Огнетушитель	В местах размещения огнетушителя
F 05		Телефон для использования при пожаре	В местах размещения телефона, по которому можно вызвать пожарную охрану

Продолжение табл. 5.5

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
F 06		Место размещения нескольких средств противопожарной защиты	В местах одновременного нахождения (размещения) нескольких средств противопожарной защиты
F 07		Пожарный водосточник	В местах нахождения пожарного водоема или пирса для пожарных машин
F 08		Пожарный сухотрубный стояк	В местах нахождения пожарного сухотрубного стояка
F 09		Пожарный гидрант	У мест нахождения подземных пожарных гидрантов. На знаке должны быть цифры, обозначающие расстояние от знака до гидранта в метрах
F 10		Кнопка включения установок (систем) пожарной автоматики	В местах ручного пуска установок пожарной сигнализации, пожаротушения и (или) систем противодымной защиты. В местах (пунктах) подачи сигнала пожарной тревоги
F 11		Звуковой оповещатель пожарной тревоги	В местах нахождения звукового оповещателя или совместно со знаком F 10 «Кнопка включения установок (систем) пожарной автоматики»

К знакам пожарной безопасности относят также:

- запрещающие знаки: Р 01 «Запрещается курить», Р 02 «Запрещается пользоваться открытым огнем», Р 04 «Запрещается тушить водой», Р 12 «Запрещается загромождать проходы и (или) складировать»;
- предупреждающие знаки: W 01 «Пожароопасно. Легковоспламеняющиеся вещества», W 02 «Взрывоопасно», W 11 «Пожароопасно. Окислитель»;
- эвакуационные знаки;

Таблица 5.6

Эвакуационные знаки

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 01-01		Выход здесь (левосторонний)	Над дверями (или на дверях) эвакуационных выходов, открывающихся с левой стороны. На стенах помещений вместе с направляющей стрелкой для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 01-02		Выход здесь (правосторонний)	Над дверями (или на дверях) эвакуационных выходов, открывающихся с правой стороны. На стенах помещений вместе с направляющей стрелкой для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 02-01		Направляющая стрелка	Использовать только вместе с другими эвакуационными знаками для указания направления движения

Продолжение табл.5.6

Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 02-02		Направляющая стрелка под углом 45°	Использовать только вместе с другими эвакуационными знаками для указания направления движения
Е 03		Направление к эвакуационному выходу на- право	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 04		Направление к эвакуационному выходу налево	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 05		Направление к эвакуационному выходу направо вверх	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 06		Направление к эвакуационному выходу нале- во вверх	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 07		Направление к эвакуационному выходу на- право вниз	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 08		Направление к эвакуационному выходу налево вниз	На стенах помещений для указания направления движения к эвакуационному выходу по наклонной плоскости
Е 09		Указатель двери эвакуационного выхода	Над дверями эвакуационных выходов

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 10		Указатель двери эвакуационного выхода (левосторонний)	Над дверями эвакуационных выходов
Е 11		Направление к эвакуационному выходу прямо	Над проходами, проемами, в помещениях большой площади. Размещается на верхнем уровне или подвешивается к потолку
Е 12		Направление к эвакуационному выходу прямо	Над проходами, проемами, в помещениях большой площади. Размещается на верхнем уровне или подвешивается к потолку
Е 13		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вниз	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 14		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вниз	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 15		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вверх	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 16		Направление к эвакуационному выходу по лестнице вверх	На лестничных площадках и стенах, прилегающих к лестничному маршу
Е 17		Для доступа вскрыть здесь	На дверях, стенах помещений и в других местах, где для доступа в помещение или выхода необходимо вскрыть определенную конструкцию, например разбить стеклянную панель

Продолжение табл. 5.6.

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
Е 18		Открывать движением от себя	На дверях помещений для указания направления от- крывания дверей
Е 19		Открывать движением на себя	На дверях помещений для указания направления от- крывания дверей
Е 20		Для открывания сдви- нуть	На дверях помещений для обозначения действий по открыванию сдвижных две- рей
Е 21		Пункт (место) сбора	На дверях, стенах помеще- ний и в других местах для обозначения заранее преду- смотренных пунктов (мест) сбора людей в случае воз- никновения пожара, аварии или другой чрезвычайной ситуации
Е 22		Указатель выхода	Над дверями эвакуацион- ного выхода или в составе комбинированных знаков безопасности для указания направления движения к эвакуационному выходу
Е 23		Указатель запасного выхода	Над дверями запасного выхода

Эвакуационные знаки следует устанавливать в положениях, соответствующих направлению движения к эвакуационному выходу.

Изображение графического символа фигуры человека в дверном проеме на эвакуационных знаках Е 01-01 и Е 01-02 смыслового значения

«Выход здесь» должно совпадать с направлением движения к эвакуационному выходу».

Таблица 5.7

Знаки медицинского и санитарного назначения

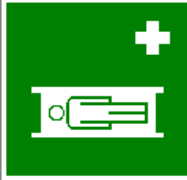
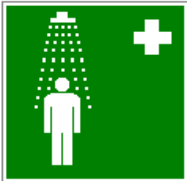
Код знака	Цветовое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
ЕС 01		Аптечка первой медицинской помощи	На стенах, дверях помещений для обозначения мест размещения аптечек первой медицинской помощи
ЕС 02		Средства выноса (эвакуации) пораженных	На дверях и стенах помещений в местах размещения средств выноса (эвакуации) пораженных
ЕС 03		Пункт приема гигиенических процедур (душевые)	На дверях и стенах помещений в местах расположения душевых и т. п.
ЕС 04		Пункт обработки глаз	На дверях и стенах помещений в местах расположения пункта обработки глаз
ЕС 05		Медицинский кабинет	На дверях медицинских кабинетов
ЕС 06		Телефон связи с медицинским пунктом (скорой медицинской помощью)	В местах установки телефонов

Таблица 5.8.

Указательные знаки

Код знака	Цветографическое изображение	Смысловое значение	Место размещения (установки) и рекомендации по применению
D 01		Пункт(место) приема пищи	На дверях комнат приема пищи, буфетах, столовых, бытовых помещениях и в других местах, где разрешается прием пищи
D 02		Питьевая вода	На дверях бытовых помещений и в местах расположения кранов с водой, пригодной для питья и бытовых нужд (туалеты, душевые, пункты приема пищи и т. д.)
D 03		Место курения	Используется для обозначения места курения на общественных объектах

Порядок выполнения работы

1. Изучить выдержку из ГОСТ Р 12.4.026–01.

2. Проверить усвоение материала, ответив на контрольные вопросы:

В какой цвет окрашено поле предупреждающего знака?

Какой размер имеет сторона треугольника предупреждающего знака № 4, наносимого на тару и оборудование?

Какой цвет имеет символическое изображение на запрещающем знаке?

Какую форму имеет предписывающий знак?

Какую форму имеет запрещающий знак?

Расстояние от наблюдателя до знака составляет 45 м. Какой размер должен иметь внешний диаметр круга запрещающего знака, мм?

Какой цвет имеют символические изображения или поясняющие надписи, наносимые на указательные знаки?

Расстояние от наблюдателя до знака составляет 60 м. Какие размеры

(стороны прямоугольника) должен иметь указательный знак, мм?

Какой цвет имеет квадрат, помещенный внутри указательного знака?

Какой размер имеет внешний диаметр круга запрещающего знака № 5, наносимого на производственное оборудование и тару?

3. Составить отчет. Отчет должен включать:

- цель практической работы;
- ответы на вопросы задания;
- зарисовку формы знаков (запрещающего, предупреждающего, предписывающего, указательного) с указанием цвета поля, символов, надписей.

4. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 12.4.026–01. Цвета сигнальные, знаки безопасности и разметка сигнальная. Назначение, правила применения. Общие технические требования и рекомендации. Методы испытания [Электронный ресурс]. – Доступ из справ.-поисковой системы «Техэксперт».

РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6.

РАССЛЕДОВАНИЕ И УЧЕТ НЕСЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Цель задания - ознакомиться с понятием и причинами возникновения несчастных случаев, порядком их расследования и учет на производстве, также с методами анализа травматизма.

Порядок выполнения задания:

- а) изучить и законспектировать общие сведения по пункту 1;
- б) изучить методы анализа и рассчитать по вариантам показатели травматизма по пункту 2 (см контр. вопросы к пунктам 1 и 2);
- в)изучить «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях» и законспектировать ответы на контрольные вопросы к пункту 3.

Общие сведения о несчастных случаях.

Несчастливым случаем на производстве называют случай воздействия на работающего опасного производственного фактора при выполнении работающим трудовых обязанностей или заданий руководителя работы [1].

Повреждение здоровья в результате несчастного случая называют **травмой**. Травма, полученная работающим на производстве, называется **производственной**.

Опасным называют производственный фактор, воздействие которого при определенных условиях на работающего приводит к травме или другому внезапному ухудшению здоровья.

Вредным называют производственный фактор, воздействие которого на работающего приводит к заболеваниям или снижению его трудоспособности. В зависимости от уровня и продолжительности воздействия вредный производственный фактор может стать опасным.

Опасные и вредные производственные факторы (ОВПФ) по природе

действия подразделяют на 4 группы: физические, химические, биологические и психофизиологические.

Производственные травмы в зависимости от характера воздействующих факторов подразделяются на:

- а) механические повреждения (ушибы, ранения, вывихи, переломы, сотрясения мозга);
- б) поражение электрическим током (электроудар, электротравма);
- в) термические повреждения (ожоги пламенем, нагретыми частями оборудования, горячей водой и пр.);
- г) химические повреждения (ожоги, острые отравления);
- д) комбинированные повреждения (сочетание нескольких опасных факторов).

Производственные травмы по тяжести подразделяются на 6 категорий:

- микротравма (после оказания помощи можно продолжать работу).
- легкая травма (потеря трудоспособности на 1 или несколько дней).
- травма средней тяжести (многодневная потеря трудоспособности);
- тяжелая травма (когда требуется длительное лечение);
- травма, приводящая к инвалидности (частичная или полная утрата трудоспособности);
- смертельная травма.

Причины возникновения производственных травм:

- организационные (нарушение технологического процесса и требований техники безопасности (ТБ), неправильная организация рабочего места и режима труда);
- технические (техническое несовершенство оборудования, неисправность механизмов, отсутствие или не использование защитных средств);
- санитарно-гигиенические (несоответствие условий труда требованиям КЗоТ, системе стандартов по безопасности труда (ССБТ), санитарным нормам(СН), строительным нормам и правилам (СНиП) и др.

- психофизиологические (неудовлетворительное состояние здоровья, переутомление, стресс, опьянение и др.).

Методы анализа показателей травматизма

Разработке мероприятий по улучшению условий труда предшествует необходимый этап - исследование и анализ причин травматизма. Для анализа состояния производственного травматизма применяют методы: статистический, экономический, монографический и топографический.

Статистический метод позволяет количественно оценить повторяемость несчастных случаев по ряду относительных коэффициентов. В результате сравнения полученных коэффициентов за отчетный период с предшествующим периодом можно оценить эффективность профилактических мер. Обычно при этом методе анализа несчастные случаи группируются по однородным признакам: профессиям, видам работ, возрасту, стажу работ, причинам, вызвавшим травму. Простота и наглядность являются несомненным достоинством этого метода. Однако у него есть и недостаток - он не выявляет опасные производственные факторы. Среди основных показателей травматизма, используемых при статистическом методе анализа, являются:

а) коэффициент частоты травматизма - число пострадавших при несчастных случаях за отчетный период на 1000 работающих, определяется по формуле:

$$K_{\text{ч}} = T_{\text{x}} \cdot \frac{1000}{P_{\text{с}}},$$

где $K_{\text{ч}}$ - коэффициент частоты травматизма; T - число учтенных травм с потерей трудоспособности; $P_{\text{с}}$ - среднесписочное число работающих за отчетный период.

б) коэффициент тяжести травматизма - число человеко-дней нетрудоспособности, которое приходится на один несчастный случай и определяется по формуле:

$$K_{\text{т}} = \frac{Д}{T},$$

где $K_{\text{т}}$ - коэффициент тяжести травматизма; $Д$ - общее количество дней

нетрудоспособности за отчетный период; Т - количество учтенных травм.

в) коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев

- показывает через сколько рабочих дней в среднем повторяются несчастные случаи и определяется по формуле:

$$B = 22,5 \cdot \frac{12}{T},$$

где В - календарная повторяемость несчастных случаев; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

г) коэффициент средней повторяемости - показывает на сколько человекоднев приходится один несчастный случай, определяется по формуле:

$$B_{\text{ср}} = 22,5 \cdot 12 \cdot \frac{P_{\text{с}}}{T},$$

где В_{ср} - коэффициент средней повторяемости несчастных случаев; Р_с - среднесписочное число работающих за отчетный период; Т - число несчастных случаев за отчетный период.

д) коэффициент опасности работ - характеризуется тяжестью и частотой несчастных случаев, определяется по формуле:

$$O_p = K_T \cdot T_x \cdot \frac{100}{P_{\text{с}} \cdot M \cdot 22,5},$$

где О_р - коэффициент опасности работ; К_т - коэффициент тяжести травматизма ; Т - количество учтенных несчастных случаев; Р_с - среднесписочное число работающих; М - число месяцев в отчетном периоде.

Таблица 5.0

Исходные данные для расчета показателей травматизма

Показатели	Варианты									
										0
Отчетный период, мес. (М)				2				2		

Число несчастных случаев (Т)				0				1		
Число дней нетрудоспособности (Д)	80	00	80	20	00	50	70	20	60	00
Среднесписочное число работающих (Рс)	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

Экономический метод анализа производственного травматизма позволяет оценить эффективность финансовых затрат на профилактику травматизма с расходами на организационные и технические мероприятия. Для более полной и глубокой характеристики травматизма экономический метод часто используют в сочетании с монографическим методом.

Монографический метод анализа травматизма состоит в углубленном и всестороннем изучении отдельного производства, цеха или участка. Он включает описание технологического процесса, оборудования и особенностей технологического регламента, описание опасных зон на рабочих местах, также санитарно-гигиенические условия труда. При этом обращается внимание на наличие защитных приспособлений, ограждений и травмоопасных ситуаций

Монографический метод анализа травматизма характеризуется полнотой, но трудоемок. Этот метод позволяет выявить потенциальную опасность не только в действующих производствах, но и на этапе проектирования, тем самым исключить причины травматизма.

Топографический метод анализа травматизма проводится по месту происшествия. При этом все несчастные случаи условными знаками наносятся на план производственного участка или схему механизма в тех местах, где они произошли. В результате этого выявляются опасные зоны, требующие соответствующих защитных мер и особого внимания.

Контрольные вопросы к пунктам 1 и 2

1. Что такое несчастный случай?

2. Что такое опасный производственный фактор?
3. Что такое вредный производственный фактор?
4. На какие группы подразделяются опасные и вредные производственные факторы?
5. Какие различают разновидности производственных травм?
6. Какие выделяют категории производственных травм?
7. Каковы основные причины возникновения производственных травм?
8. Какие существуют методы анализа производственного травматизма ?
9. В чем заключается статистический метод анализа производственного травматизма?
10. Как определяется коэффициент частоты травматизма?
11. Как определяется коэффициент тяжести травматизма?
12. Как определяется коэффициент календарной повторяемости несчастных случаев?
13. Как определяется коэффициент средней повторяемости несчастных случаев?
14. Как определяется коэффициент опасности работ?
15. В чем заключается экономический метод анализа производственного травматизма?
16. В чем заключается монографический метод анализа производственного травматизма?
17. В чем заключается топографический метод анализа производственного травматизма?

Положение об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях

Расследование и учет несчастных случаев на производстве проводят в соответствии с “Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях”, утвержденного

Постановлением Министерства труда и социального развития Российской Федерации от 24 октября 2002г. №73, а также статьями 227-231 Трудового кодекса РФ (ТК РФ).

Несчастный случай на производстве - это случай, происшедший с работающим вследствие воздействия опасного производственного фактора (для застрахованного – это страховой случай).

Несчастные случаи в зависимости от причин, места и времени происшествия делятся на две группы: несчастные случаи, связанные с работой и несчастные случаи, не связанные с работой (бытовые травмы).

Несчастные случаи, не связанные с производством, но происшедшие на производстве - это несчастные случаи, происшедшие при изготовлении предметов в личных целях, самовольном использовании транспорта предприятия, участии в спортивных мероприятиях на территории предприятия, при хищении имущества предприятия.

Бытовые несчастные случаи - это несчастные случаи, происшедшие в быту (дома) или при нахождении на предприятии вне рабочего времени.

Расследование несчастных случаев на производстве выполняется в соответствии с Трудовым кодексом РФ и «Положением об особенностях расследования несчастных случаев на производстве в отдельных отраслях и организациях», утверждённым постановлением Минтруда России № 73 от 24 октября 2002 года. Этим же постановлением утверждены формы документов, необходимых для расследования и учёта несчастных случаев на производстве.

Расследование несчастного случая может быть достаточно сложным процессом, поскольку интересы пострадавшего и работодателя часто не совпадают.

Действие нормативных актов по расследованию и учёту несчастных случаев на производстве распространяется на:

- работодателей - физических лиц, вступивших в трудовые отношения с работниками;
- уполномоченных работодателем лиц (представители работодателя);

- физических лиц, осуществляющих руководство организацией (руководители организации);
- физических лиц, состоящих в трудовых отношениях с работодателем;
- других лиц, участвующих с ведома работодателя в его производственной деятельности своим личным трудом, правоотношения которых не предполагают заключения трудовых договоров.

Расследованию подлежат травмы, в том числе причиненные другими лицами, включая:

- тепловой удар, ожог, обморожение;
- утопление; поражение электрическим током или молнией;
- укусы, нанесенные животными и насекомыми;
- повреждения, полученные в результате взрывов, аварий и т.п.

Расследованию и учёту подлежат несчастные случаи происшедшие:

- при исполнении трудовых обязанностей, в том числе во время командировки, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций;
- на территории организации, в течение рабочего времени, в том числе во время следования на работу и с работы, а также в течение времени, необходимого для приведения в порядок рабочего места;
- при следовании на работу или с работы на транспортном средстве работодателя, а также на личном транспортном средстве при использовании его в производственных целях;
- во время служебных поездок на общественном транспорте, а также при следовании по заданию работодателя к месту выполнения работ и обратно, в том числе пешком;
- при следовании к месту служебной командировки и обратно;
- при следовании на транспортном средстве в качестве сменщика во время междусменного отдыха;
- во время междусменного отдыха при работе вахтовым методом;
- при привлечении к участию в ликвидации последствий

чрезвычайных ситуаций.

Работники организации обязаны незамедлительно извещать руководство о каждом происшедшем несчастном случае, об ухудшении состояния своего здоровья в связи с проявлениями признаков острого заболевания.

О каждом страховом случае работодатель в течение суток обязан сообщить страховщику (фонд социального страхования).

О групповом несчастном случае (пострадало два и более человек), тяжёлом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом, работодатель в течение суток обязан направить извещение соответственно:

1) о несчастном случае, происшедшем в организации:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту происшествия несчастного случая;
- в федеральный орган исполнительной власти по ведомственной принадлежности;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в организацию, направившую работника, с которым произошел несчастный случай;
- в территориальные объединения организаций профсоюзов;
- в территориальный орган государственного надзора, если несчастный случай произошел в организации (объекте), подконтрольной этому органу;
- страховщику.

2) о несчастном случае, происшедшем у работодателя - физического лица:

- в соответствующую государственную инспекцию труда;
- в прокуратуру по месту нахождения работодателя - физического лица;
- в орган исполнительной власти субъекта Российской Федерации;
- в территориальный орган государственного надзора, если

несчастный случай произошел на объекте, подконтрольном этому органу;

- страховщику.

О групповых несчастных случаях, тяжелых несчастных случаях и несчастных случаях со смертельным исходом также информируется Федеральная инспекция труда Минтруда России.

Если указанные несчастные случаи, произошли в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты, то соответствующим образом информируются специально уполномоченные органы государственного надзора.

Для расследования несчастного случая на производстве в организации работодатель незамедлительно создает комиссию в составе не менее трех человек. Во всех случаях состав комиссии должен состоять из нечетного числа членов.

В состав комиссии включаются специалист по охране труда организации, представители работодателя, представители профсоюзного органа (коллектива), уполномоченный (доверенный) по охране труда. Комиссию возглавляет работодатель или уполномоченный им представитель. Состав комиссии утверждается приказом работодателя. Руководитель, непосредственно отвечающий за безопасность труда на участке, где произошел несчастный случай, в состав комиссии не включается.

В расследовании несчастного случая на производстве у работодателя - физического лица принимают участие указанный работодатель или уполномоченный его представитель, доверенное лицо пострадавшего, специалист по охране труда, который может привлекаться к расследованию несчастного случая и на договорной основе.

Несчастный случай на производстве, происшедший с лицом, направленным для выполнения работ к другому работодателю, расследуется комиссией, образованной работодателем, у которого произошел несчастный случай. В состав данной комиссии входит уполномоченный представитель работодателя, направившего это лицо.

Несчастные случаи, происшедшие на территории организации с работниками сторонних организаций при исполнении ими задания направившего их работодателя, расследуются комиссией, формируемой этим работодателем.

Несчастные случаи, происшедшие с работниками при выполнении работы по совместительству, расследуются комиссией, формируемой работодателем, у которого фактически производилась работа по совместительству.

Расследование несчастных случаев со студентами, проходящими производственную практику (выполняющими работу под руководством работодателя), проводится комиссиями, формируемыми и возглавляемыми этим работодателем. В состав комиссии включаются представители образовательного учреждения.

Для расследования группового несчастного случая, тяжёлого несчастного случая и несчастного случая со смертельным исходом в комиссию дополнительно включаются:

- государственный инспектор труда, представители органа исполнительной власти субъекта РФ или органа местного самоуправления (по согласованию), представитель территориального объединения профсоюзов. Возглавляет комиссию государственный инспектор труда;
- по требованию пострадавшего (или его родственников) в расследовании несчастного случая может принимать участие его доверенное лицо;
- в случае острого отравления или радиационного воздействия, превысившего установленные нормы, в состав комиссии включается также представитель территориального центра государственного санитарно-эпидемиологического надзора;
- при несчастном случае, происшедшем в организациях на объектах, подконтрольных территориальным органам Федерального горного и промышленного надзора России, состав комиссии утверждается руководителем

соответствующего территориального органа и возглавляет комиссию представитель этого органа;

- при групповом несчастном случае с числом погибших 5 и более человек в состав комиссии включаются также представители Федеральной инспекции труда, федерального органа исполнительной власти по ведомственной принадлежности и общероссийского объединения профсоюзов. Председателем комиссии является главный государственный инспектор труда по субъекту Российской Федерации, а на объектах, подконтрольных территориальному органу Федерального горного и промышленного надзора России, - руководитель этого территориального органа.

При крупных авариях с человеческими жертвами 15 и более человек расследование проводится комиссией, назначаемой Правительством России.

Расследование несчастных случаев (в том числе групповых), в результате которых пострадавшие получили повреждения, отнесенные в соответствии с установленными квалифицирующими признаками к категории легких, проводится в течение трех дней.

Расследование иных несчастных случаев проводится в течение 15 дней. В некоторых случаях председатель комиссии может продлить срок расследования, но не более чем на 15 дней. Несчастные случаи, о которых не было своевременно сообщено работодателю или в результате которых нетрудоспособность наступила не сразу, расследуются по заявлению пострадавшего в течение месяца.

Тяжелые несчастные случаи и несчастные случаи со смертельным исходом, происшедшие с лицами, выполнявшими работу на основе договора гражданско-правового характера, расследуются в установленном порядке государственными инспекторами труда на основании заявления пострадавшего (доверенного лица, членов его семьи).

В ходе расследования несчастного случая комиссия производит осмотр места происшествия, выявляет и опрашивает очевидцев несчастного случая и должностных лиц, знакомится с действующими в организации нормативными и

распорядительными документами, по возможности получает объяснения от пострадавшего.

Расследуются в установленном порядке и по решению комиссии могут квалифицироваться как не связанные с производством:

- смерть вследствие общего заболевания или самоубийства;
- смерть или иное повреждение здоровья, единственной причиной которых явилось алкогольное, наркотическое или иное токсическое опьянение (отравление) работника;
- несчастный случай, происшедший при совершении пострадавшим действий, квалифицированных правоохрнительными органами как уголовное правонарушение.

При поступлении жалобы пострадавшего, выявлении сокрытого несчастного случая, установления нарушений порядка расследования и в некоторых иных случаях, государственный инспектор труда, независимо от срока давности несчастного случая, проводит дополнительное расследование.

Несчастные случаи, квалифицированные, как несчастные случаи на производстве, подлежат оформлению актом о несчастном случае на производстве по форме Н-1*.

Акт формы Н-1 составляется комиссией в двух экземплярах. При несчастном случае на производстве с застрахованным работником составляется дополнительный экземпляр акта формы Н-1.

При групповом несчастном случае на производстве акты формы Н-1 составляются на каждого пострадавшего отдельно.

В случае установления факта грубой неосторожности застрахованного работника, содействовавшей возникновению или увеличению размера вреда, причиненного его здоровью, в акте расследования указывается степень его вины в процентах, с учетом заключения профсоюзного или иного уполномоченного застрахованным представительного органа данной организации (не более 25%).

По результатам расследования каждого группового несчастного случая,

тяжелого несчастного случая или несчастного случая со смертельным исходом составляется соответствующий акт в двух экземплярах.

Работодатель в трехдневный срок после завершения расследования несчастного случая на производстве обязан выдать пострадавшему один экземпляр утвержденного им и заверенного печатью акта формы Н-1. Вторые экземпляры акта с копиями материалов расследования хранятся в течение 45 лет работодателем.

При страховых случаях третий экземпляр утвержденного и заверенного печатью акта формы Н-1 работодатель направляет страховщику.

Каждый оформленный в установленном порядке несчастный случай на производстве регистрируются работодателем в журнале регистрации несчастных случаев на производстве и включаются в годовую форму федерального государственного статистического наблюдения за травматизмом на производстве.

В случае ликвидации организации или прекращения работодателем - физическим лицом предпринимательской деятельности оригиналы актов о расследовании несчастных случаев на производстве подлежат передаче на хранение правопреемнику, а при его отсутствии - соответствующему государственному органу.

Государственный надзор и контроль за соблюдением установленного порядка расследования, оформления и учета несчастных случаев на производстве осуществляется органами Федеральной инспекции труда.

Контрольные вопросы к пункту 3

1. Какие несчастные случаи считаются связанными с производством и подлежат расследованию и учету?
2. На кого распространяется действие Положения о порядке расследования и учета несчастных случаев?
3. Как должен действовать работодатель при возникновении несчастного случая на предприятии?
4. Что необходимо сделать сразу же после свершения несчастного

случая на производстве?

5. Куда должен сообщить работодатель и в какие сроки о групповом несчастном случае или несчастном случае со смертельным исходом?

6. Кто несет ответственность за организацию и своевременное расследование и учета несчастных случаев?

7. Кто входит в комиссию по расследованию несчастных случаев, каковы ее обязанности?

8. В какие сроки должно быть проведено расследование несчастного случая?

9. Какие несчастные случаи квалифицируются как не связанные с производством?

10. Что делают при установлении грубой неосторожности пострадавшего?

11. В какие сроки и комиссией какого состава расследуются групповые несчастные случаи или со смертельным исходом?

12. Какие условия должен обеспечить работодатель для работы комиссии, проводящей расследование несчастного случая?

13. Каким документом оформляются несчастные случаи на производстве?

14. Какой организацией учитывается акт о несчастном случае?

15. В какие сроки и куда должны быть отправлены материалы расследования групповых несчастных случаев?

16. Какие организации и должностные лица разбирают разногласия при оформлении актов по форме Н - 1 ?

17. Каковы полномочия государственного инспектора по охране труда в случае нарушения порядка расследования несчастного случая?

форма Н-1

Один экземпляр направляется
пострадавшему или его
доверенному лицу

УТВЕРЖДАЮ

(подпись, фамилия, инициалы
работодателя
(его представителя))
"___" _____ 200__ г.

Печать

АКТ N _____
О НЕСЧАСТНОМ СЛУЧАЕ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

1. Дата и время несчастного случая _____

(число, месяц, год и время происшествия
несчастного случая,

количество полных часов от начала работы)

2. Организация (работодатель), работником которой является
(являлся) пострадавший _____

(наименование, место нахождения,
юридический адрес, ведомственная
и отраслевая

принадлежность (ОКОНХ основного вида деятельности);
фамилия, инициалы работодателя -

физического лица)

Наименование структурного подразделения _____

3. Организация, направившая работника _____

(наименование, место нахождения, юридический адрес,
отраслевая принадлежность)

4. Лица, проводившие расследование несчастного случая:

(фамилия, инициалы, должности и место работы)

5. Сведения о пострадавшем:

фамилия, имя, отчество _____

пол (мужской, женский) _____

дата рождения _____

профессиональный статус _____

профессия (должность) _____

стаж работы, при выполнении которой произошел несчастный случай

_____,
(число полных лет и месяцев)

в том числе в данной организации _____

(число полных лет и месяцев)

6. Сведения о проведении инструктажей и обучения по охране труда

Вводный инструктаж _____

(число, месяц, год)

Инструктаж на рабочем месте (первичный, повторный, внеплановый,

(нужное подчеркнуть)

целевой)

по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай _____

(число, месяц, год)

Стажировка: с "___" _____ 200_ г. по "___" _____ 200_ г.

(если не проводилась - указать)

Обучение по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай: с "___" _____ 200_ г. по "___" _____ 200_ г.

(если не проводилось - указать)

Проверка знаний по охране труда по профессии или виду работы, при выполнении которой произошел несчастный случай _____

(число, месяц, год, N протокола)

7. Краткая характеристика места (объекта), где произошел несчастный случай

(краткое описание места происшествия с указанием опасных и (или) вредных производственных факторов со ссылкой на сведения, содержащиеся в протоколе осмотра места несчастного случая)

Оборудование, использование которого привело к несчастному случаю

(наименование, тип, марка, год выпуска, организация - изготовитель)

8. Обстоятельства несчастного случая

(краткое изложение обстоятельств, предшествовавших несчастному случаю, описание событий и действий пострадавшего и других лиц, связанных с несчастным случаем, и другие сведения, установленные в ходе расследования)

8.1. Вид происшествия _____

8.2. Характер полученных повреждений и орган, подвергшийся повреждению, медицинское заключение о тяжести повреждения здоровья _____

8.3. Нахождение пострадавшего в состоянии алкогольного или наркотического опьянения _____

(нет, да - указать состояние и степень опьянения в соответствии с заключением по результатам освидетельствования, проведенного в установленном порядке)

8.4. Очевидцы несчастного случая _____

(фамилия, инициалы, постоянное место жительства,

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7. СРЕДСТВА ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАЩИТЫ ОРГАНОВ ДЫХАНИЯ

Цель работы – ознакомиться со средствами защиты органов дыхания и получить практические навыки их использования.

Теоретические положения

Средства индивидуальной защиты (СИЗ) предназначены для защиты человека от попадания внутрь организма, на кожные покровы и повседневную одежду радиоактивных веществ (РВ), отравляющих веществ (ОВ) и бактериальных средств (БС).

По принципу применения средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства защиты повседневного применения (промышленные СИЗ);
- средства защиты эпизодического применения (СИЗ для аварийных работ и пострадавших в очагах ЧС).

По объектам защиты средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства защиты органов дыхания;
- средства защиты кожи.

По принципу действия средства индивидуальной защиты делятся:

- на фильтрующие (принцип фильтрации состоит в том, что воздух, необходимый для поддержания жизнедеятельности организма человека, очищается от вредных примесей при прохождении через средство защиты);
- изолирующие (средства защиты изолирующего типа полностью изолируют организм человека от окружающей среды с помощью материалов, непроницаемых для воздуха и вредных примесей).

По способу подачи воздуха различают средства индивидуальной

защиты делятся:

- с принудительной подачей воздуха;
- самовсасывающие.

По кратности использования средства индивидуальной защиты

- на СИЗ многократного использования;
- СИЗ однократного использования.

По способу изготовления средства индивидуальной защиты делятся:

- на средства, изготовленные промышленностью;
- простейшие средства, изготовленные из подручных материалов.

Кроме средств индивидуальной защиты существуют медицинские средства защиты [1].

Средства защиты органов дыхания.

Фильтрующий противогаз.

Фильтрующий противогаз предназначен для защиты органов дыхания, глаз, кожи лица от воздействия ОВ, РВ, БС, (АХОВ), а также различных вредных примесей, присутствующих в воздухе.

В настоящее время имеются фильтрующие гражданские противогазы различной модификации и промышленные противогазы.

Для защиты населения наибольшее распространение получили фильтрующие противогазы: для взрослого населения – ГП-5 (ГП-5М), ГП-7 (ГП-7В); для детей – ПДФ-Ш, ПДФ-Д, ПДФ-2Ш, ПДФ-2Д, КЗД.

Гражданский противогаз (ГП-5). В состав комплекта входят два основных элемента: фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5 и лицевая часть ШМ-62у. Шлем-маска имеет 5 ростов (0, 1, 2, 3, 4). Кроме того, противогаз комплектуется сумкой, наружными утеплительными манжетами (НМУ-1) и коробкой с незапотевающими пленками (рис. 9.1) [2]. У него нет соединительной трубки.

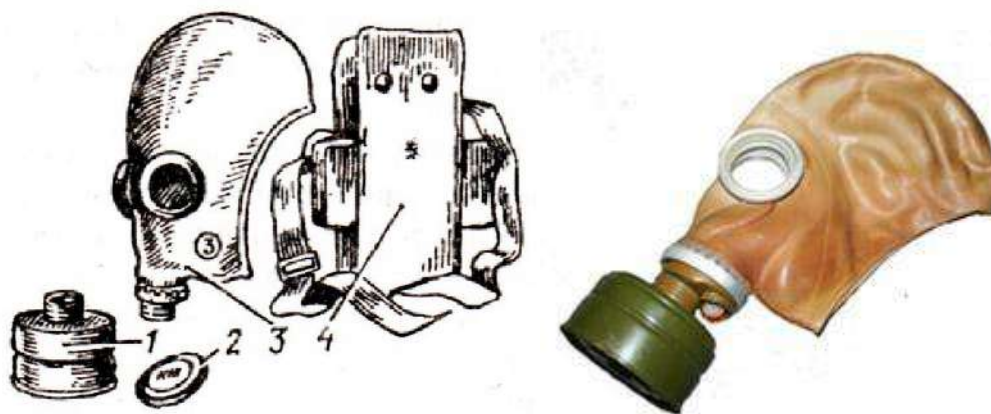


Рис. 7.1 Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-5):

1 – фильтрующе-поглощающая коробка ГП-5; 2 - коробка с незапотевающими пленками; 3 – лицевая часть ШМ-62у; 4 – сумка

Внутри фильтрующе-поглощающей коробки ГП-5 расположены противоаэрозольный фильтр и шихта. Лицевая часть ШМ-62у представляет собой шлем-маску, изготовленную на основе резины из натурального или синтетического каучука. В шлем-маску вмонтированы очковый узел и клапанная коробка. Клапанная коробка имеет один вдыхательный и два выдыхательных клапана и служит для распределения потоков воздуха. Незапотевающие пленки изготавливаются из целлюлозы и бывают односторонние (НП) и двусторонние (НПН). Они устанавливаются с внутренней стороны стекол противогаза желатиновым покрытием к глазам и фиксируются прижимными кольцами. Желатин равномерно впитывает конденсированную влагу, тем самым сохраняя прозрачность пленки.

Комплект из 6 пленок упакован в металлическую коробку. Утеплительные манжеты используются только зимой при температуре ниже – 10 °С. Манжета надевается на обойму очков с внешней стороны. Пространство между стеклами манжет и очков предохраняет очки шлем- маски от замерзания.

Гражданский противогаз (ГП-5М). В комплект противогаза входит шлем-маска (ШМ-66Му) с мембранной коробкой для переговорного устройства. В лицевой части сделаны сквозные вырезы для ушных раковин, что обеспечивает нормальную слышимость.

Подгонка противогаза начинается с определения требуемого роста лицевой части. Рост лицевой части типа ШМ-62у, ШМ-66Му определяется по величине вертикального обхвата головы путем ее измерения по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляют до 0,5 см. До 63 см берут нулевой рост, от 63,5 до 65,5 см – первый, от 66 до 68 см – второй, от 68,5 до 70,5 см – третий, от 71 см и более – четвертый.

Перед применением противогаз следует проверить на исправность и герметичность. Осматривая лицевую часть, следует определить ее целостность, обратив внимание на стекла очкового узла. После этого нужно проверить клапанную коробку, состояние клапанов. Они не должны быть покороблены, засорены или порваны. На фильтрующе-поглощающей коробке не должно быть вмятин, проколов, в горловине – повреждений. Обращается внимание на то, чтобы в коробке не пересыпались зерна поглотителя.

Наиболее совершенными в настоящее время являются противогазы ГП-7 и ГП-7В. Их основными отличиями являются: более совершенная конструкция и форма шлем-маски, обеспечивающая возможность безопасного приема воды, жидких лекарств, других жидкостей в зараженной зоне без снятия маски. Наличие в комплекте фильтрующе-поглощающих коробок обеспечивает защиту от конкретных видов твердых химических веществ (ТХВ), а также увеличенные сроки работоспособности. Ростовка лицевой части предусматривает три размера. Как и другие типы противогазов, они состоят из фильтрующе-поглощающей коробки и лицевой части.

Гражданский противогаз (ГП-7). В комплект противогаза входят фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к, лицевая часть в виде маски МП, сумка, защитный трикотажный чехол, коробка с незапотевающими пленками, утеплительные манжеты. Его масса в комплекте без сумки – около 900 г (фильтрующе-поглощающая коробка – 250 г, лицевая часть – 600 г).

Фильтрующе-поглощающая коробка ГП-7к по конструкции аналогична коробке ГП-5, но с улучшенными характеристиками, уменьшено ее сопротивление, что облегчает дыхание. Лицевая часть МГП представляет собой маску объемного типа с «независимым» обтюратором, с наголовником (предназначен для закрепления лицевой части) в виде резиновой пластины с пятью лямками (лобная, две височные, две щечные), с очковым узлом, переговорным устройством (мембраной), узлами клапана вдоха и выдоха, прижимными кольцами для закрепления незапотевающих пленок (рис. 9.2) [2]. «Независимый» обтюратор представляет собой полосу тонкой резины и служит для создания надежной герметизации лицевой части на голове. При этом механическое воздействие лицевой части на голову очень незначительно. На каждой лямке с интервалом в 1 см нанесены упоры ступенчатого типа, которые предназначены для надежного закрепления их в пряжках. У каждого упора имеется цифра, указывающая его порядковый номер. Это позволяет точно фиксировать нужное положение лямок при подгонке маски. Нумерация цифр идет от свободного конца лямки к затылочной пластине. Гидрофобный трикотажный чехол надевается на фильтрующе-поглощающую коробку и предохраняет ее от заражения, снега, пыли и влаги.

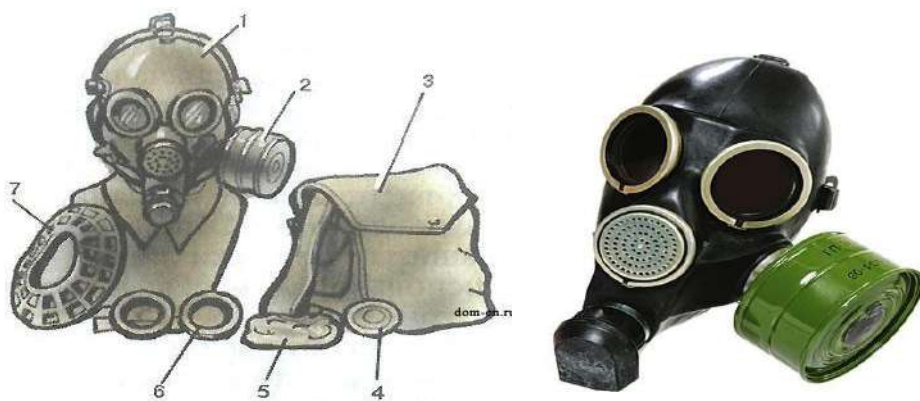


Рис. 7.2. Противогаз ГП-7:

1 – лицевая часть; 2 – фильтрующе-поглощающая коробка; 3 – сумка; 4 – коробка с незапотевающими пленками; 5 – трикотажный чехол; 6 – утеплительные манжеты

Гражданский фильтрующий противогаз (ГП-7, ГП-7В, ГП-7ВМ) – это одна из самых последних и совершенных моделей противогазов для населения. В реальных условиях они обеспечивают высокую защиту от паров отравляющих веществ нервнопаралитического действия (типа зарин, зоман и др.), общедовитого действия (хлорциан, синильная кислота и др.), радиоактивных веществ (радионуклидов йода и его органических соединений (типа йодистый метил и др.)); от капель отравляющих веществ кожно-нарывного действия (иприт и др.), бактериальных, аварийных химически опасных веществ (АХОВ). ГП-7 имеет малое сопротивление дыханию, обеспечивает надежную герметизацию и небольшое давление лицевой части на голову. Благодаря этому им могут пользоваться люди старше 60 лет и больные с легочными и сердечно-сосудистыми заболеваниями. Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основании результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы.

Правила определения размера противогаза.

Для определения размера противогаза нужно знать горизонтальный и вертикальный обхват головы. Горизонтальный обхват измеряется по замкнутой линии, которая проходит спереди по надбровным дугам, сбоку чуть выше (на 2–3 см) ушной раковины и сзади по наиболее выступающей части головы. А вертикальный обхват можно определить посредством измерения длины вертикальной линии, проходящей через подбородок, щеки и макушку. Полученные измерения следует округлить так, чтобы последняя цифра была 0 или 5. Затем нужно сложить оба результата и посмотреть, какой размер противогаза вам нужен [3]:

- менее 1190 мм – первый размер;
- от 1195 до 1210 мм – второй размер;
- от 1215 до 1235 мм – третий размер;
- от 1240 до 1260 мм – четвертый размер;
- от 1265 до 1285 мм – пятый размер;

- от 1290 до 1310 мм – шестой размер.

Надевается противогаз после сигнала «Химическая тревога» по команде «Газы», либо по своей инициативе. Вынув противогаз из специальной сумки, следует взять шлем-маску за его нижнюю часть так, чтобы большие пальцы рук находились снаружи, а остальные были внутри. Далее нужно приложить нижнюю часть шлема-маски под подбородок и натянуть его на голову резким движением рук вверх.

Учитывая то, что операции, которые описаны выше, придется проводить вслепую, нужно достаточно долго тренироваться. Хотя все зависит от человека и степени его обучаемости. Хорошо попрактиковавшись, можно приблизиться к армейским нормативам на надевание противогаза – около 7–10 с. Наличие у противогаза переговорного устройства (мембрана) обеспечивает четкое понимание передаваемой речи, значительно облегчает пользование средствами связи (телефон, радио).

Гражданские противогазы ГП-7В, ГП-7ВМ, УЗС-ВК, КЗД-6, фильтр ДОТ, фильтр ВК, ДПГ-3 (рис. 7.3). ГП-7В отличается от ГП-7 тем, что в нем лицевая часть МПП-В имеет устройство для приема воды, представляющее собой резиновую трубку с мундштуком и ниппелем.

ГП-7ВМ отличается от ГП-7В тем, что маска М-80 имеет очковый узел в виде трапециевидных изогнутых стекол, обеспечивающих возможность работы с оптическими приборами.

Гражданский фильтрующий противогаз ГП-7 обеспечивает защиту органов дыхания, глаз и кожи лица человека от вредных веществ и примесей, находящихся в воздухе. Это проверенная временем и надежная модель противогаза для гражданского населения.





Рис. 7.3. Гражданские противогазы:

a – ГП-7(В, ВМ); *б* – УЗС-ВК; *в* – ПДФ-2; *г* – КЗД-6; *д* – фильтр ДОТ; *е* – фильтр ВК; *ж* – ДПГ-3;

Подбор лицевой части необходимого типоразмера ГП-7 осуществляется на основании результатов измерения мягкой сантиметровой лентой горизонтального и вертикального обхвата головы. Горизонтальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей спереди по надбровным дугам, сбоку на 2–3 см выше края ушной раковины и сзади через наиболее выступающую точку головы. Вертикальный обхват определяется измерением головы по замкнутой линии, проходящей через макушку, щеки и подбородок. Измерения округляются с точностью до 5 мм. По сумме двух измерений устанавливают нужный типоразмер (табл. 7.0). [4].

Правильно подобранная шлем-маска (маска) должна плотно прилегать к лицу и исключать возможность проникновения наружного воздуха в органы дыхания, минуя фильтрующе-поглощающую коробку.

Таблица 7.0

Типоразмеры противогазов

Рост лицевой части		1		2		3		
Положение упоров лямок	ГП-7, ГП-7В	4-8-8	3-7-8	3-7-8	3-6-7	3-6-7	3-5-6	3-4-5
	ГП-7ВМ	4-8-6	3-7-6	3-7-6	3-6-5	3-6-5	3-5-4	3-4-3
Сумма горизонтального и вертикального обхвата головы		До 1185	1190–1210	121–1235	1240–1260	1265–1285	1290–1310	1310 и более

Примечание. Положение лямок наголовника устанавливают при подгонке противогаза.

Противогаз УЗС-ВК – аварийно-спасательное средство многоразового действия, применяется для защиты органов дыхания человека от вредных веществ, может использоваться во всех климатических зонах.

Противогаз ПДФ-2 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и лица детей (старше 1,5 года) от отравляющих веществ (ОВ), опасных биологических веществ (ОБВ), радиоактивной пыли (РП).

Камера защитная детская (КЗД-6) предназначена для защиты детей в возрасте до 1,5 года от отравляющих веществ, радиоактивной пыли и бактериальных средств. Детская защитная камера похожа на обычную сумку, поэтому переносить ребенка в ней очень удобно.

Дополнительный патрон (ДПГ-3) предназначен для использования в комплекте с ГП-7, ГП-7В и детскими противогазами, для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека от сильнодействующих ядовитых веществ: аммиака, диметиламина, нитробензола.

Фильтр ДОТ соответствует новым ГОСТам, гармонизированным с европейскими стандартами EN141, EN143. Он значительно эффективнее по сравнению с противогазовыми коробками, выпускаемыми по старым ГОСТа, за счет уникальных поглотителей от отравляющих веществ, опасных биологических веществ, радиоактивной пыли, сильнодействующих ядовитых веществ.

Фильтр ВК предназначен для очистки вдыхаемого воздуха от органических газов и паров с температурой кипения выше 65 °С (циклогексан, бензол, ксилол, толуол, бензин, керосин, галоидоорганические соединения (хлорпикрин, хлорацетофенон и т. п.), нитросоединения бензола).

Промышленные противогазы. Существует несколько марок промышленных фильтрующих противогазов, которые являются индивидуальным средством защиты органов дыхания и зрения рабочих различных отраслей промышленности, сельского хозяйства от воздействия

вредных веществ (газы, пары, пыль, дым и туман), присутствующих в воздухе.

Запрещается применять промышленные противогазы при недостатке кислорода в воздухе (менее 18 %), например при работах в емкостях, цистернах, колодцах и других изолированных помещениях.

Не допускается применение промышленных противогазов для защиты от низкокипящих жидкостей, плохо сорбирующихся органических веществ, например метана, этилена, ацетилен. Не рекомендуется работать в таких противогазах, если состав газов и паров вредных веществ неизвестен (Рис. 7.4).



ППФМ-92

ПФМГ-96

ПФСГ-98

ППФ-95

Рис. 7.4. Промышленные противогазы

Противогазы ППФМ-92, ПФМГ-96, ПФСГ-98 предназначены для защиты органов дыхания, глаз и лица человека от вредных газо- и паров- разных веществ и аэрозолей, присутствующих в воздухе рабочей зоны. ППФ-95 предназначены для защиты органов дыхания, зрения и лица рабо- чих различных отраслей промышленности и сельского хозяйства от воз- действия вредных газов, паров, пыли, дыма и тумана, присутствующих в воздухе. Фильтрующие противогазы надежны в атмосфере, содержащей не менее 18 % кислорода.

Промышленный противогаз состоит из снаряженной коробки, лицевой части (шлем-маски) с соединительной трубкой и сумки. Фильтрующая коробка служит для очистки воздуха, вдыхаемого человеком, от ядовитых веществ и вредных примесей. В зависимости от состава этих примесей она может содержать один или несколько специальных поглотителей или сочетание поглотителя с аэрозольным фильтром. При этом коробки строго специализированы по составу поглотителей, а поэтому отличаются друг от

друга окраской и маркировкой. Шлем-маски промышленных противогазов изготавливаются пяти ростов – 0, 1, 2, 3, 4. Чтобы подобрать шлем-маску, надо мягкой сантиметровой линейкой произвести два измерения головы. Вначале определить длину круговой линии, проходящей по подбородку, щекам и через высшую точку головы (макушку). Затем измерить длину полуокружности, проходящей от отверстия одного уха к отверстию другого по лбу через надбровные дуги. Результаты двух обмеров суммируют и находят требуемый рост шлем-маски.

При сумме до 93 см размер нулевой, от 93 до 95 см – первый, от 95 до 99 см – второй, от 99 до 103 см – третий, от 103 и выше – четвертый [4].

Противогазы комплектуют коробками двух размеров (большая и малая) и трех типов: без аэрозольного фильтра, с аэрозольным фильтром (на коробке белая вертикальная полоса), без аэрозольного фильтра с уменьшенным сопротивлением дыханию (имеет индекс 8 в маркировке). В зависимости от вида вредного вещества выпускают коробки следующих марок: А, В, Г, Е, КД, СО, М (табл. 9.2) [5].

Коробки марок А, В, Г, Е, КД изготавливаются как с аэрозольными фильтрами, так и без них; коробка БКФ – только с аэрозольными фильтрами; коробки СО и М – без аэрозольных фильтров. Белая вертикальная полоса на коробке означает, что она оснащена аэрозольным фильтром.

Таблица 7.1

Характеристика промышленных противогазов

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
А	Коричневая	Пары органических соединений (бензин, керосин, ацетон, бензол, толуол, ксилол, сероуглерод, спирты, эфиры, галоидоорганические соединения, нитросоединения бензола и его гомологи, тетроэтилсвинец, фосфор- и хлорорганические ядохимикаты)

Продолжение табл. 7.1

Марка противогаза	Маркировка и окраска	Соединения, от которых защищают ПП
В	Желтая	Кислые газы и пары (диоксида серы, гидрид серы, хлор, циан гидрида, окислы азота, хлориды водорода, фосген), фосфор- и хлорорганические ядохимикаты
Г	Черн о- желта я	Пары ртути и ртутьорганические ядохимикаты на основе этилмеркурхлорида
Е	Черная	Гидрид мышьяка и гидрид фосфора
К	Зеленая	Аммиак, а также пыль, дым, туман
КД	Серая, с бе- лой поло- сой	Аммиак и сероводород
БКФ	Защитная, с белой полосой	Кислые газы и пары, пары органических веществ, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пыль, дым, туман
СО	Белая	Оксид углерода
М	Красная	Оксид углерода в присутствии паров органических ве- ществ, кислые газы, аммиак, гидрид мышьяка, гидрид фосфора, пары органических соединений (бензин, киро- син, ацетон, бензол, ксилол, сероуглерод, толуол, спирты, эфиры, анилин, соединения бензола и его гомологи)
П-2У	Красная с белой поло- сой	Пары карбониллов никеля и железа, оксид углерода и со- путствующие аэрозоли
Б	Синяя	Бороводороды: диборан, пентаборан, этилентаборан, ди- этилдекаборан и их аэрозоли
УМ	Защитная	Пары и аэрозоли гептила, амил, самин, нитромеланж, амидол
ГФ	Голубая	Газообразный гексафторид урана, фтор, фтористый водо- род, радиоактивные аэрозоли

Пользование противогазом. Подобрать шлем-маску, ее обязательно примеряют. Новую лицевую часть предварительно необходимо протереть снаружи и внутри чистой тряпочкой или тампоном ваты, смоченным в воде, а клапаны выдоха продуть. Шлем-маску, бывшую в употреблении, следует отсоединить от коробки, протереть двухпроцентным раствором формалина или промыть водой с мылом и просушить.

При сборке противогаза шлем-маску берут в левую руку за клапанную коробку, а правой рукой ввинчивают до отказа фильтрующе-поглощающую коробку навинтованной горловиной в патрубок клапанной коробки шлем-маски.

При переводе противогаза в «боевое» положение необходимо:

- снять головной убор и зажать его между коленями или положить рядом;
- убрать волосы со лба и висков, женщинам следует гладко
- зачесать волосы назад, заколки и украшения снять (их попадание под обтюратор приведет к нарушению герметичности);
- вынуть шлем-маску из сумки, взять ее обеими руками за утолщенные края у нижней части так, чтобы большие пальцы рук были с наружной стороны, а остальные – внутри. Подвести шлем-маску к подбородку и резким движением рук вверх и назад натянуть ее на голову так, чтобы не было складок, а очки прились против глаз (ГП-5, ГП-5М);
- для правильного надевания ГП-7 надо взять лицевую часть обеими руками за щечные лямки так, чтобы большие пальцы захватывали их изнутри. Задержать дыхание, закрыть глаза. Затем зафиксировать подбородок в нижнем углублении обтюратора и движением рук вверх и назад натянуть наголовник на голову и подтянуть до упора щечные лямки;
- сделать полный выдох (для удаления зараженного воздуха из-под шлем-маски, если он туда попал в момент надевания), открыть глаза и возобновить дыхание;
- надеть головной убор, застегнуть сумку и закрепить ее на туловище.

Дополнительные патроны

В результате развития химической и нефтехимической промышленности в производстве увеличено применение химических веществ. Многие из них по своим свойствам вредны для здоровья людей. Их называют сильнодействующими ядовитыми веществами (СДЯВ).

С целью расширения возможностей гражданских противогазов по защите от СДЯВ для них введены дополнительные патроны (ДПГ-1 и ДПГ-3).

ДПГ-1 в комплекте с противогазом защищает от двуокиси азота, метила хлористого, окиси углерода и окиси этилена. ДПГ-3 в комплекте с противогазом защищает от аммиака, хлора, диметиламина, нитробензола, сероводорода, сероуглерода, синильной кислоты, тетраэтилсвинца, фенола, фурфурола, хлористого водорода.

Внутри патрона ДПГ-1 два слоя шихты – специальный поглотитель и гопкалит. В ДПГ-3 только один слой поглотителя. Чтобы защитить шихту от увлажнения при хранении, горловины должны быть постоянно закрытыми: наружная – с навинченным колпачком с прокладкой, внутренняя – с ввернутой заглушкой [6].

Изолирующие противогазы. Изолирующие противогазы (ИП) являются специальными средствами защиты органов дыхания, глаз и кожи лица от любых вредных примесей, находящихся в воздухе независимо от их свойств и концентраций. Они используются также в тех случаях, когда невозможно применение фильтрующих противогазов, например при наличии в воздухе очень высоких концентраций отравляющих веществ или любой вредной примеси, кислорода менее 16 %, а также при работе под водой на небольшой глубине. Виды противогазов представлены на Рис. 7.5.



Рис. 9.5. Изолирующие противогазы

Изолирующие противогазы используют в случае, когда фильтрующие противогазы не обеспечивают должной степени защиты, или когда в воздухе недостаточно кислорода. Источником кислорода в таком противогазе служит патрон, снаряженный специальным веществом. Для нужд населения выпускают ИП-4М, ИП-4МК, ИП-5, ИП-6, ИП-7, ПДА- 3М.

Действие изолирующих противогазов основано на использовании химически связанного кислорода. Они имеют замкнутую маятниковую схему дыхания: выдыхаемый воздух попадает в регенеративный патрон, вещество которое содержится в нем поглощает углекислый газ и влагу, а взамен выделяет необходимый для дыхания кислород. Затем дыхательная смесь попадает в дыхательный мешок. При вдохе газовая смесь из дыхательного мешка снова проходит через регенеративный патрон, дополнительно очищается и поступает для дыхания. Материалы, из которых изготовлены противогазы, не оказывают отрицательного воздействия на организм. Применение незапотевающих пленок, а при отрицательных температурах и утеплительных манжет сохраняет прозрачность стекол в течение всего времени работы в противогазе при любой физической нагрузке. Гарантируется высокая эксплуатационная безопасность.

ИП-4М, ИП-4МК используют при авариях, стихийных бедствиях. ИП-5, ИП-6 предназначены для защиты органов дыхания, кожи лица и глаз человека в непригодной для дыхания атмосфере независимо от состава и концентрации вредных веществ в воздухе, а также при недостатке или отсутствии кислорода. Портативный дыхательный аппарат (ПДА-3М) предназначен для экстренной защиты органов дыхания, зрения и кожи лица человека в непригодной для дыхания атмосфере при эвакуации из опасной зоны, выполнении аварийных работ, а также в ожидании помощи [5].

По принципу действия изолирующие противогазы делятся на две группы: ИП-5); КИП-8).

- противогазы на основе химически связанного кислорода (ИП-4,

- противогазы на основе сжатого кислорода или воздуха (КИП-7, Исходя из принципа защитного действия, основанного на полной изоляции органов дыхания от окружающей среды, время пребывания в изолирующем противогазе зависит не от физико-химических свойств ОВ,РВ, БС и их концентраций, а от запаса кислорода и характера выполняемой работы.

Противогазы шланговые изолирующие предназначены для защиты органов дыхания, глаз и кожи человека от любых вредных примесей в воздухе независимо от их концентрации, а также для работы в условиях недостатка кислорода в воздухе рабочей зоны. Комплекуются возду-хоподводящим шлангом длиной 10 или 20 м на барабане или в сумке.

Респираторы.

Респираторы представляют собой облегченное средство защиты органов дыхания от вредных газов, паров, аэрозолей и пыли (рис. 7.6).

Респираторы делятся на два типа. Первый – это респираторы, у которых полумаска и фильтрующий элемент одновременно служат и лицевой частью. Второй – это респираторы, которые очищают вдыхаемый воздух в фильтрующих патронах, присоединяемых к полумаске.



Рис. 7.6. Респираторы:

а – «Кама»; б – «Снежок»; в – У-2к; г – РП-КМ; д – Ф-62Ш; е – «Астра-2»; ж – РПГ-67; з – РУ-6 Ом

Респираторы по назначению делят на следующие виды [5]:

противоаэрозольные – для защиты органов дыхания от пыли, дыма, тумана, содержащих токсичные, бактериальные и другие опасные элементы, за счет пропуска вдыхаемого воздуха через фильтр из специального материала (респираторы «Лепесток», «Кама», «Снежок-П», У-2к, «Астра-2», Ф-62ш, РПА-1 и др.). Для фильтров в таких респираторах используют материалы типа ФП (фильтр Петрянова), обладающие высокой эластичностью, механической прочностью, большой пылеемкостью, устойчивостью к химическим агрессивным веществам и прекрасными фильтрующими свойствами;

противогазовые – для защиты от паров и газов за счет фильтрования вдыхаемого воздуха через фильтры-патроны различных марок, различающихся составом адсорбирующего материала. При этом фильтр-патрон каждой марки защищает от газов только определенного вида (РПГ-67);

универсальные – одновременно защищают от аэрозолей и отдельных видов газов и паров. Респираторы имеют противоаэрозольный фильтр и сменные противогазовые патроны разных марок (РУ-60м) или противогазовые фильтры из ионообменного волокнистого материала («Снежок-ГП», «Лепесток-Г»).

По конструктивному оформлению различают респираторы двух типов:

фильтрующие маски – их фильтрующий элемент одновременно служит лицевой частью;

патронные – самостоятельно выполненные лицевая часть и фильтрующий элемент.

По характеру вентилирования подмасочного пространства респираторы делят на бесклапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух проходит через фильтрующий элемент) и клапанные (вдыхаемый и выдыхаемый воздух движется по различным каналам благодаря системе клапанов вдоха и выдоха).

В зависимости от срока службы различают респираторы одноразового (типа «Лепесток», «Кама», У-2к и т. п.) и многоразового пользования, в которых предусмотрена возможность замены фильтров или их многократная регенерация (Ф-62ш, «Астра-2», РУ-60м и др.).

Респираторы ШБ-1, «Лепесток-5», «Лепесток-40» и «Лепесток-200» одинаковы и представляют собой сплошную легкую полумаску-фильтр из материала ФПП (фильтрующее полотно Петрянова). В нерабочем состоянии респиратор имеет вид круга. Каркасность его в рабочем состоянии обеспечивают пластмассовая распорка и алюминиевая пластина. Плотное прилегание респиратора к лицу достигается при помощи резинового шнура, вшитого в периметр круга, а также благодаря электростатическому заряду материала ФПП, который образует полосу обтюрации. На голове респиратор крепят четырьмя шнурами.

Противоаэрозольные респираторы. В качестве фильтров в респираторах используют тонковолокнистые фильтровальные материалы. Наибольшее распространение получили полимерные фильтровальные материалы типа ФП (фильтр Петрянова) благодаря их хорошей эластичности, большой пылеемкости, а главное, высоким фильтрующим свойствам. Важной отличительной особенностью материалов ФП, изготовленных из перхлорвинила и других полимеров, обладающих изоляционными свойствами, является то, что они несут электростатические заряды, которые резко повышают эффективность улавливания аэрозолей и пыли.

Респиратор противопылевой У-2К (в гражданской обороне Р-2) обеспечивает защиту органов дыхания от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, радиоактивной и другой пыли, от некоторых бактериальных средств, дустов и порошкообразных удобрений, не выделяющих токсичные газы и пары. Использовать респиратор целесообразно при кратковременных работах небольшой интенсивности и запыленности воздуха. Не рекомендуется применять, когда в атмосфере сильная влага.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, наружный фильтр которой изготовлен из полиуретанового поропласта зеленого цвета, а внутренняя его часть – из тонкой воздухонепроницаемой полиэтиленовой пленки, в которую вмонтированы два клапана вдоха (рис. 9.7). Клапан выдоха размещен в передней части полумаски и защищен экраном. Между поропластом и полиэтиленовой пленкой расположен второй фильтрующий слой из материала ФП. Для плотного прилегания респиратора к лицу в области переносицы имеется носовой зажим – фигурная алюминиевая пластина. Респиратор крепится при помощи регулируемого оголовья.



Рис. 7.7. Респираторы У-2К (Р-2)

Респираторы У-2К изготавливаются трех ростов, которые обозначаются на внутренней подбородочной части полумаски. Определение роста производится путем измерения высоты лица человека, т. е. расстояния между точкой наибольшего углубления переносицы и самой нижней точкой подбородка. При величине измерения от 99 до 109 мм берут первый рост, от 109 до 119 мм – второй, от 119 и выше – третий.

Принцип действия респиратора основан на том, что при вдохе воздух последовательно проходит через фильтрующий полиуретановый слой маски, где очищается от грубодисперсной пыли, а затем через фильтрующий полимерный материал (ФП), в котором происходит очистка воздуха от тонкодисперсной пыли. После очистки вдыхаемый воздух через клапаны вдоха попадает в подмасочное пространство и в органы дыхания.

При выдохе воздух из подмасочного пространства выходит через клапан выдоха наружу.

Чтобы подогнать респиратор У-2К (Р-2), нужно:

- вынуть его из полиэтиленового мешочка и проверить его исправность, надеть полумаску на лицо так, чтобы подбородок и нос разместились внутри нее, одна нерастягивающаяся тесьма оголовья располагалась бы на теменной части головы, а другая – на затылочной;
- с помощью пряжек, имеющих на тесемках, отрегулировать их длину (для чего следует снять полумаску) таким образом, чтобы надетая полумаска плотно прилегала к лицу;
- на подогнанной надетой полумаске прижать концы носового зажима к носу.

Для проверки плотности прилегания респиратора к лицу необходимо плотно закрыть отверстия предохранительного экрана клапана выдоха ладонью и сделать легкий выдох. Если при этом по линии прилегания полумаски к лицу воздух не выходит, а лишь несколько раздувает респиратор, значит, он надет герметично. Если воздух проходит в области носа, то надо плотнее прижать концы носового зажима.

После снятия респиратора необходимо удалить пыль с наружной части полумаски с помощью щетки или вытряхиванием. Внутреннюю поверхность необходимо протереть и просушить, после чего респиратор необходимо вложить в полиэтиленовый пакет, который закрывается кольцом. Противоаэрозольный респиратор Ф-62Ш (однопатронный) – это средство индивидуальной защиты органов дыхания человека от различных видов промышленных пылей, он не защищает от газов, паров вредных веществ, аэрозолей органических соединений. Предназначен для защиты от силикатной, металлургической, горнорудной, угольной, табачной пыли, пыли порошкообразных удобрений и интоксикантов, а также других видов пыли, не выделяющих токсичных газов. Широко применяется шахтерами. Респиратор противоаэрозольный ФА-2002

предназначен для защиты лица, глаз, органов дыхания от аэрозолей различной природы (пыль, дым, туман) при их суммарной концентрации не более 15 ПДК и при концентрации кислорода не менее 17 % (Рис. 7.8).



Ф-62Ш

ФА-2002

Рис. 7.8. Респираторы противоаэрозольные Ф-62Ш и ФА-2002

Универсальные респираторы

Газопылезащитные респираторы занимают как бы промежуточное положение между респираторами противопылевыми и противогазами. Они легче, проще и удобнее в использовании, чем противогаз. Однако защищают только органы дыхания при концентрации вредных веществ не более 10–15 ПДК. Глаза, лицо остаются открытыми. Вместе с тем такие респираторы во многих случаях довольно надежно предохраняют человека в газовой и пылегазовой среде.

Респиратор газопылезащитный РУ-60М (рис. 7.9) защищает органы дыхания от воздействия вредных веществ, присутствующих в воздухе одновременно в виде паров, газов и аэрозолей (пыли, дыма, тумана).



Рис. 7.9. Респиратор газопылезащитный (РУ-60М)

Запрещается применять эти респираторы для защиты от высокотоксичных веществ типа синильной кислоты, мышьяковистого, фосфористого, цианистого

водорода, тетраэтилсвинца, низкомолекулярных углеводородов (метан, этан), а также от веществ, которые в парогазообразном состоянии могут проникнуть в организм через неповрежденную

кожу. Респиратор РУ-60М состоит из резиновой полумаски, обтюратора, поглощающих патронов (марки А, В, КД, Г), пластмассовых манжет с клапанами вдоха, клапана выдоха с предохранительным экраном и оголовья. С этими респираторами разрешается работать в средах, где концентрация пыли не более 100 мг/м³.

Противогазовые респираторы. Респиратор противогазовый (РПГ-67) – это средство индивидуальной защиты, применяется на предприятиях химической, металлургической и в других отраслях производства при концентрациях вредных веществ, не превышающих 10–15 ПДК.

Газодымозащитный комплект. Статистика показывает, что пожары с большим количеством человеческих жертв чаще всего встречаются в гостиницах, театрах, универсамах, ресторанах, вечерних клубах, учебных заведениях, на предприятиях, использующих легковоспламеняющиеся материалы.

Помещения быстро заполняются окисью углерода и другими токсическими газами. Люди гибнут от отравлений. Чтобы защитить органы дыхания и глаза от ядовитых газов, а голову человека от огня при выходе из горящего помещения, создан специальный газодымозащитный комплект (Рис. 9.10).



Рис. 9.10 Газодымозащитный комплект

Газодымозащитный комплект (ГДЗК) состоит из огнестойкого капюшона с прозрачной смотровой пленкой. В нижней части расположена эластичная манжета.

Внутри капюшона находится резиновая полумаска, в которой закреплен фильтрующе-сорбирующий патрон с клапаном вдоха. ГДЗК имеет регулируемое оголовье. При надевании следует широко растянуть эластичную манжету и накинуть капюшон на голову так, чтобы

манжета плотно облегла шею, при этом длинные волосы заправляются под капюшон. Очки можно не снимать. ГДЗК обеспечивает защиту от окиси углерода и цианистого водорода не менее 15 мин. Сопротивление при вдохе при 30 л/мин – не более 149 Па (15 мм вод. ст). Масса 800 г. Комплект хранится в картонной коробке в пакете из трехслойной полиэтиленовой пленки.

Капюшон «Феникс» предназначен для самостоятельной эвакуации из мест возможного отравления химически опасными и вредными веществами. Защищает от продуктов горения, аэрозолей, паров и газов, опасных химических веществ, образующихся при аварийных ситуациях (Рис. 9.11).

Самоспасатели СИП-1, СПИ-20, СПФ, «Экстремал ПРО» (Рис. 9.11) предназначены для индивидуальной защиты органов дыхания и зрения человека от вредного воздействия непригодной для дыхания, токсичной и задымленной газовой среды. Применяются при экстренной эвакуации людей в случае террористических актов, а также с мест пожара в общественных зданиях, на транспорте, из жилых домов и т. п.



а – СИП-1; б – СПИ-20; в – СПФ; г – капюшон «Феникс»; д – «Экстремал ПРО».

Самоспасатель противопожарный СИП-1 предназначен для защиты органов дыхания, зрения и головы при самостоятельной эвакуации из помещений (гостиниц, высотных зданий, вагонов) во время пожара или при других аварийных ситуациях, от любых вредных веществ независимо от их концентрации и при недостатке кислорода в воздухе.

Порядок выполнения работы

1. Записать название и цель работы.
2. Законспектировать виды и назначение противогазов в виде табл. 7.3.

Таблица 7.3

Виды и назначение противогазов

Наименование и марка	Назначение, вид веществ, от которых защищает	Комплектация	Примечание*
Фильтрующие противогазы			
Гражданские			
ГП-5			
...			
... Т. Д.			

*В примечании указать, для каких возрастных групп предназначен, особенности марки и т. п.

3. Указать правила пользования противогазами.
4. Измерить при помощи гибкого сантиметра лицевую часть головы и подобрать для себя размер противогаза ГП-5 (ГП-7) по росту.

5. Измерить при помощи гибкого сантиметра высоту своего лица и подобрать размер респиратора У-2К.
6. Показать отчет преподавателю.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безопасность жизнедеятельности : учеб. для вузов / С. В. Белов [и др.] ; под общ. ред. С. В. Белова. – М.: Высш. шк., 2009. – 616 с.
2. Безопасность жизнедеятельности. Безопасность в чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера : учеб. пособие для вузов / В. А. Акимов [и др.]. – М. : Высш. шк., 2008. – 592 с.
3. Безопасность жизнедеятельности. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов / Я. Д. Вишняков [и др.]. – М. : Академия, 2008. – 304 с.
4. Емельянов В. М., Коханов В. Н., Некрасов П. А. Защита населения и территорий в чрезвычайных ситуациях : учеб. пособие для вузов. – М. : Академический проект : Трикста, 2005. – 480 с.
5. Вознесенский В. В. Средства защиты органов дыхания и кожи. Противогазы, респираторы и защитная одежда, основы их эксплуатации : учеб. пособие. – М. : Воен. знания, 2010. – 80 с.
6. Семенов С. Н., Лысенко В. П. Проведение занятий по гражданской обороне : метод. пособие. – М. : Высш. шк., 1990. – 96 с.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8. ИНЖЕНЕРНАЯ И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЗАЩИТА. ВИДЫ ЗАЩИТНЫХ СООРУЖЕНИЙ И ПРАВИЛА ПОВЕДЕНИЯ В НИХ

Наименование работы: Действия населения при ЧС военного характера.

Цель: изучить действия населения при ЧС военного характера при угрозе применения радиационного, химического или биологического оружия, определить применяемые средства индивидуальной защиты, обосновать выбор защитных сооружений.

Время: 4 часа

Материально-техническое обеспечение: инструкционная карта, ручка, противогаз, респиратор, ватно-марлевая повязка

Методика выполнения

Задание:

1. Изучить индивидуальные средства защиты населения.
2. Изучить виды укрытий и правила поведения в убежищах и укрытиях.
3. Изучить применение СИЗ при угрозе применения химического и биологического оружия.
4. Отчет о работе оформить в виде плана-конспекта.
5. Заполнить таблицу.

№	ЧС	Опасность	Поражающие факторы	Основные средства защиты
---	----	-----------	--------------------	--------------------------

Ядерное оружие – самое страшное оружие современности. Поражение людей при его применении зависит от того, где они находились в момент ядерного взрыва. Наиболее эффективным средством защиты от всех поражающих факторов ядерного оружия являются убежища (укрытия). Находясь в убежищах (укрытиях), необходимо постоянно держать в готовности к немедленному использованию средства индивидуальной защиты. Средства индивидуальной защиты подразделяют на средства индивидуальной защиты

органов дыхания (СИЗОД), средства индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), средства индивидуальной защиты кожи (СИЗК). К средствам защиты органов дыхания человека относятся противогазы (фильтрующие (рис.8.1.) и изолирующие (рис.2.)) и респираторы (рис.3.), а также простейшие средства защиты – противопыльные тканевые маски (ПТМ-1) (рис.4.) и ватно-марлевые повязки (рис.5.), изготавливаемые обычно силами самого населения.

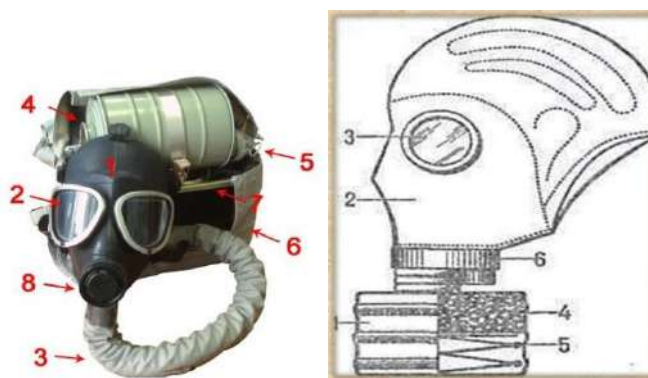


Рис. 8.1 Фильтрующий противогаз

1-фильтрующе-поглощающая коробка; 2-лицевая часть противогаза; 3-очковой узел; 4-шихга (обеспечивает поглощение паров и газов, и токсичных в-в); 5-ПАФ (противоаэрозольный фильтр); 6-клапанная коробка.



Рис.8.2. Изолирующий противогаз

1-лицевая часть, 2-очковый узел, 3-соединительная трубка, 4-регенераторный патрон, 5-пусковое устройство патрона, 6-дыхательный мешок, 7-каркас, 8-устройство для переговоров.

Порядок надевания противогаза:

1. По команде «Газы!» задержите дыхание, не вдыхая воздух.
2. Закрыть глаза.
3. Достать противогаз из противогазной сумки, левой рукой доставая противогаз, а правой держа сумку снизу.
4. Вынуть пробку-заглушку из противогазной коробки.

5. Перед надеванием противогаза расположить большие пальцы рук снаружи, а остальные внутри.

6. Приложить нижнюю часть шлем-маски на подбородок.

7. Резко натянуть противогаз на голову снизу-вверх.

8. Выдохнуть.

9. Необходимо, чтобы после не образовалось складок, очковый узел должен быть расположен на уровне глаз.

10. Перевести сумку на бок.

Снятие:

1. По команде «Отбой!» брать за фильтровальную коробку и, потянув сверху-вниз, снять его.

2. Убрать противогаз в противогазную сумку.

3. Застегнуть пуговицы.

Таблица 8.0

Подбор размера противогаза

Обхват головы	Размер противогаза
До 63	0
63,5-65,5	1
66-68	2
68,5-70,5	3
71 и более	4

В качестве защиты органов дыхания от радиоактивной пыли и различных вредных аэрозолей могут быть использованы респираторы. Они просты в применении, малогабаритны и рассчитаны на массовое применение. Широко используются при выполнении работ, связанных с пылеобразованием.

Респиратор представляет собой фильтрующую полумаску, снабженную двумя клапанами вдоха, клапаном выхода (с предохранительным экраном), оголовьем, состоящим из эластичных растягивающихся (и не растягивающихся) тесемок, и носовым зажимом. Работать в нем можно до 12 ч

Респираторы Р-2 изготавливаются трех ростов -1,2 и 3-го, которые обозначаются внутренней подбородочной части полумаски.

Простейшими средствами защиты органов дыхания человека от радиоактивной пыли и биологических средств (при действиях во вторичном облаке) являются противопыльная тканевая маска ПТМ-1 (рис.8.3).

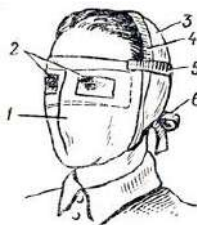


Рис.8.3. Противопыльная тканевая маска

1-корпус маски, 2-смотровые отверстия, 3-крепления, 4-резиновая тесьма, 5-поперечная резинка, 6-завязки.

И ватно-марлевая повязка (рис.8.4.) От ОВ (отравляющих веществ) они не защищают. Их изготавливает преимущественно само население. Маска состоит из корпуса и крепления. Корпус шьется из двух одинаковых по форме тканевых фильтрующих половинок, собранных на 4-5 слоев. На нем имеются смотровые отверстия со вставленными стеклами. Крепится маска на голове при помощи вставленной резинки и двух завязок.

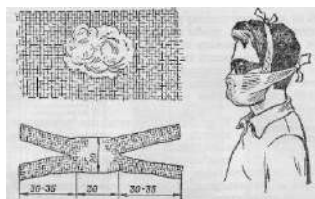


Рис.8.4. Ватно-марлевая повязка

Ватно-марлевая повязка изготавливается из куска марли размером 100 x50 см и ваты. На марлю накладывают слой ваты толщиной 2-3 см, длиной 30 см, шириной 20 см. Марлю с обеих сторон загибают и накладывают на вату. Концы марли разрезают на 30-35 см с каждой стороны, чтобы образовались две пары завязок. Марлевые повязки делают из 10-12 слоев марли. Они шьются также в виде маски, закрывающей лицо или только подбородок, нос и рот. Для защиты глаз используются противопыльные очки.



Рис.8.5.Защитные очки

К средствам индивидуальной защиты глаз (СИЗГ), в первую очередь, относятся защитные очки, предохраняющие от пыли, твердых частиц, химически неагрессивных жидкостей и газов, от слепящего яркого света, ультрафиолетового, инфракрасного излучения и от сочетания излучений указанных видов с воздействия летящих твердых частиц, а так же очки защищающие от лазерного излучения и других опасных факторов.

К средствам индивидуальной защиты кожи (СИЗК) относят защитную одежду фильтрующего и изолирующего типа. К изолирующим средствам защиты кожи относятся общевойсковой комплексный защитный костюм (ОКЗК), общевойсковой защитный комплекс (ОЗК) (рис.8.6.), легкий защитный костюм (Л-1) , защитный комбинезон или костюм.



Рис. 8.6 Защитный костюм

Общевойсковой комплексный защитный костюм (ОЗК) предназначен для комплексной защиты от светового излучения и радиоактивной пыли, паров и аэрозолей ОВ и биологических аэрозолей. Он состоит из пропитанных специальным составом куртки, брюк, защитного белья, головного убора, подшлемника.

Простейшие средства защиты кожи применяются при отсутствии табельных средств. Может быть использована прежде всего производственная одежда (спецовка) – куртка и брюки, комбинезоны, халаты с капюшоном, сшитые из брезента, огнезащитной или прорезиненной ткани, грубого сукна. Они способны не только защищать от попадания на кожу людей радиоактивных веществ и биологических средств, но и не пропускать в течение некоторого времени капельножидких отравляющих веществ.

Обычная одежда, обработанная специальной пропиткой, может защищать и от паров отравляющих веществ. В качестве пропитки используют моющие средства или мыльно-масляную эмульсию. Основные представители неионогенных моющих средств – ОП-7 и ОП-10 (ОП-7иОП-10 - вспомогательные вещества, представляющие собой продукты обработки смеси моно- и диалкилфенолов окисью этилена. Вспомогательные вещества ОП-7 и ОП-10 относятся к неионогенным поверхностно-активным веществам. Применяются в качестве смачивающих, эмульгирующих, стабилизирующих поверхностно-активных веществ. Хорошо растворимы в воде). Синтетические моющие средства в чистом виде используются редко и служат исходным материалом для приготовления моющих средств, которые состоят из моющего вещества, активных добавок (соли фосфорной кислоты, сульфат натрия, метасиликат натрия и др.) и веществ, предохраняющих кожу (карбоксиметилцеллюлоза, дермоланы – высокомолекулярные циклические соединения, содержащие группы SO_2, NH_4 , далгоны – конденсированные фосфаты).

Придать повседневной одежде защитные от отравляющих веществ свойства можно, пропитав ее раствором, который может быть приготовлен в домашних условиях. 2,5-3 л раствора, необходимого для пропитки одного комплекта одежды, можно получить если растворить 250-300 г измельченного хозяйственного мыла в 2-3 л горячей воды ($60-70^{\circ}\text{C}$), добавить в раствор 0,5 л минерального (машинного) и другого масла и, подогревая, перемешивать раствор до получения однородной мыльно-масляной эмульсии. Одежду помещают в большую емкость (бак, ведро) и заливают раствором. Пропитанная одежда отжимается и просушивается (утюжке не подлежит).

В летнюю жаркую погоду необходимо соблюдать установленные сроки работы в защитной одежде. Зимой для предупреждения обмороживания следует надевать ее на ватник, использовать подшлемник, теплые портянки, в резиновые сапоги подкладывать теплые стельки, защитные перчатки одевать поверх обычных шерстяных или фланелевых. Обычно длительность пребывания людей в убежищах зависит от степени радиоактивного заражения местности. Если убежище находится в зоне заражения с уровнями радиации от 8 до 80 Р/ч через один час после ядерного взрыва, то время пребывания в нем укрываемых людей составит от нескольких часов до одних суток (рис.8.7).



Рис.8. 7. Ватно-марлевая повязка

В зоне заражения с уровнями радиации от 80 до 240 Р/ч нахождение людей в защитном сооружении увеличивается до 3 сут. В зоне заражения с уровнем радиации 240 Р/ч и выше это время составит 3 сут. и более. По истечении указанных сроков из убежищ (укрытий) можно перейти в жилые помещения. В течение последующих 1-4 сут. (в зависимости от уровней радиации в зонах

заражения) из таких помещений можно периодически выходить наружу, но не более чем на 3-4 ч в сутки.

В условиях сухой и ветреной погоды, когда возможно пылеобразование, при выходе из помещений следует использовать СИЗОД. Чтобы благополучно пережить указанные сроки пребывания в убежищах, необходимо иметь запасы продуктов питания (не менее чем на 4 сут. (крупы, сахар и соль, галеты, сухари, консервы, макаронные изделия, мука, сухофрукты, шоколад, подсолнечное масло, мед, варенье, уксус, вода)), питьевой воды (из расчета 3 л на человека в сутки), а также предметы первой необходимости и медикаменты.

Если в результате ядерного взрыва убежище (укрытие) окажется поврежденным, принимают меры к быстрому выходу из него, надев СИЗОД. Если основным и ли запасным выходом воспользоваться невозможно, приступают к расчистке одного из заваленных выходов или к проделыванию выхода. После выхода из очага ядерного поражения (зоны радиоактивного заражения) необходимо провести частичную дезактивацию и санитарную обработку, т.е. удалить радиоактивную пыль. При частичной дезактивации следует осторожно снять одежду, ни в коем случае не снимая СИЗОД. Встав спиной к ветру, вытряхнуть ее, развесить одежду на перекладине или веревке и обмести с нее пыль сверху вниз с помощью щетки или веника. Одежду можно выколачивать и палкой.

После этого следует продезактивировать обувь: протереть тряпками и ветошью, смоченными водой, очистить веником или щеткой. Резиновую обувь можно мыть. Противогаз дезактивируют в особой последовательности. Фильтрующе-поглощающую коробку вынимают из сумки, сумку тщательно вытряхивают. Затем тампоном, смоченным мыльной воде, моющим раствором или жидкостью из противохимического пакета обрабатывают фильтрующе-поглощающую коробку, соединительную трубку и наружную поверхность шлема-маски (маски). Лишь после этого противогаз снимают.

Противопыльные тканевые маски при дезактивации тщательно вытряхивают, чистят щетками, при возможности полощут или стирают в воде. Зараженные ватно-марлевые повязки сжигают. При частичной санитарной обработке открытые участки тела: руки, лицо, шею, глаза обмывают незараженной водой. Нос, рот и горло полощут. Важно, чтобы при обмывке лица зараженная вода не попала в глаза, рот и нос. При недостатке воды обработку проводят путем многократного протирания участков тела тампонами из марли (ваты, пакли, ветоши), смоченными незараженной водой. Протирание следует проводить сверху вниз. каждый раз переворачивая тампон чистой стороной. Зимой может использоваться незараженный снег.

Летом санитарную обработку можно организовать в реке или другом проточном водоеме. Частичная дезактивация и санитарная обработка, проводимые в одноразовом порядке, не всегда гарантируют полное удаление радиоактивной пыли. Потому после их проведения обязательно проводится дозиметрический контроль. Если заражение одежды и тела окажется выше допустимой нормы, частичные дезактивацию и санитарную обработку повторяют. В необходимых случаях проводится полная санитарная обработка. Своевременно проведенные частичные дезактивация и санитарная обработка могут полностью предотвратить или сильно снизить степень поражения людей радиоактивными веществами.

Если люди во время ядерного взрыва находятся вне убежища укрытия, следует использовать естественные ближайшие укрытия (рис.10). Если таких укрытий нет, надо повернуться к взрыву спиной, лечь на землю лицом вниз, руки спрятать под себя. Через 15-20 с. после взрыва, когда пройдет ударная волна, следует встать и немедленно надеть противогаз, респиратор или какое-либо другое СИЗОД. В случае отсутствия специальных средств следует закрыть рот и нос платком, шарфом или плотным материалом.

Задача состоит в том, чтобы исключить попадание внутрь организма радиоактивных веществ. Их поражающее действие бывает значительным в

течение длительного времени, поскольку выведение их из организма происходит медленно. Далее необходимо стряхнуть осевшую на одежду и обувь пыль, надеть имеющиеся средства защиты кожи.

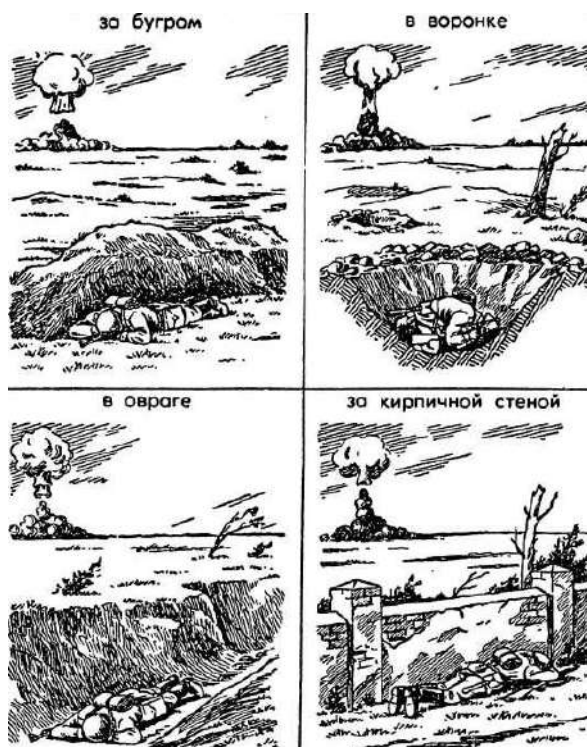


Рис 8.8 Естественные укрытия при внезапном ядерном взрыве

Для этого можно использовать имеющиеся одежду и обувь. Затем следует побыстрее покинуть очаг поражения или укрыться в ближайшем защитном сооружении.

Оставаться на зараженной радиоактивными веществами местности вне убежищ (укрытий), несмотря на использование средств индивидуальной защиты, опасно. Это сопряжено с возможностью облучения и, как следствие, развития лучевой болезни. В целях уменьшения возможности поражения радиоактивными веществами в зонах заражения запрещается принимать пищу, пить и курить. Приготовление пищи должно вестись на незараженной местности или, в крайнем случае, на местности, где уровень радиации не превышает 1 Р/ч. При выходе из очага поражения необходимо учитывать, что в результате ядерных взрывов разрушаются здания, сети коммунального хозяйства. При этом отдельные элементы зданий могут обрушиться через

некоторое время после взрыва. Продвигаться надо посередине улицы, стараясь возможно быстрее попасть в безопасное место. Нельзя трогать электропровода. Направление движения из очага поражения следует выбирать, ориентируясь на знаки ограждения, расставленные разведкой гражданской обороны. Они ведут в сторону снижения уровней радиации. Двигаясь по зараженной территории, надо стараться не поднимать пыли, обходить лужи, не создавать брызг.

В результате применения химического оружия возникают очаги химического поражения-территории, в пределах которой в результате воздействия химического оружия произошли массовые поражения людей и сельскохозяйственных животных. Размеры очага зависят от масштаба и способа применения БТХВ (боевые токсичные химические вещества - это химические соединения, которые способны поражать людей и животных на больших площадях, проникать в различные сооружения, заражать местность и водоемы), его типа метеорологических условий, рельефа местности. Особенно опасны стойкие БТХВ нервнопаралитического действия. Их пары распространяются по ветру на довольно большое расстояние (15-25 км и более). Поэтому люди и животные могут быть поражены ими не только в районе применения химических боеприпасов, но и далеко за его пределами. Длительность поражающего действия БТХВ тем меньше, чем сильнее ветер и восходящие потоки воздуха. В лесах, парках, оврагах, на узких улицах они сохраняются дольше, чем на открытой местности. Современные отравляющие вещества обладают чрезвычайно высокой токсичностью.

При обнаружении признаков применения противником отравляющих веществ, далее ОВ (по сигналу «Химическая тревога») надо срочно надеть противогаз, а в случае необходимости - средства защиты кожи. Если поблизости имеется убежище, нужно укрыться в нем. Перед тем как войти в убежище, следует снять использованные средства защиты кожи и верхнюю одежду и оставить их в тамбуре убежища. Эта мера предосторожности исключает занос ОВ в убежище. Противогаз снимают после входа в убежище.

При пользовании укрытием, например, подвалом, не следует забывать, что оно может служить защитой лишь от попадания на кожные покровы и одежду капельножидких ОВ. Однако оно не защищает от паров или аэрозолей отравляющих веществ, находящихся в воздухе. Находясь в таких укрытиях, при наружном заражении обязательно надо воспользоваться противогазом. Находиться в убежище (укрытии) следует до получения распоряжения на выход из него. Когда такое распоряжение поступит, необходимо надеть требуемые средства индивидуальной защиты - противогазы и средства защиты кожи и выйти за пределы очага поражения по направлениям, обозначенным специальными указателями. Если нет ни указателей, ни постов, то двигаться следует перпендикулярно направлению ветра.

На зараженной ОВ территории надо двигаться быстро, но не пыль (брызги). Нельзя прислоняться к зданиям и прикасаться к окружающим предметам. Не следует наступать на видимые капли и мазки ОВ. На зараженной территории запрещается снимать противогазы и другие средства защиты. Особо осторожно нужно двигаться через парки, сады, огороды и поля. На листьях и ветках растений могут находиться осевшие капли ОВ, при прикосновении к ним можно заразить одежду и обувь, что может привести к поражению.

По возможности следует избегать движения оврагами и лощинами, через луга и болота, в этих местах возможен длительный застой паров ОВ. В городах пары ОВ могут застаиваться в замкнутых кварталах, парках, а также в подъездах и на чердаках домов. Зараженное облако в городе распространяется на наибольшие расстояния по улицам, тоннелям, трубопроводам.

ОВ на кожных покровах, одежде, обуви или средствах индивидуальной защиты необходимо немедленно снять их тампонами из марли или ваты; если таких тампонов нет, капли ОВ можно снять тампонами из бумаги или ветоши. Пораженные места следует обработать раствором из противохимического пакета или тщательно промыть теплой водой с мылом. После выхода из очага

химического поражения немедленно проводится полная санитарная обработка. Если это невозможно, проводятся частичные дегазация и санитарная обработка.

Очагом биологического поражения считаются территории, подвергшиеся непосредственному воздействию бактериальных (биологических) средств, создающих источник распространения инфекционных заболеваний. Заражение людей и животных происходит в результате вдыхания зараженного воздуха, попадания микробов или токсинов на слизистую оболочку и поврежденную кожу, употребления в пищу зараженных продуктов питания и воды.

Причиной заражения могут быть укусы зараженных насекомых и клещей, соприкосновения с зараженными предметами, ранения осколками боеприпасов, снаряженных БС (биологические средства поражения - общее название болезнетворных микроорганизмов и продуктов их жизнедеятельности, предназначенных для использования в системах биологического оружия с целью поражения людей, животных и растений). Заражение возможно также в результате непосредственного общения с больными людьми (животными). Ряд заболеваний быстро передается от больных людей к здоровым и вызывает эпидемии (чума, холера, тиф, грипп и др.). К основным средствам защиты населения от биологического оружия относятся вакциносыывороточные препараты, антибиотики, сульфамидные и другие лекарственные вещества, используемые для специальной и экстренной профилактики инфекционных болезней.

Употребимы такие средства индивидуальной и коллективной защиты. Своевременное и правильное применение средств индивидуальной защиты и защитных сооружений предохранит от попадания БС в органы дыхания, на кожные покровы и одежду. Необходимо строгое соблюдение правил личной гигиены и санитарно-гигиенических требований к питанию и водоснабжению населения. Приготовление и прием пищи должны исключать возможность ее заражения бактериальными средствами. Посуду необходимо мыть дезинфицирующими растворами или обрабатывать кипячением. В случае

применения противником биологического оружия возможно возникновение значительного количества инфекционных заболеваний.

Основными формами борьбы с эпидемиями являются обсервация и карантин. Делается это в тех случаях, когда примененные возбудители болезней относятся к особо опасным (чума, холера и др.). Карантинный режим предусматривает полную изоляцию очага поражения от окружающего населения. Это наиболее эффективный способ противодействия распространению инфекционных заболеваний. На внешних границах зоны карантина устанавливается вооруженная охрана, выход людей, вывод животных и вывоз имущества запрещаются. Транзитный проезд транспорта через очаги поражения запрещается. Объекты экономики переходят на особый режим работы со строгим выполнением противоэпидемических требований. Рабочие смены разбиваются на отдельные группы как можно более малочисленные по составу. Контакт между ними сокращается до минимума. Питание и отдых рабочих и служащих организуются по группам в специально отведенных для этого помещениях. Работа учебных заведений, зрелищных учреждений, рынков и т.д. прекращается. Людям не разрешается без крайней необходимости выходить из своих квартир. Продукты питания, вода и предметы первой необходимости доставляются им специальными командами.

При выполнении срочных работ вне зданий люди должны быть обязательно в средствах индивидуальной защиты. Если установленный вид возбудителя не относится к группе особо опасных, вместо карантина применяется обсервация. Она предусматривает медицинское наблюдение за очагом поражения и проведение необходимых лечебно-профилактических мероприятий. Изоляционно-ограничительные меры при обсервации менее строгие: организуются дезинфекция, дезинсекция и дератизация.

Дезинфекция имеет целью обеззараживание объектов внешней среды, которые необходимы для нормальной деятельности и безопасного нахождения людей. Для дезинфекции применяются растворы хлорной извести и хлорамина,

лизол, формалин, могут использоваться горячая вода (с мылом или содой) и пар.

Дезинсекция и дератизация-это мероприятия, связанные соответственно с уничтожением насекомых и истреблением грызунов, которые являются переносчиками инфекционных заболеваний. Для уничтожения насекомых применяют физические (кипячение, проглаживание накалившим утюгом и др.), химические (применение дезинсектирующих средств) и комбинированные способы.

Истребление грызунов в большинстве случаев проводят с помощью механических приспособлений (ловушек различных типов) и химических препаратов. После проведения дезинфекции, дезинсекции и дератизации проводится полная санитарная обработка лиц, принимавших участие в осуществлении названных мероприятий. При необходимости организуется санитарная обработка и остального населения.

Контрольные вопросы

1. Перечислите СИЗОД.
2. Перечислите СИЗ кожи.
3. Назовите порядок изготовления ВМП.
4. При каких опасностях используются индивидуальные средства защиты?
5. Что является основным средством защиты при угрозе применения ядерного оружия?
6. Что относится к основным средствам защиты населения от биологического оружия?
7. Какие индивидуальные средства защиты применяются при химической угрозе?
8. Какие действия предполагает санитарная обработка?
9. В чем отличие дезинфекции от дезинсекции?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косолапова Н.В. Основы безопасности жизнедеятельности: учебник / Н.В. Косолапова, Н.А. Прокопенко. – 3-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013. – 320 с.: ил.
2. Безопасности жизнедеятельности: учебник / Е.А. Арустамов. – 9-е изд., стереот., - М.: Академия, 2013 с.: ис.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы	3
Требования к оформлению контрольной работы	3
Содержание контрольной работы.....	3
Выполнение работы над ошибками.....	9
Критерии оценивания контрольной работы	9
Образец титульного листа	10

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Физическая культура и спорт» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «физическая культура и спорт» представлен 1 вариант контрольной работы.

Содержание контрольной работы

№ п/п	Вопросы	Варианты ответов
1	Физическая культура представляет собой:	А) учебный предмет в школе Б) выполнение физических упражнений В) процесс совершенствования возможностей человека Г) часть общей культуры общества
2	Физическая подготовленность, приобретаемая в процессе физической подготовки к трудовой или иной деятельности, характеризуется:	А) высокой устойчивостью к стрессовым ситуациям, воздействию неблагоприятных условий внешней среды и различным заболеваниям Б) уровнем работоспособности и запасом двигательных умений и навыков В) хорошим развитием систем дыхания, кровообращения, достаточным запасом надежности, эффективности и экономичности Г) высокими результатами в учебной, трудовой и спортивной деятельности
3	Под физическим развитием понимается:	А) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни Б) размеры мускулатуры, формы тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность

		В) процесс совершенствования физических качеств при выполнении физических упражнений Г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом
4	Физическая культура ориентирована на совершенствование	А) физических и психических качеств людей Б) техники двигательных действий В) работоспособности человека Г) природных физических свойств человека
5	Отличительным признаком физической культуры является:	А) развитие физических качеств и обучение двигательным действиям Б) физическое совершенство В) выполнение физических упражнений Г) занятия в форме уроков
6	В иерархии принципов в системе физического воспитания принцип всестороннего развития личности следует отнести к:	А) общим социальным принципам воспитательной стратегии общества Б) общим принципам образования и воспитания В) принципам, регламентирующим процесс физического воспитания Г) принципам обучения
7	Физическими упражнениями называются:	А) двигательные действия, с помощью которых развивают физические качества и укрепляют здоровье Б) двигательные действия, дозируемые по величине нагрузки и продолжительности выполнения В) движения, выполняемые на уроках физической культуры и во время утренней гимнастики Г) формы двигательных действий, способствующие решению задач физического воспитания
8	Нагрузка физических упражнений характеризуется:	А) подготовленностью занимающихся в соответствии с их возрастом, состоянием здоровья, самочувствием во время занятия Б) величиной их воздействия на организм В) временем и количеством повторений двигательных действий Г) напряжением отдельных мышечных групп
9	Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:	А) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий Б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей В) утомлением, возникающим при их выполнении Г) частотой сердечных сокращений
10	Если ЧСС после выполнения упражнения восстанавливается за 60 сек до уровня, который был в начале урока, то это свидетельствует о том, что нагрузка	А) мала и ее следует увеличить Б) переносится организмом относительно легко В) достаточно большая и ее можно повторить Г) чрезмерная и ее нужно уменьшить
11	Интенсивность выполнения упражнений можно определить по ЧСС. Укажите, какую частоту пульса вызывает большая интенсивность упражнений	А) 120-130 уд/мин Б) 130-140 уд/мин В) 140-150 уд/мин Г) свыше 150 уд/мин
12	Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:	А) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости Б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации В) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения.

		Г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнить большой объем физической работы за отведенный отрезок времени.
13	Что понимают под закаливанием:	А) купание в холодной воде и хождение босиком Б) приспособление организма к воздействию внешней среды В) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми Г) укрепление здоровья
14	Во время индивидуальных занятий закаливающими процедурами следует соблюдать ряд правил. Укажите, какой из перечисленных ниже рекомендаций придерживаться не стоит:	А) чем ниже температура воздуха, тем интенсивней надо выполнять упражнение, т.к. нельзя допускать переохлаждения Б) чем выше температура воздуха, тем короче должны быть занятия, т.к. нельзя допускать перегревания организма В) не рекомендуется тренироваться при активном солнечном излучении Г) после занятия надо принять холодный душ
15	Правильное дыхание характеризуется:	А) более продолжительным выдохом Б) более продолжительным вдохом В) вдохом через нос и выдохом через рот Г) равной продолжительностью вдоха и выдоха
16	При выполнении упражнений вдох не следует делать во время:	А) вращений и поворотов тела Б) наклонах туловища назад В) возвращение в исходное положение после наклона Г) дыхание во время упражнений должно быть свободным, рекомендации относительно времени вдоха и выдоха не нужны
17	Что называется осанкой?	А) качество позвоночника, обеспечивающее хорошее самочувствие и настроение Б) пружинные характеристики позвоночника и стоп В) привычная поза человека в вертикальном положении Г) силуэт человека
18	Правильной осанкой можно считать, если вы, стоя у стены, касаетесь ее:	А) затылком, ягодицами, пятками Б) лопатками, ягодицами, пятками В) затылком, спиной, пятками Г) затылком, лопатками, ягодицами, пятками
19	Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому, что:	А) он обеспечивает ритмичность работы организма Б) он позволяет правильно планировать дела в течение дня В) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня Г) он позволяет избегать неоправданных физических напряжений
20	Замена одних видов деятельности другими, регулируема режимом дня, позволяет поддерживать работоспособность в течение дня, потому что:	А) это положительно сказывается на физическом и психическом состоянии человека Б) снимает утомление нервных клеток организма В) ритмическое чередование работы с отдыхом предупреждает возникновение перенапряжения Г) притупляется чувство общей усталости и повышает тонус организма
21	Систематические и грамотно	А) хорошая циркуляция крови во время упражнений

	организованные занятия физическими упражнениями укрепляют здоровье, так как	обеспечивает поступление питательных веществ к органам и системам организма Б) повышается возможность дыхательной системы, благодаря чему в организм поступает большее количество кислорода, необходимого для образования энергии В) занятия способствуют повышению резервных возможностей организма Г) при достаточном энергообеспечении организм легче противостоит простудным и инфекционным заболеваниям
22	Почему на уроках физической культуры выделяют подготовительную, основную и заключительную части?	А) так учителю удобнее распределять различные по характеру упражнения Б) это обусловлено необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся. В) выделение частей в уроке требует Министерство образования России Г) потому, что перед уроком, как правило, ставятся задачи, и каждая часть урока предназначена для решения одной из них
23	Укажите, в какой последовательности должны выполняться в комплексе утренней гимнастикой перечисленные упражнения: 1. Дыхательные. 2. На укрепление мышц и повышение гибкости. 3. Потягивания. 4 бег с переходом на ходьбу. 5. Ходьба с постепенным повышением частоты шагов. 6. Прыжки. 7. Поочередное напряжение и расслабление мышц. 8. Бег в спокойном темпе.	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Б) 7, 5, 8, 6, 2, 3, 2, 1, 4 В) 3, 7, 5, 8, 1, 2, 6, 4 Г) 3, 1, 2, 4, 7, 6, 8, 4
24	Под силой как физическим качеством понимается:	А) способность поднимать тяжелые предметы Б) свойство человека противодействовать внешним силам за счет мышечных напряжений В) свойство человека воздействовать на внешние силы за счет внешних сопротивлений Г) комплекс свойств организма, позволяющих преодолевать внешнее сопротивление либо противодействовать ему.
25	Выберите правильное распределение перечисленных ниже упражнений в занятии по общей физической подготовке. 1. Ходьба или спокойный бег в чередовании с дыхательными упражнениями. 2. Упражнения, постепенно включающие в работу все большее количество мышечных групп. 3. Упражнения на развитие выносливости. 4. Упражнения на развитие быстроты и гибкости. 5. упражнения на развитие силы. 6. Дыхательные упражнения.	А) 1, 2, 5, 4, 3, 6 Б) 6, 2, 3, 1, 4, 5 В) 2, 6, 4, 5, 3, 1 Г) 2, 1, 3, 4, 5, 6
26	Основная часть урока по общей физической подготовке отводится развитию физических качеств. Укажите, какая последовательность воздействий на физические качества наиболее эффективна. 1. Выносливость. 2. Гибкость. 3. быстрота. 4. Сила.	А) 1, 2, 3, 4 Б) 2, 3, 1, 4 В) 3, 2, 4, 1 Г) 4, 2, 3, 1

27	Какие упражнения неэффективны при формировании телосложения	А) упражнения, способствующие увеличению мышечной массы Б) упражнения, способствующие снижению массы тела В) упражнения, объединенные в форме круговой тренировки Г) упражнения, способствующие повышению быстроты движений
28	И для увеличения мышечной массы, и для снижения веса тела можно применять упражнения с отягощением. Но при составлении комплексов упражнений для увеличения мышечной массы рекомендуется:	А) полностью проработать одну группу мышц и только затем переходить к упражнениям, нагружающим другую группу мышц Б) чередовать серии упражнений, включающие в работу разные мышечные группы В) использовать упражнения с относительно небольшим отягощением и большим количеством повторений Г) планировать большое количество подходов и ограничивать количество повторений в одном подходе
29	Под быстротой как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, позволяющих передвигаться с большой скоростью Б) комплекс свойств, позволяющий выполнять работу в минимальный отрезок времени В) способность быстро набирать скорость Г) комплекс свойств, позволяющий быстро реагировать на сигналы и выполнять движения с большой частотой
30	Для развития быстроты используют:	А) подвижные и спортивные игры Б) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции В) упражнения на быстроту реакции и частоту движений Г) двигательные действия, выполняемые с максимальной скоростью
31	Лучшие условия для развития быстроты реакции создаются во время:	А) подвижных и спортивных игр Б) челночного бега В) прыжков в высоту Г) метаний
32	Под гибкостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс морфофункциональных свойств опорно-двигательного аппарата, определяющий глубину наклона Б) способность выполнять упражнения с большой амплитудой за счет мышечных сокращений. В) комплекс свойств двигательного аппарата, определяющих подвижность его звеньев Г) эластичность мышц и связок
33	Как дозируются упражнения на развитие гибкости, т.е. сколько движений следует делать в одной серии:	А) Упражнение выполняется до тех пор, пока не начнет уменьшаться амплитуда движений Б) выполняются 12-16 циклов движения В) упражнения выполняются до появления пота Г) упражнения выполняются до появления болевых ощущений
34	Для повышения скорости бега в самостоятельном занятии после разминки рекомендуется выполнять перечисленные ниже упражнения. Укажите их целесообразную	А) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Б) 7, 5, 4, 3, 2, 6, 1 В) 2, 1, 3, 7, 4, 5, 6 Г) 3, 6, 2, 7, 5, 4, 1

	последовательность: 1. Дыхательные упражнения. 2. Легкий продолжительный бег. 3. Прыжковые упражнения с отягощением и без них. 4. дыхательные упражнения в интервалах отдыха. 5. Повторный бег на короткие дистанции. 6. Ходьба. 7. Упражнения на частоту движений.	
35	При развитии гибкости следует стремиться	А) гармоничному увеличению подвижности в основных суставах Б) достижению максимальной амплитуды движений в основных суставах В) оптимальной амплитуде движений в плечевом, тазобедренном, коленном суставах Г) восстановлению нормальной амплитуды движений суставов
36	Под выносливостью как физическим качеством понимается:	А) комплекс свойств, обуславливающий возможность выполнять разнообразные физические нагрузки Б) комплекс свойств, определяющих способность противостоять утомлению В) способность длительно совершать физическую работу, практически не утомляясь Г) способность сохранять заданные параметры работы
37	Выносливость человека не зависит от:	А) функциональных возможностей систем энергообеспечения Б) быстроты двигательной реакции В) настойчивости, выдержки, мужественности, умения терпеть Г) силы мышц
38	При развитии выносливости не применяются упражнения, характерными признаками которых являются:	А) максимальная активность систем энергообеспечения Б) умеренная интенсивность В) максимальная интенсивность Г) активная работа большинства звеньев опорно-двигательного аппарата
39	Техникой физических упражнений принято называть	А) способ целесообразного решения двигательной задачи Б) способ организации движений при выполнении упражнений В) состав и последовательность движений при выполнении упражнений Г) рациональную организацию двигательных действий
40	При анализе техники принято выделять основу, ведущее звено и детали техники. Что понимают под основой (ведущим звеном и деталями техники).	А) набор элементов, характеризующий индивидуальные особенности выполнения целостного двигательного действия Б) состав и последовательность элементов, входящих в двигательное действие В) совокупность элементов, необходимых для решения двигательной задачи Г) наиболее важная часть определенного способа решения двигательной задачи
41	В процессе обучения двигательным действиям используют методы целостного или расчлененного упражнения. Выбор метода зависит от	А) возможности расчленения двигательного действия на относительно самостоятельные элементы Б) сложности основы техники В) количества элементов, составляющих двигательное

		действие Г) предпочтения учителя
42	Процесс обучения двигательному действию рекомендуется начинать с освоения	А) основы техники Б) ведущего звена техники В) подводящих упражнений Г) исходного положения
43	Физкультминутку, как одну из форм занятий физическими упражнениями следует отнести к:	А) урочным формам занятий физическими упражнениями Б) «малым» неурочным формам В) «крупным» неурочным формам Г) соревновательным формам
44	Какой раздел комплексной программы по физическому воспитанию для общеобразовательных школ не является типовым?	А) уроки физической культуры Б) внеклассная работа В) физкультурно-массовые и спортивные мероприятия Г) содержание и организация педагогической практики
45	Измерение ЧСС сразу после пробегания отрезка дистанции следует отнести к одному из видов контроля:	А) оперативному Б) текущему В) предварительному Г) итоговому

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 90 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

46-90 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-44 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа



**Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

**по дисциплине
ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА И СПОРТ**

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа _____

Преподаватель: Петров Петр Петрович

**Екатеринбург
2018**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине

**ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И
СПОРТУ**

Автор: Шулиманов Д.Ф.

Екатеринбург
2020

Содержание

Цели и задачи дисциплины	3
Место дисциплины в структуре основной образовательной программы	3
Требования к оформлению контрольной работы	3
Содержание контрольной работы.....	3
Выполнение работы над ошибками.....	10
Критерии оценивания контрольной работы	10
Образец титульного листа	11

1. Цели и задачи дисциплины

Цель: формирование физической культуры личности и способности направленного использования разнообразных средств физической культуры, спорта и туризма для сохранения и укрепления здоровья, психофизической подготовки и самоподготовки к будущей жизни и профессиональной деятельности.

Задачи:

- формирование осознания социальной значимости физической культуры и её роли в развитии личности и подготовке к профессиональной деятельности;
- изучение научно-биологических, педагогических и практических основ физической культуры и здорового образа жизни;
- формирование мотивационно-ценностного отношения к физической культуре, установки на здоровый стиль жизни, физическое совершенствование и самовоспитание привычки к регулярным занятиям физическими упражнениями и спортом;

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Элективные курсы по физической культуре и спорту» относится к разделу «Блок 1. Базовая часть».

3. Требования к оформлению контрольной работы

Контрольные задания выполняются на листах формата А4 в рукописном виде, кроме титульного листа. На титульном листе (см. образец оформления титульного листа в печатном виде) указывается фамилия студента, номер группы, номер контрольной работы и фамилия преподавателя, у которого занимается обучающийся.

В конце работы должна быть поставлена подпись студента и дата выполнения заданий.

Контрольные задания должны быть выполнены в той последовательности, в которой они даны в контрольной работе.

Выполненную контрольную работу необходимо сдать преподавателю для проверки в установленные сроки.

Если контрольная работа выполнена без соблюдения изложенных выше требований, она возвращается студенту для повторного выполнения.

По дисциплине «элективные курсы по физической культуре и спорту» представлено 2 варианта контрольной работы.

Содержание контрольной работы

Вопросы для групповой дискуссии

1. Что можно отнести к средствам физического воспитания?
2. Влияние климатогеографического фактора на здоровье и работоспособность человека
3. Чем отличается спорт от физической культуры?
4. Что мы относим к материальным ценностям физической культуры, а что – к духовным?
5. В чем состоит взаимосвязь физической и умственной деятельности человека?
6. Причины возникновения таких явлений как гипокинезия и гиподинамия
7. Для чего нужна адаптивная физическая культура?
8. При выборе вида спорта на какие аспекты и характеристики необходимо обратить основное внимание.

Контрольная работа №1

Вариант 1

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. Часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности – это:
а) физическая культура; б) спорт; в) туризм; г) физическое развитие.
2. Физическое воспитание – это:
а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;

г) процесс формирования определенных физических и психических качеств.

3. Чем спорт отличается от физической культуры:

а) наличием специального оборудования; б) присутствием зрителей; в) наличием соревновательного момента; г) большой физической нагрузкой.

4. Какой из ниже перечисленных принципов не относится к основным принципам физического воспитания:

а) сознательности и активности; б) наглядности; в) последовательности; г) систематичности;

5. Под физическим развитием понимается:

а) процесс изменения морфофункциональных свойств организма на протяжении жизни;
б) размеры мускулатуры, форма тела, функциональные возможности дыхания и кровообращения, физическая работоспособность;
в) процесс совершенствования физических качеств, при выполнении физических упражнений;
г) уровень, обусловленный наследственностью и регулярностью занятий физической культурой и спортом.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

а) естественное состояние организма без болезней и недугов;
б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
г) все перечисленное.

2. Состояние здоровья обусловлено:

а) резервными возможностями организма; б) образом жизни;
в) уровнем здравоохранения; г) отсутствием болезней.

3. Что не относится к внешним факторам, влияющим на человека:

а) природные факторы; б) факторы социальной среды; в) генетические факторы;
г) биологические факторы.

4. Сколько времени необходимо нормальному человеку для ночного сна:

а) 5 – 6 часов; б) 6 – 7 часов; в) 7 – 8 часов; г) 8 – 9 часов.

5. К активному отдыху относится:

а) сон; б) отдых сидя; в) занятия двигательной деятельностью; г) умственная деятельность.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическими упражнениями называются:

а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Занятия физическими упражнениями отличаются от трудовых действий:

а) интенсивностью; б) задачами; в) местом проведения; г) все ответы верны.

3. Физические упражнения являются:

а) принципом физического воспитания; б) методом физического воспитания;
в) средством физического воспитания; г) функцией физического воспитания.

4. Что не относится к методам физического воспитания:

а) игровой; б) регламентированного упражнения; в) словесный и сенсорный;
г) самостоятельный.

5. Метод в физической культуре – это

а) основное положение, определяющее содержание учебного процесса по физической культуре;
б) руководящее положение, раскрывающее принципы физической культуры;
в) конкретная причина, заставляющая человека выполнять физические упражнения;
г) способ применения физических упражнений.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Физическая подготовка – это:

а) педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
б) приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
в) биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
г) процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

2. К основным физическим качествам относятся:

- а) рост, вес, объем бицепсов, становая сила; б) бег, прыжки, метания, лазания;
- в) сила, выносливость, быстрота, ловкость, гибкость; г) взрывная сила, прыгучесть, меткость.

3. Различают гибкость:

- а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
- г) простую и сложную.

4. Какие виды спорта развивают преимущественно выносливость:

- а) спортивные единоборства; б) циклические; в) спортивные игры; г) ациклические.

5. Скоростно-силовые качества преимущественно развиваются:

- а) в тяжелой атлетике; б) в акробатике; в) в конькобежном спорте; г) в лыжном спорте.

Вариант 2

ДЕ-1: Физическая культура в общекультурной и профессиональной подготовке обучающихся.

1. На что преимущественно влияют занятия по физической культуре:

- а) на интеллектуальные способности;
- б) на удовлетворение социальных потребностей;
- в) на воспитание лидерских качеств;
- г) на полноценное физическое развитие.

2. Физическая культура – это:

- а) часть общечеловеческой культуры, специфический процесс и результат человеческой деятельности, средство и способ физического совершенствования личности;
- б) часть науки о природе двигательной деятельности человека
- в) вид воспитательного процесса, специфика которого заключена в обучении двигательным актам и управлением развитием и совершенствованием физических качеств человека;
- г) процесс физического образования и воспитания, выражающий высокую степень развития индивидуальных физических способностей.

3. Что не относится к компонентам физической культуры:

- а) физическое развитие; б) спорт высших достижений; в) оздоровительно-реабилитационная физическая культура;
- г) гигиеническая физическая культура.

4. Выбрать правильное определение термина «Физическое развитие»:

- а) физическое развитие – это педагогический процесс, направленный на формирование физической культуры личности в результате педагогического воздействия и самовоспитания;
- б) физическое развитие – это приобщение человека к физической культуре, в процессе которой он овладевает системой знаний, ценностей, позволяющих ему осознанно и творчески развивать физические способности;
- в) физическое развитие – это биологический процесс становления, изменения естественных морфологических и функциональных свойств организма в течение жизни человека;
- г) физическое развитие – это процесс формирования определенных физических и психических качеств, умений и навыков человека посредством направленных занятий с применением средств физической культуры.

5. Теоретический материал учебного предмета «Физическая культура и спорт» в высших учебных заведениях включает в себя:

- а) фундаментальные знания общетеоретического характера;
- б) инструктивно-методические знания;
- в) знания о правилах выполнения двигательных действий;
- г) все вышеперечисленное.

ДЕ-2: Основы здорового образа жизни обучающегося.

1. Что понимается под закаливанием:

- а) купание в холодной воде и хождение босиком;
- б) приспособление организма к воздействиям внешней среды;
- в) сочетание воздушных и солнечных ванн с гимнастикой и подвижными играми;
- г) укрепление здоровья.

2. Определение понятия «Здоровье» Всемирной организации здравоохранения. Здоровье это:

- а) естественное состояние организма без болезней и недугов;
- б) состояние полного физического, умственного и социального благополучия;
- в) состояние отсутствия каких-либо заболеваний;
- г) все перечисленное.

3. Какое понятие не относится к двигательной активности человека:

- а) гипоксия; б) гиподинамия; в) гипокинезия; г) гипердинамия.

4. Какая из перечисленных функций не относится к функции кожи:

- а) защита внутренней среды организма; б) терморегуляция; в) выделение из организма продуктов обмена веществ;
- г) звукоизоляция.

5. Соблюдение режима дня способствует укреплению здоровья, потому что:

- а) обеспечивает ритмичность работы организма;

- б) позволяет правильно планировать дела в течение дня;
- в) распределение основных дел осуществляется более или менее стандартно в течение каждого дня;
- г) позволяет избегать неоправданных физических напряжений.

ДЕ-3: Средства и методы физической культуры.

1. Физическое упражнение - это:

- а) двигательные действия, используемые для формирования техники движений;
- б) двигательные действия, используемые для развития физических качеств и укрепления здоровья;
- в) двигательные действия, выполняемые на занятиях по физической культуре и самостоятельно;
- г) двигательные действия, направленные на реализацию задач физического воспитания.

2. Положительное влияние физических упражнений на развитие функциональных возможностей организма будет зависеть:

- а) от технической и физической подготовленности занимающихся;
- б) от особенностей реакций систем организма в ответ на выполняемые упражнения;
- г) от состояния здоровья и самочувствия занимающихся во время выполнения упражнений;
- г) от величины физической нагрузки и степени напряжения в работе определенных мышечных групп.

3. Что не относится к средствам физического воспитания:

- а) физические упражнения;
- б) подвижные игры;
- в) соревнования;
- в) спортивные игры.

4. Что относится к методическим принципам физического воспитания:

- а) сознательность и активность;
- б) наглядность и доступность;
- в) систематичность и динамичность;
- г) все вышеперечисленное.

5. Регулярные занятия физическими упражнениями способствует повышению работоспособности, потому что:

- а) во время занятий выполняются двигательные действия, содействующие развитию силы и выносливости;
- б) достигаемое при этом утомление активизирует процессы восстановления и адаптации;
- в) в результате повышается эффективность и экономичность дыхания и кровообращения;
- г) человек, занимающийся физическими упражнениями, способен выполнять больший объем физической работы за отведенный отрезок времени.

ДЕ-4: Общая физическая и специальная подготовка в системе физического воспитания.

1. Степень владения техникой действий, при которой повышена концентрация внимания на составные операции (части), наблюдается нестабильное решение двигательной задачи – это

- а) двигательное умение; в) массовый спорт; в) двигательный навык;
- г) спорт высших достижений.

2. Для воспитания быстроты используются:

- а) упражнения в беге с максимальной скоростью на короткие дистанции;
- б) подвижные и спортивные игры;
- в) упражнения на быстроту реакции и частоту движений;
- г) двигательные упражнения, выполняемые с максимальной скоростью.

3. Различают два вида выносливости:

- а) абсолютная и относительная; б) общая и специальная; в) активная и пассивная;
- г) динамическую и статическую.

4. Процесс воспитания физических качеств, обеспечивающих преимущественное развитие тех двигательных способностей, которые необходимы для конкретной спортивной дисциплины - это

- а) общая физическая подготовка; б) двигательное умение; в) специальная физическая подготовка; г) двигательный навык.

5. Различают силу:

- а) абсолютную и относительную; б) общую и специальную; в) активную и пассивную;
- г) статическую и динамическую.

Контрольная работа №2

Вариант 1

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. В комплекс утренней гимнастики следует включать:

- а) упражнения с отягощением; б) упражнения статического характера;
- в) упражнения на гибкость и дыхательные упражнения; г) упражнения на выносливость.
- 2. К объективным показателям самоконтроля относится:
 - а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.
- 3. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:
 - а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.
- 4. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:
 - а) после приема пищи; б) после сна натошак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. Регулярные занятия доступным видом спорта, участия в соревнованиях с целью укрепления здоровья, коррекции физического развития и телосложения, активного отдыха, достижение физического совершенствования – это:
 - а) спорт высших достижений;
 - б) лечебная физическая культура;
 - в) профессионально-прикладная физическая культура;
 - г) массовый спорт.
2. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает гибкость и ловкость:
 - а) фехтование;
 - б) баскетбол;
 - в) фигурное катание;
 - г) художественная гимнастика.
3. Количество игровых одной команды в волейболе на площадке:
 - а) 7; б) 6; в) 5; г) 8.
4. Как осуществляется контроль за влиянием физических нагрузок на организм во время занятий физическими упражнениями:
 - а) по частоте дыхания;
 - б) по частоте сердечно-сосудистых сокращений;
 - в) по объему выполненной работы.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Степень владения техникой действия, при которой управление движением происходит автоматически, и действия отличаются надежностью – это:
 - а) двигательное умение;
 - б) массовый спорт;
 - в) двигательный навык;
 - г) спорт высших достижений.
2. Как дозируются упражнения на гибкость:
 - а) до появления пота;
 - б) до снижения амплитуды движений;
 - в) по 12-16 циклов движений;
 - г) до появления болевых ощущений.
3. При воспитании силы применяются специальные упражнения с отягощениями. Их отличительная особенность заключается в том, что:
 - а) в качестве отягощения используется собственный вес человека;
 - б) они выполняются до утомления;
 - в) они вызывают значительное напряжение мышц;
 - г) они выполняются медленно.
4. В каком из перечисленных видов спорта преимущественно развивается выносливость:
 - а) в фигурном катании;
 - б) в пауэрлифтинге;
 - в) в художественной гимнастике;
 - г) в лыжном спорте.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. Регулярные занятия физическими упражнениями способствуют повышению работоспособности, потому что:
 - а) обеспечивают усиленную работу мышц;
 - б) обеспечивают выполнение большого объема мышечной работы с разной интенсивностью;
 - в) обеспечивают усиленную работу систем дыхания и кровообращения;
 - г) обеспечивают усиленную работу системы энергообеспечения.
2. Меры профилактики переутомления:

- а) посидеть 3-4 минуты;
- б) сменить вид деятельности;
- в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;
- г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

3. При нагрузке средней интенсивности частота пульса достигает:

- а) 100 – 130 уд/мин;
- б) 130 – 150 уд/мин;
- в) 150 – 170 уд/мин;
- г) более 170 уд/мин

4. Что называется «разминкой», проводимой в подготовительной части занятия:

- а) чередование легких и трудных общеразвивающих упражнений;
- б) чередование беговых и общеразвивающих упражнений;
- в) подготовка организма к предстоящей работе;
- г) чередование беговых упражнений и ходьбы.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

Специально направленное и избирательное использование средств физической культуры и спорта для подготовки человека к определенной профессиональной деятельности – это:

- а) спорт высших достижений;
- б) лечебная физическая культура;
- в) производственная физическая культура;
- г) массовый спорт.

1. ППФП строится на основе и в единстве с:

- а) физической подготовкой; б) технической подготовкой; в) тактической подготовкой;
- г) психологической подготовкой.

3. Какая из нижеперечисленных задач не является задачей ППФП:

- а) развитие физических способностей, специфических для данной профессии;
- б) формирование профессионально-прикладных сенсорных умений и навыков;
- в) сообщение специальных знаний для успешного освоения практических навыков трудовой деятельности;
- г) повышение функциональной устойчивости организма к неблагоприятному воздействию факторов окружающей среды.

4. Что не является формой занятий по ППФП:

- а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Вариант 2

ДЕ-1: Основы методики самостоятельных занятий физическими упражнениями.

1. Определение повседневных изменений в подготовке занимающихся – это:

- а) педагогический поэтапный контроль;
- б) педагогический текущий контроль;
- в) педагогический оперативный контроль;
- г) педагогический двигательный контроль.

1. В комплекс утренней гимнастики не рекомендуется включать:

- а) упражнения на гибкость;
- б) дыхательные упражнения;
- в) упражнения с отягощением;
- г) упражнения для всех групп мышц.

2. Самостоятельные тренировочные занятия не рекомендуется выполнять:

- а) за час до приема пищи;
- б) после сна натошак;
- в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда;
- г) за 3 часа до отхода ко сну.

4. Дневник самоконтроля нужен для:

- а) коррекции содержания и методики занятий физическими упражнениями;
- б) контроля родителей;
- в) лично спортсмену;
- г) лично тренеру.

ДЕ-2: Спорт. Индивидуальный выбор видов спорта или систем физических упражнений.

1. К циклическим видам спорта не относится:

- а) волейбол;
- б) стайерский бег;
- в) плавание;

г) спортивная ходьба.

2. Какой из перечисленных видов спорта преимущественно развивает координацию движений:

а) спортивная гимнастика;

б) лыжный спорт;

в) триатлон;

г) атлетическая гимнастика.

3. Систематическая плановая многолетняя подготовка и участие в соревнованиях в избранном виде спорта с целью достижения максимальных спортивных результатов – это:

а) спорт высших достижений;

б) лечебная физическая культура;

в) профессионально-прикладная физическая культура;

г) массовый спорт.

4. Какие упражнения включаются в разминку почти во всех видах спорта:

а) упражнения на развитие выносливости;

б) упражнения на развитие гибкости и координации движений;

в) бег и общеразвивающие упражнения.

ДЕ-3: Особенности занятий избранным видом спорта или системой физических упражнений.

1. Какая из представленных способностей не относится к группе координационных:

а) способность сохранять равновесие;

б) способность точно дозировать величину мышечных усилий;

в) способность быстро реагировать на стартовый сигнал;

г) способность точно воспроизводить движения в пространстве.

2. Почему на занятиях по «физической культуре» выделяют подготовительную, основную и заключительную части:

а) так удобнее распределять различные по характеру упражнения;

б) выделение частей занятий связано с необходимостью управлять динамикой работоспособности занимающихся;

в) выделение частей в занятии требует Министерства науки и образования;

г) перед занятием, как правило, ставятся 3 задачи, и каждая часть предназначена для них.

3. Величина нагрузки физических упражнений обусловлена:

а) сочетанием объема и интенсивности двигательных действий;

б) степенью преодолеваемых при их выполнении трудностей;

в) утомлением, возникающим в результате их выполнения;

г) частотой сердечных сокращений.

4. Назовите количество игроков на волейбольной площадке:

а) 4; б) 5; в) 6; г) 7.

ДЕ-4: Самоконтроль занимающихся физическими упражнениями и спортом.

1. К объективным показателям самоконтроля относится:

а) частота сердечных сокращений; б) самочувствие; в) аппетит; г) сон.

2. При нагрузке интенсивности выше средней частота пульса достигает:

а) 100 – 130 уд/мин; б) 130 – 150 уд/мин; в) 150 – 170 уд/мин; г) более 170 уд/мин.

3. Самостоятельные тренировочные занятия рекомендуется выполнять:

а) после приема пищи; б) после сна натошак; в) во второй половине дня, через 2-3 часа после обеда; г) перед сном.

4. Меры профилактики переутомления:

а) посидеть 3-4 минуты;

б) сменить вид деятельности;

в) прекратить выполнение действий, пройти обследование у врачей, выполнить их рекомендации;

г) достаточно 2 дней полноценного отдыха для восстановления.

ДЕ-5: Профессионально-прикладная физическая подготовка (ППФП) обучающихся.

1. Система методически обоснованных физических упражнений, физкультурно-оздоровительных и спортивных мероприятий, направленных на повышение и сохранение устойчивой и профессиональной дееспособности – это:

а) физкультурная пауза;

б) производственная физическая культура;

в) спорт высших достижений;

г) массовый спорт.

2. Профессионально-прикладная физическая подготовка – это

а) специализированный вид физического воспитания, осуществляемый в соответствии с особенностями и требованиями данной профессии;

б) система профессиональных мероприятий, осуществляемая в соответствии с особенностями данной профессии;

- в) процесс формирования специализированных знаний, умений и навыков;
г) целенаправленное воздействие на развитие физических качеств человека посредством нормированных нагрузок.
3. Какой вид спорта наиболее эффективно развивает координационные способности монтажников-высотников:
а) фехтование; б) баскетбол; в) мото-спорт; г) гимнастика.
4. Что не является формой занятий по ППФП:
а) спортивно-прикладные соревнования; б) учебные занятия; в) занятия в период учебной практики; г) рекреационные занятия.

Проблемные и сложные вопросы, возникающие в процессе изучения курса и выполнения контрольной работы, необходимо решать с преподавателем на консультациях.

Выполнению контрольной работы должно предшествовать самостоятельное изучение студентом рекомендованной литературы.

Студент получает проверенную контрольную работу с исправлениями в тексте и замечаниями. В конце работы выставляется оценка «зачтено», «не зачтено». Работа с оценкой «не зачтено» должна быть доработана и представлена на повторную проверку.

Выполнение работы над ошибками

При получении проверенной контрольной работы необходимо проанализировать отмеченные ошибки. Все задания, в которых были сделаны ошибки или допущены неточности, следует еще раз выполнить в конце данной контрольной работы. Контрольные работы являются учебными документами, которые хранятся на кафедре до конца учебного года.

Критерии оценивания контрольной работы

Оценка за контрольную работу определяется простым суммированием баллов за правильные ответы на вопросы: 1 правильный ответ = 2 балл. Максимум 40 баллов.

Результат контрольной работы

Контрольная работа оценивается на «зачтено», «не зачтено»:

20-40 балла (50-100%) - оценка «зачтено»;

0-19 балла (0-49%) - оценка «не зачтено»;

Образец оформления титульного листа



**Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»**

Кафедра физической культуры

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ ПО ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ И СПОРТУ

Выполнил: Иванов Иван Иванович
Группа _____

Преподаватель: Петров Петр Петрович

**Екатеринбург
2018**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
РУССКИЙ ЯЗЫК И ДЕЛОВЫЕ КОММУНИКАЦИИ

Специальность
21.05.03. Технология геологической разведки

формы обучения: очная, заочная

Автор: Меленкова Е. С., канд. филол. наук, доц.

Екатеринбург
2020

Методические рекомендации к практическим занятиям

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе лекций, ознакомления с учебной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют более качественному усвоению знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке к практическому занятию необходимо изучить соответствующие конспекты лекций по заданной теме, главы учебников или учебных пособий, разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (например, словарями). Конспектирование дополнительных источников также способствует более плодотворному усвоению учебного материала. Следует обращать внимание на основные понятия и классификации, актуальные для темы практического занятия.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студента. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения и проследить их логику. Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Все это находит свое отражение в процессе выполнения итогового зачетного теста.

Очевидны три структурные части практического занятия: предваряющая (подготовка к занятию), непосредственно само практического занятия (обсуждение вопросов темы в группе, выполнение упражнений по теме) и завершающая часть (последующая работа студентов по устранению обнаружившихся пробелов). Не только само практическое занятие, но и предваряющая, и заключающая части его являются необходимыми звеньями целостной системы усвоения вынесенной на обсуждение темы.

Перед очередным практическим занятием целесообразно выполнить все задания, предназначенные для самостоятельного рассмотрения, изучить лекцию, соответствующую теме практического занятия. В процессе подготовки к практическому занятию закрепляются и уточняются уже известные и осваиваются новые знания. Столкнувшись в ходе подготовки с недостаточно понятными моментами темы, необходимо найти ответы самостоятельно или зафиксировать свои вопросы для постановки и уяснения их на самом практическом занятии.

В начале занятия следует задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, поскольку всегда сначала студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.

В ходе практического занятия каждый должен опираться на свои конспекты, сделанные на лекции или по учебникам и учебным пособиям, на самостоятельно выполненные упражнения по данной теме.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь/

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Тем самым практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний, помогают приобрести навыки самостоятельной работы. Планы практических занятий состоят из отдельных тем, расположенных в соответствии с рабочей программой изучаемой дисциплины. Каждая тема включает следующие элементы:

- цель проведения занятия;
- теоретические вопросы, необходимые для усвоения темы;
- задания;
- список литературы по теме для подготовки к практическому занятию.

Работа на практических занятиях направлена на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемой дисциплины;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений (например, аналитических).

В ходе занятий у студентов формируются практические умения и навыки, отраженный в РУП.

Методические материалы к практическим занятиям

ТЕМА 1. СЛОВАРИ И СПРАВОЧНИКИ ПО КУЛЬТУРЕ РЕЧИ. СИСТЕМА СЛОВАРНЫХ ПОМЕТ

Цель – вспомнить классификацию словарей и проверить у студентов умение работать с ними (лексикографическая грамотность).

Основные понятия темы:

Лексикография – раздел науки о языке, занимающийся теорией и практикой составления словарей.
Энциклопедический словарь – книга, содержащая описание научных понятий и терминов, исторических событий, характеристику персоналий из разных областей или определенной области знания.
Лингвистический словарь – книга, содержащая собрание слов (морфем, фразеологизмов и т. д.), расположенных по определённому принципу (как правило, по алфавиту), и дающая сведения об их значениях, употреблении, происхождении, переводе на другой язык и т. п.
Словарная статья – отдельный текст, посвященный языковой единице (слову, морфеме и т. п.) или их группе (лексической группе, гнезду слов и т. п.).
Помета – применяемое в словарях сокращенное указание на какие-либо характерные признаки слова или его употребления.

Задание 1. Прочитайте и сравните словарные статьи, взятые из разных словарей. Найдите общую и различающую их дополнительную информацию. Объясните, чем вызвано различие.

ФАЗА – 1. В геохимии: совокупность однородных частей системы, одинаковых по термодинамическим свойствам (тем, которые не зависят от количества вещества) и отграниченных от других частей поверхностью раздела. В природных процессах минералообразования могут принимать участие газовая Ф., жидкие Ф. и твердые Ф. – металлы. Системы, состоящие из одной Ф., называются однофазными, или гомогенными (напр., раствор различных солей в воде; кристалл кварца без включений; мономинеральная горная порода); состоящие из нескольких Ф. – многофазными, или гетерогенными (напр., раствор вместе с твердым осадком; кристалл кварца с газово-жидким включением; полиминеральная порода). 2. В исторической геологии: термин, иногда употребляющийся для обозначения времени, соответствующего длительности накопления отложений, составляющих зону как часть яруса. Термин был условно принят в этом значении VIII сессией МГК в Париже в 1900 г., но не стал общепринятым. При изучении четвертичного периода иногда фазой называют время каждого отдельного оледенения и промежутков между ними (*Геологический толковый словарь*¹).

ФАЗА, -ы, ж. [нем. Phase < греч. phasis появление (о небесных светилах)]. 1. Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н., а также само положение, форма чего-н. в данный момент; то же, что фазис. *Новая ф. в развитии общества. Луна в первой фазе.* 2. физ. Величина, характеризующая состояние какого-н. процесса в каждый момент времени. Ф.

¹ Геологический толковый словарь [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.edudic.ru/geo/>

колебания маятника. Газообразная ф. вещества. **Фа́зовый** – относящийся к фазе (в 1-м и 2-м знач.), фазам. **3. эл.** Отдельная группа обмоток генератора. **Фа́зный** – относящийся к фазе, фазам. (Крысин Л. П. Толковый словарь иноязычных слов. М., 2001. С. 810).

Фа́за, -ы, *ж.* **1.** Момент, отдельная стадия в ходе развития и изменения чего-н. (напр. положения планеты, формы или состояния вещества, периодического явления, общественного процесса), а также само положение, форма в этот момент (книжн.). *Первая ф. Луны. Жидкая ф. Газообразная ф. Ф. колебания маятника. Вступить в новую ф. развития.* **2.** Отдельная группа обмоток генератора (спец.). || *прил. фа́зовый*, -ая, -ое (к 1 знач.) и *фа́зный*, -ая, -ое (к 2 знач.). ♦ **Фазовые глаголы** – в лингвистике: глаголы со значением начала, продолжения или окончания действия. (Ожегов С. И. и Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка. М., 2005. С. 847).

Задание 2. *Познакомьтесь с типами помет, используемых в толковых словарях. Объясните значение всех помет, приведенных в качестве примера.*

ТИПЫ ПОМЕТ ТОЛКОВОГО СЛОВАРЯ

Типы помет	Примеры помет	Значение отсутствия помет
1. Помета, указывающая на принадлежность к функциональному стилю	<i>науч., газет., публиц., оф.-дел., разг., книжн. и др.</i>	Слово межстилевое
2. Помета, указывающая на сферу употребления слова	<i>обл., прост., жарг., спец. и др.</i>	Слово общеупотребительное
3. Помета, указывающая на принадлежность к активному / пассивному запасу	<i>устар., ист., арх., нов. и др.</i>	Слово принадлежит к активному запасу
4. Помета, указывающая на эмоционально-экспрессивную окраску слова	<i>ласк., ирон., шутол., унич., бран., пренебр., высок., неодобр. и др.</i>	Слово нейтральное

Задание 3. *Прочитайте словарные статьи, извлеченные из толкового словаря современного русского языка. Укажите пометы и объясните, что они означают.*

Аборигén, -а, *м.* (книжн.) – коренной житель страны, местности. || *ж. аборигénка* (разг.)

Грамотéй, -я, *м.* (устар. и ирон.) – грамотный человек.

Деяние, -я, *ср.* (высок. и спец.) – действие, поступок, свершение.

Женáтик, -а, *м.* (прост. шутол.) – женатый человек (обычно о молодожене).

Иждивénчество, -а, *ср.* (неодобр.) – стремление во всем рассчитывать не на свои силы, а на помощь других, вообще жить за чужой счет.

Карапу́з, -а, *м.* (разг. шутол.) – толстый, пухлый малыш.

Кляча, -и, *ж.* (разг. пренебр.) – плохая (обычно старая) лошадь.

Лéнчик, -а, *м.* (спец.) – деревянная основа седла.

Матéрщина, -ы, *ж.*, *собирает*. (прост. груб.) – неприличная брань.

Мíшка, -и, *м.* (разг. ласк.) – то же, что медведь.

Небезызвéстный, -ая, -ое; -тен, -тна (обычно ирон.) – достаточно, хорошо известный.

Неулыба, -ы, *м.* и *ж.* (обл. и прост.) – человек, который редко улыбается, неулыбчив.

Новодéл, -а, *м.* (разг.) – здание, сооружение, построенное на месте уничтоженного, исчезнувшего и воспроизводящее его прежний внешний вид.

Нуворѣш, -а, м. (книжн. презр.) – богач, наживший свое состояние на социальных переменах или бедствиях, на разорении других.

Общепѣт, -а, м. (офиц.) – сокращение: общественное питание – отрасль народного хозяйства, занимающаяся производством и продажей готовой пищи и полуфабрикатов. || *прил. общепѣтовский*, -ая, -ое (разг.).

Остолѣп, -а, м. (прост. бран.) – глупец, болван.

Отчѣзна, -ы, ж. (высок.) – отечество, родина.

Побѣры, -ов. 1. Чрезмерные, непосильные налоги или сборы (устар.). 2. *перен.* Неофициальные сборы средств на что-нибудь (разг. неодобр.).

Предувѣдомить, -млю, -мишь; -мленный; *сов., кого-что* (устар. и офиц.) – заранее уведомить.

Ристѣлице, -а, ср. (стар.) – площадь для гимнастических, конных и других состязаний, а также само такое состязание.

Свѣра, -ы, ж. (прост.) – шумная перебранка, ссора.

Торгѣш, -а, м. 1. То же, что торговец (устар. неодобр.). 2. *перен.* Человек, который выше всего ставит свою выгоду, корысть, личный интерес (презр.).

Умка, -и, м. (обл.) – белый медведь.

Уповѣние, -а, ср. (книжн., часто ирон.) – то же, что надежда.

Хѣм, -а, м. (презр. и бран.) – грубый, наглый человек.

Задание 4. *Познакомьтесь с пометами, используемыми в орфоэпических словарях, словарях грамматических трудностей и т. п. Какие пометы указывают на императивную норму, а какие на диспозитивную? Запишите их в предложенную ниже таблицу.*

НОРМАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОВ²

Словарь является не просто нормативным, а ставит своей задачей показать литературную норму во всем многообразии ее проявлений. В отличие от большинства нормативных словарей, словарь отражает и такие факты речи, которые считаются неверными с точки зрения литературной нормы. Все запретительные пометы, которые характеризуют неверные варианты, снабжаются значком «восклицательный знак» (!). В Словаре используются ясные и общедоступные способы нормативной оценки вариантов.

1. Равноправные варианты соединяются союзом *и*:

бѣрхатка *и* бѣрхѣтка;

ведѣрцев *и* ведѣрец.

При этом на первом месте помещается обычно традиционный вариант, более частотный в употреблении.

2. Помета «допустимо» (*и доп.*) свидетельствует о том, что оба варианта соответствуют нормам литературного языка. Естественно, что предпочтителен вариант, помещенный на первом месте. Такая помета используется, как правило, применительно к новым, входящим в норму вариантам ударения, произношения и грамматическим формам. Например:

бредѣвый *и доп.* бредѣвой;

² Орфоэпический словарь русского языка для школьников / Сост. О. А. Михайлова. Екатеринбург: У-Фактория, 2002. С. 6-8.

белёсый и *доп.* белёсый;
мáшет и *доп.* махаёт.

3. Помета «допустимо устаревшее» (*доп. устар.*) означает, что второй вариант, хотя и находится в пределах литературной нормы, всё реже встречается в речевой практике, постепенно утрачивается, переходя в пассивный языковой фонд. Например:

ворва́лся и *доп. устар.* ворвалсѧ
вспѣ́ненный, -ая, -ое, *кратк. ф.* вспѣ́нен, вспѣ́нена и *доп. устар.* вспенѣ́нный, вспенѣ́н, вспенѣ́на
бúдо[чн]ик и *доп. устар.* бúдо[шн]ик.

4. Помета «не рекомендуется» (*не рек.*) применяется в тех случаях, когда отмеченный ею вариант в данное время не признаётся нормативным. Однако его широкое употребление в современной речи и соответствие общим тенденциям языкового развития не исключают возможности признания этого варианта литературной нормой в будущем. Например:

балóванный ! *не рек.* ба́лованный;
вручѣ́т ! *не рек.* вру́чит;
гри́фели, -ей ! *не рек.* грифеля́, -ѣй.

5. Помета «не рекомендуется устаревшее» (*не рек. устар.*) означает, что снабжённый ею вариант, ныне находящийся за пределами нормы, представляет собой бывшую норму. Например:

горшóчек, горшóчка ! *не рек. устар.* горшѣ́чек;
да́рит ! *не рек. устар.* дарѣ́т.

6. Помета «неправильно» (*неправ.*) служит для предупреждения распространённых речевых ошибок. Например:

вы́боры, вы́боров ! *неправ.* выбра́, выбра́в;
компроме́товать, -рую, -рует ! *неправ.* компроме[н]тѣ́ровать

Рекомендательные пометы	Запретительные пометы

ТЕМА 2. ОРФОГРАФИЧЕСКИЕ И ПУНКТУАЦИОННЫЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила орфографии и пунктуации русского языка.

Основные понятия темы:

Орфографические нормы – это правила написания слов.
--

Пунктуационные нормы – это правила расстановки знаков препинания.
--

Задание 1. Повторите правописание гласных (безударных и чередующихся) и согласных в корне слова. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы. Расставьте знаки препинания. Объясните свой выбор.

Я р...шил в...рнуться д...мой. Быстрыми шагами я прошел зар...сли кустов. У моих ног т...нулась р...внина а дальше ст...ной возвышался мрачный лес. Я осм...трел

окрес...ность и спустился с х...лма. Высокая тр...ва на дне д...лины б...лела р...вной скат...ртью. Я вышел на опушку и пошел полем. Трудно было проб...раться по у...кой тр...пинке. Кругом р...сла высокая ро...ь. Н...чная птица промчалась и к...снулась меня св...им крылом. В т...шине глухо разд...вались мои шаги. Но вот на в...чернем небе стали заж...гаться звезды. Забл...стел серп м...л...дого мес...ца. Теперь я узнал д...рогу и предпол...гал что через час буду дома.

Задание 2. *Повторите правописание приставок. Перепишите предложения, вставив пропущенные буквы. Расставьте недостающие знаки препинания при однородных членах предложения.*

Перед самым селом п...р...езжаем речку вброд. На спуске перед церковью ра...ливается море сарафанов мужицких голосов. Народ все пр...бывает мужики в пиджаках ребятишки со свистульками, на ра...пряженных телегах сидят пр...старелые пр...езжие. Над колокольнями белеют верхи палаток, а над ними – облака, и падают вьются стрелами свищут в воздухе стрижи.

Медленно пр...бираясь в ра(с, сс)тупившейся толпе, по...ъезжаем к ограде пр...вязываем лошадей. На дощатом пр...лавке ра...ложены картинки и книги, и мещанин-пр...давец по...совывает календари и книги с з...манчивыми названиями. Всё смех и ржанье лошадей крик бабы, ругающей мужика, (с, з)ливается в один ярмарочный гул. За время работы ярмарки хочется успеть (с, з)делать многое пр...смотреть липового меда п...дешевле п...торговаться в свое удовольствие пр...купить гостинцев родным.

В обед негаданно с...бирается туча, и дождь, по...нимая пыль, барабанит по усыпанной по...солнечной шелухой дороге. Но летний дождь быстро пр...ходит, и яркая радуга, упершись в реку, широким полотенцем ра...кидывается над ярмаркой. С ярмарки народ ра...ъезжается только после обеда. (По И. Соколову-Микитову)

Задание 3. *Повторите правописание Ъ и Б (учтите разные функции Б). Перепишите, вставив, где необходимо, пропущенные буквы.*

Пред...юбилейное мероприятие, обжеч...ся огнем, решил удалит...ся проч..., кофе был горяч..., достан...те багаж..., чувствовать гореч... неудач..., быть по-волч...и, любител...ская кинос...емка, должность камен...щика, выйти замуж... осен...ю, береч... здоров...е, сроч...ный заказ, лечить кон...юнктивит, уловить фал...ш... в голосе, трех...этажный павил...он, заменить мед...ю, назнач...те время трех встреч..., с...еш... во время лан...ча, следить за своей реч...ю, купает...ся в реке, оформиш... пен...сию, остав...те антиквару старинную брош..., четырех...ядерный процессор, волосы до плеч..., сер...езный компан...он, умнож...те полученный резул...тат, он хорош... собой, выявить из...ян, декабр...ские морозы, с...агитировать на выборы, коротко стрич...ся, сверх...естественный об...ект, боиш...ся ос...минога, неб...ющаяся вещ..., об...емный текст п...есы, не забуд...те плащ..., невтерпеж... ждать, раз...яренный бык, разрабатывать кар...ер.

Задание 4. *Повторите правописание Н и НН в причастиях, прилагательных и образованных от них формах. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и расставив недостающие знаки препинания при причастных оборотах. Причастные обороты подчеркните.*

Было нестерпимо холодн...о, и даже не верилось, что днем придется жариться в раскален...ом пекле. Среди потрескавшихся от зноя пород обнаруживаются словно бы

отполирован...ые плиты гранита. В этом заброшен...ом неповторимом уголке необозримой пустыни существование человека – никогда не прекращающееся сражение с природой. Палатки кочевников соседствуют с домами сложен...ыми из обожжен...ого кирпича.

Снаружи жилище покрывает сетка сплетен...ая из жесткой травы. Узор наносится и на пленку, которой палатка скрепляется изнутри.

Все палатки украшен...ы под цвет камен...ых глыб. Комнаты соединен...ы переходами из плетен...ых циновок. Все разложен...о аккуратно...о, повсюду чистота. Сбоку вышел мужчина в незаменимом традицион...ом облачении. На нем накидка казавшаяся накрахмален...ой. Бросался в глаза и меч повеш...н...ый к поясу.

Геолог подходит к карте разукрашен...ой цветными пометками. Все, что нанесен...о на нее, – плод трудн...ых поисков в горах прокален...ых солнцем. Новые месторождения открывают разведчики недр. (По Б. Фетисову)

Задание 5. *Повторите правописание НЕ и НИ с разными частями речи. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки.*

Нет (н...)чего лучше Невского проспекта, по крайней мере в Петербурге. Чем (н...)блестит эта улица – красавица нашей столицы! Я знаю, что (н...)один из бедных чиновных ее жителей (н...)променяет на все блага Невского проспекта. Да и кому же он (н...)приятен? Здесь единствен...ое место, где показываются люди (н...)по(н...)обходимости, куда загнала их надобность и меркантильный интерес, об...емлющий весь Петербург. Здесь житель Петербургской или Выборгской части, (н...)сколько лет (н...)бывавший у своего приятеля в Песках или у Московской заставы, может быть уверен, что встретится с ним (н...)пр...мен...о.

Можно сказать решительно, что в это время, то есть до двенадцати часов, Невский проспект (н...)составляет (н...)(для)кого цели, он служит только средством: он постепен...о заполняется лицами, имеющими свои занятия, свои заботы, свои досады, но вовсе (н...)думающими о нем. В это время, что бы вы на себя (н...)надели, хотя бы даже вместо шляпы был картуз у вас на голове, хотя воротнички слишком высунулись из вашего галстука, – (н...)кто этого (н...)заметит. (по Н. В. Гоголю)

Задание 6. *Повторите правописание наречий и частиц. Перепишите текст, вставив пропущенные буквы и раскрыв скобки. Вставьте недостающие знаки при деепричастных оборотах. Деепричастия подпишите.*

Лето выдалось знойное и сокрушило все. Земля иссохла, прокалилась до того, что ящерицы (не)боясь (ни)кого прибегали на порог с отчаянно колотящимися глотками, лиш...(бы) куда(нибудь) спрятаться. А коршуны забирались (в)высь и (на)долго умолкали в горящем мареве.

И ребят непоседливых сморила (не)померная жара. Они прятались от нее под стенами домов выглядывая (из)редк... (от)туда на проходящие мимо них пассажирские и товарные поезда. Когда у разъезда составы сбавляли ход, детям казалось, что уж... этот(то) поезд притормозит и остановится. Они бежали за ним (в)догонку заслоняясь ручонками от солнца и (по)детски наивно надеясь укатить из пекла.

Тяжко было смотреть, с какой завистью и печалью малыши глядели (в)след уходящим в неизвестность, (на)стеж... раскрытым вагонам. Пассажиры выглядывали из открытых окон, то(же) сходили с ума от духоты и мечтали о том, что(бы) (на)утро очутиться там, где

прохладные реки и зеленые леса. Вряд(ли) они задумывались о том, что жара может задержаться... (По Ч. Айтматову)

Задание 7. *Повторите правила постановки знаков препинания в сложных предложениях. Перепишите предложения, расставив знаки препинания. Обратите особое внимание на пунктуацию при однородных и обособленных членах предложения. Подчеркните грамматические основы.*

1. Сначала соседи смеялись между собою над высокомерием Троекурова и каждый день ожидали чтоб незваные гости посетили Покровское где было им чем поживиться но наконец принуждены были с ним согласиться и сознаться что и разбойники оказывали ему непонятное уважение. (А. С. Пушкин)

2. Раза три в год Финский залив и покрывающее его серое небо наряжаются в голубой цвет и млеют любуясь друг другом и северный человек едучи из Петербурга в Петергоф не насмотрится на редкое чудо млеет в непривычном зное и все заликует дерево цветок и животное. (И. А. Гончаров)

3. Я писал вам как мы гонимые бурным ветром дрожа от холода пробежали мимо берегов Европы как в первый раз пал на нас у подошвы гор Мадейры ласковый луч солнца и заплескали голубые волны засияли синие небеса как мы жадно бросились к берегу погреться горячим дыханием земли. (И. А. Гончаров)

4. Иногда бывает что облака в беспорядке толпятся на горизонте а солнце прячась за них красит их и небо во всевозможные цвета в багряный оранжевый золотой лиловый грязно-розовый. (А. П. Чехов)

5. Направо темнели холмы налево все небо было запито багровым заревом и трудно было понять был ли то пожар или же собиралась всходить луна. (А. П. Чехов)

6. Живя здесь я реже попадался на глаза отцу и его гостям и мне казалось что если я живу не в настоящей комнате и не каждый день хожу в дом то слова отца что я сижу у него на шее звучат уже как будто не так обидно. (А. П. Чехов)

7. Он пел и от каждого звука его голоса веяло чем-то родным и необозримо широким словно знакомая степь раскрывалась перед нами уходя в бесконечную даль. (И. С. Тургенев)

8. Большая низкая лампа с непрозрачным абажуром стоящая на письменном столе горела ясно но освещала только поверхность стола да часть потолка образуя на нем дрожащее круглое пятно света в остальной комнате все было в полумраке в нем можно было разглядеть только шкаф с книгами большой диван еще кое-какую мебель. (В. Гаршин)

9. Куда ни обращаешь взор всюду как будто встречаешь быстро удаляющийся образ лета которое время от времени оборачивается назад и бросает прощальную меланхолически-задумчивую улыбку. (Д. Григорович)

10. А на него посмотришь и кажется что вся эта земная деятельность для него только лишь забава и ею занят он пока а настоящие его заботы где-то впереди куда порою устремлялись его бойкие но как бы неживые оловянного блеска глаза. (Ф. Сологуб)

11. На седом фоне тумана ближайшие сосны однотонно плоско и неясно вырисовываются своими прямыми и голыми стволами и в их неподвижности среди этой голубой тишины и среди этого холодного тумана чувствуется что-то суровое печальное и покорное. (А. И. Куприн)

ТЕМА 3. АКЦЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить характеристику русского языка, составить собственный акцентологический словарь при выполнении упражнений³.

Основные понятия темы:

Акцентологические нормы – это правила постановки ударения в слове.

Омонимы – слова, у которых от постановки ударения зависит значение.

Задание 1. *Расставьте ударения в следующих словах. Укажите варианты постановки ударения (например, ста́ртер и сартёр):*

1) Асимметрия, блага, кулинария, столяр, добыча, плато, диоптрия, творог, средства, шофер, туфля, эксперт, кремьнь, страховщик, нефтепровод, маркетинг, шасси, христианин, рассредоточение, досуг, жалюзи, танцовщица, шарфы, торты, искра, бармен, вероисповедание, квартал, симметрия, диспансер, обеспечение, склады, таможня, щебень, баржа, алкоголь, индустрия, приговор, генезис, договор, свекла, бижутерия, каталог, ходатайство, километр, пережитое, хвоя, полиграфия, ортопедия, пиццерия, стюард, овен, упрочение (*имена существительные*).

2) Асбестовый, совестливый, мизерный, оптовый, мастерски, украинский, втридорога, важно, тотчас, просмотрный, завидно, правы, давнишний, стары, одновременный, красивее, красивейший, равны, семестровый, счастливо, досыта, иначе, поутру, начерно, зубчатый (*имена прилагательные и наречия*).

3) Аранжировать, заржаветь, нормировать, убыстрить, заплесневеть, новорожденный, опошлить, баловать, балованный, расклешенный, дарит, включишь, включенный, копировать, повторишь, понял, звонит, закупорить, начался, начатый, положить, положил, вручит, врученный, доложишь, облегчить, осведомиться, премировать, черпать, ободрить, пломбировать, вогнутый, вскружит, буксировать, скрещенный, разрыхлить, плодоносить, наклоненный, окислить (*глагольные формы*).

Задание 2. *Поясните, как зависит значение от постановки ударения в следующих словах (омонимах):*

Глазки, замок, рожки, выкупать, ирис, характерный, полки, хлопок, мука, вычитать, орган, видение, острота, трусить, свойство, гвоздики, бронировать, кредит, угольный, правило, провидение, полнить, лавровый, электрик.

Например: пла́чу (1 лицо ед. число от глагола «плакать») – плачу́ (1 лицо ед. число от глагола «платить»).

Задание 3. *Прочитайте предложения, обращая внимание на постановку ударения в подчёркнутых словах. Составьте по аналогии свои предложения, используя любые слова из задания 1 и / или 2.*

1. В последнем квартале этого года эксперты одной из фирм заключили выгодный договор на прокладку газопровода, за что были премированы. 2. Для обеспечения здорового образа жизни исключите из своего рациона арахис, торты и алкоголь, а включите в него творог, свеклу и щавель. 3. В мебельном отделе нашего торгового центра вы можете приобрести красивейшие кухонные гарнитуры по оптовым ценам.

³ При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей при постановке ударения.

ТЕМА 4. ОРФОЭПИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить правила транскрибирования слов, выявить основные трудности в плане произношения, составить собственный орфоэпический словарь при выполнении упражнений⁴.

Основные понятия темы:

Орфоэпические нормы – это правила произношения слов.

Транскрипция – графическая запись того, как произносится слово (всегда в квадратных скобках).

Задание 1. Отметьте правильное произношение сочетания ЧН в следующих словах. Распределите слова на три группы:

[шн]	[шн] и [чн]	[чн]

1) Шуточный, копеечный, отличник, девичник, будничный, булочная, очечник, полуночник, нарочно, прачечная, скучно, скворечник, горчичник, Фоминична, яичница, достаточно, порядочный, горничная, Никитична, двоечник, пустячный, Ильинична, конечно, спичечный, подсвечник, Кузьминична.

2) Шапочный мастер – шапочное знакомство, сердечные капли – друг сердечный, подаренная перечница – чертова перечница.

Задание 2. Отметьте правильное произношение согласного перед Е в следующих словах. Распределите слова на три группы:

Твёрдое произношение	Варианты	Мягкое произношение

Автосервис, дефис, агрессия, дендрарий, бухгалтер, депрессия, гарем, термин, шинель, термос, патент, сессия, тенденция, рейд, газель, дезодорант, фанера, Одесса, академия, бизнесмен, деградация, менеджер, музей, деканат, темперамент, тезис, аксессуар, протекция, бандероль, гипотеза, детектив, кредо, бассейн, экспресс, дедукция, декада, темп, терапевт, дефицит, интервал, дебаты, рельсы, ниппель, компетентный, дезинформация, пресса, цистерна, стратегия, тренинг, сенсорный, сейф, портмоне.

Задание 3. Прочитайте слова, обращая внимание на произношение ударного звука, обозначенного буквой Е:

1) Острие, поблекший, афера, хребет, оседлый, одноименный, маневренный, опека, жернов, желчь, блеклый, желоб, безнадёжный, бытие, повлекший, жердочка, никчемный, гладкошерстный, гашеный, недоуменный.

2) Именительный падеж – падеж скота;

Истекший срок – истекший кровью;

Кричит как оглашенный – оглашенный приговор;

⁴ При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем трудностей произношения.

Совершенные пропорции – совершенные поступки;
Крестный ход – крестный отец.

Задание 4. Прочитайте слова, обращая внимание на произношение выделенных согласных:

- 1) Масса, суррогат, группа, гриппа, терраса, аттестат, коллега, металл, сумма, аннотация, кристалл, одиннадцать, иллюзия, ванна, апелляция, касса, галлюцинация, нетто.
- 2) Дрожжи, бухгалтер, позже, вожжи, изжарить, выжженный, песчаный, изжить, разжать, жестче, низищий, дожди, резче, визжать, изжога, масшаб, можжевельник, безжизненный, расчет, съезжу, приезжай.

Задание 5*. Прочитайте следующий текст, обращая внимание на правильное произношение и постановку ударения в подчёркнутых словах:

Примером успешного ведения бизнеса в различных отраслях экономики является деятельность фирмы «Mihail-tur». За 11 лет ее существования удалось сформировать коллектив профессионалов из высококвалифицированных менеджеров, компетентных экспертов, торговых агентов. Компании принадлежат две трети долей уставного фонда АО «Лейбл-мастер», владельца одного из крупнейших торговых центров города. Занимаясь оптовым поставкам подростковой одежды, фирма поддерживает связи с модельными агентствами, что позволяет обновлять коллекции на 15 процентов каждый квартал. С ассортиментом одежды можно познакомиться по объемному каталогу, размещенному на корпоративном интернет-сайте. Руководство фирмы заявило о намерении углубить это направление, для чего налаживаются связи с другими поставщиками, проводятся маркетинговые исследования с целью изучения конъюнктуры рынка в трех крупнейших областях региона. В планы компании входит также сосредоточение средств в области дорожного строительства. Начата подготовка к тендерным торгам, намеченным на первую декаду ноября, к участию в которых приглашаются компании, заинтересованные в строительстве современного путепровода.

ТЕМА 5. СЛОВООБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить состав слова, научиться находить в предложениях ошибки, связанные с неверным образованием слова.

Основные понятия темы:

Словообразовательные нормы – это правила образования новых слов.

Задание 1. Найдите в предложениях слова, в которых нарушена словообразовательная норма, запишите их. Выделите неправильно выбранную часть слова (приставку, суффикс). Исправьте допущенные ошибки.

1. Завесьте, пожалуйста, килограмм помидоров с витрины.
2. Студенты в очередной раз немного запоздали на лекцию.
3. Уважаемые пассажиры, проходите по-быстрому в середину вагона или садитесь взади.
4. Он был коренным курчанином и после учебы в Москве вернулся в родной Курск.
5. Чтобы сдать зачет, важно завсегда посещать занятия.
6. Одна из самых актуальных проблем современной России – это взятничество в государственных учреждениях.
7. После концерта микрофоны со сцены надо будет перенести взад.
8. Многие кавказские

народы отличает их гостеприимчивость. **9.** Моя жизнь в этом году была наполнена заботами о заканчивании школы и поступлении в университет. **10.** Сегодня у первого курса была лекция по химии вместо высшей математики.

ТЕМА 6. ЛЕКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить основные типы речевых ошибок, связанных со значением слова.

Основные понятия темы:

Лексические нормы – это правила употребления слова в точном значении, которое закрепилось в литературном языке и зафиксировано в толковых словарях.

Паронимы – это слова однокоренные, близкие по форме, но абсолютно разные по значению.

Речевая избыточность – это употребление лишних слов (тавтология, плеоназм).

Лексическая сочетаемость – это способность слова соединяться с другими словами по значению.

Жаргонизм – слово, свойственные для речи той или иной социальной, профессиональной группы людей.

Фразеологизм – устойчивое словосочетание, смысл которого не определяется значением отдельно взятых слов

Задание 1. *Объясните разницу в значении приведенных ниже паронимов. Составьте с каждым из них словосочетание, подобрав подходящее по смыслу слово.*

Осудить – обсудить, удачливый – удачный, соседний – соседский, жилой – жилищный, поступок – проступок, опечатки – отпечатки, командированный – командировочный, усвоить – освоить, эффектность – эффективность, невежа – невежда, представить – предоставить, цельный – целый, искусный – искусственный, практический – практичный; гуманный – гуманистический – гуманитарный; плодовитый – плодовый – плодотворный, экономический – экономичный – экономный.

Задание 2. *Найдите в следующих предложениях избыточные словосочетания, выпишите их. Объясните причину избыточности, указав на лишнее слово (или лишние слова).*

1. При входе в «Копирус» висит прейскурант цен на предлагаемые услуги. **2.** Уезжая из Москвы, мы купили памятные сувениры в киоске у вокзала. **3.** Для преподавателя важно то, какие взаимоотношения друг с другом сложились между студентами в группе. **4.** Неприятно резал слух голос, доносившийся из конференц-зала. **5.** Депутату приходится встречаться со всеми социальными слоями общества.

Задание 3. *Найдите в следующих предложениях иноязычные по происхождению слова, которые употреблены в неточном значении. Запишите свой вариант исправления.*

1. Рабочий станка допустил целый ряд дефектов при изготовлении деталей. **2.** Пейзаж Екатеринбурга за последние десять лет обогатился современными постройками, хотя многие памятники архитектуры и были реконструированы до основания. **3.** В целях профилактики основное внимание уделяется ранним проявлениям, т. е. дебюту гриппа. **4.** Для окон актового зала мы долго искали гардины длиной 4 метра, а уже потом подбирали шторы в тон стен. **5.** В

январе состоялся бенефис талантливого исполнителя: он впервые выступал на профессиональной сцене.

Задание 4. *Найдите в следующих предложениях нарушения правил лексической сочетаемости слов. Запишите свой вариант исправления.*

1. Грамотный руководитель должен показывать образец своим подчиненным. 2. Нововведения сыграли важное значение в развитии горного комбината. 3. Красочное оформление детских книг издательства «Эгмонт» должно вызвать внимание и заинтересовать покупателей. 4. Новогодний спектакль в Театре кукол оказал на детей большое впечатление. 5. Первую лекцию по геологии в этом году провел молодой преподаватель.

Задание 5. *Найдите в предложениях жаргонные, просторечные, разговорные слова, замените их литературным вариантом и запишите исправленный вариант.*

1. Несколько студентов до сих пор не отнесло хвостовки в деканат. 2. В центре Екатеринбурга забабахали очередную свечку. 3. Я считаю, что необходимо избавляться от любой нецензурщины в нашей речи. 4. После окончания вуза мы решили замутить свой бизнес, решив, что в этом деле нам по-любому повезет. 5. Работяги привыкли вкалывать на заводе от зари до зари.

Задание 6. *Исправьте в следующих предложениях речевые ошибки, вызванные неправильным употреблением фразеологизма.*

1. Михаил на публике говорит очень убедительно, язык у него хорошо подвязан. 2. Туристам кинулась в глаза красота уральской природы. 3. Его обещания рубля ломаного не стоят. 4. Об умельцах у нас говорят: «Они в своем деле коня подковали». 5. К сожалению, студенты редко сейчас грызут камень науки по-настоящему.

Задание 7*. *Найдите и исправьте в следующих предложениях речевые ошибки. Запишите правильный вариант.*

1. Норвежские спортсмены по-прежнему остаются нашими самыми серьезными оппонентами в биатлоне. 2. В своей работе руководители горных предприятий руководствуются новейшей научной и методической литературой. 3. Многодетным семьям, чтобы жить достойно, приходится искать несколько истоков доходов. 4. Обычно мы общаемся, не придавая важности невербальным средствам коммуникации. 5. Екатеринбургская Епархия активно распространяет душевную литературу. 6. Продукты Черкашинского мясокомбината пользуются авторитетом у покупателей. 7. Исправьте ошибки в контрольной работе так, чтобы было правильно. 8. Все места на парковке были заняты, и поэтому много машин толпилось на обочине. 9. К маю ветераны ВОВ получили очередную добавку к пенсии. 10. После собеседования она сказала, что на должность промоутера брали только смазливых молодых людей. 11. В прошлом году выдался неурожайный год в плане картошки. 12. Ребенок с рождения имитирует поведение родителей. 13. На Неделе первокурсника нам сразу выдали студики и зачётки. 14. Команда нашего факультета заняла первенство в смотре художественной самодеятельности. 15. После первых же дней изнурительной работы на Севере очень хотелось вернуться назад домой.

ТЕМА 7. МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – вспомнить правила определения рода у существительных и аббревиатур, особенности несклоняемых существительных, образования некоторых грамматических форм разных частей речи и научиться исправлять ошибки, связанные с их неверным образованием (все это с опорой на учебную литературу и словари⁵).

Основные понятия темы:

Морфологические нормы – это правила образования грамматических форм слова.

Задание 1. *Определите род у следующих существительных и аббревиатур. Подберите к ним подходящие по смыслу прилагательные (или причастия), учитывая правила синтаксического согласования.*

1) Атташе, авеню, адвокат, ампула, ассорти, аэрозоль, белоручка, бра, безе, боа, боди, бродяга, видео, визави, врач, выскочка, гну, гуру, денди, доцент, евро, жалюзи, жюри, зануда, иваси, какаду, кантри, каре, кашне, кенгуру, киви, кимоно, колибри, коллега, колли, кольраби, кофе, крупье, кутюрье, лама, левша, манго, мартини, маэстро, меню, миледи, монпансье, недоросль, непоседа, ниндзя, пани, пари, педагог, пенальти, пенсне, пони, преподаватель, протеже, профессор, растяпа, резюме, рефери, сабо, салями, сирокко, спагетти, табу, такси, тамада, танго, толь, торнадо, турне, тюль, фламинго, фрау, хачапури, хиппи, цеце, цунами, шасси (склоняемые и несклоняемые существительные).

2) Айдахо, Бали, Борнео, Гоби, Дели, Калахари, Капри, Килиманджаро, Колорадо, Лимпопо, Мехико, Миссисипи, Онтарио, Сорренто, Тбилиси, Толедо, Чили (имена собственные).

3) АО, АТС, БАМ, бомж, ВТО, вуз, ГАЗ, ГОК, ГУМ, ДК, дот, ДСП, ДТП, жэк, колхоз, КПП, ЛДПР, МВД, МИД, НИИ, НХЛ, НЭП, общепит, ООН, ПК, полпред, СЕ, СМУ, СНГ, СССР, ТАУ, ТВ, ТРЦ, УЗТМ, ФГБОУ, ФМС, ФСБ, ЦУМ (аббревиатуры).

Задание 2. *Определите род у следующих сложносоставных существительных. Составьте с ними словосочетания **прил. + сущ.***

Диван-кровать, музей-квартира, генерал-губернатор, плащ-палатка, идея-фикс, конференц-зал, жар-птица, кафе-столовая, чудо-человек, матч-реванш, салон-парикмахерская, программа-максимум, женщина-космонавт, альфа-излучение, ракета-носитель, премьер-министр, кофе-пауза.

Задание 3. *Определите, какие фамилии при заполнении бланка письма или заявления будут склоняться, а какие нет. Обращайте внимание на пол человека. Запишите эти имена и фамилии в нужном падеже.*

Кому:

Сергей Левченко, Александр Живаго, Елена Сверчук, Анна Шевченко, Константин Ярош, Татьяна Чубинец, Вероника Лежава, Андрей Горенко, Борис Станкевич, Виталий Воробей, Ирина Шевчук, Иван Миклухо-Маклай, Виктор Доброво, Владислав Карамыш, Анна Диоп, Андрей Кожемяк, Мария Мицкевич, Петр Галаган, Маргарита Венда, Вадим Черных.

От кого:

⁵ При выполнении заданий пользуйтесь орфоэпическим словарем или словарем грамматических трудностей.

Николай Черныш, Наталья Седых, Светлана Карась, Семен Фоменко, Лев Щерба, Сергей Соловьев-Седой, Александр Максимаджи, Екатерина Франюк, Леонид Березняк, Юлия Родных, Максим Жук, Алёна Ремесло, Николай Стрижак, Наталия Черных, Марат Ардзинба, Вера Ноздреватых, Виктория Приходько, Евгений Столпнер, Кирилл Шапиро, Станислав Горбачевич.

Задание 33. Заполните таблицу следующими существительными, в зависимости от того, как у них образуется форма именительного падежа множественного числа.

Окончание –а/ –я	Окончание –ы/ –и	Варианты –а/ –я и –ы/ –и

Отдельно укажите существительные, у которых от выбора окончания в этой форме зависит значение (например, ордера – «документы» и ордеры – «элементы в архитектуре»).

1) Брелок, бухгалтер, ветер, вексель, возраст, герб, год, директор, договор, жемчуг, инженер, инспектор, клин, колос, купол, лектор, медвежонок, небо, окорок, офицер, отпуск, пандус, паспорт, плинтус, почерк, прииск, прожектор, профессор, ребенок, редактор, сектор, семя, слесарь, столяр, сторож, табель, токарь, тополь, трактор, хозяин, цех, чудо, шило, шофёр, штемпель.

2) Корпус, лагерь, образ, повод, полоз, полутон, провод, пропуск, прут, тормоз, хлеб.

Задание 4. Образуйте форму родительного падежа множественного числа от следующих существительных. Отметьте наличие вариантов (например, ласты – ластов и ласт).

Армяне, апельсины, басни, блюда, болгары, ботинки, брызги, буряты, валенки, гардемарины, гектары, граммы, грузины, дела, деньги, джинсы, заморозки, казахи, калории, кастрюли, килограммы, клавиши, комментарии, макароны, мандарины, мечты, микроны, мокасины, носки, осетины, партизаны, перила, перипетии, петли, плечи, полотенца, поместья, помидоры, просьбы, развилки, рельсы, русла, сани, сапоги, сбои, свадьбы, сваи, свечи, серьги, солдаты, тапочки, тиски, турки, туфли, цыгане, чукчи, чулки, южане, юнги, яблоки, ясли.

Задание 5. Раскройте скобки, заменяя цифровые обозначения словами, правильно определяя падеж числительных и существительных.

1. Выборы в Государственную Думу состоялись в (358 округов). 2. Появилась серия вспомогательных пособий с (5 735 чертежей). 3. Теплоход с (657 отдыхающих) плыл вниз по Волге. 4. За время последней экспедиции мы прошли свыше (2 580 километров). 5. Нарушения техники безопасности были выявлены на (4 893 предприятия).

Задание 6. Исправьте неверное употребление числительных в следующих предложениях:

1. Лекция по философии будет прочитана для обоих студенческих групп. 2. Мать-героиня воспитала семерых сыновей и четверых дочерей. 3. Забор тянулся по обоим сторонам улицы и ограничивал движение. 4. Двоих подруг она уже встретила по приезду в родной город. 5. Главные достопримечательности Санкт-Петербурга расположены по обеим берегам Невы.

Задание 7. Выпишите из предложений неправильно образованные грамматические формы. Запишите исправленный вариант.

1. Всем стало понятно, что еѐное предложение по реконструкции здания не будет одобрено. 2. После второго матча наша команда оказалась в более лучшем положении. 3. Староста пожаловалась преподавателю, что наша группа не влазит в аудиторию 3519. 4. Съезды в другой город, она поняла, как хорошо на родине. 5. Ремонтники уже второй месяц не могли сменить треснутое стекло в окне. 6. Он схватился за канат двумя руками. 7. Хозяйка встретила гостей в бигудях и халате. 8. Наши альпинисты покорили самые высочайшие вершины мира. 9. Я надеялся, что к началу сессии выздоровлю. 10. В этот раз студенты справились с заданием еще более хуже.

Задание 8. *Найдите нарушения морфологических норм. Запишите исправленный вариант предложений.*

1. Новый преподаватель кажется более образованнее. 2. Студенческое общежитие находится в полтора километрах от здания университета. 3. ФНС был создан как федеральный орган исполнительной власти. 4. В магазине «Лео-строй» разнообразные варианты цветных жалюзей. 5. Куратор совсем не интересовался ихними проблемами в учебе. 6. МВФ выделило очередной транш в 1,5 миллиарда долларов. 7. В столовой нельзя пользоваться лопнутыми стаканами. 8. Эту сумму мы добавим к тысяче двести сорокам рублям. 9. На конференцию молодых ученых пригласили самых умнейших студентов старших курсов. 10. Вскоре Сергей Исаев стал популярной тамадой на свадьбах и других торжествах. 11. На вновь открытое предприятие требуются бухгалтера, сторожи и инженера АСУП. 12. Южнее Сочи находится солнечное Сухуми. 13. На дипломную практику горный комбинат принял троих девушек с нашего курса. 14. Мама традиционно купила пять килограмм мандарин и апельсин для праздничного новогоднего стола. 15. Увидя раздраженное состояние преподавателя, студентка решила с ним не спорить.

ТЕМА 8. СИНТАКСИЧЕСКИЕ НОРМЫ

Цель – повторить основные правила построения словосочетаний и предложений

Основные понятия темы:

Синтаксические нормы – это правила, регулирующие порядок и связь слов в словосочетании и предложении.

Задание 1. *Раскройте скобки, правильно определив падеж зависимого слова. При необходимости используйте предлоги. Запишите получившиеся словосочетания.*

Согласно (устав университета), точка зрения (события), благодаря (поддержка друга), анонс (предстоящие гастроли), вопреки (мнение большинства), наперекор (судьба), вклад (развитие науки), жажда (слава), заведующий (кафедра), по (возвращение) из отпуска, отзыв (курсовая работа), рецензия (новый фильм), оплачивать (проезд), свидетельствовать (необходимость перемен), доказывать (новая теория), поделиться (результаты исследования), апеллировать (здравый смысл), по (прибытие) поезда; предостеречь (опасность) – предупредить (опасность), обращать внимание (недостатки) – уделять внимание (подготовка к экзаменам), уверенность (свои силы) – вера (победа).

Задание 2. *Найдите предложения, в которых неверно употреблен деепричастный оборот. Предложите свой вариант исправления.*

Образец: Подводя итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации (действие, названное деепричастием, не относится к подлежащему).

Варианты исправления: 1) Подводя итог проделанной работы, я выдвинул ряд предложений по модернизации. 2) Когда я подвел итог проделанной работы, мною был вдвинут ряд предложений по модернизации. 3) После подведения ряда итогов проделанной работы мною был вдвинут ряд предложений по модернизации.

1. Будучи ребенком, Дмитрия всегда интересовали вопросы, связанные с техникой. 2. Читая произведения русской классики, меня охватывает чувство гордости за отечественную литературу. 3. Не чувствуя ни усталости, ни голода, наш путь к вершине продолжался. 4. Узнав эту прекрасную новость, радости студентов не было предела. 5. Первым, слегка хромая, из автобуса вышел седой старик. 6. Записываясь на практику, у студентов были очень ограничены возможности выбора места ее прохождения. 7. Вспоминая родные места, мне видится наш маленький кирпичный домик в тени тополей. 8. Глядя на ярко освещенные стены Зимнего дворца, у меня возникло желание приехать сюда еще раз. 9. Позвонив в третий раз, он с грустью понял, что никого нет дома. 10. Произведя ряд расчетов, задача была решена студентами в течение 15 минут.

Задание 3. Найдите предложения, в которых неправильно согласовано подлежащее со сказуемым. Запишите исправленный вариант.

1. Много знаменитых людей закончили наш университет. 2. Немало средств были потрачены на восстановление полуразрушенного памятника архитектуры. 3. Несколько важных дат будут отмечены в календаре помимо официальных государственных праздников. 4. На собрание по поводу летней практики явились лишь 31 студент. 5. Часть студентов не справились с итоговой контрольной работой. 6. Множество горожан приняли участие в шествии «Бессмертного полка». 7. Ряд важных вопросов не были решены во время последнего заседания Ученого совета. 8. Половина участников соревнований были размещены в студенческом общежитии. 9. Тысяча периодических изданий имеются в открытом доступе в электронной библиотеке. 10. Газета «Екатеринбургские новости» опубликовали интересную статью о творчестве молодых поэтов и писателей Урала.

Задание 4. Найдите нарушения синтаксических норм. Запишите исправленный вариант предложений.

1. Согласно распоряжения ректора всем студентам и сотрудникам необходимо пройти флюорографический осмотр. 2. Открыв дверь в аудиторию, перед моими глазами предстала странная картина. 3. Важно изучать условия жизни человека и как они связаны с процессами, происходящими сегодня в нашем обществе. 4. Молодежь всегда принимали участие в студенческой самодеятельности и спортивных мероприятиях. 5. В своей новой статье автор исследует и размышляет о возможностях искусственного интеллекта. 6. Приказ был подписан ректором университета, устанавливающий обязательное посещение занятий, и доведен до сведения сотрудников вуза, преподавателей и студентов. 7. Несколько членов Ученого совета не присутствовали на очередном заседании. 8. В район приехал инструктор для подготовки специалистов по борьбе с сельскохозяйственными вредителями из местных жителей. 9. Ученики горного лицея поступают в престижные учебные заведения, родители которых гордятся их успехами в учебе. 10. Можно было согласиться лишь с теми положениями доклада, где приводились статистические данные для подтверждения гипотезы. 11. Сдав нормативы ГТО, большинству из нас был вручен золотой значок. 12. Учебное пособие не

только предназначено для преподавателей, а также и для студентов и аспирантов. **13.** Скоро будет заселен многоквартирный дом, выросший на глазах за несколько месяцев и который уже приняла комиссия. **14.** Нам предложили поселиться в номере-люкс новой гостиницы для туристов с видом на море. **15.** Преподаватель попросил студентов, чтобы они ему напомнили на следующем занятии, чтобы он им распечатал раздаточный материал к семинарскому занятию.

ТЕМА 9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТИЛЕЙ

Цель – повторить систему функциональных стилей русского языка, научиться определять стиль текста и доказывать свою точку зрения в этом вопросе.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Функциональный стиль – это исторически сложившаяся и социально осознанная разновидность языка, функционирующая в определенной сфере человеческой деятельности и общения, создаваемая особенностями употребления в этой сфере языковых средств и их специфической организацией.

В основе классификации стилей лежат экстралингвистические факторы: сфера применения языка, обусловленная ею тематика и цели общения. Сферы применения языка соотносятся с видами деятельности человека, соответствующими формам общественного сознания: наука, идеология, право, искусство, религия. Выделяются стили официальной речи (книжные): **научный, официально-деловой, публицистический, литературно-художественный, церковно-религиозный.** Им противопоставлен стиль неофициальной речи – **разговорный**, экстралингвистической основой которого является сфера бытовых отношений и общения (быт как область отношений людей вне их непосредственной производственной и общественно-политической деятельности).

Сферы применения языка в значительной мере влияют на тематику и содержание высказывания. Каждая из них имеет свои актуальные темы. Например, в научной сфере обсуждаются проблемы научного познания мира, в сфере бытовых отношений – бытовые вопросы. Однако в разных сферах может обсуждаться одна и та же тема, но цели преследуются неодинаковые, вследствие чего высказывания различаются и по содержанию, и по форме (см. **Задание 1**).

Каждый стиль обладает определёнными языковыми особенностями (прежде всего лексическими и грамматическими). Можно говорить лишь об относительной замкнутости функциональных стилей: большинство языковых средств в каждом стиле нейтральные, межстилевые. Однако ядро каждого стиля образуют присущие именно ему языковые средства с соответствующей стилистической окраской и едиными нормами употребления.

Следует отбирать слова и конструкции в соответствии с выбранным стилем, особенно в письменной речи. Употребление разностилевых языковых средств в рамках одного текста ведет к появлению стилистических ошибок. Часто встречаются ошибки, связанные с неуместным употреблением канцеляризованных, а также злоупотреблением специальными терминами в ненаучном тексте и использованием разговорной и просторечной лексики в книжных текстах (см. **Задание 2**).

Можно сделать вывод, что **стилистические нормы** – это 1) правила употребления языковых средств в соответствии с выбранным стилем и 2) правила выбора стиля, соответствующего условиям общения.

Таким образом, специфические черты каждого функционального стиля можно описать, ориентируясь на целый ряд признаков, которые обозначаются как **стилеобразующие факторы**, а также на его стилевые и языковые особенности. Кроме того, каждый стиль включает в себя тексты разных жанров (см. **Задание 3**).

Функциональный стиль	Стилеобразующий фактор						Жанры
	Доминирующая языковая функция	Форма общественно-го сознания	Основная форма речи	Типичный вид речи	Тон речи	Тип адресата	
Научный	Сообщение	Научное сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный	Массовый (подготовленный к восприятию научной информации)	Учебник, монография лекция, научная статья, аннотация, реферат, конспект, тезисы, курсовая работа, выпускная работа, диссертация, доклад
Официально-деловой	Сообщение / воздействие	Правовое сознание	Письменная	Монолог	Нейтральный / императивный	Массовый	Конституция, закон, приказ, указ, распоряжение, положение, регламент, заявление, автобиография, резюме, характеристика
Публицистический	Сообщение + воздействие	Идеологическое сознание	Письменная и устная	Монолог и диалог	Обусловленный содержательно	Массовый	Репортаж, интервью, очерк, дискуссионное выступление, статья, информационная заметка
Литературно-художественный	Воздействие	Эстетическое сознание	Письменная	Обусловленный родом и жанром литературы	Обусловленный эстетической задачей	Массовый (подготовленный к восприятию классических произведений)	Роман, повесть, рассказ, новелла, стихотворение, поэма, баллада
Церковно-религиозный	Воздействие	Религиозное сознание	Письменная и устная	Монолог	Обусловленный ситуативно	Массовый	Исповедь, проповедь, житие, молитва
Разговорный	Общение	Обыденное сознание	Устная	Диалог и полилог	Обусловленный ситуативно	Личный (конкретный собеседник)	Дружеская беседа, семейная беседа, бытовой спор, байка

Задание 1. Прочитайте тексты, посвященные одной теме. Определите функционально-стилевую принадлежность текстов, опираясь на стилеобразующие факторы и языковые особенности каждого из них.

Текст 1

Гроза – атмосферное явление, заключающееся в электрических разрядах между так называемыми кучево-дождевыми (грозовыми) облаками или между облаками и земной поверхностью, а также находящимися над ней предметами. Эти разряды – молнии – сопровождаются осадками в виде ливня, иногда с градом и сильным ветром (иногда до шквала). Гроза наблюдается в жаркую погоду при бурной конденсации водяного пара над перегретой сушей, а также в холодных воздушных массах, движущихся на более теплую подстилающую поверхность.

Текст 2

Как передает наш корреспондент, вчера над центральными районами Пензенской области прошла небывалой силы гроза. В ряде мест были повалены телеграфные столбы, порваны провода, с корнем вырваны столетние деревья. В двух деревнях возникли пожары в результате удара молнии. К этому прибавилось еще одно стихийное бедствие: ливневый дождь вызвал сильное наводнение. Нанесен значительный ущерб сельскому хозяйству. Временно было прервано железнодорожное и автомобильное сообщение между соседними районами.

Текст 3

Доводим до Вашего сведения, что вчера после полуночи над районным центром – городом Нижний Ломов и прилегающей к нему сельской местностью – пронеслась сильная гроза, продолжавшаяся около получаса. Скорость ветра достигала 30-35 метров в секунду. Причинен значительный материальный ущерб жителям деревень Ивановка, Щепилово и Вязники, исчисляемый, по предварительным данным, сотнями тысяч рублей. Имели место пожары, возникшие вследствие удара молнии. Сильно пострадало здание школы в деревне Курково, для его восстановления понадобится капитальный ремонт. Вышедшая из берегов в результате проливного дождя река Вад затопила значительную площадь. Человеческих жертв нет. Образована специальная комиссия для выяснения размеров причиненного стихийным бедствием ущерба и оказания помощи пострадавшему местному населению. О принятых мерах будет незамедлительно доложено.

Текст 4

Ты не поверишь, какая гроза прошла вчера над нами! Я человек не робкого десятка, и то испугался насмерть.

Сначала все было тихо, нормально, я уже собирался было лечь, да вдруг как сверкнет молния, бабахнет гром! И с такой силищей, что весь наш домишко задрожал. Я уже подумал, не разломалось ли небо над нами на куски, которые вот-вот обрушатся на мою несчастную голову. А потом разверзлись хляби небесные... В придачу ко всему наша безобидная речушка вздулась, распухла и ну заливать своей мутной водицей все вокруг. А совсем рядом, что называется – рукой подать, загорелась школа. И стар и млад – все повысыпали из изб, толкутся, орут, скотина ревет – вот страсти какие! Здорово я перепугался в тот час, да, слава Богу, все скоро кончилось.

Текст 5

При Крещении священник крестообразно помазывает лоб христианина святым миром, говоря: «Печать дара Духа Святаго». Впоследствии всякий раз, когда христианин осеняет себя крестным знамением, он поклоняется спасительной Страсти Господней и призывает крестную

силу, иже есть сила крестной смерти нашего Христа. Говоря: «Кресте Христов, спаси нас силою твоею», мы призываем силу крестной жертвы Господа. Поэтому крест обладает великой силой. Например, началась гроза. Сверкают молнии, и в большой железный крест на колокольне тоже может ударить молния. Однако, если стоящий под этим железным крестом христианин имеет на себе вот такой маленький крестик и говорит: «Кресте Христов, спаси мя силою твоею», то молния ему не повредит. В первом случае действуют природные законы: молния попадает в крест и сбивает его на землю. Во втором случае такой вот малюсенький крестик хранит верующего человека, призвавшего на помощь силу Креста.

Текст 6

Между далью и правым горизонтом мигнула молния, и так ярко, что осветила часть степи и место, где ясное небо граничило с чернотой. Страшная туча надвигалась не спеша, сплошной массой; на ее краю висели большие, черные лохмотья; точно такие же лохмотья, давя друг друга, громоздились на правом и на левом горизонте. Этот оборванный, разлохмаченный вид тучи придавал ей какое-то пьяное, озорническое выражение. Явственно и не глухо проворчал гром. Егорушка перекрестился и стал быстро надевать пальто.

Вдруг рванул ветер и со свистом понесся по степи, беспорядочно закружился и поднял с травой такой шум, что из-за него не было слышно ни грома, ни скрипа колес. Он дул с черной тучи, неся с собой облака пыли и запах дождя и мокрой земли. Лунный свет затуманился, стал как будто грязнее, звезды еще больше нахмурились, и видно было, как по краю дороги спешили куда-то назад облака пыли и их тени.

Чернота на небе раскрыла рот и дыхла белым огнем; тотчас же опять загредел гром.

Дождь почему-то долго не начинался... Было страшно темно. А молнии в потемках казались белее и ослепительнее, так что глазам было больно.

Вдруг над самой головой его [Егорушки] со страшным, оглушительным треском разломалось небо; он нагнулся и притаил дыхание, ожидая, когда на его затылок и спину посыпятся обломки... Раздался новый удар, такой же сильный и ужасный. Небо уже не гремело, не грохотало, а издавало сухие, трескучие, похожие на треск сухого дерева звуки.
(А. П. Чехов. *Степь*)

Задание 2. Найдите в следующих предложениях стилистические ошибки и запишите исправленный вариант.

1. Некоторым министрам необходимо включить мозги, чтобы до них дошло, что на прожиточный минимум люди в России могут только существовать. 2. В статье сообщается, что левые лекарства отслежат по аптекам и конфискуют. 3. Мэр города рассказал, что в настоящее время ведется возведение двух бюджетных высоток в Пионерском поселке. 4. Новый сотрудник редакции сумел нарыть некий компромат на верхушку министерства, но опубликовать материалы ему не дали. 5. Директор гимназии был в ауте, когда ему сообщили, что гимназия получила-таки грант в размере 1 млн. рублей. 6. Бытие в хрущевках и интенсивные трудовые затраты скрашивала душевная атмосфера, царившая в те годы в коллективе. 7. Благополучие родных деревень отстаивает наш председатель, который по восемнадцать часов в сутки мотается по полям, фермам, частит по делам в Екатеринбург. 8. Трудно понять, почему ученый допустил такую промашку в расчетах. 9. Семь школ, которые дислоцируются в нашем районе, переполнены, поэтому некоторым детям приходится ездить за тридевять земель. 10. Избранников народа одолевает такое количество проблем, что у некоторых уже крыша поехала.

Задание 3. *Определите, к какому стилю принадлежит каждый из предложенных текстов⁶. Попробуйте обосновать свою точку зрения.*

Текст 1

В психологии и этике делового общения речь пойдет не столько об абстрактных общепсихологических категориях и принципах, сколько о профессиональных психологических и в то же время практически ориентированных знаниях, которые могут обеспечить успех той или иной деятельности. Под **деловым** понимается общение, обеспечивающее успех какого-то общего дела, создающее условия для сотрудничества людей, чтобы осуществить значимые для них цели. Деловое общение содействует установлению и развитию отношений сотрудничества и партнерства между коллегами по работе, руководителями и подчиненными, партнерами, соперниками и конкурентами. Оно предполагает такие способы достижения общих целей, которые не только не исключают, но, наоборот, предполагают также и достижение лично значимых целей, удовлетворение личных интересов.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 2

Веруем в Единого Бога Отца Всмогущего, Творца неба и земли.

Веруем также в Иисуса Христа, Его Единородного Сына и Господа нашего, Который был зачат Духом Святым, рожден девою Марией, Который страдал во времена Понтия Пилата, был распят, умер и был погребен, сошел в царство смерти, на третий день воскрес из мертвых, вознеся на Небо и воссел одесную Всмогущего Бога Отца, откуда вернется судить живых и мертвых.

Веруем также во Святого Духа, Святую Соборную Церковь, собрание святых, в прощение грехов, воскресение мертвых и жизнь вечную.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 3

В Горном университете прошел День открытых дверей. На площадке перед Большим актовым залом – Залом УГМК развернулся настоящий наукоград: кроме презентации различных направлений подготовки, школьников ждали специализированные мастер-классы.

Об основах робототехники будущим абитуриентам рассказывали сотрудники кафедры горных машин и комплексов и робот Герман. О далеких экспедициях и романтике походов – студенты-геологоразведчики. У стенда **Уральского геологического музея** ребята рассматривали минералы под микроскопом, а вместе с инструкторами **студенческого патриотического центра «Святогор»** учились основам безопасного обращения с оружием.

⁶ Задание может быть выполнено как тестовое.

Всего на **День открытых дверей** в **Горный университет** пришли около тысячи школьников. Многие из них уже серьезно задумались о том, чтобы стать частью дружной семьи горняков.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 4

В соответствии с Федеральным законом от 18.06.2001 N 77-ФЗ «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», Постановлением Правительства РФ от 25.12.2001 N 892 «О реализации Федерального закона «О предупреждении распространения туберкулеза в Российской Федерации», санитарно-эпидемиологическими правилами СП 3.1.2.3114-13 «Профилактика туберкулеза» и в целях раннего выявления заболеваний органов грудной клетки среди студентов и сотрудников университета

ПРИКАЗЫВАЮ:

Организовать с 10 апреля по 12 мая 2017 года флюорографический профилактический осмотр студентов и сотрудников университета в передвижном цифровом флюорографическом кабинете, установленном во дворе I учебного здания, с предъявлением каждым студентом и сотрудником копии полиса обязательного медицинского страхования.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 5

Страны, которые являются участниками процесса торговли минеральным сырьем, решают разные задачи, что отражается на структуре их экономики, влияет на характер воспроизводственных процессов, порождает специфические для каждой страны проблемы. Взаимодействие экспортеров и импортеров сырья накладывает отпечаток на международные отношения, являясь причиной возникновения конфликтов, создания экономических и военно-политических союзов. Стремление к поддержанию и расширению экспорта вызывает дополнительные потребности в производстве сырья внутри страны, в развитии минерально-сырьевой базы. Импорт сырья следует рассматривать как источник удовлетворения потребностей и стимулирование развития несырьевых отраслей.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 6

Отец наш шибко тада заболел // У него было очень большое сердце // А что такое большое сердце в те годы / это же неизлечимая болячка! Он работал у нас мастером в заводе / в формовочном цехе / где делались изделия для сталелитейного завода / для нижнетагильского // Ковшовые кирпичи / розетки / воронки всякие / сифоны / вообще / всякая всячина // Всё было для фронта / всё для победы // Щас этого никто не понимает / особенно нынешняя молодёжь // Какие же тяжёлые дни пережило наше поколение! И не дай вам Бог узнать / что

такое война! Да даже твои родители ещё воспитывались в этом послевоенном духе // Ну да ладно / всё равно меня трудно понять...

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 7

Реклама работает на подсознательном уровне, обращается к иррациональному в природе человека. Ее влияние и глубже и сильнее, чем мы думаем, потешаясь над каким-нибудь слабоумным персонажем вроде пропагандиста бытовой техники. Кого и в чем может убедить этот шут гороховый? Оказалось – нас. Но не в том, что его товары дешевле и лучше, а совсем в другом – в преимуществе нового образа жизни.

От рекламы не требуется реализма. Задавая высокие нравственные стандарты, она порождает особое позитивное мышление. Задача рекламы состоит в том, чтобы потребитель подсознательно стремился отождествить себя с героем «коммершелз». Тогда он купит сковородку не для того, чтобы жарить яичницу, а для того, чтобы стать участником идеальной экранной жизни.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 8

Наутро поднявшееся яркое солнце быстро съело тонкий ледок, подернувший воды, и весь теплый воздух задрожал от наполнивших его испарений отжившей земли. Зазеленела старая и вылезавшая иглами молодая трава, надулись почки калины, смородины и липкой спиртовой березы, и на обсыпанной золотым светом лозине загудела выставленная облетававшая пчела. Залились невидимые жаворонки над бархатом зеленей и обледеневшим жнивьем, заплакали чибисы над налившимися бурю неубравшеюся водой низами и болотами, и высоко пролетели с весенним гоготаньем журавли и гуси. Заревела на выгонах облезшая, только местами еще не перелинявшая скотина, заиграли кривоногие ягнята вокруг теряющих волну блеющих матерей, побежали быстроногие ребята по просыхающим, с отпечатками босых ног тропинкам, затрещали на пруду веселые голоса баб с холстами, и застучали по дворам топоры мужиков, налаживающих сохи и бороны. Пришла настоящая весна.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 9

К нашему большому сожалению, мы должны сообщить Вам, что партия лакокрасочных материалов, отгруженных Вами на судне «Ленинград» по контракту 27-005/40289, не соответствует по качеству нашим спецификациям, на основании которых был заключен контракт.

Согласно параграфу № 03 в договоре, мы имеем право отказаться от приемки этой партии товара. Однако, принимая во внимание наши длительные деловые отношения и то

обстоятельство, что предыдущие поставки лакокрасочных материалов в счет данного контракта были произведены в соответствии с условиями договора и надлежащего качества, мы согласны принять эту партию товара, если Вы предоставите нам скидку в 10 %.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 10

Человек должен быть широк. Из универсализма вытекает креативность, а ЕГЭ не обеспечивает ни того, ни другого. Даже те ребята, которые прекрасно сдали тесты по выбранным предметам, далеко не всегда в состоянии объяснить, откуда взялись все эти ответы, вывести их самостоятельно. А предложение «докрутить» чуть дальше и глубже вообще ставит в тупик: «Почему вы у нас спрашиваете то, что вы нам не рассказали?» Но креативность как раз и состоит в умении давать такие ответы. Учащийся – это же не шляпа, в которую положили кролика, чтобы его же и достать. Это неинтересно.

Убрать ЕГЭ нельзя. Но если оставить все как есть, мы обречены на дальнейшее отставание в науке, в любых творческих профессиях. Поэтому необходимо уточнить функционал ЕГЭ. А для этого надо все же назвать кошку кошкой и понять, что такое образование.

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

Текст 11

На религию после революции 1917 года было наложено так называемое табу. Христианское вероисповедание и все реалии, связанные с ним, воспринимались только как культурное наследие и пережиток царского режима. Соборы и церкви были лишь памятниками архитектуры, жития святых – памятниками литературы, иконы и фрески – памятниками художественного творчества. Очень многие храмы были разрушены или применялись не по своему прямому назначению; они становились складами, конторами, монастыри превращались в тюрьмы и колонии. Люди, особенно священнослужители, преследовались за свою веру. Как следствие, лексика религиозного характера со временем стала постепенно переходить в пассивный состав языка, используясь в основном в составе фразеологизмов и афоризмов (как Бог на душу положит; как у Христа за пазухой; человек предполагает, а Бог располагает). Некоторые слова изменили свою семантику (воскресение, братия), многие приобрели в современном русском языке отрицательную окраску (вертеп).

1) разговорному	4) научному
2) художественному	5) публицистическому
3) официально-деловому	6) церковно-религиозному

ТЕМА 10. НАУЧНЫЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой научного стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности научных текстов.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Научный стиль – один из важнейших функциональных стилей литературного языка, относящийся к письменно-книжному типу речи и обслуживающий сферу науки и производства. Цель текста научного стиля может заключаться в передаче объективной информации о природе, человеке и обществе, доказательстве ее новизны, истинности или ценности.

Основные стилевые черты научного стиля:

– **объективность**, которая проявляется в изложении разных точек зрения на рассматриваемую проблемы, в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения, в сосредоточенности на предмете высказывания;

– **логичность**, которая проявляется в последовательности и непротиворечивости изложения научной теории и создается с помощью особых синтаксических конструкций (сложные предложения с придаточными причины, условия, следствия; предложения с вводными словами *во-первых, во-вторых, наконец, итак, следовательно* и др.);

– **доказательность**, которая проявляется в цепочке рассуждений, аргументации определенных положений и гипотез;

– **точность**, которая достигается благодаря использованию терминов (т. е. слов и словосочетаний, обозначающих понятия особой области знания или деятельности), однозначных слов; четким оформлением синтаксических связей;

– **обобщенность и отвлеченность**, которые проявляются в отборе слов (преобладание имен существительных над глаголом, общенаучные слова, имена существительные с абстрактным значением, конкретные существительные в обобщенном значении), в употреблении грамматических форм (глаголы настоящего времени во «вневременном» значении, возвратные и безличные глаголы, преобладание форм 3-го лица, форм несовершенного вида), в использовании синтаксических конструкций (неопределенно-личные предложения, страдательные обороты), в существовании авторского «мы», характерного только для научного стиля;

– **насыщенность фактической информацией**;

– **отсутствие выражения эмоций** (отсутствуют разговорные элементы, эмоционально-экспрессивная лексика, неполные конструкции и т. п.).

Основные языковые особенности научного стиля:

Языковые особенности			Примеры	
Лексические				
1) термины			обогащение	полезных ископаемых, месторождение, осадочные породы, смешанослойный минерал, рудное тело и др.
2) общенаучная лексика			закон, теория, аспект, носитель, конструкция и др.	
3) книжная лексика абстрактного значения			применение, явление, замедление, обязательство, подготовка и др.	
Морфологические				
1) частотность существительных			(Примерно 40 % существительных на единицу текста)	

2) частотность форм родительного падежа существительных

попадание в водоемы масло-смазывающих продуктов (род. п.) отдельных узлов (род. п.) механического оборудования (род. п.) гидротехнических сооружений (род. п.) и т. п.

3) широкое использование существительных среднего рода

отношение, употребление, дело, доказательство, заполнение и др.

4) преобладание глаголов несовершенного вида настоящего времени

равняется, оказывается, возрастает, наблюдается, составляет и др.

5) полужнаменательные глаголы-связки

есть, быть, являться

6) употребление причастий и деепричастий

подчеркнутый, обрабатываемый, соответствующий; замечая, решая, сменив и др.

Синтаксические

1) вводные слова и конструкции

вероятно, возможно, таким образом; по словам ученых, по мнению большинства исследователей и др.

2) бессубъектные конструкции

карьер был разработан; оборудование было закуплено; проект был одобрен и др.

3) безличные предложения

необходимо отметить; следует подчеркнуть; можно сделать ряд выводов и др.

4) обобщенно-личные предложения

подчеркнем следующие положения; выделим важные особенности; отметим ряд недостатков и др.

5) цепочки однородных членов

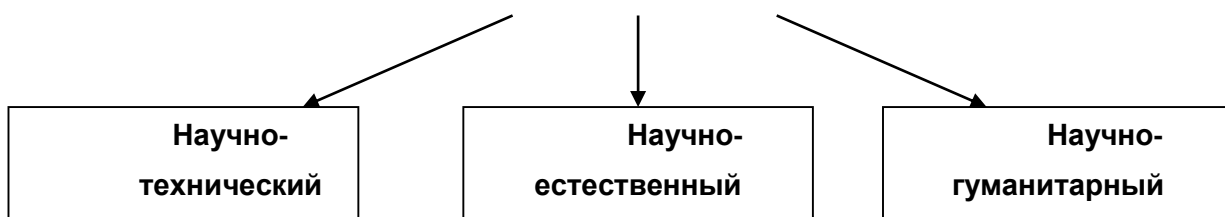
Хорошие каталоги Интернета обеспечивают разнообразный дополнительный сервис: поиск по ключевым словам в базе данных, списки последних поступлений, списки наиболее интересных из них, выдачу случайной ссылки, автоматическое оповещение по электронной почте о свежих поступлениях.

6) многокомпонентные сложные предложения с союзной связью

Если эксперимент оправдывает надежды, то гипотеза детализируется и конкретизируется, а затем ставится новый эксперимент.

Подстили научной речи:

Тематические



(с соответствующим жанром)



Задание 1. Проанализируйте текст по следующей схеме:

1. Охарактеризуйте текст по стилеобразующим факторам научного стиля.
2. Докажите принадлежность текста к научному стилю с опорой на основные стилевые черты.
3. Определите отнесенность текста к тематическому и функциональному подстилю научного стиля.
4. Составьте план текста и сформулируйте главную мысль.
5. Выделите в тексте языковые особенности научного стиля.

Вариант 1: ПРИКЛАДНАЯ ГЕОЛОГИЯ⁷

В геологии существует более ста различных специальностей и специализаций. Одни из них тесно связаны с химией (геохимическое направление), другие – с физикой (геофизическое направление), третьи – с биологией (палеонтологическое и палеобиологическое направления), четвертые – с математикой и кибернетикой (компьютерное моделирование геологических процессов), пятые – с астрономией и астрофизикой (космическая геология) и т. д.

В недрах Земли находятся залежи полезных ископаемых, вопросами поиска и разведки которых занимается геология. На земной поверхности протекают разнообразные геологические процессы, люди возводят здания и различные инженерные сооружения, строят транспортные магистрали. Задачей геологов является обеспечение их устойчивости и безопасного функционирования. Правильное решение этих двух основных практических задач невозможно без глубокого знания общих закономерностей строения и развития отдельных геосфер. Раскрытие данных закономерностей и познание лежащих в их основе причин невозможны без изучения всей Земли, так как наша планета представляет собой единую природную среду и развивается так же, как и все планеты Солнечной системы.

Знание происхождения и эволюции Земли, условий образования и развития земной коры, ее строения и состава во взаимодействии с внешними оболочками – водной (гидросферой) и воздушной (атмосферой), а также с внутренними оболочками – земным ядром и мантией – составляет необходимое звено мировоззрения. Оно позволяет понять, как осуществляется постепенный переход от неживого неорганического мира к органическому, как эволюционируют живые существа и вместе с ними изменяются геологические процессы.

Велико и познавательное значение геологии как науки о Земле, ее строении, происхождении и развитии. Она затрагивает проблемы происхождения и эволюции жизни и

⁷ Геология: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Н. В. Короновский, Н. А. Ясаманов. – 7-е изд., перераб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 6-7.

природных условий. Геология всегда стояла в центре ожесточенной борьбы научных воззрений и научных школ против религиозных предрассудков.

Практическое значение геологии огромно и разнообразно. Весь арсенал современной науки и техники основан на использовании продуктов земных недр – нефти, угля, различных металлов, строительных материалов, подземных вод и др. Воды минеральных источников используют в лечебных и бальнеологических целях. Для поисков, разведки и извлечения разнообразного минерального сырья из земных недр требуется прежде всего разработка методов обнаружения залежей полезных ископаемых, которые необходимы для промышленности, сельского хозяйства и строительства.

Среди полезных ископаемых различают рудные, или металлические, из которых добывают различные металлы, и нерудные, или неметаллические. Из последних добывают удобрения, каменную соль, серу, строительные материалы, драгоценные (алмаз, рубин, сапфир, изумруд), полудрагоценные (аметист, циркон, топаз, цитрин, нефрит, малахит и др.) и поделочные камни (яшма, кварциты и др.), а также горючие полезные ископаемые (нефть, каменный и бурый уголь, горючие сланцы, газ). Подземные воды (пресные и минеральные) также являются полезными ископаемыми. Поисками залежей подземных вод и практическим их использованием занимается специальная отрасль геологии – гидрогеология. В особые научные дисциплины выделились геология рудных и геология нерудных месторождений, геология горючих полезных ископаемых. Без знания геологического строения территории не обходится ни одно строительство промышленных и гражданских зданий, транспортных магистралей, трубопроводов и средств связи. Эта особая отрасль геологии именуется инженерной геологией. Работами, проводимыми в районах развития многолетней мерзлоты, занимается такая наука, как мерзлотоведение.

Все перечисленные специальные научные дисциплины образуют самостоятельный раздел геологии, который называется *практической*, или *прикладной*, геологией.

ВАРИАНТ 2: ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ⁸

Современная мировая экономика характеризуется неуклонным ростом потребления минерального сырья, расширением круга используемых в промышленности элементов, вовлечением в производство новых типов месторождений полезных ископаемых. Укрепление и совершенствование минерально-сырьевой базы России – основная задача геологической службы.

Обеспечение ресурсами и запасами не только действующих отраслей горнодобывающей промышленности, но и ее перспективных направлений требует оперативного решения проблемы освоения новых видов полезных ископаемых. Успешное осуществление геолого-разведочных работ возможно лишь при условии постоянного совершенствования теории и методов поисков и разведок месторождений полезных ископаемых. Результативность геолого-разведочной отрасли определяется уровнем научных и методических разработок, степенью использования современных поисково-разведочных средств.

⁸ Геология и разведка месторождений полезных ископаемых: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / [В. В. Авдонин, В. В. Мосейкин, Г. В. Ручкин и др.]; под ред. В. В. Авдонова. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. С. 5-6.

Научные основы поисков и разведок месторождений полезных ископаемых созданы трудами нескольких поколений отечественных геологов, среди которых в первую очередь необходимо назвать Г. Д. Ажгирея, Я. Н. Белевцева, А. Г. Бетехтина, Ю. А. Билибина, П. П. Бурова, А. Б. Каждана, В. М. Крейтера, В. А. Обручева, А. П. Прокофьева, В. И. Смирнова, С. С. Смирнова, А. А. Якжина и др.

Многими ведущими учеными были написаны замечательные учебники и методические руководства по поискам и разведкам месторождений, не утратившие своего значения до настоящего времени. Тем не менее в последние годы произошли существенные изменения в самой структуре минерально-сырьевой базы, оценке перспектив использования природных ресурсов и методов их вовлечения в промышленное использование.

В геолого-разведочной отрасли можно отметить несколько областей, в которых наблюдаются наиболее значимые изменения.

Во-первых, это касается совершенствования теории и методики поисковых работ. Во-вторых, широкое внедрение компьютерных технологий во все направления геолого-разведочного процесса качественно изменило методику подсчета запасов и оценки месторождений на всех стадиях их освоения.

Существенные изменения происходят и в методике добычных работ, в особенности в связи с требованиями экологической безопасности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное обстоятельство. Наряду с неуклонно возрастающей потребностью в различных видах минерального сырья отчетливо проявляется тенденция истощения минерально-сырьевой базы, снижения открываемости новых месторождений, вовлечения в промышленное производство неблагоприятных по геологической позиции месторождений и руд более низкого качества. Эти причины стимулируют повышенный интерес к минерально-сырьевому потенциалу Мирового океана. Вследствие интенсификации научно-исследовательских и поисково-разведочных работ в океане в последние годы сложилась качественно новая ситуация – возникла необходимость решения проблем освоения минерально-сырьевых ресурсов океана в практической плоскости, что ознаменовалось интенсивными усилиями по разработке теоретических основ, методики и технических средств морских геолого-разведочных работ.

Авторский коллектив настоящего учебника постарался отразить в нем все важнейшие достижения, касающиеся поисков, разведки и эксплуатации месторождений и характеризующие современное состояние геолого-разведочной отрасли.

Вариант 3: ОСНОВЫ ГОРНОГО ДЕЛА⁹

Полезные ископаемые, располагающиеся в земной коре в пределах территории страны, образуют ее минерально-сырьевую базу. Эти природные ресурсы называют богатством недр государства.

Добычу полезных ископаемых обеспечивают горно-добывающие отрасли промышленности, перспективы развития которых зависят прежде всего от состояния природных ресурсов. Их освоение играет важнейшую роль в развитии экономики России.

В нашей стране выявлены в промышленных концентрациях все виды минерального сырья, используемого в мировой практике.

⁹ Городниченко В. И., Дмитриев А. П. Основы горного дела: учебник для вузов. М.: Издательство «Горная Книга», Издательство московского государственного горного университета, 2008. С. 7-8.

Оценка прогнозных ресурсов, которую сегодня осуществляют в основном до глубины освоенных промышленностью недр, составляющей для твердых полезных ископаемых около 1 км, свидетельствует о том, что в России в обозримом будущем исчерпания минеральных ресурсов не предвидится, тем более что результаты исследований сверхглубоких скважин подтверждают наличие промышленных концентраций полезных компонентов на глубинах до 10 км.

По данным Министерства природных ресурсов России, в нашей стране 60–70 % запасов важнейших видов полезных ископаемых сосредоточено в ограниченном числе крупных месторождений. В настоящее время сохраняют свое значение освоенные крупные месторождения полезных ископаемых и имеют большие перспективы развития месторождения в регионах Сибири, Дальнего Востока и Севера.

В Сибири находится около 84 % разведанных запасов угля России (категории А, В, С₁), из них бурых и каменных углей примерно поровну. В этих запасах сосредоточено до 90 % коксующихся углей России и около 85 % особо ценных для коксования углей марок ГЖ, Ж, КЖ, К, ОС.

В настоящее время в Сибири, включая республику Саха, добывается около 70 % углей России. Как считают эксперты, этот показатель будет возрастать в связи с сокращением добычи угля в европейской части страны, а также на Урале и Дальнем Востоке. Можно предположить, что основная роль в обеспечении потребностей страны в углях в будущем будет принадлежать Кузбассу.

Повышение эффективности производства имеет особое значение для горнодобывающих отраслей промышленности, которые обеспечивают топливом, минеральным сырьем и материалами многие отрасли экономики страны: черную и цветную металлургию, энергетику, химическую, строительных материалов, сельское хозяйство и др.

Результаты работы горных предприятий в значительной степени определяют уровень эффективности производства во всех других отраслях, потребляющих их продукцию.

Так, в общих затратах на производство цветных металлов затраты на добычу руды составляют более 50 %. В затратах на производство электроэнергии 60–70 % составляют затраты на топливо.

Повышение эффективности горного производства должно осуществляться путем его технического перевооружения, обеспечивающего снижение затрат на производство продукции, повышение качества продукции, экономное и рациональное использование трудовых и материальных ресурсов, комплексное освоение богатства земных недр.

Задание 2. *Отредактируйте предложения таким образом, чтобы они соответствовали научному стилю, запишите исправленный вариант. Определите, с чем связаны допущенные ошибки.*

1. В своей курсовой работе я хотел бы ответить на очень актуальные в наше нелегкое время вопросы. 2. Авторы этих статей абсолютно неправильно думают, что только их точка зрения имеет право на существование. 3. Выводы оказались неожиданными, на первый взгляд просто сумасшедшими. 4. Однако вначале необходимо разобраться, есть ли угроза энергетического голода. 5. Мне кажется, что первый способ решения проблемы более целесообразный. 6. Стоит представить, а какой будет польза от этого изобретения. 7. Компьютерный вирус – это сильный паразит! 8. Современное состояние экономики, энергетики и экологии выдвигает необходимость проведения междисциплинарных исследований. 9. Это приводит к необходимости изыскания и выделения огромных усилий

общества, чтобы противостоять результатам экологически опасных действий. **10.** В настоящее время сетевые технологии претерпевают бурное развитие. **11.** Свобода в современной России – это не столько свобода сотрудничества и доброжелательного диалога, как своевольное навязывание своего понимания свободы ради сокрушения чужой. **12.** Математическая модель включала в себя систему уравнений, описывающая течение газа около криволинейной поверхности. **13.** Земля должна рассматриваться как некая квазизамкнутая система, ресурс жизнеобеспечения которой большой, но ограничен. **14.** Изучение новых материалов дает свои плоды. **15.** Используя метод аналогий, на кафедре систем управления разработан комплекс программных средств для изучения систем путем их моделирования.

ТЕМА 11. ОФИЦИАЛЬНО-ДЕЛОВОЙ СТИЛЬ

Цель – познакомиться со спецификой официально-делового стиля, научиться определять основные стилевые и языковые особенности документов, их жанр, видеть реквизиты.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (основные понятия выделены в тексте):

Официально-деловой стиль – это стиль, который обслуживает правовую и административно-общественную сферы деятельности. Он используется при написании документов, деловых бумаг и писем в государственных учреждениях, суде, а также в разных видах делового устного общения.

Среди книжных стилей официально-деловой стиль выделяется относительной устойчивостью и замкнутостью. С течением времени он, естественно, подвергается некоторым изменениям, но многие его черты: исторически сложившиеся жанры, специфическая лексика, морфология, синтаксические обороты – придают ему в целом консервативный характер.

Основные стилевые черты официально-делового стиля:

- **объективный, абстрагированный (неличный) характер изложения**, который проявляется в отсутствии субъективных оценок при передаче содержания, в безличности языкового выражения (отсутствуют местоименные и глагольные формы 2-го лица, ограничены – 1-го лица);
- **точность и детальность изложения**, которые не допускают каких-либо разночтений; быстрота понимания не является важной, так как заинтересованный человек в случае необходимости прочитает документ несколько раз, стремясь к полному пониманию;
- **стандартизированность, стереотипность изложения**, которая проявляется в том, что разнородные явления жизни в официально-деловом стиле укладываются в ограниченное количество стандартных форм (*анкета, справка, инструкция, заявление, деловое письмо* и т. д.);
- **долженствующе-предписующий характер изложения**, т. е. **волеизъявительность** (выражение воли), которая в текстах выражается семантически (подбором слов) и грамматически (формы первого лица глагола – *предлагаю, приказываю, поздравляю*; формами должествования – *надлежит, необходимо, следует, предлагается*);
- **отсутствие выражения эмоций и оценок** (не употребляются эмоционально-экспрессивные средства).

Эти черты находят свое выражение 1) в отборе языковых средств (лексических, морфологических и синтаксических); 2) в оформлении деловых документов.

Основные языковые особенности официально-делового стиля:

Языковые особенности	Примеры
Лексические	
1) языковые штампы (канцеляризм, клише)	<i>ставить вопрос, на основании решения, по собственному желанию, по семейным обстоятельствам, входящие-исходящие документы, контроль за исполнением возложить, по истечении срока и др.</i>
2) профессиональная терминология	<i>недоимка, алиби, черный нал, теневой бизнес, жилищный найм, прокурорский надзор, единовременное пособие и др.</i>
3) архаизмы	<i>оным удостоверяю, сей документ, в надлежащем виде, во избежание и др.</i>
4) тяготение к использованию родовых понятий с широкой и бедной семантикой	<i>прибыть (вместо приехать, прилететь, прийти и т. д.), транспортное средство (вместо автобус, самолет, «Волга» и т. д.), населенный пункт (вместо деревня, город, село и т. д.), помещение (вместо: квартира, цех, ангар, вестибюль, кров, обитель, апартаменты и т. д.)</i>
Морфологические	
1) существительные-названия людей по признаку, обусловленному действием	<i>налогоплательщик, ответчик, арендатор, свидетель и др.</i>
2) существительные, обозначающие должности и звания в форме мужского рода	<i>сержант полиции Ушакова, инспектор Неверова, ответчик Прошина и др.</i>
3) отглагольные существительные с частицей <i>не-</i>	<i>нелишение, неявка, несоблюдение, непризнание и др.</i>
4) производные предлоги	<i>в связи, в течение, за счет, в силу, по мере, в отношении, на основании и др.</i>
5) инфинитивные конструкции	<i>провести осмотр, оказать помощь, доказать невиновность и др.</i>
6) глаголы настоящего времени в значении обычно производимого действия	<i>обвиняемому обеспечивается право на защиту, за неуплату взимается штраф и др.</i>
7) сложные слова, образованные от двух и более основ	<i>бракосочетание, правонарушение, налогообложение, землепользование, пассажироперевозки, дачевладелец, нетрудоспособность, работодатель, квартиросъемщик, материально-</i>

	<i>технический, осенне-зимний, ремонтно-эксплуатационный, вышеуказанный, нижепоименованный и др.</i>
8) нанизывание существительных с суффиксом <i>-ние</i>	<i><u>Приготовлением</u> к <u>преступлению</u> признается <u>приискание</u> и <u>приспособление</u> средств или орудий или умышленное <u>создание</u> условий для <u>совершения преступлений</u>....</i>
9) гигантский пласт официальных наименований номенклатуре учреждений, профессий, должностей и т. п.	<i>Российское акционерное общество «Единая энергетическая система России», Открытое акционерное общество «Нефтяная компания «Лукойл», Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела, главный научный сотрудник, заместитель командира полка по инженерной службе, главный специалист сектора делопроизводства компании, председатель Военной коллегии Верховного Суда Российской Федерации, депутат Государственной Думы РФ и др.</i>
10) широкое использование аббревиатур	<i>РФ, МИД, МЧС, ФСБ, РЖД, Сбербанк, МОК, СМИ, РПЦ, УГГУ, ЕГЭ, ОСАГО, ТРЦ, ТК, УФМС, МОУ, ФГБОУ, ГТО, ГОСТ, ФГОС, КамАЗ, Роспечатать и др.</i>
11) употребление цепочки имен существительных в родительном падеже	<i>Для <u>применения</u> (род. п.) <u>мер</u> (род. п.) <u>общественного воздействия</u> (род. п.); в целях широкой <u>гласности</u> (род. п.) <u>работы</u> (род. п.) <u>Министерства</u> (род. п.) высшего <u>образования</u> (род. п.); результаты <u>деятельности</u> (род. п.) <u>органов</u> (род. п.) налоговой <u>полиции</u> (род. п.) и др.</i>
Синтаксические	
1) употребление простых предложений с однородными членами, причем ряды этих однородных членов могут быть весьма распространенными (до 8–10)	<i>Объектами общей собственности крестьянского хозяйства является <u>имущество</u>: земельный <u>участок</u>, <u>насаждения</u>, хозяйственные или иные <u>постройки</u>, мелиоративные и другие <u>сооружения</u>, продуктивный и рабочий <u>скот</u>, <u>птица</u>, сельскохозяйственная и иная <u>техника</u>, <u>оборудование</u>, транспортные <u>средства</u>, <u>инвентарь</u> и другое <u>имущество</u> и др.</i>
2) наличие пассивных конструкций	<i>платежи вносятся в указанное время, сроки выплат установлены на год и др.</i>

3) преобладание сложных предложений, в особенности сложноподчиненных, с придаточными условиями	<i>При наличии спора о размерах причитающихся уволенному работнику сумм администрация обязана уплатить указанное в настоящей статье возмещение в том случае, если <u>спор решен</u> в пользу работника.</i>
--	---

Документ – зафиксированная на материальном носителе информация с реквизитами, позволяющими её идентифицировать.

Форма документа (схема, отражающая семантико-информативную структуру текста) предоставляет в распоряжение его составителя определенный набор **реквизитов** (необходимые элементы оформления документа) и определенную их **композицию** (последовательность и порядок их размещения в тексте). Состав реквизитов, требования к реквизитам и бланкам документов устанавливаются ГОСТом. В настоящее время это ГОСТ Р 6.30-2003 «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов».

	Состав реквизитов документа
1.	Государственный герб Российской Федерации
2.	Герб субъекта Российской Федерации
3.	Эмблема организации или товарный знак
4.	Код организации
5.	Основной государственный регистрационный номер юридического лица (ОГРН)
6.	Идентификационный номер налогоплательщика / код причины постановки на учет (ИНН / КПП)
7.	Код формы документа
8.	Наименование организации
9.	Справочные данные об организации
10.	Наименование вида документа (жанр документа)
11.	Дата составления документа
12.	Регистрационный номер документа
13.	Ссылка на регистрационный номер или дату документа
14.	Место составления или издания документа
15.	Адресат
16.	Гриф утверждения документа
17.	Резолюция
18.	Заголовок к тексту
19.	Отметка о контроле
20.	Текст документа
21.	Отметка о наличии приложения
22.	Подпись
23.	Гриф согласования документа
24.	Визы согласования документа
25.	Оттиск печати
26.	Отметка о заверении копии
27.	Отметка об исполнителе

28.	Отметка об исполнении документа и направлении его в дело
29.	Отметка о поступлении документа в организацию
30.	Идентификатор электронной копии документа

Состав реквизитов конкретного документа определяется его видом и назначением. К наиболее частотным реквизитам можно отнести: **адресата, адресанта, название жанра документа, основной текст документа, список приложений, дату и подпись**. Логическому делению текста способствует его рубрикация, деление на части с помощью внутренних заголовков, подзаголовков, нумерация или графически единообразное выделение всех однотипных частей.

Способы классификации документов:

1. **По месту составления:** *внутренние и внешние* документы. **Внутренний** документ создаётся в рамках одной организации, где работают и составитель, и адресат текста (*приказы администрации предприятия, служебные записки, должностные инструкции* и др.). **Внешние** документы предназначаются адресатам, работающим на других предприятиях (*все виды деловых писем, приказы и распоряжения вышестоящих организаций* и др.).

2. **По содержанию:** *простые и сложные*. **Простые** документы посвящены решению одного вопроса (*заявление, объяснительная записка* и другие виды личной документации), **сложные** – двух и более (*приказы, письма, инструкции*).

3. **По форме:** *индивидуальные и типовые*. **Индивидуальные** документы предполагают некоторую самостоятельность текста и элементы творческого подхода, что не исключает их стандартизованности (*отдельные виды писем, служебных и докладных записок*). **Типовые** документы строятся на базе заранее заданного текста путём видоизменения его отдельных элементов; чаще всего эти документы одинаковы для групп однородных предприятий (*штатное расписание, положение о персонале* и др.). Если в типовом документе постоянные элементы отпечатаны типографским способом, а для переменных предусмотрены пробелы, которые заполняются при его составлении, то такой документ называют **трафаретным** (*анкеты, некоторые виды справок, трудовые договоры*).

4. **По срокам исполнения:** *срочные и бессрочные*. В **срочных** документах содержится указание на выполнение некоторых действий в ограниченный временной период (*распоряжения, указания* и др.). Действие **бессрочных** документов не ограничено временными рамками (*указы, законы, некоторые виды инструкций*).

5. **По происхождению:** *служебные и личные*. **Служебные** документы направлены на реализацию интересов организации (*приказы, деловые письма, контракты*). **Личные** документы, как правило, отражают взаимодействие отдельного физического лица с официальными органами или другими лицами (*заявление, доверенность, расписка, объяснительная записка* и др.).

6. **По виду оформления:** *подлинник* (подписанный и надлежащим образом оформленный экземпляр документа, составленный в первый раз), *копия* (абсолютно точно воспроизводит подлинник, но имеет ограниченную юридическую силу, за исключением нотариально заверенных.), *дубликат* (копия, имеющая одинаковую силу с подлинником, выдающаяся в случае его утери) и *выписки* (воспроизведение только одной из частей подлинника).

7. **По функции:** **организационные** документы, направленные на регламентацию деятельности организации или предприятия (*устав, положение, штатное расписание,*

положение о персонале, должностную инструкцию), **распорядительные** документы, содержащие конкретные распоряжения (приказы, распоряжения, указания, решения)., **информационно-справочные** документы, документы **по персоналу предприятия** (трудовой договор, личные карточки, учётные карточки, анкеты), **письма, договоры.**

Задание 1. Проанализируйте текст официально-делового стиля:

1. Укажите характеристику данного текста с точки зрения классификации документов.
2. Обозначьте реквизиты и композиционные элементы государственного документа.
3. Опишите стилевые и языковые особенности текста¹⁰.

**Федеральный закон от 1 июня 2005 г. N 53-ФЗ
«О государственном языке Российской Федерации»**

С изменениями и дополнениями от: 2 июля 2013 г., 5 мая 2014 г.

Принят Государственной Думой 20 мая 2005 года

Одобен Советом Федерации 25 мая 2005 года

Настоящий Федеральный закон направлен на обеспечение использования государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации, обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации, защиту и развитие языковой культуры.

Статья 1. Русский язык как государственный язык Российской Федерации

1. В соответствии с Конституцией Российской Федерации государственным языком Российской Федерации на всей ее территории является русский язык.

2. Статус русского языка как государственного языка Российской Федерации предусматривает обязательность использования русского языка в сферах, определенных настоящим Федеральным законом, другими федеральными законами, Законом Российской Федерации от 25 октября 1991 года N 1807-І «О языках народов Российской Федерации» и иными нормативными правовыми актами Российской Федерации, его защиту и поддержку, а также обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации.

3. Порядок утверждения норм современного русского литературного языка при его использовании в качестве государственного языка Российской Федерации, правил русской орфографии и пунктуации определяется Правительством Российской Федерации.

4. Государственный язык Российской Федерации является языком, способствующим взаимопониманию, укреплению межнациональных связей народов Российской Федерации в едином многонациональном государстве.

5. Защита и поддержка русского языка как государственного языка Российской Федерации способствуют приумножению и взаимообогащению духовной культуры народов Российской Федерации.

6. При использовании русского языка как государственного языка Российской Федерации не допускается использование слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка (в том числе нецензурной брани), за

¹⁰ Возможна работа по вариантам: 1 вариант – анализ Статьи 1; 2 вариант – анализ Статьи 3; 3 вариант – анализ статьи 4.

исключением иностранных слов, не имеющих общеупотребительных аналогов в русском языке.

7. Обязательность использования государственного языка Российской Федерации не должна толковаться как отрицание или умаление права на пользование государственными языками республик, находящихся в составе Российской Федерации, и языками народов Российской Федерации.

<...>

Статья 3. Сферы использования государственного языка Российской Федерации

1. Государственный язык Российской Федерации подлежит обязательному использованию:

1) в деятельности федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности, в том числе в деятельности по ведению делопроизводства;

2) в наименованиях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности;

3) при подготовке и проведении выборов и референдумов;

4) в конституционном, гражданском, уголовном, административном судопроизводстве, судопроизводстве в арбитражных судах, делопроизводстве в федеральных судах, судопроизводстве и делопроизводстве у мировых судей и в других судах субъектов Российской Федерации;

5) при официальном опубликовании международных договоров Российской Федерации, а также законов и иных нормативных правовых актов;

6) во взаимоотношениях федеральных органов государственной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, иных государственных органов, органов местного самоуправления, организаций всех форм собственности и граждан Российской Федерации, иностранных граждан, лиц без гражданства, общественных объединений;

7) при написании наименований географических объектов, нанесении надписей на дорожные знаки;

8) при оформлении документов, удостоверяющих личность гражданина Российской Федерации, за исключением случаев, предусмотренных законодательством Российской Федерации, изготовлении бланков свидетельств о государственной регистрации актов гражданского состояния, оформлении документов об образовании и (или) о квалификации установленного в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2012 года N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» образца, а также других документов, оформление которых в соответствии с законодательством Российской Федерации осуществляется на государственном языке Российской Федерации, при оформлении адресов отправителей и получателей телеграмм и почтовых отправлений, пересылаемых в пределах Российской Федерации, почтовых переводов денежных средств;

9) в продукции средств массовой информации;

9.1) при показах фильмов в кинозалах;

9.2) при публичных исполнениях произведений литературы, искусства, народного творчества посредством проведения театрально-зрелищных, культурно-просветительных, зрелищно-развлекательных мероприятий;

10) в рекламе;

11) в иных определенных федеральными законами сферах.

1.1. В сферах, указанных в пунктах 9, 9.1, 9.2 и 10 части 1 настоящей статьи, и в иных предусмотренных федеральными законами случаях наряду с государственным языком Российской Федерации могут использоваться государственные языки республик, находящихся в составе Российской Федерации, другие языки народов Российской Федерации, а в случаях, предусмотренных законодательством Российской Федерации, также иностранные языки.

<...>

Статья 4. Защита и поддержка государственного языка Российской Федерации

В целях защиты и поддержки государственного языка Российской Федерации федеральные органы государственной власти в пределах своей компетенции:

1) обеспечивают функционирование государственного языка Российской Федерации на всей территории Российской Федерации;

2) разрабатывают и принимают федеральные законы и иные нормативные правовые акты Российской Федерации, разрабатывают и реализуют направленные на защиту и поддержку государственного языка Российской Федерации соответствующие федеральные целевые программы;

3) принимают меры, направленные на обеспечение права граждан Российской Федерации на пользование государственным языком Российской Федерации;

4) принимают меры по совершенствованию системы образования и системы подготовки специалистов в области русского языка и преподавателей русского языка как иностранного языка, а также осуществляют подготовку научно-педагогических кадров для образовательных организаций с обучением на русском языке за пределами Российской Федерации;

5) содействуют изучению русского языка за пределами Российской Федерации;

6) осуществляют государственную поддержку издания словарей и грамматик русского языка;

7) осуществляют контроль за соблюдением законодательства Российской Федерации о государственном языке Российской Федерации, в том числе за использованием слов и выражений, не соответствующих нормам современного русского литературного языка, путем организации проведения независимой экспертизы;

8) принимают иные меры по защите и поддержке государственного языка Российской Федерации.

<...>

Президент Российской Федерации

В. Путин

Задание 2. Проанализируйте следующий текст¹¹:

1. Обозначьте реквизиты и структурно-содержательные элементы документа.

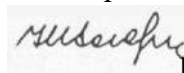
2. Опишите стилиевые и языковые особенности.

3. Имеются ли в тексте документа средства, не соответствующие требованиям официально-делового стиля? Докажите свою точку зрения.

¹¹ Текст Регламента приводится без изменений и исправлений.

УТВЕРЖДАЮ:

Ректор УГГУ, профессор



Н.П. Косарев

РЕГЛАМЕНТ

ношения форменной одежды преподавателями, сотрудниками и студентами УГГУ

1. Общие положения

Форменная одежда УГГУ – важнейший наряду с флагом и гербом символ корпоративной чести и достоинства, принадлежности преподавателей, сотрудников и студентов к высшему учебному заведению – Уральскому государственному горному университету.

Ношение форменной одежды в установленных случаях является почетным правом и обязанностью (моральным долгом) всех преподавателей, сотрудников и студентов УГГУ, облегченных этим доверием. По решению ректора почетное право ношения форменной одежды предоставляется заслуженным выпускникам.

Отказ от форменной одежды рассматривается как пренебрежение горняцким единством и неуважение к корпоративной символике Уральского государственного горного университета.

2. Руководящий состав университета: члены Ученого совета, включая ректорат, деканов, заведующих кафедрами, представителей студенческого, ветеранского и профсоюзного актива, а также руководителя управления отделов и служб, не входящие в Ученый совет, обязаны носить форму в следующих случаях:

- на всех рабочих совещаниях, проводимых ректором, первым проректором и проректором по научной работе;
- на заседаниях Ученого совета и Президиума Ученого совета университета, ученых советах факультетов;
- на торжественных собраниях сотрудников и студентов, митингах, конференциях, проводимых по планам ректората и деканатов;
- при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и других официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также политическими, общественными и научными организациями.

3. Преподаватели университета, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

- во время лекционных занятий;
- при участии в собраниях студентов, преподавателей, конференциях и митингах;
- при посещениях ректората и деканатов.

4. Сотрудники из числа административно-управленческого персонала (помощники ректора, проректоров, референты, секретари) обязаны быть в форменной одежде в следующих случаях:

- при нахождении на рабочем месте в дни проведения крупных общеуниверситетских мероприятий, при приеме делегаций, гостей и в иных случаях по распоряжению ректора;
- при участии, в том числе при орг. техническом обеспечении заседании Ученого совета и ректорских совещаний;

- при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

5. Студенты – представители студенческого актива, имеющие форму, обязаны быть в форменной одежде:

- при посещении ректората, деканатов;
- на всех официальных мероприятиях, проводимых в университете;
- при участии в официальных мероприятиях, проводимых вне стен университета органами власти, политическими, общественными, научными и образовательными учреждениями.

6. По собственной инициативе студенты, сотрудники и преподаватели университета могут находиться в форменной одежде во всех случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и ее функциональному назначению.



Ученый секретарь совета, профессор
28.09.2005 г.

О. В. Ошкордин

Задание 3. Проанализируйте текст¹² с точки зрения использованных языковых средств, характерных для официально-делового стиля. Опишите средства, с помощью которых в тексте реализуется такая стилевая черта, как волюнтаривность.

Есть ли в Правилах отступления от требований официально-делового стиля? Подтвердите свою точку зрения, опираясь на текст документа.



Правила внутреннего распорядка обучающихся в ФГБОУ ВПО «Уральский государственный горный университет»

Дата введения 01 сентября 2014 года

<...>

5. Основные права и обязанности обучающихся

5.1 Права обучающихся

Обучающиеся в университете имеют право:

- получать образование в соответствии с ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) обучаться в пределах этих стандартов по индивидуальным учебным планам, ускоренным курсам обучения;
- бесплатно пользоваться библиотечно-информационными ресурсами, получать дополнительные (в том числе платные) образовательные услуги;
- участвовать в управлении университетом;

¹² Текст Правил внутреннего распорядка приводится без изменений и исправлений.

- свободно выражать собственные мнения и убеждения;
- выбирать факультативные (необязательные для данного направления подготовки (специальности) и элективные (избираемые в обязательном порядке) курсы, предлагаемые факультетом и кафедрой;
- участвовать в формировании содержания своего образования при условии соблюдения требований ГОС и ФГОС (в т. ч. актуализированными ФГОС) среднего профессионального и высшего образования; указанное право может быть ограничено условиями договора, заключенного между студентом и физическим или юридическим лицом, оказывающим ему содействие в получении образования и последующем трудоустройстве;
- осваивать помимо учебных дисциплин по избранным направлениям подготовки (специальностям) любые другие учебные дисциплины, преподаваемые в университете, в порядке, предусмотренном Уставом, а также преподаваемые в других высших учебных заведениях (по согласованию между их руководителями);
- определять по согласованию с деканатом и кафедрами набор дисциплин по специальности в пределах, установленных учебным планом, а также посещать дополнительно любые виды учебных занятий, проводимых в университете;
- ставить перед деканом и ректором, руководителем территориально обособленного учебного подразделения вопрос о замене преподавателей, не обеспечивающих должное качество учебного материала, нарушающих расписание занятий, иные правила организации учебно-воспитательного процесса;
- участвовать в обсуждении и решении важнейших вопросов деятельности университета и его обособленных структурных подразделений, в том числе через общественные организации и органы управления;
- бесплатно пользоваться услугами учебных, научных, лечебных и других подразделений университета в порядке, установленном Уставом;
- принимать участие во всех видах научно-исследовательских работ, конференциях, симпозиумах;
- совмещать учебу с профессиональной деятельностью и иной работой;
- представлять свои работы для публикации, в том числе в изданиях университета;
- обжаловать приказы и распоряжения администрации высшего учебного заведения в установленном законодательством РФ порядке;
- переходить с платного договорного обучения на бесплатное обучение в порядке, предусмотренном Уставом университета;
- получать от университета информацию о положении дел в сфере занятости населения и возможностях трудоустройства по специальности в соответствии с заключенными договорами и законодательством о занятости выпускников образовательных учреждений.

Обучающиеся в университете по заочной форме, выполняющие учебный план, имеют право на дополнительный оплачиваемый и не оплачиваемый отпуск по месту работы, на сокращенную рабочую неделю и на другие льготы, которые предоставляются в порядке, устанавливаемом законодательством РФ (ст. 173-176 ТК РФ).

Обучающиеся в университете имеют право на свободное посещение мероприятий, не предусмотренных учебным планом.

Обучающиеся в университете имеют право на перевод в другое образовательное учреждение, реализующее образовательную программу соответствующего уровня, при согласии этого образовательного учреждения и успешном прохождении ими аттестации.

Обучающиеся в университете по очной форме обучения имеют право на получение отсрочки от призыва на военную службу в соответствии с Федеральным законом «О воинской обязанности и военной службе».

5.2 Обязанности обучающихся

Обучающиеся в университете обязаны:

- добросовестно посещать учебные занятия, глубоко овладевать теоретическими знаниями, практическими навыками и современными методами для работы по избранной специальности;
- выполнять в установленные сроки все виды заданий, предусмотренных соответствующими учебными планами и программами обучения;
- постоянно повышать общую культуру, нравственность и физическое совершенство;
- нетерпимо относиться к недостаткам в учебно-воспитательном процессе и быту;
- бережно и аккуратно относиться к учебным и иным помещениям, оборудованию, учебным пособиям, литературе, приборам, другому имуществу университета; без соответствующего разрешения студентам запрещается выносить предметы и оборудование из лабораторий, кабинетов, аудиторий, учебных, бытовых корпусов и других помещений;
- нести материальную ответственность за ущерб, причиненный имуществу университета в соответствии с нормами действующего законодательства;
- незамедлительно сообщать в администрацию университета о возникновении ситуации, представляющей угрозу жизни и здоровью людей, сохранности имущества университета;
- соблюдать требования Устава университета, настоящие Правила и Правила проживания в общежитиях;
- поддерживать деловую репутацию, честь и престиж университета.

Обучающиеся в территориально обособленном учебном подразделении университета (филиале) помимо указанных выше полномочий пользуются правами и исполняют обязанности, предусмотренные Положением о соответствующем структурном подразделении или договорами о профессиональной подготовке, включая договоры на индивидуальную подготовку специалиста.

При неявке на занятия по уважительным причинам обучающийся ставит об этом в известность декана факультета, руководителя (уполномоченного работника) иного учебного структурного подразделения и в первый день явки на учебу представляет данные о причине неявки и документы установленного образца (справки, письма, телеграммы и т. п.), содержащие сведения оправдательного характера.

5.3 Требования к ношению формы

Обучающиеся в университете должны быть дисциплинированными и опрятными, вести себя достойно в университете, на улице, в общественном месте и в быту. В соответствии с решением Ученого совета университета от 25.06.2004 года, обучающиеся обязаны носить форменную одежду в ниже перечисленных случаях:

- на всех совещаниях, проводимых ректором, проректорами и деканами факультетов;
- на торжественных собраниях коллектива, митингах и конференциях;
- при участии в совещаниях, конференциях, торжественных собраниях и иных официальных мероприятиях, проводимых органами власти, а также общественными и

научными организациями, на которых обучающиеся университета являются его представителями;

– при участии, в т. ч. организационно-техническом обеспечении заседаний Ученого совета университета и ректорских совещаний; при сопровождении ректора, проректоров во время официальных мероприятий вне университета.

– в иных случаях по распоряжению ректора.

По собственной инициативе обучающиеся университета могут находиться в форменной одежде в иных случаях, если это не наносит ущерба почетному статусу формы и её функциональному назначению.

Запрещается ношение предметов формы одежды измененных или неустановленных образцов, а также знаков различия, не предусмотренных Положением о форменной одежде.

<...>

ТЕМА 12. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛОВЫХ БУМАГ

Цель – научиться оформлять основные жанры деловых бумаг.

КОНСПЕКТ следующего материала к занятию (требуется записать определение, основные реквизиты и образец):

Заявление – это документ, содержащий просьбу, предложение или жалобу какого-либо лица.

Заявление, как и большинство деловых бумаг, составляется в произвольной форме от руки или печатается на листе бумаги формата А4.

Основные реквизиты заявления:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).
2. Сведения об адресате (должность, ФИО полностью, в некоторых случаях адрес или другая контактная информация).
3. Наименование жанра документа.
4. Основной текст заявления с точным изложением просьбы, предложения или жалобы.
5. Опись приложений к документу, если они имеются.
6. Дата.
7. Подпись.

Образец оформления заявления

Декану ФГиГ
проф. Талалаю А. Г.
от студента группы МПГ-16
Волкова Михаила Владимировича

Заявление

Прошу отпустить меня с занятий на 3 дня с 25 по 27 октября 2018 года в связи с участием в областных соревнованиях по футболу.

Копию справки-вызова прилагаю.

01.10.2018 г.



Доверенность – это документ, выдаваемый одним лицом (доверителем) другому лицу (доверенному) для представительства перед третьими лицами и дающий право доверенному лицу действовать от имени доверителя.

Доверенность предоставляет полномочия доверенному лицу предпринимать за доверителя какое-либо действие. В зависимости от вида полномочий различают три вида доверенности: 1) **разовая** (дает право на совершение одного конкретного действия), 2) **специальная** (дает право на совершение однородных действий), 3) **генеральная** (дает право на общее управление имуществом доверителя).

Основные реквизиты разовой доверенности:

1. Наименование жанра документа.
2. Наименование доверителя (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
3. Наименование доверенного лица (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
4. Формулировка доверяемой функции.
5. Дата.
6. Подпись.

Образец оформления разовой доверенности

Доверенность

Я, Зорянова Евгения Михайловна, студентка группы ВД-16 (паспорт: серия 3209 № 345177, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Чкаловском районе гор. Екатеринбурга 09.06.2009 г., проживающая по адресу: г. Екатеринбург, ул. 8 марта, д. 104, кв. 190), доверяю Соловчуку Сергею Станиславовичу, студенту группы ГМО-17 (паспорт: серия 5404 № 654321, выдан Железнодорожным РУВД г. Ульяновска 13.09. 2008 г., проживающему по адресу: г. Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 63, кв. 77), получить в кассе УГТУ мою стипендию за март 2017 года.

25.02.2017 г.



Расписка – это документ, подтверждающий произведенное кем-либо определенное действие (получение ценных предметов).

Расписка всегда составляется от руки. Если она имеет особо важное значение, ее необходимо заверить.

Основные реквизиты расписки:

1. Наименование жанра документа.
2. Наименование лица, получившего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
3. Наименование лица, выдавшего ценности (ФИО полностью, должность, паспортные данные, адрес регистрации или проживания).
4. Точное наименование полученных ценностей с указанием количества (цифрами и прописью).
5. Дата, до которой необходимо вернуть полученные ценности.
6. Дата.
7. Подпись.

Образец оформления расписки

Расписка

Я, Воробьева Наталия Александровна, студентка группы УП-17 (паспорт: серия 5009 № 2435672, выдан отделом УФМС Ленинского района г. Новосибирска 25.09.2005 г., проживающая по адресу: Свердловская область, г. Первоуральск, ул. Горького, д. 7, кв. 5), получила от Штиппеля Артемия Павловича, инженера кафедры ГД (паспорт: серия 6507 № 575849, выдан Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга 05.10.2004 г., проживающего по адресу: г. Екатеринбург, пер. Красный, д. 34, кв. 33), 10 000 (десять тысяч) рублей.

Обязуюсь вернуть указанную сумму до 31 декабря 2017 г.

07 ноября 2017 г.



Докладная записка – это документ, информирующий адресата о сложившейся ситуации, а также содержащий выводы и предложения составителя.

Основной текст докладной записки делится на две части:

- в первой излагаются причины, послужившие поводом для ее написания;
- во второй анализируется сложившаяся ситуация, содержатся выводы и предложения о действиях, которые необходимо предпринять.

Основные реквизиты докладной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).

2. Наименование жанра документа.
3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.
4. Описание приложений к документу, если они имеются.
5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).
6. Дата.

Образец оформления докладной записки

*Ректору УГГУ
проф. Душину А. В.*

Докладная записка

24 декабря 2018 г. примерно в 12.30 я сдал свой пуховик в гардероб 4 учебного корпуса. Через два часа (после окончания праздничных мероприятий) я попытался получить пуховик по бирке, но его не оказалось на вешалке. Студенты, дежурившие в гардеробе в тот день, отказались объяснять, что произошло и куда пропала моя одежда.

Прошу разобраться в сложившейся ситуации и помочь с поисками пуховика.

Описание прилагается.

*Студент группы ТБ-17
25 декабря 2018 г.*



/Вутенко Б. Н./

Объяснительная записка – это документ, объясняющий причины какого-либо события, факта, поступка (нарушения трудовой или учебной дисциплины, невыполнение задания, поручения и т. д.).

Основной текст объяснительной записки делится на две части:

- в первой излагаются, констатируются факты нарушения;
- во второй объясняются причины нарушения.

Основные реквизиты объяснительной записки:

1. Сведения об адресате (должность, фамилия, инициалы).
2. Наименование жанра документа.
3. Основной текст, состоящий из двух смысловых частей.
4. Описание приложений к документу, если они имеются.
5. Подпись автора документа, состоящая из трех частей (должность, собственно личная подпись и расшифровка подписи).
6. Дата.

Образец оформления объяснительной записки

*Зав. кафедрой ИЯДК
доц. Юсуповой Л. Г.*

Объяснительная записка

05.03.2018 г. я опоздала на практическое занятие по иностранному языку по причине транспортной аварии на перекрестке улиц Малышева и Гагарина.

Выданную транспортным предприятием справку прилагаю.

*Студентка группы МЭ-15
07.03.2018 г.*



/Вайслер Ю. М./

Задание 1. *Напишите от своего имени следующие жанры деловых бумаг:*

- а) заявление с просьбой продлить Вам сессию на неделю;
- б) заявление с просьбой принять Вас на работу;
- в) доверенность на получение Вашей стипендии в этом месяце;
- г) расписку в получении Вами образцов минералов для выполнения лабораторной работы;
- д) докладную записку о пропаже Ваших личных вещей из аудитории;
- е) объяснительную записку о пропуске Вами занятий в течение недели;
- ж) объяснительную записку о неявке на экзамен.

Задание 2. *Исправьте допущенные ошибки в оформлении и содержании следующих документов. Обратите внимание на нарушение разного типа языковых норм (орфографических, пунктуационных, лексических и грамматических). Запишите исправленный вариант.*

Текст 1

*Декану УГТУ
От студента III курса очной формы
обучения факультета гражданской
защиты Волк Василия Васильевича*

заявление

В связи с отъездом на лидерские сборы очень прошу разрешить не посещать мне занятия на следующей неделе.

09.09.18 г.



Текст 2

Ректору УГТУ

Н. П. Косареву

доверенность.

Я, Задорин Виктор, студент УГТУ, даю право на получение получаемой мной стипендии студенту Гудину Александру Геннадьевичу (паспорт 6509 номер 124338, ул. Мира, 90-1).

1.5.18 г.



/Задорин В. З./

Текст 3

Кафедре ИЯДК

расписка

Я – Пустник Валентин Шимурович, прошу выдать мне учебные пособия для практических занятий. Автор – Мясникова Юлия Марковна в размере одной штуки. Паспортные данные – серия 6102, номер 879521, УФМС России, дата рождения – 19.02.2000 года, проживаю в городе Лангепас на улице Парковая, 7.

Обязуюсь вернуть в срок.

25 сентября



Текст 4

Декану ГМФ
Козину Владимиру
Зиновьевичу

Докладная

Уважаемый Владимир Зиновьевич!

Сегодня я, Курпатова Вера, студентка ГМФ, оставила без присмотра свои вещи в учебной аудитории 2240. При возвращении моих вещей в аудитории не было. Я очень расстроилась.

Пропали: куртка черная кожанная, красная сумка в цветочек, белый платок.



1 октября 2018 года

Текст 5

*Зав. кафедры ТПФ Волкову М. Н.
От студента Хлебникова Семена.*

Объяснительная о прогуле

Я, Семен Хлебников, отсутствовал на занятиях два месяца всвязи болезни. Справку из б городской больницы прилогаю.

01.11.18

Хлебников С.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Голуб И. Б. Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. Б. Голуб. – Электрон. текстовые данные. – М.: Логос, 2014. – 432 с. – 978-5-98704-534-3. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/39711.html>
2. Культура устной и письменной речи делового человека: Справочник. Практикум. М.: Флинта: Наука, 2012 (и другие издания).
3. Меленкова Е. С. Культура речи и деловое общение: тестовые задания для студентов всех специальностей. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 78 с.
4. Федосюк М. Ю., Ладыженская Т. А., Михайлова О. А., Николина Н. А. Русский язык для студентов-нефилологов: учебное пособие. М.: Флинта: Наука, 2014 (и другие стереотипные издания).

Дополнительная литература

1. Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю. Русский язык и культура речи: учебное пособие для вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 544 с. (и другие стереотипные издания)
2. Введенская Л. А., Павлова Л. Г., Кашаева Е. Ю. Русский язык и культура речи для инженеров: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2003. 384 с.
3. Веселкова Т. В. Культура устной и письменной коммуникации [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т. В. Веселкова, И. С. Выходцева, Н. В. Любезнова. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Вузовское образование, 2016. – 268 с. – 2227-8397. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/54473.html>
4. Гавриленко Р. И., Меленкова Е. С., Шалина И. В. Русский язык и культура речи: учебное пособие. 4-е изд., стереотип. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2013. 84 с.
5. Голуб И. Б. Русский язык и культура речи: учебное пособие. М.: Логос, 2005. 432 с. (и другие стереотипные издания)
6. Данцев А. А., Нефёдова Н. В. Русский язык и культура речи для технических вузов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. 320 с. (и другие стереотипные издания)
7. Дускаева Л. Р., Протопопова. О. В. Стилистика официально-деловой речи: учебное пособие. М.: Академия, 2012. 272 с.
8. Карякина М. В. Русский язык и культура речи. Подготовка к контрольному тестированию. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 71 с.
9. Коренькова Е. В., Пушкарева Н. В. Русский язык и культура речи: учебник. М.: Проспект, 2013. 376 с.
10. Котюрова М. П. Стилистика научной речи: учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования. М.: Академия, 2012. 240 с.
11. Лапынина Н. Н. Русский язык и культура речи [Электронный ресурс]: курс лекций / Н. Н. Лапынина. — Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 161 с. – 978-5-89040-431-2. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22667.html>
12. Лыткина О. И. Теоретический курс культуры речи [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. И. Лыткина. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009. – 105 с. – 2227-8397. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/46332.html>

13. Меленкова Е. С. Русский язык делового общения: учебное пособие для студентов всех специальностей и направлений подготовки. Екатеринбург: УГГУ, 2018. 80 с.
14. Меленкова Е. С. Русский язык и культура речи: учебное пособие с упражнениями и контрольными работами для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 80 с.
15. Меленкова Е. С. Стилистика русского языка: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2011. 86 с.
16. Миняева В. И. Репетитор по русскому языку. Орфография. Пунктуация. Культура речи: учебное пособие. 5-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: УГГУ, 2007. 239 с.
17. Петрова Ю. А. Культура и стиль делового общения [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю. А. Петрова. – Электрон. текстовые данные. – М.: ГроссМедиа, 2007. – 190 с. – 5-476-003-476. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/1129.html>
18. Сковорцов Л. И. Большой толковый словарь правильной русской речи [Электронный ресурс]/ Сковорцов Л. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: Мир и Образование, Оникс, 2009. – 1104 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/14555.html>
19. Словарь-справочник по культуре речи: для школьников и студентов / Отв. ред. А. А. Евтюгина. - Екатеринбург: У-Фактория, 2004. 334 с.
20. Усанова О. Г. Культура профессионального речевого общения [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / О. Г. Усанова. – Электрон. текстовые данные. – Челябинск: Челябинский государственный институт культуры, 2008. – 93 с. – 5-94839-062-4. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/56426.html>

ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. ГОСТ 6.30-2003. «Унифицированные системы документации. Унифицированная система организационно-распорядительной документации. Требования к оформлению документов» (электронная публикация <http://docs.cntd.ru/document/1200031361>).
2. Грамота (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.gramota.ru>.
3. Колтунова М. В. Язык и деловое общение. Нормы. Риторика. Этикет. М.: Экономика, 2000. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://bibliotekar.ru/delovoe-obschenie/index.htm>
4. Культура письменной речи (сайт) [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.gramma.ru>.
5. Русский язык и культура речи/ под ред. Максимова В. И. М., 2001 [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.bibliotekar.ru/russkiy-yazyk/>
6. Русский язык: энциклопедия русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://russkiyyazik.ru>.
7. Стилистический энциклопедический словарь русского языка (сайт). [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://stylistics.academic.ru>.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет геологии и геофизики

Кафедра Математики



В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Екатеринбург 2020

Министерство высшего образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Уральский государственный горный университет
Факультет геологии и геофизики
Кафедра Математики

В. Б. Сурнев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

УДК 512.64

ББЛ 22.143

С 90

С 90 В. Б. Сурнев

Высшая математика. Учебник задач по высшей математике: -

Учебно-методическое пособие. Екатеринбург. ФГБОУ ВО УГГУ. 2020. – 338 с.

ISBN

Пособие охватывает все разделы дисциплины «Математика», предусмотренные государственными стандартами подготовки специалистов специальности «Горное дело». В каждой главе пособия приводятся краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач, предлагаются задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности 21.05.04 – «Горное дело»: специализация № 6 «Обогащение полезных ископаемых», специализация № 10 «Электрификация и автоматизация горного производства», специализация N 8 "Горнопромышленная экология", специализация № 9 "Горные машины и оборудование". Учебное пособие может быть использовано и для других специальностей и направлений подготовки горно-геологического профиля высших учебных заведений.

Рецензенты:

Кафедра информатики ФГБОУ ВО УГГУ, зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент А. В. Дружинин

Д-р физ.-мат. наук, в. н. с., ИГФ УрО РАН им. Ю. П. Булашевича А. Ф. Шестаков.

Сурнев Виктор Борисович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ISBN

© Сурнев В. Б., 2020

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Уральский государственный горный университет (УГГУ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	9
Часть 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ	11
1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ	
Практическое занятие 1. Теория множеств. Множества, операции, отношения	11
Предварительные сведения	11
Примеры с решением	13
Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа	20
Предварительные сведения	20
Примеры с решением	22
Задания для самостоятельной работы	24
2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	30
Практическое занятие 1. Векторная алгебра	30
Предварительные сведения	30
Примеры с решением	33
Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения. Прямая линия и плоскость	45
Предварительные сведения	45
Примеры с решением	46

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства	52
Предварительные сведения	52
Примеры с решением	53
Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы, определители и СЛАУ	75
Предварительные сведения	75
Примеры с решением	76
Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов	91
Предварительные сведения	91
Примеры с решением	92
Задания для самостоятельной работы	101
Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА E^n	113
Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве	113
Предварительные сведения	113
Примеры с решением	116
Практическое занятие 2. Некоторые задачи в геометрии евклидова пространства	137

Предварительные сведения	137
Примеры с решением	138
Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка	145
Предварительные сведения	145
Примеры с решением	147
Задания для самостоятельной работы	157
ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО	162
Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности	162
Предварительные сведения	162
Примеры с решением	164
Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции	172
Предварительные сведения	172
Примеры с решением	173
Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного	179
Предварительные сведения	179
Примеры с решением	180
Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления	191

Предварительные сведения	191
Примеры с решением	192
Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного	201
Предварительные сведения	201
Примеры с решением	203
Практическое занятие 6. Интегрируемость функций одного переменного	210
Предварительные сведения	210
Примеры с решением	211
Задания для самостоятельной работы	217
ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. РЯДЫ	224
Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций нескольких переменных	224
Предварительные сведения	224
Примеры с решением	226
Практическое занятие 2. Исследование функции несколь- ких переменных	239
Предварительные сведения	239
Примеры с решением	240

Практическое занятие 3. Числовые ряды	244
Предварительные сведения	244
Примеры с решениями	245
Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды	251
Предварительные сведения	251
Примеры с решением	253
Задания для самостоятельной работы	260
ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕ- НИЯ	266
Практическое занятие 1. Базисные векторные поля	266
Предварительные сведения	266
Примеры с решением	269
Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы	279
Предварительные сведения	279
Примеры с решением	281
Практическое занятие 3. Кратные интегралы	284
Предварительные сведения	284
Примеры с решением	287
Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволи- нейных и кратных интегралов	296
Предварительные сведения	296

Примеры с решением	297
Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы	302
Предварительные сведения	302
Примеры с решением	303
Практическое занятие 6. Векторный анализ	307
Предварительные сведения	307
Примеры с решением	310
Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения	319
Предварительные сведения	319
Примеры с решением	322
Практическое занятие 8. Системы ОДУ	337
Предварительные сведения	337
Примеры с решением	342
Задания для самостоятельной работы	348

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ» предназначено для студентов технических направлений подготовки и технических специальностей университетов. Цель данного пособия – оказание помощи студентам в самостоятельной работе по освоению общего курса высшей математики технического вуза. Перечислим некоторые причины, побудившие автора к созданию данного пособия.

Хорошо известно, что без самостоятельной работы сколько-нибудь твёрдое освоение курса высшей математики совершенно невозможно. За то малое количество часов аудиторных занятий, которое отводится современными учебными планами, особенно для направлений подготовки бакалавров, никакой преподаватель не сможет обучить студентов даже основам математики, не говоря уже об овладении методами последней на уровне, нужном для плодотворного изучения специальных дисциплин учебных планов таких, как, например, теоретическая механика, теоретическая электротехника и так далее.

Желательно, чтобы студент научился самостоятельно выбирать метод решения задачи, поставленной в предметной области, и мог использовать для его реализации знания по высшей математике, полученные в университете. Последнее может быть достигнуто только упорным и творческим самостоятельным трудом, чему и призвано помочь данное пособие.

В настоящее время достаточно велико число желающих получить высшее образование с использованием дистанционных методов обучения. Несмотря на наличие у подавляющего большинства обучающихся в свободном доступе вычислительной техники разного уровня, «книжный вариант» самостоятельного изучения дисциплины математика не потерял своей актуальности. Для многих студентов наличие печатного пособия по практическому освоению курса высшей математики предпочтительнее её электронного варианта.

Предлагаемое учебное пособие появилось как результат многолетнего преподавания автором высшей математики в техническом вузе – ФГБОУ ВО Уральский государственный горный университет. Пособие содержит материал по основным разделам общего курса высшей математики. Некоторые разделы, включаемые обычно в общий курс высшей математики, в пособии не представлены.

В качестве примера назовём теорию функций комплексной переменной (ТФКП). По мнению автора ТФКП является по существу самостоятельной дисциплиной и требует отдельного издания. К тому же в русскоязычной литературе имеются в большом числе практические пособия по данной дисциплине.

Аналогично, теория вероятностей и математическая статистика в совокупности являются отдельной дисциплиной со своими теориями и методами. Поэтому включение теории вероятностей и

математической статистики в качестве раздела в пособие по общему курсу высшей математики нецелесообразно.

Также отсутствует в пособии теория уравнений с частными производными, которая является по мнению автора отдельной дисциплиной, имеющей своё историческое название – «Математическая физика».

Кроме перечисленных разделов высшей математики в пособии не представлена теория операторов, которая известна также под названием «Функциональный анализ». Данная математическая дисциплина вынужденно исключена из современных учебных планов и программ в связи с сокращением времени на изучение высшей математики.

Список разделов, включённых в данное пособие, легко увидеть из оглавления, поэтому перечислять их нет необходимости. Сделаем лишь несколько замечаний относительно структуры пособия.

Перед каждым разделом помещены краткие теоретические сводки, цель которых напомнить студенту, изучившему предварительно теоретический материал по лекционному курсу, необходимые для разбора предлагаемых примеров и решения заданий формулы.

Дальше приводятся с подробным решением примеры типовых задач, перемежающиеся иногда с дополнительными сведениями и с практико-ориентированными примерами из предметных областей.

После примеров с решениями приводятся в достаточном количестве задания для самостоятельной работы. В заданиях для самостоятельной работы ответы не приводятся. Сделано это намеренно, с целью побудить студентов в процессе самостоятельных занятий к общению между собой и с преподавателем.

В заключение отметим, что особое внимание в пособии уделяется трудным для освоения студентами разделов высшей математики, имеющих на первый взгляд абстрактный характер, например, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладной характер данных разделов не может быть обоснован на начальных стадиях обучения в вузе и выяснится лишь при изучении специальных дисциплин.

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ БЩЕЙ АЛГЕБРЫ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие 1. Теория множеств

Множества, операции, отношения

Предварительные сведения

Множество – неопределяемое понятие. Множество можно задать. Конечное множество задаётся списком, например,

$$M = \{a, b, \dots, k\},$$

где $a, b, \dots, k$ – элементы множества.

Бесконечное множество задаётся при помощи признака, позволяющего установить принадлежность элементов данному множеству:

$$M = \{x : x \in K\}.$$

Читается: M есть множество элементов X , обладающих свойством (свойствами) K , и только эти элементы являются элементами данного множества.

Над множествами можно производить операции.

Множества M_1 и M_2 считаются **равными**, если

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \wedge y \in M_2 \Rightarrow y \in M_1.$$

Пересечение множеств: $M_1 \cap M_2 \stackrel{def}{=} \{x : x \in M_1 \text{ и } x \in M_2\}.$

Объединение множеств: $M_1 \cup M_2 \stackrel{def}{=} \{x : x \in M_1 \text{ или } x \in M_2\}.$

Разность множеств: $M_1 - M_2 \equiv M_1 \setminus M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ и } x \notin M_2\}.$

Произведение множеств: $M_1 \times M_2 = \{\{x, y\} : x \in M_1, y \in M_2\}.$

Здесь $\{x, y\}$ – упорядоченная пара элементов $x \in M_1, y \in M_2$.

Закон тождества гласит:

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1.$$

Пусть $x \in M \wedge y \in M$. Бинарной алгебраической операцией называется отображение

$$\varphi : \{x, y\} \rightarrow z \in M.$$

Алгебраическая операция называется **ассоциативной**, если

$$(\forall x, y, z \in M) \quad x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Алгебраическая операция называется **коммутативной**, если

$$(\forall x, y \in M) \quad x * y = y * x.$$

Алгебраическая операция $(\circ)$ называется **дистрибутивной** относительно алгебраической операции $(*)$, если $(\forall x, y, z \in M)$

- 1) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z),$
- 2) $z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y).$

Множество $G \neq \emptyset$ с заданной на нём бинарной алгебраической (внутренней) операцией $(*)$, называется **группой**, если выполнены следующие аксиомы:

- 1) $(\forall x, y, z \in G) \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$
- 2) $(\exists e \in G): (\forall x \in G) \quad x * e = e * x = x;$
- 3) $(\forall x \in G) (\exists x^{-1} \in G): x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$

Группа называется **абелевой**, или **коммутативной**, если алгебраическая (групповая) операция коммутативна.

Непустое множество K с двумя алгебраическими операциями **сложением** и **умножением** называется **кольцом**, если выполнены аксиомы:

- 1) K есть абелева группа по операции сложения (**аддитивная группа кольца**);
- 2) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall x, y, z \in K) \quad x(y + z) = xy + xz$ и $(y + z)x = yx + zx.$

Непустое множество P вместе с двумя алгебраическими операциями – **сложением** и **умножением**, называется **полем**, если выполняются следующие аксиомы:

- 1) P есть аддитивная абелева группа по сложению;
- 2) $P - \{0\}$ есть мультипликативная абелева группа по умножению;
- 3) операции сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, то есть $(\forall x, y, z \in P) \quad x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx.$

Примеры с решением

Пример 1.1.1. Найти все подмножества множества $M = \{2, 7, 9\}$.

Решение. Подмножествами данного множества являются: пустое множество $\emptyset$; само множество M ; одноэлементные множества $\{2\}, \{7\}, \{9\}$; двухэлементные множества $\{2, 7\}, \{2, 9\}, \{7, 9\}$. $\otimes$

Пример 1.1.2. Найти пересечение, объединение и разность множеств $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{b, e, f, k\}$.

Решение. Пересечение множеств $A \cap B$ содержит три элемента

$$A \cap B = \{b, e, f\},$$

объединение множеств содержит семь элементов

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, k\},$$

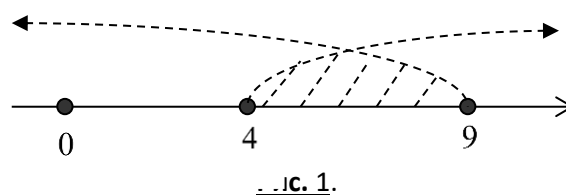
разность

$$A - B = \{a, c, d\}. \otimes$$

Пример 1.1.3. Найти пересечение множеств решений неравенств

$$2x - 3 > x + 1, 3x - 8 < 2x + 1,$$

полагая, что $x \in R^1$.



Решение. Решением первого неравенства является множество действительных чисел $x > 4$, решением второго неравенства является множество действительных чисел $x < 9$. Их пересечением (рисунок 1.1.1) является множество $M = \{x \in R^1: 4 < x < 9\}$. $\otimes$

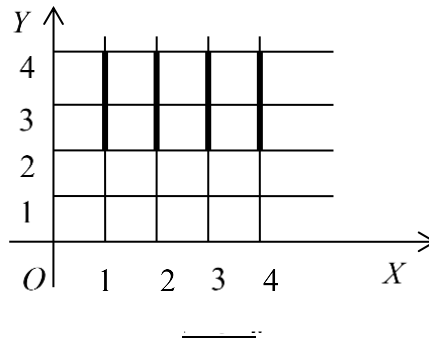
Пример 1.1.4. Найти произведение $A \times B$ множеств $A = \{m, p\}, B = \{e, f, k\}$.

Решение. Составляем, согласно определению, всевозможные упорядоченные пары, первой компонентой которых является элемент множества A , а второй – элемент множества B :

$$A \times B = \{\{m, e\}, \{m, f\}, \{m, k\}, \{p, e\}, \{p, f\}, \{p, k\}\}. \otimes$$

Пример 1.1.5. Изобразить на координатной плоскости произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^1 : 2 \leq y \leq 4\}$.

Решение. Множество A конечно, а множество B – бесконечно, поэтому произведение множеств состоит из бесконечного множества упорядоченных пар, первым компонентом которых являются числа 1, 2, 3 или 4, а вторым – любое действительное число из замкнутого промежутка $[2, 4]$. Множество пар координатной плоскости изобразится



в виде четырёх отрезков, параллельных оси ординат (рисунок 2). $\otimes$

Пример 1.1.6. Доказать транзитивность отношения равенства для произвольных множеств.

Решение. Пусть X , Y и Z – произвольные множества. Покажем, что из $X = Y$ и $Y = Z \Rightarrow X = Z$.

Пусть $x \in X$. Тогда, так как $X = Y$, имеем $x \in Y$. Но так как $Y = Z$, получаем $x \in Z$.

Обратно, из $x \in Z$ следует, что $x \in Y$. По закону тождества получаем $X = Z$. $\otimes$

Пример 1.1.7. Доказать, что для произвольных множеств A , B и C справедливо равенство: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Решение. Покажем, что

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Пусть $x \in A \setminus (B \cap C)$. Откуда следует, что $x \in A$ и $x \notin B \cap C$. То есть, $x \in A$ и $x \notin B$, или $x \in A$ и $x \notin C$. Поэтому

$$x \in A \setminus B, \text{ или } x \in A \setminus C,$$

то есть

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Следовательно, в соответствие с определением части множества включение

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

доказано.

Включение $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$ доказывается аналогично.

Из доказанных включений с учётом закона тождества получаем требуемое равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\otimes$

Пример 1.1.8. Проверить непосредственно, что для множеств

$$X = \{3, 5, 7\}, Y = \{7, 9\}, Z = \{0, 1\}$$

выполняется следующее равенство: $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

Решение. Для левой части равенства непосредственно получаем $X \cup Y = \{3, 5, 7, 9\}$ и далее имеем:

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \times Z &= \{3, 5, 7, 9\} \times \{0, 1\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{9, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}, \{9, 1\}\}. \end{aligned}$$

Для правой части получаем аналогично:

$$\begin{aligned} (X \times Z) \cup (Y \times Z) &= \{\{3, 5, 7\} \times \{0, 1\}\} \cup \{\{7, 9\} \times \{0, 1\}\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{7, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 1\}\} \cup \{\{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\} = \\ &= \{\{3, 0\}, \{5, 0\}, \{3, 1\}, \{5, 1\}, \{7, 0\}, \{7, 1\}, \{9, 0\}, \{9, 1\}\}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные равенства, видим, что оба множества состоят из одних и тех же элементов, то есть, равны друг другу. $\otimes$

Пример 1.1.9. Выяснить, является ли на подмножестве

$$R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$$

множества действительных чисел R^1 алгебраической операция $x * y = x^2$ и указать, обладает ли эта операция свойствами коммутативности и ассоциативности.

Решение. Пусть x, y, z – любые элементы из R^+ . Тогда, очевидно, $(\forall x \in R^+) x^2 \in R^+$, то есть операция $(*)$ является бинарной алгебраической операцией. Так как по определению операции имеем

$$(\forall x \neq y) x * y = x^2 \neq y^2 = y * x,$$

то операция $(*)$ не является коммутативной. Далее, так как

$$(\forall x \neq y \neq z \in R^+) x * (y * z) = x^2 \neq (x * y) * z = (x * y)^2 = x^4,$$

то операция $(*)$ не является ассоциативной. $\otimes$

Пример 1.1.10. Ассоциативна ли на множестве действительных чисел R^1 операция $x * y = \sin x \cdot \sin y$.

Решение. Для определённой операции имеем:

$$(\forall x, y, z \in R) (x * y) * z = \sin(\sin x \cdot \sin y) \cdot \sin z,$$

$$x * (y * z) = \sin x \cdot \sin(\sin y \cdot \sin z).$$

Очевидно, что $(x * y) * z = x * (y * z)$ выполняется не для всех x, y, z , следовательно, операция $(*)$ свойством ассоциативности не обладает. $\otimes$

Пример 1.1.11. На множестве $M = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «меньше». Изобразить это отношение: 1) выписав все упорядоченные пары; 2) построив граф отношения.

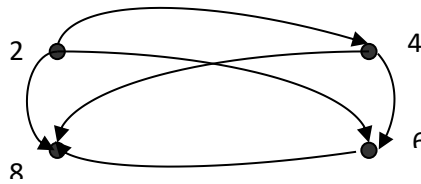


Рис. 1.8.3.

Решение. Отношение имеет вид:

$$2 < 4, 2 < 6, 2 < 8, 4 < 6, 4 < 8, 6 < 8.$$

Запишем отношение в виде подмножества $\mathfrak{R} \subset M \times M$ произведения множества M на себя, то есть в виде множества упорядоченных пар:

$$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}.$$

Граф отношения приведён на рисунке 3. $\otimes$

Пример 1.1.12. Пусть $M = \{f, p, q\}$ и задано подмножество $\mathfrak{R}$ множества $M \times M$

$$\{\{f, p\}, \{f, q\}, \{f, f\}, \{p, f\}, \{q, f\}, \{p, q\}, \{p, p\}, \{q, p\}, \{q, q\}\}.$$

Обладает ли определяемое этим подмножеством отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности?

Решение. Очевидно, что для элементов множества $\mathfrak{R}$ истинны следующие высказывания:

$$1) \{f, f\}, \{p, p\}, \{q, q\} \in \mathfrak{R};$$

- 2) $\{f, p\} \wedge \{p, f\} \in \mathfrak{R}, \{f, q\} \wedge \{q, f\} \in \mathfrak{R},$
 $\{p, q\} \wedge \{q, p\} \in \mathfrak{R};$
- 3) $\{f, p\} \in \mathfrak{R} \wedge \{p, q\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{f, q\} \in \mathfrak{R},$
 $\{f, q\} \in \mathfrak{R} \wedge \{q, p\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{f, p\} \in \mathfrak{R},$
 $\{p, f\} \in \mathfrak{R} \wedge \{f, q\} \in \mathfrak{R} \Rightarrow \{p, q\} \in \mathfrak{R}.$

Поэтому отношение $\mathfrak{R}$ на множестве M , заданное множеством упорядоченных пар элементов M , рефлексивно, симметрично и транзитивно. $\otimes$

Пример 1.1.13. Показать, что отношение включения $\subset$ является отношением порядка.

Решение. 1) Пусть X – произвольное множество. Так как всегда $X \subset X$, то отношение $\subset$ рефлексивно. 2) Пусть X, Y, Z – произвольные множества, для которых выполняются включения $X \subset Y$ и $Y \subset Z$. Если $x \in X$, то в силу $X \subset Y$ имеем $x \in Y$, а так как $Y \subset Z$, то и $x \in Z$. Поэтому $(X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z$, то есть отношение $\subset$ транзитивно. 3) Так как по закону тождества имеем

$$(X \subset Y \wedge Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y,$$

то отношение $\subset$ антисимметрично.

Отношение $\subset$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично и, следовательно, является отношением порядка. $\otimes$

Пример 1.1.14. Пусть функция $f : M_1 \rightarrow M_2$, где $M_1 \subset R^1$ и $M_2 \subset R^1$, задана формулой $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Требуется: найти множество определения M_1 и множество значений M_2 этой функции; выяснить, является ли данная функция отображением или преобразованием; выяснить, является ли f инъективной, сюръективной или биективной.

Решение. Множеством определения функции f является множество $M_1 = \{x \in R^1 : -1 \leq x \leq 1\}$, а множеством значений – множество $M_2 = M_1$, следовательно f осуществляет отображение M_1 на M_1 , то есть является преобразованием. Так как $(\exists x \in M_1) : f(x) = f(-x)$, то преобразование f не является инъективным, но очевидно, что f – сюръективно. Следовательно, отображение f не является биективным. $\otimes$

Пример 1.1.15. Доказать, что множество натуральных чисел N с операцией $(*) : x * y = \min\{x, y\}$ является полугруппой.

Решение. Исходя из определения полугруппы, нужно проверить, что операция $(*)$ является алгебраической и ассоциативной. Так как

$$(\forall x, y \in N) x * y = \min\{x, y\} \in N,$$

то операция $(*)$ является алгебраической. Проверим её на ассоциативность, имеем:

$$(\forall x, y, z \in N) (x * y) * z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, \min\{y, z\}\}.$$

Операция $(*)$ ассоциативна. Поэтому $(N, *)$ – полугруппа. $\otimes$

Пример 1.1.16. Доказать, что множество положительных действительных чисел $R^+ = \{x \in R^1 : x > 0\}$, в котором операции «сложения» и «умножения на число» введены по правилам

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R) x + y \stackrel{def}{=} x \cdot y \wedge \alpha \cdot x \stackrel{def}{=} x^\alpha,$$

является векторным пространством.

Решение. Согласно определению векторного пространства, в множестве R^+ должны выполняться две группы аксиом.

Аксиомы сложения:

$$1) (\forall x, y \in A) x + y = y + x \text{ (коммутативность);}$$

$$2) (\forall x, y, z \in M) x * (y * z) = (x * y) * z. \text{ (ассоциативность);}$$

$$3) (\exists 0 \in A): (\forall x \in A) x + 0 = x \text{ (существование нулевого элемента);}$$

$$4) (\forall x \in A) (\exists (-x) \in A): x + (-x) = 0 \text{ (существование противоположного элемента).}$$

Аксиомы умножения на число:

$$5) (\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$6) (\forall x, y \in A \wedge \forall \alpha \in R) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$7) (\forall x \in A) 1 \cdot x = x;$$

$$8) (\forall x \in A \wedge \forall \alpha, \beta \in R) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Во множестве R^+ операция «сложения» является бинарной алгебраической операцией, а операция «умножения на число» является внешней бинарной операцией, так как

$$(\forall x, y \in R^+ \wedge \forall \alpha \in R^1) x \cdot y \in R^+ \wedge x^\alpha \in R^+.$$

Проверим выполнение аксиом.

1) Коммутативность операции «сложения» выполняется, так как

$$(\forall x, y \in R^+) x \cdot y = y \cdot x.$$

2) Ассоциативность операции «сложения» выполняется, так как

$$(\forall x, y, z \in R^+) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3) В качестве нулевого элемента выбираем единицу, так как

$$(\forall x \in R^+) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

4) Противоположный элемент

$$-x = \frac{1}{x},$$

так как $(\forall x \in R^+) x \cdot \frac{1}{x} = 1.$

5) Так как $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$, то

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

6) Так как $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$, то

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

7) Так как $X^1 = X$, то

$$1 \cdot x = x.$$

8) Так как $X^{\alpha \cdot \beta} = (X^\beta)^\alpha$, то

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Все аксиомы векторного пространства выполняются, следовательно, множество R^+ с введёнными операциями является векторным пространством над полем действительных чисел R^1 .

⊗

Практическое занятие 2. Числовые поля. Комплексные числа

Предварительные сведения

Комплексными числами называются упорядоченные пары действительных чисел вида (a, b) , для которых операции сложения и умножения вводятся посредством определения результата их выполнения в соответствии со следующими аксиомами.

1. Два комплексных числа (a, b) и (c, d) считаются **равными** в том и только в том случае, если $a = c$ и $b = d$, что при помощи логической символики записывается так:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d. \quad (3.1)$$

2. **Сумма** двух комплексных чисел (a, b) и (c, d) является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{def}{=} (a + c, b + d). \quad (3.2)$$

3. **Произведение** двух комплексных чисел (a, b) и (c, d) является комплексным числом, которое находится по правилу:

$$(a, b)(c, d) \stackrel{def}{=} (ac - bd, ad + bc). \quad (3.3)$$

4. Комплексное число $(a, 0)$ отождествляется с действительным (вещественным) числом a : $(a, 0) \equiv a$. В частности, $(0, 0) \equiv 0$.

Числа вида $(0, b)$ называются **мнимыми числами**. Число $i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$ называется мнимой единицей, причём $i^2 = (-1, 0) \equiv -1$.

Нетрудно показать, что множество всех комплексных чисел является полем.

Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = a + bi \equiv a + ib.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – **модуль** комплексного числа, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ – **аргумент** комплексного числа.

Операции над комплексными числами производятся путём обычного раскрытия скобок с учётом того, что $i^2 = (-1, 0) = -1$.

В тригонометрической форме операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Корни n -й степени из комплексного числа α существуют и все они даются формулой

$$\beta_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

при любом целом числе k .

Примеры с решением

Пример 1.2.1. Построить точку, изображающую комплексное число

$$z = -3 - 4i.$$

Решение. В данной задаче $z = a + bi = -3 - 4i$. Так как на комплексной плоскости $a = x$ и $b = y$, то точка, изображающая на комплексной плоскости число z , имеет координаты $x = -3$ и $y = -4$. $\otimes$

Пример 1.2.2. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -4 - 4\sqrt{3}i$.

Решение. Модуль числа $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$. Точка z лежит в третьей четверти, поэтому $\arg z = \arctg \sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$. $\otimes$

Пример 1.2.3. Выполнить указанные действия:

$$\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}.$$

Решение. Выполняем действия, раскрывая скобки и учитывая свойство мнимой единицы $i^2 = -1$. $\otimes$

Пример 1.2.4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $-2 < \operatorname{Im} z \leq 3$.

Решение. Так как на комплексной плоскости $\operatorname{Im} z = y$, то искомое множество точек является полосой, заключённой между прямыми линиями с уравнениями $y = -2$ и $y = 3$, причём точки первой прямой этому множеству не принадлежат, а точки второй прямой принадлежат. $\otimes$

Пример 1.2.5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $|z-1| < 3$.

Решение. Положим $z = x + iy$. Тогда имеем $z-1 = (x-1) + iy$, откуда получаем

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 3,$$

или

$$(x-1)^2 + y^2 < 9.$$

Искомое множество точек комплексной плоскости является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке $(1; 0)$. $\otimes$

Пример 1.2.6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено условие: $\log_3 |z - 3i| < 1$.

Решение. Положим $z = x + iy$. Тогда для числа $z - 3i$ имеем

$$z - 3i = x + i(y - 3),$$

откуда получаем

$$|z - 3i| = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}.$$

Решая неравенство

$$\log_3 \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} < 1,$$

получаем $x^2 + (y - 3)^2 < 9$. Искомое множество точек является внутренностью круга радиуса 3 с центром в точке с координатами $(0; 3)$. $\otimes$

Пример 1.2.7. Представить комплексное число

$$z = -\cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

в тригонометрической форме.

Решение. Стандартная запись комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. По формулам приведения имеем $-\cos \vartheta = \cos(\pi - \vartheta)$. Поэтому, полагая $r = 1$ и $\varphi = \pi - \vartheta$, получаем стандартную запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$z = \cos(\pi - \vartheta) + i \sin(\pi - \vartheta). \otimes$$

Пример 1.2.8. Представить комплексное число $z = 4 - 4\sqrt{3} \cdot i$ в тригонометрической форме.

Решение. 1) Находим модуль: $|z| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$.

2) Находим аргумент. Так как $\cos \varphi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Сле-

довательно, $z = 8 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]. \otimes$

Пример 1.2.9. Выполнить умножение комплексных чисел:

$$8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \frac{1}{16} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Решение. Используя формулу умножения, получаем:

$$8 \cdot \frac{1}{16} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} i. \otimes$$

Пример 1.2.10. Выполнить деление комплексных чисел:

$$2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) : 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Решение. Используем формулу деления комплексных чисел, получаем:

$$\frac{2}{4} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i. \otimes$$

Пример 1.2.11. Возвести комплексное $2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$ число в седь-

мую степень.

Решение. По формуле возведения комплексного числа в степень имеем:

$$\left[2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) \right]^7 = 2^7 \left(\cos \left(-\frac{21\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{21\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= -64\sqrt{2} + 64\sqrt{2}i. \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $M = \{4, 8, 11, 22\}$. Образовать всевозможные подмножества этого множества и указать их число.

2. Пусть

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Найти $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X - Y$, $Y - X$.

3. Пусть $X = [1, 3) \cup (5, 7]$ и $Y = [2, 6]$. Найти $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X - Y$, $Y - X$.

4. Найти пересечение и объединение множеств решений неравенств:

$$3x + 4 \geq 7x - 16, |x - 3| < 1.$$

5. Изобразить на декартовой плоскости произведение множеств:

а) $X = \{x : 2 \leq x \leq 6\}, Y = \{y : 3 < y \leq 5\};$

б) $X = R, Y = \{y : -2 < y \leq 3\};$

в) $[0, 1] \times [0, 1];$

$$\text{г)} [1, 2] \times (-\infty, +\infty);$$

$$\text{д)} (0, +\infty) \times [-2, -3].$$

6. Доказать, что для произвольных множеств X, Y, Z справедливы равенства:

$$\text{а)} X \cup (X \cap Y) = X;$$

$$\text{б)} X \cap (X \cup Y) = X$$

$$\text{в)} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X);$$

$$\text{г)} (X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y;$$

$$\text{д)} Y \cup (X \setminus Y) = X \cup Y;$$

$$\text{е)} (X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z);$$

$$\text{ж)} (X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z);$$

$$\text{з)} (X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z);$$

$$\text{и)} X \cup Y \subset Z \Rightarrow X \times Y = (X \times Z) \cap (Z \times Y).$$

7. Слушатели потока в 100 человек изучают английский, немецкий и французский языки. Причём, 28 слушателей изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский. Сколько слушателей изучают только один язык? (проиллюстрировать решение задачи геометрически, используя диаграммы Эйлера).

8. Истинны или ложны для любых X, Y, Z следующие высказывания:

$$\text{а)} (X \subset Y \wedge Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z;$$

$$\text{б)} (X \neq Y \wedge Y \neq Z) \Rightarrow X \neq Z.$$

9. Найти множество истинности предиката: $\left\langle \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0 \right\rangle.$

10. Найти множество истинности предиката:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{Корни системы} \\ \text{уравнений} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - y = t - 1 \\ 2x - y = 3 - t \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{одновременно} \\ \text{положительны.} \end{array} \right\rangle$$

11. Найти множество истинности предиката: $\langle x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) > 0 \rangle.$

12. Записать высказывания, используя логические символы:

1) «существует такое число X , что для любого числа Y справедливо равенство $X + Y = 0$ »;

2) «если число больше 6, то его квадрат больше 36».

13. Выяснить, являются ли алгебраическими операции сложения, вычитания, умножения и деления на указанных подмножествах множества R действительных чисел и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

а) N ; б) $N_{2k} = \{2k : k \in N\}$; в) $N_{2k-1} = \{2k-1 : k \in N\}$;

г) Z ; д) $Z_{2k} = \{2k : k \in Z\}$; е) R ; ж) $R - \{0\}$;

з) $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$; и) $R - Q$; к) $\{0, 1\}$.

14. Выяснить, являются ли алгебраическими указанные операции на подмножестве $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ множества действительных чисел R , и указать, какие из алгебраических операций обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1) $x * y = \frac{x+y}{2}$; 2) $x * y = x + y - 1$; 3) $x * y = x^2 y$;

4) $x * y = \sqrt{xy}$; 5) $x * y = |x - y|$; 6) $x * y = x^y$;

7) $x * y = x^2 + y^2$; 8) $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$.

15. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ рассматриваются отношения « X равно Y », « X кратно Y » и « X больше Y на 2». Какое из приведённых ниже подмножеств множества $X \times X$ задаёт соответствующее отношение?

а) $\{\{4, 2\}, \{6, 2\}, \{8, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 4\}, \{8, 6\}, \{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$;

б) $\{\{4, 2\}, \{6, 4\}, \{8, 6\}\}$;

в) $\{\{2, 2\}, \{4, 4\}, \{6, 6\}, \{8, 8\}\}$.

16. Доказать, что:

а) множество натуральных чисел N с операциями $(*) : x * y = x$ и $(\circ) : x \circ y = 1$ является полугруппой;

б) множества всех целых чисел Z , всех рациональных чисел Q и всех действительных чисел R являются аддитивными группами, если в качестве групповой операции выбрано сложение чисел.

17. Найти действительные числа X и Y , если:

$$\text{а) } \frac{5x + 2xi - 3y - 3yi}{3 + 4i} = 2; \text{ б) } \frac{2u + 4i}{2x + y} - \frac{y}{x - i} = 0.$$

18. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

$$\begin{aligned} \text{а) } z &= \frac{(1 - 2i)^3}{i} + 4i^{16}; \text{ б) } z = \frac{3 - 2i}{1 - 4i} + i^9; \\ \text{в) } z &= \frac{5i - 2}{3i + 1} + i + \frac{8i - 3}{2 - i}; \text{ г) } z = \frac{1}{4} \left(\frac{17 + 31i}{7 + i} + \frac{12}{(1 + i)^4} \right) + i. \end{aligned}$$

19. Выполнить указанные действия:

- 1) $(1 + 2i)^6$;
- 2) $(2 + 3i) \cdot (4 - 5i) + (2 - 3i) \cdot (4 + 5i)$;
- 3) $(x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x + 1 + i) \cdot (x + 1 - i)$;
- 4) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$;
- 5) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2$;
- 6) $\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$;
- 7) $\frac{(1 + 2i)^2 - (2 - i)^3}{(1 - i)^3 + (2 + i)^2}$;
- 8) $\frac{(1 + 2i)^3 + (1 - 2i)^3}{(2 - i)^2 - (2 + i)^2}$;
- 9) $\frac{(3 - 4i)(2 - i)}{2 + i} - \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{2 - i}$;

$$10) \frac{5+12i}{8-6i} + \frac{(1+2i)^2}{2+i};$$

$$11) \left[\frac{1}{3} \left((1-i)^4 + \frac{7-24i}{4-3i} \right) + i \right] \frac{8}{(1+i)^2}.$$

20. Найти такие вещественные числа X и Y , что следующие пары комплексных чисел будут комплексно-сопряжёнными:

$$а) z_1 = y^2 - 2y + xy - x + y + (x+y)i, z_2 = -y^2 + 2y + 11 - 4i;$$

$$б) z_1 = x + y^2 + 1 + 4i, z_2 = ixy^2 + iy^2 - 3.$$

21. Решить уравнения:

$$1) |z| + z = 1 + 2i;$$

$$2) 2|z| - 4az + 1 + ai = 0 \quad (a \in R);$$

$$3) |z| + z = 2 - i;$$

$$4) 3z^2 - (14 - 8i)z + 8(4 - 3i) = 0;$$

$$5) 2(2 - i)z^2 + (7 - i)z + 5(1 + i) = 0;$$

$$6) (2 + 4i)z^2 + 2z + 6 - 6i = 0;$$

$$7) z^4 - 12z^2 + 64 = 0.$$

22. Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} (1-i)x - (3+i)y = 4, \\ 5x - (4+2i)y = 4i; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (1-i)x + 3iy = 5, \\ 2x - (3-3i)y = 6. \end{cases}$$

23. Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$1) z_1 = -3 + 3i; 2) z_2 = 5 - i; 3) z_3 = 2i; 4) z_4 = -\sqrt{2}i.$$

24. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

$$1) z_1 = -3 + 3i; 2) z_2 = -2i; 3) z_3 = 5 - \sqrt{2}.$$

25. Найти множество точек комплексной плоскости, для которых:

$$1) -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}; 2) 1 \leq |z+1| < 3; 3) |z+i| = 1;$$

$$4) \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 2 + i) \leq \pi; 5) \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi, \\ |1 - 2i - z| = 2; \end{cases}$$

$$6) |z - 1 - i| \geq |z - 2 + i|; 7) |z - 1 + 2i| \geq 3; 8) |z - 2i| + |z - i| = 1.$$

26. Представить комплексные числа в тригонометрической форме:

$$1) z = 16 - 16\sqrt{3}i; 2) z = -6\sqrt{3} - 6i; 3) z = (\sqrt{5} - 2)i.$$

27. Представить комплексные числа в алгебраической форме:

$$1) z = 5\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right);$$

$$2) z = 4 \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right).$$

28. Представив комплексные числа в тригонометрической форме, выполнить указанные действия:

$$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right) (-3 + \sqrt{3}i);$$

$$4\sqrt{3} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) : (\sqrt{3} - i);$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \right) (1 + i); (-\sqrt{5} + \sqrt{5}i)^3 (1 + i)^2; \frac{2\sqrt{3} - 2i}{(-1 + i)(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)}.$$

29. Извлечь корни из комплексных чисел, предварительно представив их в тригонометрической форме:

$$1) \sqrt{-6 + 6\sqrt{3}i};$$

$$2) \sqrt[3]{-13,5\sqrt{2} - 13,5\sqrt{2}i};$$

$$3) \sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}.$$

30. Представив комплексные числа

$$z_1 = -1 - i, z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_3 = 1 + \sqrt{3}i$$

в тригонометрической форме, вычислить выражение $\frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$.

2. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Практическое занятие 1. Векторная алгебра

Предварительные сведения

Множество X абстрактных элементов (**векторов**) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называется **векторным пространством** над полем P , если для его элементов выполнены перечисленные ниже аксиомы.

1⁰. Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in X$ однозначно определена **операция сложения**, результатом которой является вектор, обозначаемый $\vec{x} + \vec{y} \in X$ и называемый **суммой** векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, причём операция сложения обладает следующими свойствами:

$$1) \left(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X \right) \left((\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \right) - \text{ассоциативность};$$

$$2) \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X \right) \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} - \text{коммутативность}.$$

2⁰. Существует однозначно определённый элемент $\vec{0} \in X$, такой, что $\left(\forall \vec{x} \in X \right)$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

который называется **нуль-вектор**.

3⁰. Существует однозначно определённый вектор $-\vec{x} \in X$, такой, что $\left(\forall \vec{x} \in X \right)$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0},$$

который называется **обратным к вектору** $\vec{x} \in X$.

4⁰. Для любого числа $\alpha \in P$ и для любого вектора $\vec{x} \in X$ определена операция **умножения вектора на число**, результатом которой является вектор $\vec{\alpha \cdot x} \in X$, называемый **произведением вектора $\vec{x}$ на число α** , причём операция умножения векторов на числа обладает следующими свойствами: $(\forall \alpha, \beta \in P)$ и $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X)$

$$1) 1 \cdot \vec{x} = \vec{x};$$

$$2) \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y};$$

$$3) (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x};$$

$$4) (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}).$$

Система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset X$ называется **линейно независимой**, если

$$\left(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \right) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** в противном случае.

Максимальная по числу векторов линейно независимая система векторов

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset X^n,$$

(содержащая n векторов), называется **базисом векторного пространства**, само векторное про-

странство в этом случае называется **n-мерным векторным пространством** и обозначается X^n .

Таким образом, в n-мерном векторном пространстве существует линейно независимая система,

содержащая только n векторов, а любая система, содержащая $n+1$ вектор будет уже линейно зависимой.

В реальном трёхмерном пространстве (в его математической модели) векторы – это направленные отрезки. Базис трёхмерного пространства R^3 состоит из трёх взаимно перпендикулярных векторов единичной длины:

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3,$$

которые образуют базис декартовой системы координат.

Любой вектор $\vec{x} \in X^n$ можно представить в виде разложения

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n$$

по векторам как-либо выбранной линейно независимой системе n векторов

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \right\} \subset X^n,$$

образующей базис пространства.

Алгебраическая операция сложения векторов и внешняя операция умножения вектора на число определяются так:

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (x^i + y^i) \vec{e}_i = (x^1 + y^1) \vec{e}_1 + (x^2 + y^2) \vec{e}_2 + \dots + (x^n + y^n) \vec{e}_n;$$

$$\alpha \vec{x} = \alpha \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = \alpha x^1 \vec{e}_1 + \alpha x^2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha x^n \vec{e}_n.$$

Линейная комбинация векторов находится по формуле:

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \sum_{i=1}^n (\alpha x^i + \beta y^i) \vec{e}_i.$$

В трёхмерном пространстве скалярное произведение векторов является функцией, значение которой находится по формуле

$$\left(\vec{x}, \vec{y} \right) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3,$$

или по эквивалентной формуле

$$\left(\begin{array}{c} \vec{x}, \vec{y} \end{array} \right) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi,$$

где **норма вектора**

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

а φ – угол, образованный приведёнными к общему началу векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Примеры с решением

Пример 2.1.1. В декартовой системе координат задана точка $A(1; 5; 3)$. Найти координаты точки B , расположенной симметрично точке $A(1; 5; 3)$ относительно координатной плоскости X^1OX^2 .

Решение. Координаты точки B по осям OX^1 и OX^2 такие же, как и у точки A , а координата по оси OX^3 имеет противоположный знак. Следовательно, $B(1; 5; -3)$. $\otimes$

Пример 2.1.2. В декартовой системе координат своими разложениями по каноническому базису заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{z} = 3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти значение линейной комбинации

$$\vec{u} = 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$$

этих векторов и сделать вывод о линейной зависимости, или линейной независимости системы

$\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$ и взаимном расположении векторов.

Решение. Находим линейную комбинацию:

$$\begin{aligned} 3\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z} &= \\ &= 3\left(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) + 2\left(2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3\right) - \left(3\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) = \\ &= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Значением линейной комбинации трёх векторов с ненулевыми коэффициентами является нуль-вектор. Поэтому система векторов линейно зависима. Так как векторы заданы в пространстве R^3 , заключаем, что они компланарны, то есть лежат в одной плоскости. $\otimes$

Пример 2.1.3. В декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3.$$

Найти норму вектора $\vec{z} = 2\vec{x} - 5\vec{y}$.

Решение. Находим вектор

$$\begin{aligned} \vec{z} &= 2\vec{x} - 5\vec{y} = 2(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) - 5(4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3) = \\ &= -18\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 24\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Находим норму вектора $\vec{z}$: $\|\vec{z}\| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-24)^2} = \sqrt{916}$. $\otimes$

Пример 2.1.4. На плоскости R^2 задан параллелограмм, три вершины которого имеют, соответственно, координаты $O(0; 0)$, $B(1; 2)$, $D(5; 0)$ (рисунок 1.1). Найти:

- 1) координаты вершины C ;
- 2) косинус угла между сторонами OB и OD ;
- 3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

Решение. 1) По определению координаты вершины C равны координатам вектора $\vec{OC}$ (рисунок 1.1), который равен сумме векторов

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Так как $\vec{OB} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, а $\vec{OD} = 5\vec{e}_1$, то $\vec{OC} = 6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

- 2) Вычисляем скалярное произведение векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\left(\vec{OB}, \vec{OD} \right) = 5.$$

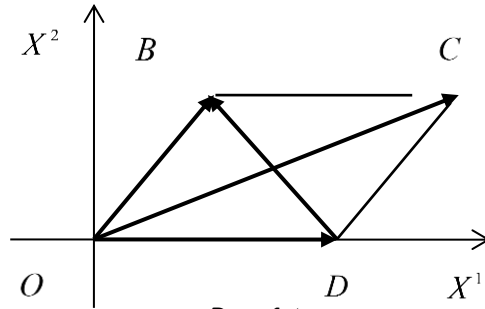


Рис. 1.:

3) Вычисляем длины векторов: $\vec{OB}$ и $\vec{OD}$:

$$\|\vec{OB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,236;$$

$$\|\vec{OD}\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4) Находим $\cos\{\vec{OB}, \vec{OD}\}$: $\cos\{\vec{OB}, \vec{OD}\} = \frac{5}{5 \cdot 2,236} \approx 0,447.$

5) Находим диагональ $\vec{DB}$:

$$\vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_1 = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

6) Далее, $\|\vec{OC}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$; $\|\vec{DB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

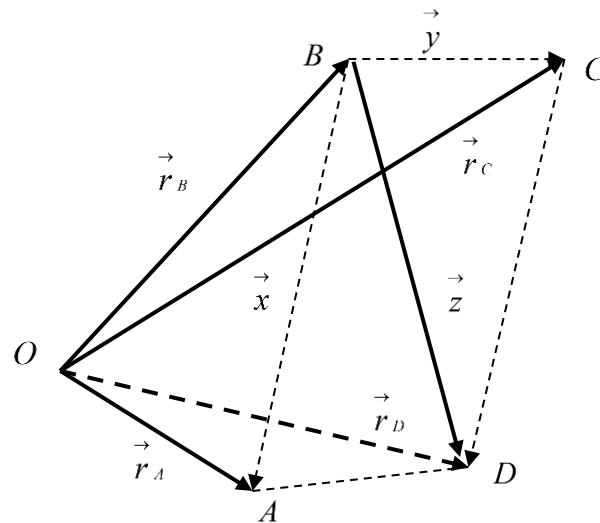
7) Находим косинус угла между диагоналями:

$$\cos\{\vec{OC}, \vec{DB}\} = \frac{(\vec{OC}, \vec{DB})}{\|\vec{OC}\| \cdot \|\vec{DB}\|} = \frac{(-4) \cdot 6 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \otimes$$

Пример 2.1.5. Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что:

$$\vec{r}_A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{r}_B = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{r}_C = -7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3;$$

Р е ш е н и е. Изобразим ситуацию на рисунке, не заботясь о точности изображения. Главное, чтобы рисунок отображал ситуацию качественно.



Из рисунка видно, что:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{x}, \quad \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{z},$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_B + \vec{z} = \vec{r}_B + \vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_C - \vec{r}_B.$$

Подставляя разложения векторов в полученную формулу, вычисляем все требуемые в задаче величины. $\otimes$

Пример 2.1.6. В пространстве R^2 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \sqrt{7}\vec{e}_2, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + \sqrt{24}\vec{e}_2.$$

Найти какой-либо вектор $\vec{z}$, направленный по биссектрисе угла $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$.

Р е ш е н и е. 1) Находим длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = 4;$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{24})^2} = 5.$$

2) Находим орты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\vec{e}_x = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{3}{4} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \vec{e}_2; \quad \vec{e}_y = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} = \frac{1}{5} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{24}}{5} \vec{e}_2.$$

3) Находим диагональ ромба, построенного на ортах $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$:

$$\vec{z} = \vec{e}_x + \vec{e}_y = \frac{19}{20} \vec{e}_1 + \frac{5\sqrt{7} + 8\sqrt{6}}{20} \vec{e}_2.$$

Диагональ ромба направлена по биссектрисе угла, образованного его сторонами, поэтому

найденный вектор $\vec{z}$ является искомым вектором. $\otimes$

Пример 2.1.7. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами задан вектор

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Найти направляющие косинусы данного вектора.

Решение. 1) Находим длину вектора:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

$$2) \text{ Находим орт вектора: } \vec{e}_x = \frac{1}{\sqrt{21}} \vec{e}_1 + \frac{-2}{\sqrt{21}} \vec{e}_2 + \frac{4}{\sqrt{21}} \vec{e}_3.$$

3) Направляющие косинусы вектора равны координатам его орта, поэтому имеем:

$$\cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_1\right\} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \quad \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_2\right\} = -\frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos\left\{\vec{x}, \vec{e}_3\right\} = \frac{4}{\sqrt{21}}. \quad \otimes$$

Пример 2.1.8. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами заданы векторы

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Найти скалярное произведение $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$ двумя способами.

Решение. 1. Находим линейные комбинации $\vec{x} - 2\vec{y}$ и $3\vec{x} + \vec{y}$:

$$\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 - 2\left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = -\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3,$$

$$3\vec{x} + \vec{y} = 3\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right) + \left(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Находим скалярное произведение $\left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right)$:

$$\begin{aligned} \left(-\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3\right) &= \\ &= -4 + 20 + 80 = 96. \end{aligned}$$

2. Используем свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x} - 2\vec{y}, 3\vec{x} + \vec{y}\right) &= \left(\vec{x}, 3\vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \left(-2\vec{y}, 3\vec{x}\right) + \left(-2\vec{y}, \vec{y}\right) = \\ &= 3\left(\vec{x}, \vec{x}\right) + \left(\vec{x}, \vec{y}\right) - 6\left(\vec{y}, \vec{x}\right) - 2\left(\vec{y}, \vec{y}\right) = \\ &= 3\|\vec{x}\|^2 - 5\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} - 2\|\vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

Теперь можно произвести вычисления, используя данные задачи. $\otimes$

Пример 2.1.9. Дано: $\|\vec{x}\| = 3$, $\|\vec{y}\| = 2\sqrt{5}$, $\left\{\vec{x}, \vec{y}\right\} = \frac{\pi}{4}$. Найти

$$\left(\vec{x} + 3\vec{y}, 3\vec{x} - \vec{y}\right).$$

Решение. Используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\begin{aligned}
 \left(\vec{x} + 3\vec{y}, 3\vec{x} - \vec{y} \right) &= 3\|\vec{x}\|^2 - \left(\vec{x}, \vec{y} \right) + 9\left(\vec{y}, \vec{x} \right) - 3\|\vec{y}\|^2 = \\
 &= 3\|\vec{x}\|^2 + 8\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} - 3\|\vec{y}\|^2 = -33 + 24\sqrt{10}. \otimes
 \end{aligned}$$

Пример 2.1.10. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три вектора:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_3 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

1) Показать, что векторы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ образуют новый базис в пространстве R^3 .

2) Найти координаты вектора $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ относительно базиса $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$.

Решение. 1) Исходя из определения линейной независимости, составляем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ методом Гаусса, получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, система векторов линейно независима и, так как число векторов совпадает с размерностью пространства, является одним из базисов в пространства R^3 .

2) Для нахождения координат вектора $\vec{x}$ относительно нового базиса записываем разложение вектора $\vec{x}$ по векторам этого базиса и СЛАУ, следующую из этого разложения и инвариантности вектора как геометрического объекта:

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3 \Rightarrow \begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 = 1, \\ -3x^1 + x^2 + x^3 = 6. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса.

1) Из первого уравнения $x^1 = 3 - 5x^2 + 2x^3$. Подставляя во второе и третье уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 16x^2 - 5x^3 = 15. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $x^2 = \frac{8}{13}x^3 + \frac{15}{13}$. Подставляя в третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x^1 + 5x^2 - 2x^3 = 3, \\ -13x^2 + 8x^3 = -5, \\ 63x^3 = 115. \end{cases}$$

Обратный ход: из третьего уравнения

$$x^3 = \frac{115}{63}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$x^2 = \frac{95}{63}.$$

Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем

$$x^1 = -\frac{56}{63}. \otimes$$

Пример 2.1.11. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы радиус-векторы

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \vec{y} = 10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Найти расстояние между конечными точками векторов

$$\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) \vec{x} + \vec{y},$$

$$\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z} \right) \vec{y}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим скалярное произведение $\left(\vec{x}, 2\vec{z} \right)$:

$$\left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) = \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, 2\left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) \right) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 2.$$

2) находим вектор $\vec{u} = \left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) \vec{x} + \vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \left(\vec{x}, 2\vec{z} \right) \vec{x} + \vec{y} = 2 \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \right) + \left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = \\ &= 14\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 10\vec{e}_3. \end{aligned}$$

3) Находим скалярное произведение $\left(2 \cdot \vec{x}, \vec{z} \right)$:

$$\begin{aligned} \left(2 \cdot \vec{x}, \vec{z} \right) &= \left(2 \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \right), \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) \right) = \\ &= \left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) = 4 + 4 - 6 = 2. \end{aligned}$$

4) Находим вектор $\vec{v} = \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z} \right) \vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{x} + \left(2\vec{x}, \vec{z} \right) \vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2 \left(10\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = \\ &= 22\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3. \end{aligned}$$

5) Находим расстояние между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\rho\left(\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} \end{matrix}\right) = \left\| \vec{u} - \vec{v} \right\| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9. \otimes$$

Пример 2.1.12. В пространстве R^3 своими координатами относительно канонического базиса заданы три точки $A(2; 4; 6)$, $B(1; 3; 5)$, $C(0; 2; 3)$. Найти длины сторон треугольника

ABC , косинусы углов при вершинах треугольника и проекцию вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$ на

направление вектора $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$.

Решение. 1) Находим векторы, определяющие стороны треугольника:

$$\vec{AB} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3;$$

$$\vec{AC} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3;$$

$$\vec{BC} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

2) Находим длины сторон треугольника ΔABC :

$$\left\| \vec{AB} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3};$$

$$\left\| \vec{AC} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17};$$

$$\left\| \vec{BC} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

3) Находим косинусы углов при вершинах треугольника по формуле

$$\cos \vartheta = \frac{\left(\begin{matrix} \vec{x} & \vec{y} \end{matrix} \right)}{\left\| \vec{x} \right\| \cdot \left\| \vec{y} \right\|} = \frac{x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}}.$$

$$\cos\left\{\vec{AB}, \vec{AC}\right\} = \frac{\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{51}};$$

$$\cos\left\{\vec{BA}, \vec{BC}\right\} = \frac{\left(\vec{BA}, \vec{BC}\right)}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{-4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{18}};$$

$$\cos\left\{\vec{CA}, \vec{CB}\right\} = \frac{\left(\vec{CA}, \vec{CB}\right)}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|} = \frac{10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{102}}.$$

4) Находим проекцию вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$ на направление вектора $\vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$:

$$\text{Pr}_{\vec{z}}\left\{\vec{AB} + \vec{AC}\right\} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-4) \cdot (-5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{30}}. \otimes$$

Пример 2.1.13. Пусть на плоскости $X^1 O X^2$ даны две точки $A_1(x_1^1; x_1^2)$ и $A_2(x_2^1; x_2^2)$

. Найти координаты точки $A(x^1; x^2)$, делящей отрезок $A_1 A_2$ в отношении $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda$.

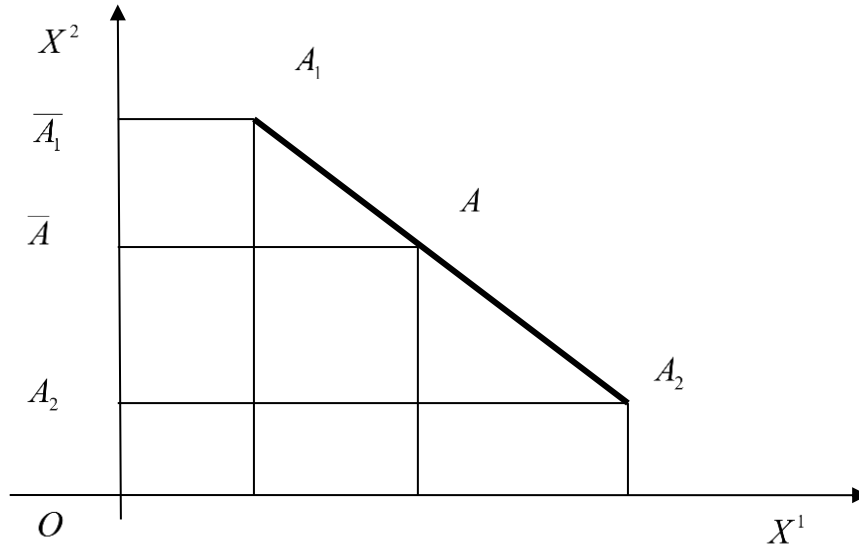
Решение. Предположим, что отрезок $A_1 A_2$ не параллелен оси $O X^1$. Точки A_1, A, A_2 спроектируем на оси $O X^1$, и $O X^2$ (рисунок).

Имеем по условию задачи

$$\frac{A_1 A}{A A_2} = \frac{\overline{A_1 A}}{\overline{A A_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Далее получаем, что

$$\overline{A_1 A} = |x_1^2 - x^2|, \overline{A A_2} = |x^2 - x_2^2| \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|x_1^2 - x^2|}{|x^2 - x_2^2|}.$$



Точка $\overline{A}$ лежит между точками A_1 и A_2 , поэтому

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|x_1^2 - x^2|}{|x^2 - x_2^2|} = \frac{x_1^2 - x^2}{x^2 - x_2^2}.$$

Из последнего равенства находим

$$x^2 = \frac{\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 \left(x_1^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^2 \right)}{\lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^2 + \lambda x_2^2}{\lambda + 1}.$$

Аналогично находим первую координату точки A :

$$x^1 = \frac{\lambda_2 x_1^1 + \lambda_1 x_2^1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2 \left(x_1^1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2^1 \right)}{\lambda_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 \right)} = \frac{x_1^1 + \lambda x_2^1}{\lambda + 1}. \otimes$$

Практическое занятие 2. Векторное и смешанное произведения.

Прямая линия и плоскость

Предварительные сведения

Векторное произведение векторов как результат алгебраической операции умножения векторов

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^3 y^i \vec{e}_i = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3$$

находится по формуле

$$\left[\vec{x}, \vec{y} \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Смешанное произведение векторов – это функция, значение которой находится по формуле

$$\left(\left[\vec{x}, \vec{y} \right], \vec{z} \right) = x^1 y^2 z^3 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2 - x^1 y^3 z^2 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1.$$

Параметрические уравнения прямой линии в трёхмерном пространстве имеют вид

$$x^i = x_0^i + t \cdot a^i,$$

где $i = 1, 2, 3$, x_0^i – координаты опорной точки, a^i – координаты направляющего вектора,

$t \in (-\infty, +\infty)$ – параметр.

Параметрические уравнения плоскости в трёхмерном пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + a_1^1 \cdot t_1 + a_2^1 \cdot t_2, \\ x^2 = x_0^2 + a_1^2 \cdot t_1 + a_2^2 \cdot t_2, \\ x^3 = x_0^3 + a_1^3 \cdot t_1 + a_2^3 \cdot t_2. \end{cases}$$

Неявное уравнение плоскости в трёхмерном пространстве записывается в виде

$$A \cdot x^1 + B \cdot x^2 + C \cdot x^3 + D = 0,$$

где коэффициенты при неизвестных суть координаты **нормального** вектора плоскости

$$\vec{N} = Ax^1 + Bx^2 + Cx^3,$$

удовлетворяющего условию

$$\left(\vec{N}, \vec{x} \right) = 0,$$

где $\vec{X}$ – произвольный вектор на плоскости.

Примеры с решением

Пример 2.2.1. Вычислить площадь треугольника, построенного на приведённых к общему началу векторах

$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{y} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

Решение. Если в некоторой декартовой системе координат векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ заданы своими разложениями

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3, \quad \vec{y} = y^1 \vec{e}_1 + y^2 \vec{e}_2 + y^3 \vec{e}_3,$$

то справедлива формула

$$\left[\vec{x}, \vec{y} \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Применим эту формулу для решения задачи.

1) Вычисляем векторное произведение:

$$\begin{aligned} \left[\vec{x}, \vec{y} \right] &= ((-2) \cdot (-6) - (-1) \cdot 1) \vec{e}_1 + ((-1) \cdot (-2) - 3 \cdot (-6)) \vec{e}_2 + \\ &+ (3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) \vec{e}_3 = 13 \vec{e}_1 + 20 \vec{e}_2 - \vec{e}_3. \end{aligned}$$

2) Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} \left\| \left[\vec{x}, \vec{y} \right] \right\|.$$

Вычисляем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \left[\vec{x}, \vec{y} \right] \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{13^2 + 20^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{169 + 400 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{570}. \quad \otimes$$

Пример 2.2.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{y} = 3\vec{a} + \vec{b},$$

если

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1 \text{ и } \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Вычисляем векторное произведение, используя его свойства:

$$\begin{aligned} \left[\vec{x}, \vec{y} \right] &= \left[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b} \right] = 3 \left[\vec{a}, \vec{a} \right] + \left[\vec{a}, \vec{b} \right] + \\ &+ 9 \left[\vec{b}, \vec{a} \right] + 3 \left[\vec{b}, \vec{b} \right] = -8 \left[\vec{a}, \vec{b} \right]. \end{aligned}$$

По определению площадь параллелограмма равна:

$$S = \left\| \left[\vec{x}, \vec{y} \right] \right\| = 8 \left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\| = 8 \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4. \otimes$$

Пример 2.2.3. Найти орт вектора, перпендикулярного векторам

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Решение. Предлагается решить задачу самостоятельно. $\otimes$

Пример 2.2.4. Получить уравнение плоскости $H^2 \subset R^3$, проходящей через начало координат O и через две точки $M_1(4; -2; 1)$, $M_2(2; 4; -3)$.

Решение. Радиус-векторы точек M_1 и M_2

$$\vec{x} \equiv \vec{OM}_1 = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} \equiv \vec{OM}_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Нормальный вектор плоскости находим как векторное произведение, используя формулу

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \left[\vec{OM}_1, \vec{OM}_2 \right] \equiv \left[\vec{x}, \vec{y} \right] = \\ &= (x^2y^3 - x^3y^2)\vec{e}_1 + (x^3y^1 - x^1y^3)\vec{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\vec{e}_3 =: \\ &= [(-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 4]\vec{e}_1 + [1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3)]\vec{e}_2 + [4 \cdot 4 - (-2) \cdot 2]\vec{e}_3 = \end{aligned}$$

$$= 2\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 + 20\vec{e}_3.$$

Из условия ортогональности радиус-вектора

$$\vec{OM} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$$

текущей точки M плоскости её нормальному вектору

$$\left(\vec{N}, \vec{OM} \right) = 0,$$

получаем уравнение плоскости в неявном виде:

$$x^1 + 7x^2 + 10x^3 = 0. \otimes$$

Пример 2.2.5. Найти угол между плоскостями, определяемыми уравнениями:

$$3x^1 - x^2 + 3 = 0, \quad x^1 - 2x^2 + 5x^3 - 10 = 0.$$

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами

$$\vec{N}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{N}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \cos \left\{ \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right\} &= \frac{\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2 \right)}{\left\| \vec{N}_1 \right\| \cdot \left\| \vec{N}_2 \right\|} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}. \otimes$

Пример 2.2.6. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей с уравнениями

$$x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0, \quad x^1 - x^2 - 3x^3 + 6 = 0.$$

Решение. Проверяем, что плоскости не параллельны (то есть их нормальные векторы не коллинеарны), для чего проверяем пропорциональны или нет координаты нормальных векторов:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-3}.$$

Координаты не пропорциональны, следовательно, нормальные векторы неколлинеарны, то есть плоскости не параллельны.

Так как прямая принадлежит обеим плоскостям, её направляющий вектор ортогонален нормальным векторам плоскостей, поэтому находим его как векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2 \right] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3 = \\ &= [1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)] \vec{e}_1 + [1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3)] \vec{e}_2 + [1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] \vec{e}_3 = \\ &= -2 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - 2 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, поэтому прямая линия пересекает все три координатные плоскости. Найдём, например, точку пересечения прямой и плоскости $X^1 O X^3$, для чего решаем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^3 = 2, \\ x^1 - 3x^3 = -6 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение $x_0^1 = 0$, $x_0^2 = 0$, $x_0^3 = 2$.

Подставляя найденные координаты направляющего вектора и точки в канонические уравнения прямой линии, получаем канонические уравнения

$$\frac{x^1}{-2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 2}{-2}. \otimes$$

Пример 2.2.7. Найти точку пересечения прямой линии с уравнениями

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4},$$

и плоскости с уравнением $x^1 + x^2 + 2x^3 - 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Проверяем, пересекается ли прямая линия с плоскостью, для чего находим скалярное произведение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой линии:

$$\left(\vec{N}, \vec{l} \right) = \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \right) = -6 \neq 0.$$

Векторы не ортогональны, а следовательно, прямая линия и плоскость не параллельны.

Параметрические уравнения прямой линии имеют вид:

$$\begin{cases} x^1 = 2 + t, \\ x^2 = 3 + t, \\ x^3 = -1 - 4t. \end{cases}$$

Найдём значение параметра t_0 , соответствующее точке пересечения прямой линии и плоскости, для чего подставим x^1, x^2, x^3 из параметрических уравнений прямой линии в уравнение плоскости. Решая получившееся уравнение, найдём $t_0 = -1$. Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, находим координаты точки пересечения:

$$x_0^1 = 1, x_0^2 = 2, x_0^3 = 3. \otimes$$

Пример 2.2.8. Найти расстояние от точки $M(1; 0; 1)$ до плоскости H^2 с уравнением $4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0$.

Р е ш е н и е. Расстояние от точки M до плоскости – это длина вектора $\vec{M_0M}$ с начальной точкой M и конечной точкой M_0 – проекцией точки M на плоскость H^2 .

Проекция точки на плоскость – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость. Поэтому следует составить уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(1; 0; 1)$ перпендикулярно плоскости с уравнением

$$4x^1 + 6x^2 + 4x^3 - 25 = 0,$$

и найти точку её пересечения с плоскостью.

Если в качестве направляющего вектора прямой линии выбрать нормальный вектор плоскости $\vec{l} = \vec{N} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, то канонические уравнения прямой линии примут вид

$$\frac{x^1 - 1}{4} = \frac{x^2}{6} = \frac{x^3 - 1}{4},$$

откуда получаем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 4t, \\ x^2 = 6t, \\ x^3 = 1 + 4t. \end{cases}$$

Подставляя общее выражение для координат текущей точки прямой линии из параметрических уравнений в уравнение плоскости, получаем уравнение для параметра, решение которого даёт для параметра значение

$$t_0 = \frac{1}{4},$$

соответствующее искомой точке пересечения прямой линии и плоскости.

Подставляя это значение параметра в параметрические уравнения прямой линии, получаем находим искомые координаты проекции M_0 точки $M(1; 0; 1)$ на плоскость H^2 :

$$x^1 = 2, x^2 = \frac{3}{2}, x^3 = 2.$$

Вектор

$$\vec{M_0M} = (2-1)\vec{e}_1 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)\vec{e}_2 + (2-1)\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Расстояние

$$\rho(M, H^2) = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{2}. \otimes$$

Практическое занятие 3. Абстрактные векторные пространства

Предварительные сведения

Аддитивная абелева группа E называется **абстрактным векторным пространством** (над полем P), если на ней определена внешняя бинарная операция – **умножение элементов группы E на элементы поля P** , то есть $(\forall x \in E)$ и $(\forall \alpha \in P)$ $(\exists \alpha \cdot x \in E)$, причём выполняются следующие аксиомы:

$$1) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x;$$

$$2) \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

$$3) 1 \cdot x = x;$$

$$4) (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

Простейшим примером векторного пространства является множество обычных трёхмерных векторов, которое изучалось выше. Здесь отметим лишь, что из определения векторного пространства следует, что

$$(\forall x \in E) -x = (-1)x,$$

где 1 – единица поля P , и

$$0x = 0.$$

В последнем равенстве 0 в левой части – это нуль поля P , 0 в правой части равенства – это нулевой элемент из группы E . Элементы векторного пространства называются **абстрактными векторами**.

Система векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$ называется **линейно независимой**, если

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0),$$

и **линейно зависимой** – в противном случае. Если векторное пространство содержит линейно независимую систему из n векторов, а любая система, содержащая $n + 1$ векторов, уже линейно зависима, то говорят, что пространство E является **n мерным векторным пространством**. Любая линейно независимая система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$ из n векторов образует **базис** пространства. Любой вектор $x \in E$ можно представить в виде разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

где коэффициенты разложения называются **координатами** вектора относительно заданного базиса. Подмножество $L \in E$ называется **линейным многообразием** в E , если

$$(\forall \alpha, \beta \in P)(x, y \in L) \Rightarrow (\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in L).$$

Остальные определения теории векторных пространств, в том числе евклидовых, приведены выше на страницах 25-28.

Примеры с решением

Пример 2.3.1. Пусть P – числовое поле. На множестве объектов

$$P^n = \left\{ |a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, a_k \in P \right\},$$

которые назовём вектор-столбцами, определим операции сложения вектор-столбцов и умножения вектора-столбца на числа из поля P :

$$1) (\forall |a\rangle, |b\rangle \in P^n) |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \$$$

$$2) (\forall |a\rangle \in P^n) \text{ и } (\forall \alpha \in P) \alpha \cdot |a\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \dots \\ \alpha \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Показать, что множество P^n является n -мерным векторным пространством.

Р е ш е н и е. Для доказательства требуется проверить выполнение всех аксиом векторного пространства и построить хотя бы один базис из вектор-столбцов.

Аксиомы сложения.

1) Аксиома ассоциативности выполняется в силу ассоциативности операции сложения в поле P , действительно

$$\begin{aligned} [|a\rangle + |b\rangle] + |c\rangle &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ \dots \\ (a_n + b_n) + c_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ \dots \\ a_n + (b_n + c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \dots \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \right] = |a\rangle + [|b\rangle + |c\rangle]. \end{aligned}$$

2) Аксиома коммутативности выполняется в силу коммутативности операции сложения в поле P , действительно

$$|a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \dots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = |b\rangle + |a\rangle$$

3) Вектор-нуль определим так

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома о нейтральном элементе выполняется, действительно имеем:

$$(\forall |a\rangle \in P^n) |a\rangle + |0\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ \dots \\ a_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

4) Противоположный вектор-столбец определим так

$$(\forall |a\rangle \in P^n) -|a\rangle = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что аксиома об обратном (противоположном элементе) выполняется, действительно имеем:

$$|a\rangle + (-|a\rangle) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_1 \\ a_2 - a_2 \\ \dots \\ a_n - a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аксиомы умножения вектор-столбца на числа. Аналогично показывается, что выполняются аксиомы умножения вектор-столбца на числа:

$$1) (\forall |a\rangle \in P^n) \text{ и } (\forall \alpha \in P)$$

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha(a_1 + b_1) \\ \alpha(a_2 + b_2) \\ \dots \\ \alpha(a_n + b_n) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix};$$

2) $(\forall \alpha, \beta \in P)$

$$(\alpha + \beta)|a\rangle = (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)a_1 \\ (\alpha + \beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha + \beta)a_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle;$$

$$3) 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix};$$

$$4) (\alpha\beta)|a\rangle = (\alpha\beta) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_1 \\ (\alpha\beta)a_2 \\ \dots \\ (\alpha\beta)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta a_1) \\ \alpha(\beta a_2) \\ \dots \\ \alpha(\beta a_n) \end{pmatrix} = \dots = \alpha[\beta|a\rangle],$$

Таким образом, все аксиомы векторного пространства выполняются и, следовательно, множество P^n является векторным пространством.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого разложения видно, что в силу произвольности вектор-столбца $|a\rangle$, он представлен разложением по вектор-столбцам специального вида

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система этих вектор-столбцов образует простейший, или *канонический* базис в векторном пространстве P^n .

Теперь очевидно, что множество P^n является n -мерным векторным пространством. $\otimes$

Пример 2.3.2. Показать, что если система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\}$ линейно независима, то

и любая её подсистема также линейно независима.

Решение. Пусть $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ – подсистема данной системы, то есть $m < n$.

Предположим, что условие задачи неверно, то есть подсистема $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ линейно за-

висима. Тогда можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0}.$$

Учитывая свойство нуля вектора

$$\left(\forall \vec{x} \in X \right) \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

добавим его в обе части последнего тождества, представив его в виде линейной комбинации оставшихся векторов исходной системы с нулевыми коэффициентами

$$\vec{0} = 0 \vec{x}_{m+1} + \dots + 0 \vec{x}_n.$$

Получаем

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m + 0 \vec{x}_{m+1} + \dots + 0 \vec{x}_n = \vec{0},$$

то есть линейная комбинация векторов исходной системы с коэффициентами, не все из которых равны нулю одновременно, даёт нулевой вектор. По определению это означает линейную зависи-

мость векторов системы $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\}$, что противоречит условию задачи.

Следовательно, предположение о линейной зависимости *произвольной* подсистемы

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \text{ линейно независимой системы } \left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \right\} \text{ не верно. } \otimes$$

Пример 2.3.3. Показать, что система из двух векторов линейно зависима в том и только в том случае, если векторы коллинеарны.

Решение. Необходимость. Если из двух векторов $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ хотя бы один равен нулю

вектору, то векторы коллинеарны. Поэтому предположим, что векторы $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Пусть

система $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. Покажем, что векторы коллинеарны. По определению

найдутся такие числа $\alpha, \beta \in R$, что

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{0},$$

причём эти числа не равны нулю одновременно.

Пусть $\beta \neq 0$. Тогда получаем:

$$\vec{y} = \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) \vec{x}.$$

Обозначая $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, получим

$$\vec{y} = \lambda \vec{x},$$

то есть по определению векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Достаточность. Пусть теперь векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, покажем, что система

$\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. По определению коллинеарности имеем, например:

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}.$$

Пусть $\vec{v} \neq \vec{0}$, тогда можем записать

$$\vec{y} = \frac{\lambda}{\nu} \vec{v} \vec{x},$$

откуда получаем

$$\vec{v} \vec{y} = \lambda \vec{v} \vec{x},$$

или

$$\mu \vec{x} + \vec{v} \vec{y} = \vec{0},$$

где $\mu = -\lambda \nu$. Так как $\lambda \neq 0$ и $\nu \neq 0$, то система векторов $\left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\}$ линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.3.4. Показать, что система трёх векторов пространства R^3 линейно зависима в том и только в том случае, если векторы компланарны.

Решение. Предположим, что никакие два вектора из тройки векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ не коллинеарны (в противном случае система векторов заведомо будет линейно зависимой).

Необходимость. Пусть система $\left\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right\}$ линейно зависима, покажем, что векторы системы компланарны. В силу линейной зависимости системы, можно подобрать три неравных одновременно нулю числа $\alpha, \beta, \gamma \in R$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}.$$

Пусть, например, $\gamma \neq 0$. Тогда имеем:

$$\vec{z} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x} + \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y}.$$

Приложив векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ к общей точке O , легко видеть, что вектор $\vec{z}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \right) \vec{x}, \vec{b} = \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) \vec{y},$$

а это и означает, что они лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ компланарны, покажем, что система $\left\{ \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right\}$ линейно зависима. Доказательство почти очевидно. Действительно, компланарность векторов означает, что справедливо, например, равенство

$$\vec{X} = \mu \vec{Y} + \lambda \vec{Z}.$$

Следовательно, один из векторов системы линейно выражается через два других. Тогда из свойств линейно зависимых систем векторов следует линейная зависимость системы векторов $\left\{ \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \right\}$.

⊗

Пример 2.3.5. Выяснить вопрос о линейной зависимости или линейной независимости следующей системы вектор-столбцов:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим линейную комбинацию векторов системы с произвольными коэффициентами и потребуем, чтобы её значением был нуль вектор-столбец:

$$\alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle + \alpha_3 |a_3\rangle + \alpha_4 |a_4\rangle = |0\rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя правила выполнения операций с вектор-столбцами, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Совершая последовательные подстановки из первого уравнения во второе, из второго в третье и так далее, получаем, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

что и доказывает линейную независимость данной системы вектор-столбцов. $\otimes$

Пример 2.3.6. Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n \right\}$$

– некоторая система векторов векторного пространства и пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\},$$

– её максимальная по числу векторов линейно независимая подсистема.

Показать, что любой из векторов $\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n$ можно выразить в виде разложения

по векторам подсистемы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$.

Решение. Так как подсистема $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$ – максимальная по числу векторов

линейно независимая система, то добавляя к ней любой из оставшихся векторов, например, вектор

$\vec{a}_{m+1}$, получим уже линейно зависимую систему

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1} \right\}.$$

Следовательно, можно подобрать такие не равные одновременно нулю числа

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}.$$

В этом равенстве $\alpha_{m+1} \neq 0$ так как в противном случае имели бы равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0},$$

в котором не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ одновременно равны нулю. Но тогда система

векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$ будет линейно зависимой, что противоречит условию задачи.

Из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m + \alpha_{m+1} \vec{a}_{m+1} = \vec{0}$$

следует, что

$$\vec{a}_{m+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} \vec{a}_m.$$

Вводя обозначения

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{m+1}}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_{m+1}}, \dots, \beta_m = -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}},$$

получаем

$$\vec{a}_{m+1} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_m \vec{a}_m,$$

что и доказывает сформулированное утверждение. $\otimes$

Пример 2.3.7. Дана система функций

$$\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}.$$

Показать, что эта система функций является линейно независимой в пространстве функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Решение. По определению линейной независимости условие

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} = 0 \quad (\forall t \in (-\infty, +\infty))$$

влечёт за собой выполнение условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим СЛАУ для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого положим в тождестве $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество по t и полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0.$$

Дифференцируя тождество ещё раз и, снова полагая $t = 0$, получим

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0.$$

Объединяя полученные равенства в систему уравнений для неизвестных коэффициентов, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, применяя метод Гаусса, получаем единственное решение

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Таким образом, система функций $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ является базисом подмножества функций, непрерывных на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Поэтому множество функций вида

$$f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + \lambda e^{3t}$$

образует подпространство в пространстве таких функций. $\otimes$

Пример 2.3.8. Используя процедуру ортогонализации Шмидта, ортонормировать систему

векторов $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\} \subset E^4$, заданных в некотором ортонормированном базисе

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$ своими разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

Р е ш е н и е. Для ортогонализации системы векторов

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\} \subset E^4$$

воспользуемся формулами процедуры ортогонализации Шмидта.

Для этого положим

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

то есть

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= \vec{g}_2 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_2 \right)}{\left\| \vec{a}_1 \right\|^2} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \\ &- \frac{1}{4}(-4) \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4; \\ \vec{a}_3 &= \vec{g}_3 - \frac{\left(\vec{a}_1, \vec{g}_3 \right)}{\left\| \vec{a}_1 \right\|^2} \vec{a}_1 - \frac{\left(\vec{a}_2, \vec{g}_3 \right)}{\left\| \vec{a}_2 \right\|^2} \vec{a}_2 = \\ &= 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 - \frac{3}{2} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) - \\ &- \left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4. \end{aligned}$$

Для получения ортонормированной системы, векторы системы нормируем:

$$\vec{e}_{a1} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a2} = \frac{1}{4} \left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{e}_{a3} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{ \vec{e}_{a1}, \vec{e}_{a2}, \vec{e}_{a3} \right\}$ ортонормиро-

ванная. $\otimes$

Пример 2.3.9. Показать, что линейная оболочка $L\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2 \right\}$, где элементы L вычисля-

ются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x, \quad \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2 \right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x, \quad \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

Решение. Находим скалярное произведение и скалярные квадраты векторов предполагаемого базиса:

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0;$$

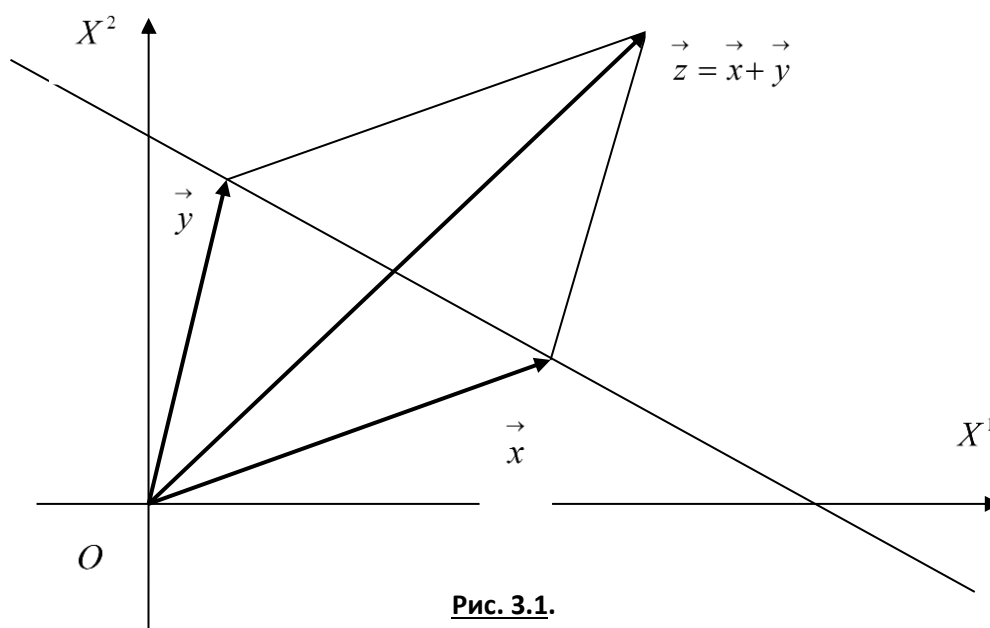
$$\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Видим, что система векторов $\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2 \end{matrix} \right\}$ является ортонормированной и, следовательно, её можно

принять за один из базисов линейного многообразия L . $\otimes$

Пример 2.3.10. Пусть X – множество ведущих радиус-векторов точек прямой линии. Операции в этом множестве введены обычным образом. Выяснить, является ли это множество векторным подпространством евклидова пространства R^2 .

Решение. 1) Пусть прямая не проходит через начало системы координат (рисунок 3.1).



Очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии не принадлежит множеству X , так как конечная точка радиус-вектора их суммы не лежит на данной прямой линии. Следовательно, операция сложения векторов в данном случае не является алгебраической. Множество X не является векторным подпространством пространства R^2 .

2) Если прямая линия проходит через начало системы координат, то очевидно, что сумма двух произвольных ведущих векторов точек прямой линии принадлежит множеству X и, следовательно, операция сложения векторов в данном случае является алгебраической. Множество X является векторным подпространством пространства R^2 . $\otimes$

Пример 2.3.11. Дана система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}.$$

Показать, что множество функций вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t,$$

где $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^1$, является подпространством векторного пространства функций, непрерывных на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Решение. Покажем сначала, что система функций

$$\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$$

является линейно независимой на промежутке $(-\pi, \pi)$.

В соответствие с определением линейной независимости потребуем выполнения условия

$$\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin 2t = 0.$$

При различных значениях $t \in (-\pi, \pi)$ получаем бесконечное множество систем линейных алгебраических уравнений. Положим, например,

$$t = 0, t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система уравнений. Решая СЛАУ методом Гаусса, получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поэтому система функций $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$ линейно независима на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Легко видеть, что любая функция вида

$$f(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \lambda \sin 2t$$

является линейной комбинацией функций системы $\{\cos t, \sin t, \sin 2t\}$, что и доказывает требуемой. $\otimes$

Пример 2.3.12. Показать, что система векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset E^4,$$

заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства E^4

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

разложениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3 + a_1^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 + a_2^4 \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{aligned} \quad (1)$$

линейно независима. Дополнить систему до ортонормированного базиса всего пространства E^4 .

Решение. Находим значение скалярного произведения:

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right) = 0.$$

Следовательно, система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ ортогональна.

Для того чтобы дополнить эту систему до ортогонального базиса пространства евклидова E^4 , найдём векторы

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

такие, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \left(\vec{x}, \vec{a}_1 \right) = 0, \\ \left(\vec{x}, \vec{a}_2 \right) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Из условий (2) получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решаем СЛАУ (3) методом Гаусса, принимая X^3 и X^4 за свободные неизвестные, то есть, например, полагая $X^3 = a$ и $X^4 = b$. Полученное решение СЛАУ (3) записывается в виде

$$|X\rangle = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

или

$$\vec{X} = a \vec{a}_3 + b \vec{a}_4,$$

где векторы фундаментальной системы решений

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 0\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Легко проверяется, что фундаментальная система $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ ортогональна и в совокупно-

сти с векторами $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ также образует ортогональную систему $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$. Для

получения ортонормированного базиса пространства E^4 нормируем векторы этой системы:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|} = \frac{1}{2} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \right);$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \right);$$

$$\vec{h}_4 = \frac{\vec{a}_4}{\|\vec{a}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\vec{e}_2 + \vec{e}_4 \right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что система векторов $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4 \right\}$ ортонормиро-

вана. $\otimes$

Пример 2.3.13. В евклидовом пространстве E^4 в некотором ортонормированном базисе

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$$

задана система векторов:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4, \quad \vec{a}_2 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, можно ли на векторах этой системы как на направляющих векторах построить подпространство H^2 пространства E^4 . Если это возможно, то написать параметрические уравнения подпространства H^2 .

2) Найти базис $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ и построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$ к подпростран-

ству H^2 , записать параметрические уравнения ортогонального дополнения $H^{2\perp}$.

Р е ш е н и е. 1) Координаты векторов системы $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ непропорциональны – векторы

неколлинеарны. Следовательно, система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ линейно независимая. Векторы си-

стемы могут служить одним из базисов (быть направляющими векторами) линейного двумерного

многообразия. Векторное параметрическое уравнение такого многообразия в общем случае имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2,$$

где $\vec{x}_0$ – вектор сдвига многообразия. Если $\vec{x}_0 = \vec{0}$, то многообразие превращается в подпространство. В последнем случае ведущий вектор точек этого многообразия превращается в текущий вектор подпространства и представляется в виде:

$$\vec{x} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2.$$

Откуда имеем параметрические уравнения подпространства:

$$\begin{cases} x^1 = t_1 - 3t_2, \\ x^2 = 2t_1 + 4t_2, \\ x^3 = -3t_1 + 3t_2, \\ x^4 = t_1 - 5t_2. \end{cases}$$

Таким образом, подпространство является, очевидно, двумерной плоскостью, проходящей через начало системы координат.

2) Пусть

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 + x^4 \vec{e}_4$$

– произвольный вектор из ортогонального дополнения $H^\perp$. Так как система $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ – базис

подпространства H , то должны выполняться условия

$$\begin{cases} \left(\vec{a}_1, \vec{x} \right) = 0, \\ \left(\vec{a}_2, \vec{x} \right) = 0. \end{cases}$$

Эти условия приводят к СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + x^4 = 0, \\ -3x^1 + 4x^2 + 3x^3 - 5x^4 = 0. \end{cases}$$

Применение метода Гаусса приводит к следующему результату: СЛАУ совместна и неопределённая, а множество её решений выражается следующей формулой

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5}a - \frac{7}{5}b \\ \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a и b – свободные неизвестные. Следовательно, имеем векторное подпространство с направляющими векторами

$$\vec{a}_3 = \frac{9}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_4 = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

Нетрудно проверить, что полученные векторы $\left\{ \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\}$ образуют линейно независимую

систему, а любая их линейная комбинация ортогональна любой линейной комбинации векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}.$$

Следовательно, на этих векторах можно построить ортогональное дополнение $H^{2\perp}$, параметрические уравнения которого имеют вид, аналогичный параметрическим уравнениям подпространства H^2 :

$$\begin{cases} x^1 = \frac{9}{5}\tau_1 - \frac{7}{5}\tau_2, \\ x^2 = \frac{3}{5}\tau_1 + \frac{1}{5}\tau_2, \\ x^3 = \tau_1, \\ x^4 = \tau_2. \end{cases} \otimes$$

Пример 2.3.14. В аффинном пространстве A^4 координатами относительно репера

$$\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \text{ заданы четыре точки:}$$

$$A_1(1; 4; 2; 0), A_2(3; 7; 3; 2), A_3(2; 6; 3; -1), A_4(1; 4; 5; 2).$$

Получить уравнения гиперплоскости, проходящей через заданные точки.

Р е ш е н и е. Обозначим точку A_1 через $O^* \equiv A_1$ и примем её за начало репера на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Рассмотрим векторы:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= O^* A_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= O^* A_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 &= O^* A_4 = 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.\end{aligned}\tag{1}$$

Требуя, чтобы для линейной комбинации этих векторов выполнялось условие

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0},$$

решая вытекающую из этого условия СЛАУ для неопределённых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ методом Гаусса, выясняем, что данное условие выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Из

этого результата заключаем, что система векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ линейно независима и её

можно выбрать в качестве базиса репера

$$\left\{ O^*, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$$

на гиперплоскости $H^3 \subset A^4$.

Пусть $M(x^1; x^2; x^3; x^4)$ – текущая точка гиперплоскости, координаты которой определены относительно репера $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ вмещающего пространства A^4 . Тогда её

радиус-векторы $\vec{OM}$ относительно репера $\left\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ пространства A^4 и

$\vec{O^*M}$ относительно репера $\left\{ \vec{O^*}, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \right\}$ гиперплоскости $H^3 \subset A^4$ могут быть, со-

ответственно, представлены в виде разложений:

$$\begin{aligned} \vec{x} \equiv \vec{OM} &= x^1 \vec{e_1} + x^2 \vec{e_2} + x^3 \vec{e_3} + x^4 \vec{e_4}, \\ \vec{O^*M} &= t_1 \vec{a_1} + t_1 \vec{a_2} + t_1 \vec{a_3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Векторное уравнение гиперплоскости имеет вид:

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{O^*M}, \quad (3)$$

где

$$\vec{x_0} \equiv \vec{OO^*} = \vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3}. \quad (4)$$

Подставляя (1), (2) и (4) в (3), получаем *параметрические уравнения*

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x^2 = 4 + 3t_1 + 2t_2, \\ x^3 = 2 + t_1 + t_2 + 3t_3, \\ x^4 = 2t_1 - t_2 + 2t_3, \end{cases} \quad (5)$$

гиперплоскости $H^3 \subset A^4$. Для получения неявного уравнения гиперплоскости выразим три параметра t_1, t_2, t_3 из первых трёх уравнений (5), решая СЛАУ

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 = x^1 - 1, \\ 3t_1 + 2t_2 = x^2 - 4, \\ t_1 + t_2 + 3t_3 = x^3 - 2 \end{cases} \quad (6)$$

методом Гаусса, и подставим их в четвёртое уравнение. В процессе решения устанавливаем, что СЛАУ совместна и имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2x^1 - x^2 + 2; \\ t_2 &= -3x^1 + 2x^2 - 5; \end{aligned}$$

$$t_3 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}.$$

Подстановка в четвёртое из уравнений (5) приводит к неявному уравнению гиперплоскости

$H^3 \subset A^4$, проходящей через заданные четыре точки:

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0. \otimes$$

Практическое занятие 4. Линейные операторы, матрицы,

определители и СЛАУ

Предварительные сведения

Оператор – это отображение $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$. Оператор называется линейным, если $(\forall \alpha, \beta \in R^1) \wedge \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in X^m \right): \hat{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \hat{A}\vec{x} + \beta \hat{A}\vec{y}$.

При фиксированных базисах в

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \right\} \subset X^m \text{ и } \left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n \right\} \subset Y^n$$

линейный оператор имеет своим представителем **матрицу**:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы по столбцам находятся как коэффициенты разложения образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$ по базису пространства Y^n .

Действия с линейными операторами определяются следующим образом. Если

$$\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n, \hat{B}: X^m \rightarrow Y^n,$$

то

$$\hat{C} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow \left(\forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}.$$

Матричные элементы матрицы суммы операторов вычисляются по формуле $c_j^i = a_j^i + b_j^i$.

Произведение оператора на число

$$\hat{T} = \alpha \hat{A} \Leftrightarrow \left(\forall \vec{x} \in X^m \right) \hat{C} \vec{x} = \alpha \left(\hat{A} \vec{x} \right).$$

Матричные элементы матрицы произведения на число вычисляются по формуле $c_j^i = \alpha a_j^i$.

Если $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$ и $\hat{B}: X^m \rightarrow Y^n$, то композиция операторов $\hat{C} = \hat{B} \circ \hat{A}$:

$$\hat{C} \vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{B} \hat{A} \right) \vec{x} = \hat{B} \left(\hat{A} \vec{x} \right).$$

Элементы матрицы композиции линейных операторов находятся по формуле

$$c_k^i = \sum_{j=1}^n b_j^i a_k^j.$$

Формула разложения определителя матрицы оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ по элементам любой строки или любого столбца определителя, например для столбца с номером k , имеет вид:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_k^i M_k^i = \\ &= (-1)^{1+k} a_k^1 M_k^1 + (-1)^{2+k} a_k^2 M_k^2 + \dots + (-1)^{n+k} a_k^n M_k^n. \end{aligned}$$

Примеры с решением

Пример 2.4.1. В пространстве R^3 оператор $\hat{P}$ действует по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{P} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1,$$

то есть ставит в соответствие произвольному вектору $\vec{x}$ его координатную проекцию на ось OX^1 . Показать, что оператор линейный и найти его матрицу.

Решение. покажем, что оператор линейный. По определению для линейного оператора справедливо равенство:

$$\hat{P} \left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2.$$

Проверим его выполнение для заданного оператора:

$$\begin{aligned}
& \hat{P} \left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \right) = \\
& = \hat{P} \left[\alpha_1 \left(x_1^1 \vec{e}_1 + x_1^2 \vec{e}_2 + x_1^3 \vec{e}_3 \right) + \alpha_2 \left(x_2^1 \vec{e}_1 + x_2^2 \vec{e}_2 + x_2^3 \vec{e}_3 \right) \right] = \\
& = \hat{P} \left[\left(\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1 \right) \vec{e}_1 + \left(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \right) \vec{e}_2 + \left(\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 \right) \vec{e}_3 \right] = \\
& = \left(\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1 \right) \vec{e}_1 = \alpha_1 x_1^1 \vec{e}_1 + \alpha_2 x_2^1 \vec{e}_1 = \alpha_1 \hat{P} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{P} \vec{x}_2.
\end{aligned}$$

Определение выполняется и оператор $\hat{P}$ линейный.

Действуя оператором $\hat{P}$ последовательно на базисные векторы, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{P} \vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3, \\
\hat{P} \vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3, \\
\hat{P} \vec{e}_3 &= 0 \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Теперь матрица оператора принимает следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{P}$ называется *оператором ортогонального проектирования на ось OX^1* . $\otimes$

Пример 2.4.2. Показать, что оператор $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$, действующий по правилу

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right) \hat{A} \vec{x} = \left[\vec{a}, \left[\vec{x}, \vec{b} \right] \right],$$

где фиксированные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими разложениями

$$\vec{a} = 2 \vec{e}_1 + 4 \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

по каноническому базису, является линейным, и найти его матрицу.

Р е ш е н и е. Из свойств векторного произведения следует, что:

$$\begin{aligned}\hat{A}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \left[\vec{a}, [\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{b}] \right] = \left[\vec{a}, \alpha [\vec{x}, \vec{b}] + \beta [\vec{y}, \vec{b}] \right] = \\ &= \alpha \left[\vec{a}, [\vec{x}, \vec{b}] \right] + \beta \left[\vec{a}, [\vec{y}, \vec{b}] \right] = \alpha \hat{A} \vec{x} + \beta \hat{A} \vec{y}.\end{aligned}$$

Матрицу оператора определяем, находя образы базисных векторов. При этом возможны три варианта решения:

- 1) использовать свойства векторного произведения;
- 2) использовать формулу для вычисления векторного произведения;
- 3) использовать для двойного векторного произведения формулу

$$\left[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}] \right] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}).$$

Используем второй вариант решения, находя векторное произведение

$$\hat{A} \vec{e}_k = \left[\vec{a}, [\vec{e}_k, \vec{b}] \right]$$

по формуле

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x^2 y^3 - x^3 y^2) \vec{e}_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) \vec{e}_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) \vec{e}_3.$$

Пусть $k = 1$, тогда получаем:

$$[\vec{e}_1, \vec{b}] = (0 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) \vec{e}_1 + (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \vec{e}_2 + (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Далее имеем:

$$\hat{A} \vec{e}_1 = \left[\vec{a}, [\vec{e}_1, \vec{b}] \right] = -5 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 - 2 \vec{e}_3.$$

Аналогично находим:

$$\hat{A} \vec{e}_2 = \left[\vec{a}, [\vec{e}_2, \vec{b}] \right] = -4 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4 \vec{e}_3,$$

$$\hat{A} \vec{e}_3 = \left[\vec{a}, \left[\vec{e}_3, \vec{b} \right] \right] = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 2.4.3. Показать, что если $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$ – линейно зависящая система векторов, то и система образов $\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\} \subset X^n$ при действии линей-

ного оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ также линейно зависящая.

Решение. Составим справедливое в силу линейной зависимости системы векторов равенство

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

где не все коэффициенты $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ равны нулю одновременно. Действуя на обе части

последнего равенства оператором $\hat{A}$, в силу его линейности получаем:

$$\alpha_1 \hat{A} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A} \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \hat{A} \vec{x}_m = \vec{0},$$

Так как среди коэффициентов $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ есть ненулевые, то система образов

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\}$$

линейно зависима. $\otimes$

Пример 2.4.4. Показать, что если система

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\} \subset X^n$$

образов векторов системы

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$$

при действии оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ линейно независимая, то и сама система $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset X^n$ также линейно независима.

Решение. Для системы векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ потребуем выполнения равенства

нуль вектору линейной комбинации, предполагая, что не все коэффициенты её равны нулю одновременно

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0},$$

то есть предположим, что система $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$ линейно зависима.

Действуя на обе части равенства оператором $\hat{A}$, получим

$$\alpha_1 \hat{A} \vec{x}_1 + \alpha_2 \hat{A} \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \hat{A} \vec{x}_m = \vec{0},$$

где в силу линейной независимости системы образов векторов

$$\left\{ \hat{A} \vec{x}_1, \hat{A} \vec{x}_2, \dots, \hat{A} \vec{x}_m \right\}$$

выполняется условие

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Следовательно, предположение о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\}$$

неверное. Система линейно независима. $\otimes$

Пример 2.4.5. Пусть $\vec{x} \in R^3$ – произвольный вектор. Вычислить коммутатор

$$\left[\hat{A}, \hat{B} \right] \vec{x} \equiv \left(\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right) \vec{x}$$

операторов $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$, представленных в каноническом базисе пространства R^3 своими матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Коммутатор операторов – коммутатор их матриц, равен:

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 32 & 22 & 16 \\ 8 & 16 & 26 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 4 & 14 \\ 15 & 12 & 23 \\ 14 & 20 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Находим коммутатор операторов – результат воздействия оператора $\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$, для чего находим координаты образа вектора:

$$(AB - BA) \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 2 \\ -7 & 4 & 3 \\ -2 & -12 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x^1 + 18x^2 + 2x^3 \\ -7x^1 + 4x^2 + 3x^3 \\ -2x^1 - 12x^2 - 22x^3 \end{pmatrix}.$$

Теперь образ вектора равен:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \vec{x} &= \left(\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right) \vec{x} = (18x^1 + 18x^2 + 2x^3) \vec{e}_1 + \\ &+ (-7x^1 + 4x^2 + 3x^3) \vec{e}_2 + (-2x^1 - 12x^2 - 22x^3) \vec{e}_3. \otimes \end{aligned}$$

Пример 2.4.6. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов

$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$ на произвольный вектор $\vec{X} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\left(2\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\right)\vec{X}$.

Решение. Находим матрицы операторов, исходя из координатной формы записи действия оператора в фиксированном базисе:

$$A|x\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 + a_1^2 x^2 + a_1^3 x^3 \\ a_2^1 x^1 + a_2^2 x^2 + a_2^3 x^3 \\ a_3^1 x^1 + a_3^2 x^2 + a_3^3 x^3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая данные условия задачи с координатной формулой действия оператора, находим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производим указанные в условии задачи действия с матрицами:

$$\begin{aligned} 2A + AB &= 2 \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\rightarrow$

Находим координаты образа вектора $\vec{X}$, используя координатную форму записи:

$$(2A + AB) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 10 \\ 6 & -13 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 13x_2 - 16x_3 \\ 3x_2 + 10x_3 \\ 6x_1 - 13x_2 - 16x_3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{x} = (6x_1 - 13x_2 - 16x_3)\vec{e}_1 + (3x_2 + 10x_3)\vec{e}_2 + (6x_1 - 13x_2 - 16x_3)\vec{e}_3. \otimes$$

Пример 2.4.7. Найти $\left(\hat{A} \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \hat{B} \vec{y} \right)$, если

$$\vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3; \quad \vec{y} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Находим вектор $\hat{A} \vec{x} + \vec{y}$ в координатном представлении:

$$A|\vec{x}\rangle + |\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} \vec{x} + \vec{y} = 22\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 + 13\vec{e}_3.$$

2) Находим вектор $\vec{x} + \hat{B} \vec{y}$ в координатном представлении:

$$|\vec{x}\rangle + B|\vec{y}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} + \hat{B} \vec{y} = -19\vec{e}_1 - 17\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3.$$

3) Находим указанное в условии скалярное произведение:

$$\left(\hat{A} \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \hat{B} \vec{y} \right) = 22 \cdot (-19) + 16 \cdot (-17) + 13 \cdot (-8) = -794. \otimes$$

Пример 2.4.8. Решить методом Гаусса СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. 1) Удобно поменять местами первое и второе уравнения системы (1), так как у второго уравнения коэффициент при первом неизвестном равен 1:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ 2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 5, \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 2x^4 = -1. \end{cases} \quad (2)$$

Выражаем из первого уравнения СЛАУ (2) неизвестное x^1 и подставляем результат в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (3)$$

Два последних уравнения в (3) одинаковы, поэтому одно уравнение можно отбросить:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases} \quad (4)$$

Принимаем в (4) неизвестные x^3, x^4 за свободные неизвестные и, полагая $x^3 = a$ и $x^4 = b$, выражаем через них x^2, x^1 , имеем общее решение СЛАУ:

$$x^2 = -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}x^4, \quad x^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b, \quad x^3 = a, \quad x^4 = b.$$

2) Приведём матричную реализацию метода Гаусса. Перепишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая мысленно первую строку матрицы первый раз на 2, а второй раз на 3 и вычитая в реальности последовательно из второй и третьей строки (как вектор-строку), получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки матрицы идентичны, то есть второе и третье уравнения системы одинаковы. Отбрасывая третью строку, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид (4):

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 = -6, \\ -5x^2 + 5x^3 - 7x^4 = 17. \end{cases}$$

Дальше решение повторяет выполненные в первом пункте операции.

Дадим интерпретацию полученного общего решения СЛАУ, для чего запишем вектор-столбец решения так

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}b \\ -\frac{17}{5} + a - \frac{7}{5}b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если теперь переписать полученный результат в символическом виде

$$|x\rangle = |x_0\rangle + a|a\rangle + b|b\rangle,$$

где

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, |x_0\rangle = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

То становится очевидным, что общее решение системы уравнений с геометрической точки зрения представляет собой двумерное линейное многообразие проходящее через “точку” $|x_0\rangle$ и имеющее направляющие векторы $|a\rangle$ и $|b\rangle$. $\otimes$

Пример 2.4.9. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1) Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго и третьего столбцов, получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix}.$$

2) В полученном определителе в первой строке отличен от нуля только один первый элемент.

Применяя формулу разложения определителя по элементам первой строки, получаем:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = 45 - 5 = 40. \otimes \end{aligned}$$

Пример 2.4.10. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Определитель матрицы $\det A = 5 \neq 0$. Матрица A невырожденная, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_1^1 = 1; A_2^1 = -3; A_3^1 = 1$$

$$A_1^2 = 3; A_2^2 = 1; A_3^2 = -2;$$

$$A_1^3 = -2; A_2^3 = 1; A_3^3 = 3.$$

Находим присоединённую матрицу:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка по формулам $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ подтверждает правильность расчёта. $\otimes$

Пример 2.4.11. Матричным методом решить СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 + 3x^2 = 0, \\ 2x^1 + 4x^2 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Проверяем условие невырожденности основной матрицы системы уравнений, для чего вычисляем определитель основной матрицы системы:

$$\det A = -2 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

2) Перепишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Находим алгебраические дополнения элементов основной матрицы системы:

$$A_1^1 = 4, A_2^1 = -2, A_1^2 = -3, A_2^2 = 1.$$

4) Составляем матрицу алгебраических дополнений и, транспонируя её, находим присоединённую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6) Находим значения неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = 9, x^2 = -3. \otimes$$

Пример 2.4.12. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем матричное уравнение вида $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы его решить, нужно найти матрицу A^{-1} и умножить уравнение на неё слева. Тогда решение запишется в виде $X = A^{-1}B$.

1) Проверяем условие невырожденности. Определитель матрицы A равен:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_1^1 = 3, A_2^1 = -1, A_1^2 = -5, A_2^2 = 2.$$

Составляем союзную матрицу и находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Умножаем данное матричное уравнение на матрицу A^{-1} слева:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений осуществляется путём подстановки в исходное уравнение. $\otimes$

Пример 2.4.13. Решить СЛАУ, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 5, \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 1, \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 11. \end{cases}$$

Решение. 1) Вычисляем определитель матрицы СЛАУ:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\det A \neq 0$, то система уравнений совместна и определённа.

2) Для нахождения её решения используем формулы Крамера:

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{12} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \frac{11}{12} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{40}{12} - \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = \frac{24}{12} = 2. \end{aligned}$$

Аналогично находим x^2 и x^3 :

$$x^2 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad x^3 = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3. \otimes$$

Пример 2.4.14. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый (старый) базис

пространства X^4 и

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T} : X^4 \rightarrow X^4$ в этом базисе. Найти матрицу линейного опера-

тора $\hat{T}$ в новом базисе

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4,$$

если известно, что векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса разложениями:

$$\vec{g}_1 = \vec{a}_1, \vec{g}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{g}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \vec{g}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4.$$

Решение. Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица невырождена, так как $\det A = 1$. Следовательно, существует обратная матрица. Для нахождения обратной матрицы найдём сначала алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= 1; & A_2^1 &= -1; & A_3^1 &= 0; & A_4^1 &= 0; \\
A_1^2 &= 0; & A_2^2 &= 1; & A_3^2 &= -1; & A_4^2 &= 0; \\
A_1^3 &= 0; & A_2^3 &= 0; & A_3^3 &= 1; & A_4^3 &= -1; \\
A_1^4 &= 0; & A_2^4 &= 0; & A_3^4 &= 0; & A_4^4 &= 1.
\end{aligned}$$

Теперь обратная матрица находится по формуле $\hat{A} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$ и имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе от старого базиса к новому базису матрица оператора T преобразуется по формуле

$T' = (A^{-1})^T T A^T$. Проводя вычисления, получаем матрицу T' :

$$\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \otimes
\end{aligned}$$

Практическое занятие 5. Общие свойства линейных операторов

Предварительные сведения

Ядро оператора $\hat{A}: X^m \rightarrow Y^n$ – это множество векторов в X^m , удовлетворяющих условию

$$\hat{A} \vec{x} = \vec{0}.$$

Размерность ядра – **дефект** оператора. Множество значений оператора – это множество образов $\vec{y} \in Y^n$ векторов $\vec{x} \in X^m$. Размерность множества значений оператора – **ранг** оператора.

Примеры с решением

Пример 2.5.1. Найти ядро $K(\hat{A})$ линейного оператора $\hat{A}: X^4 \rightarrow X^3$, заданного в

некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset X^4, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset X^3$$

этих пространств матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению ядро

$$K(\hat{A}) = \left\{ \vec{x} \in X^4 : \hat{A}\vec{x} = \vec{0} \right\},$$

поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем СЛАУ вида

$$\begin{cases} x^1 + 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 0, \\ 3 \cdot x^2 + x^3 + 2 \cdot x^4 = 0, \\ -x^2 - 2 \cdot x^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту СЛАУ, например, метом Гаусса, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Принимая неизвестное X^4 за свободное неизвестное и, полагая $X^4 = t$, где t может принимать произвольные значения из R , получаем:

$$x^3 = \frac{2}{5}t, x^2 = -\frac{4}{5}t, x^1 = -\frac{24}{5}t.$$

Откуда для ядра оператора имеем

$$K\left(\hat{A}\right) = \left\{ \vec{x} \in X^4 : \vec{x} = t \vec{a}; t \in R \right\},$$

где

$$\vec{a} = -\frac{24}{5} \vec{e}_1 - \frac{4}{5} \vec{e}_2 + \frac{2}{5} \vec{e}_3 + \vec{e}_4.$$

Таким образом, ядро оператора является одномерным линейным многообразием $L\left\{\vec{a}\right\}$ с

направляющим вектором $\vec{a}$. $\otimes$

Пример 2.5.2. Пусть Y – множество симметричных матриц 2-го порядка с обычными матричными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Показать, что это множество является векторным подпространством векторного пространства всех квадратных матриц второго порядка.

Решение. Сначала покажем, что множество X квадратных матриц 2-го порядка вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

является векторным пространством. Для этого надо показать, что операция сложения, являясь алгебраической, удовлетворяет четырём аксиомам для операции сложения векторного пространства.

То, что операция сложения во множестве X алгебраическая, очевидно. Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна, то есть

$$A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C).$$

Во множестве X имеется нейтральный элемент

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и противоположный элемент

$$-A = \begin{pmatrix} -a_1^1 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & -a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить и выполнение аксиом для операции умножения на число.

Легко видеть, что во множестве X каноническим базисом является система матриц вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Действительно, произвольная матрица может быть записана в виде разложения по матрицам этой системы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество симметричных матриц Y вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

является подпространством векторного пространства X . Действительно, симметрические матрицы образуют подмножество пространства X . Операции сложения и умножения на число не нарушают свойства симметричности матрицы. Действительно, результат выполнения этих операций является, очевидно, снова симметричной матрицей:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & a_2^1 + b_2^1 \\ a_2^1 + b_2^1 & a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1^1 & \alpha \cdot a_2^1 \\ \alpha \cdot a_2^1 & \alpha \cdot a_2^2 \end{pmatrix} \otimes$$

Пример 2.5.3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. *Первый метод* (элементарные преобразования матрицы). Ранг матрицы подчинён неравенству $r(A) \leq \min(m, n) = 3$ (n — число строк, m — число столбцов). Для нахождения ранга применим элементарные преобразования матрицы.

Вычтем первую строку матрицы из второй строки и, умножив её мысленно на 3, из третьей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычёркивая из матрицы третью строку, совпадающую со второй строкой, получаем

$$A \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь символ $\cong$ использован для обозначения эквивалентности матриц по рангу в процессе преобразований.

Видим, что наивысший порядок отличного от нуля минора равен 2 (левый угловой минор является треугольным). Таким образом, ранг матрицы $r = 2$.

2. *Второй метод* (окаймляющих миноров). Минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \neq 0. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Минор, окаймляющий первый минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Следующий окаймляющий минор

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Все окаймляющие миноры равны нулю, следовательно, ранг матрицы

$$r(A) = 2. \otimes$$

Пример 2.5.4. Найти ранг $r(\hat{A})$, множество значений $\hat{A}(X^5)$ и дефект $d(\hat{A})$ линей-

ного оператора $\hat{A}: X^5 \rightarrow X^3$, если этот оператор в некоторых базисах пространств X^5 и X^3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Пусть отмечены базисы

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\} \subset X^5, \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\} \subset X^3,$$

в которых матрица оператора имеет указанный вид.

1) Находим ранг матрицы оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Угловой минор третьего порядка преобразованной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $r(A) = 3$.

2) Вектор-столбцы преобразованной матрицы, образующие её базисный минор, составлены из координат базисных векторов множества значений оператора, то есть базис множества значений имеет вид

$$|a\rangle_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a\rangle_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_1 = \vec{g}_1,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g}_2,$$

$$\vec{a}_3 = -2\vec{g}_1 + 10\vec{g}_2 - 9\vec{g}_3.$$

Множеством значений оператора является линейная оболочка системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$:

$$\hat{A}(X^5) = \left\{ \vec{y} \in X^3 : (\forall \alpha, \beta, \eta \in R^1) \vec{y} = \alpha \cdot \vec{a}_1 + \beta \cdot \vec{a}_2 + \eta \cdot \vec{a}_3 \right\},$$

3) По теореме о связи ранга и дефекта линейного оператора имеем

$$r(\hat{A}) + d(\hat{A}) = 5,$$

откуда получаем $d(\hat{A}) = 2$. Итак, $r(\hat{A}) = 3$, $d(\hat{A}) = 2$. $\otimes$

Пример 2.5.5. Найти базисы суммы и пересечения подпространств

$$L_1 \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} = \left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 \right\},$$

$$L_2 \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\} = \left\{ \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3 \right\},$$

если $\alpha_k, \beta_k \in R^1$ и

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \\ \vec{b}_1 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Находим базисы подпространств:

$$\dim L_1 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\dim L_2 = r \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2, \text{ базисный минор } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Базисом L_1 является подсистема

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

а базисом L_2 подсистема

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Чтобы найти базис подпространства $L_1 + L_2$, вычислим ранг матрицы, столбцами которой

являются векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \text{ базисный минор } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\dim(L_1 + L_2) = 3$$

и базис подпространства $L_1 + L_2$ есть система $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1 \right\}$.

Теперь базис пересечения подпространств

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1.$$

Таким образом, базис $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора.

Вектор $\vec{b}_2$ разложим по базису $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1 \right\}$ подпространства $L_1 + L_2$:

$$\vec{b}_2 = \alpha_2^1 \vec{a}_1 + \alpha_2^2 \vec{a}_2 + \beta_2^1 \vec{b}_1.$$

Составляем систему уравнений, используя разложения векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Решение этой СЛАУ даёт:

$$\alpha_2^1 = 2, \quad \alpha_2^2 = 1, \quad \beta_2^1 = -1,$$

Таким образом,

$$\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{b}_1,$$

Следовательно, вектор

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

является базисом подпространства $L_1 \cap L_2$. $\otimes$

Пример 2.5.6. Выяснить вопрос о совместности СЛАУ

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 - x^3 = 1, \\ 3x^1 - x^2 + x^3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выписываем основную и расширенную матрицы СЛАУ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Минор второго порядка в левом верхнем углу (см. предыдущий пример) равен $5 \neq 0$. Все миноры третьего порядка, как у матрицы A , так и у матрицы B , равны нулю: ранги основной и расширенной матриц $r(A) = r(B) = 2$. Следовательно, СЛАУ совместна. $\otimes$

Пример 2.5.7. Выяснить, при каких значениях параметра a СЛАУ с основной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом правых частей $|b\rangle = (2 \ 1 \ a)^T$ является совместной.

Решение. Нетрудно видеть, что ранг матрицы A СЛАУ $r(A) = 2$. Расширенная матрица имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & a \end{array} \right).$$

Вычеркнем в расширенной матрице третий и четвёртый столбцы. Так как ранг матрицы не изменится, то имеем

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix} = 3a + 6.$$

Если $a \neq -2$, то $\det B \neq 0$ и $r(B) = 3 \neq r(A)$ – СЛАУ несовместна. Если $a = -2$, то $\det B = 0$. Так как у матрицы B имеются отличные от нуля миноры, то $r(B) = 2 = r(A)$. Поэтому при $a = -2$ СЛАУ совместна. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Найти линейную комбинацию (вектор)

$$\vec{u} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$$

и норму (длину) вектора $\vec{u}$:

$$1) \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 1;$$

$$2) \vec{x} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{z} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$\alpha = -4, \beta = 3, \gamma = -2;$$

$$3) \vec{x} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{y} = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{z} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,$$

$$\alpha = 7, \beta = -5, \gamma = -1.$$

2. Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если:

$$1) A(2; -2; 3), B(1; -1; 2), C(4; -4; 5);$$

$$2) A(0; -2; 6), B(-12; -2; -3), C(-9; -2; -6);$$

$$3) A(2; 3; -1), B(4; 5; -2), C(3; 1; 1).$$

3. На плоскости R^2 заданы своими координатами три вершины A, B и C параллелограмма. Найти:

1) координаты четвёртой вершины D ;

2) косинус угла между сторонами AB и AC ;

3) длины диагоналей и косинус угла между ними.

$$1) A(-1; 2; -2), B(3; 4; -5), C(1; 1; 0);$$

$$2) A(-2; -2; 0), B(-1; -2; 4), C(5; -2; 1);$$

$$3) A(3; 3; -1), B(3; 2; 0), C(4; 4; -1).$$

4. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами

заданы векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Найти $\left(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \gamma \vec{x} + \lambda \vec{y} \right)$, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = 1, \lambda = 2;$$

$$2) \vec{x} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3, \vec{y} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3,$$

$$\alpha = -2, \beta = -5, \gamma = -1, \lambda = -2;$$

$$3) \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3, \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3,$$

$$\alpha = 11, \beta = 6, \gamma = 2, \lambda = -7.$$

5. Найти $\left(\vec{x} - 4\vec{y}, 6\vec{x} + \vec{y} \right)$, если дано:

$$1) \|\vec{x}\| = 4, \|\vec{y}\| = 5, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{4};$$

$$2) \|\vec{x}\| = 6, \|\vec{y}\| = 1, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{3};$$

$$3) \|\vec{x}\| = 2,5, \|\vec{y}\| = 1,5, \left\{ \vec{x}, \vec{y} \right\} = \frac{\pi}{6}.$$

6. В каноническом базисе декартовой системы координат пространства R^3 своими координатами

задан вектор $\vec{x}$. Найти направляющие косинусы и орт данного вектора, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3;$$

$$2) \vec{x} = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3;$$

$$3) \vec{x} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3.$$

7. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

$$1) \vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3;$$

$$2) \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{z} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3;$$

$$3) \vec{x} = 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{y} = 2\vec{e}_2, \vec{z} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если дано:

$$1) \vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}, \|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = 1, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{6};$$

$$2) \vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b}, \|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\| = 2, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{4};$$

$$3) \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}, \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b}, \|\vec{a}\| = 1, \|\vec{b}\| = 2, \left\{ \vec{a}, \vec{b} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

9. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3, 1, 2)$ и найти косинусы углов, образованных её нормальным вектором с осями координат. Построить эту плоскость.

10. Написать канонические уравнения прямой линии, заданной пересечением двух плоскостей, проходящих через точки $A_1(0; 0; 0)$; $B_1(3; 3; 0)$; $C_1(0; 3; 3)$ и $A_2(4; 5; 0)$; $B_2(1; 6; 3)$; $C_2(2; 0; 7)$ соответственно.

11. В пространстве R^3 получить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 7; 3)$ и имеющей нормальный вектор, заданный точками $M_1(-2; -1; -8)$ и $M_2(2; 1; 8)$. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{ON}_1$, $\vec{ON}_2$ и $\vec{ON}_3$, где N_1 , N_2 и N_3 — точки пересечения данной плоскости и осей координат.

12. В пространстве R^3 найти угол между плоскостями, проходящими через точки M_1, M_2, M_3 и N_1, N_2, N_3 :

1) $M_1(0; 7; -4); M_2(4; 8; -1); M_3(-2; 1; 3);$

$N_1(2; 3; 1); N_2(2; 0; 3); N_3(1; 2; 0);$

2) $M_1(1; -2; 2); M_2(-3; 2; 3); M_3(3; 0; 6);$

$N_1(0; 3; 5); N_2(0; -1; 3); N_3(4; 0; 0).$

13. Найти точку пересечения прямой линии и плоскости:

1) $\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 + 1}{-4}, x^1 + x^2 + 3x^3 - 10 = 0;$

2) $\frac{x^1 + 1}{2} = \frac{x^2 - 3}{-4} = \frac{x^3 + 1}{5}, x^1 + 2x^2 - x^3 + 5 = 0.$

14. Найти координаты проекции точки M_0 на плоскость:

1) $M_0(0; -3; -2); 2x^1 + 10x^2 + 10x^3 - 1 = 0;$

2) $M_0(1; 0; -1); 2x^2 + 4x^3 - 1 = 0.$

15. В пространстве R^3 найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2 и M_3 :

1) $M_1(0; 7; -4), M_2(4; 8; -1), M_3(-2; 1; 3), M_0(-10; 11; 13);$

2) $M_1(5; 8; 3), M_2(10; 5; 6), M_3(8; 7; 4), M_0(7; 17; 14);$

3) $M_1(1; 3; 5), M_2(-5; 5; 2), M_3(7; -1; 8), M_0(0; 0; 0).$

16. Пусть $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \right\} \subset X^n$ – некоторый базис в векторном пространстве X^n , и

$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Используя метод Гаусса,

найти базу и размерность этой системы векторов.

1) $\dim X^n = 4:$

$$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = 4\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4.$$

2) $\dim X^n = 5$:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_4 = 6\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_5 = -5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 - \vec{e}_5.$$

17. Пусть $L\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right\}$ и $L\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ – некоторые подпространства векторного пространства X^4 , и пусть $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\} \subset X^4$ – некоторый его базис. Найти базис суммы и пересечения этих подпространств.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4, \\ \vec{b}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4. \end{array} \right.$$

18. Пусть $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\} \subset E^4$ – некоторый базис в евклидовом пространстве E^4 , и

$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ – некоторая система векторов в этом пространстве. Показать, что эта система ортого-

нальна и представить пространство в виде ортогональной суммы

$$E^4 = L_1^2 \oplus L_2^2,$$

где $L_1^2 = L\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$, а $L_2^2 = L_1^{2\perp}$.

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4; \end{array} \right. 2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4; \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \end{array} \right. 4) \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = -6\vec{e}_3. \end{array} \right.$$

19. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ – некоторый фиксированный вектор из R^3 , а операторы $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и

$\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$, действуют по правилам $\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right)$

$$1) \hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}, \vec{x} \end{pmatrix} \vec{a}, 2) \hat{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}, \vec{x} \end{bmatrix}.$$

Показать, что эти операторы линейные и найти их матрицы.

20. Показать, что операторы

$$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3, \hat{B}: R^3 \rightarrow R^3, \hat{C}: R^3 \rightarrow R^3,$$

действие которых задано координатными соотношениями

$$1) \hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$2) \hat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 - 3 \end{pmatrix},$$

$$3) \hat{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

являются линейными и записать их матрицы.

21. В каноническом базисе трёхмерного пространства R^3 действия операторов $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$ и

$\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$ на произвольный вектор $\vec{x} \in R^3$ заданы соотношениями:

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}; \hat{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора:

$$1) \left(\hat{A}^2 + 2\hat{B} \right) \vec{x}; 2) \left(2\hat{A}^2 + 3\hat{B}^2 \right) \vec{x}; 3) \left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) \vec{x}.$$

22. Найти матрицы, обратные данным матрицам:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Решить СЛАУ матричным методом и по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

24. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

25. Разложить вектор $\vec{X}$ по системе векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$:

$$1) \vec{a}_1 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,$$

$$\vec{X} = -2\vec{e}_1 + 9\vec{e}_3.$$

$$2) \vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{X} = 5\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

$$3) \vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{a}_2 = -3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{X} = 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

26. В каноническом базисе пространства R^3 дана линейно независимая система векторов

$$\vec{X}_1 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$

$$\vec{X}_2 = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

и матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будет ли линейно независимой система векторов $\hat{A}\vec{x}_1, 2\hat{A}\vec{x}_2, 3\hat{A}\vec{x}_3$?

27. Проверить, что $(AB)C = A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Вычислить многочлен

$$P(X) = X^3 - 3X + 2$$

от матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Найти матрицу X , удовлетворяющую условию:

$$\text{а) } 5A + 2X = 0, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{и) } (-1)A + 3X = 2B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

30. Вычислить определители:

$$\text{ф) } \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

31. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

32. Решить неравенства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

33. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

34. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

35. Решить методом Гаусса СЛАУ:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 = 4, \\ 3x^1 + 4x^2 - 2x^3 = 11, \\ 3x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 11; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases} \text{ в)} \begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 6, \\ 2x^1 - x^2 - 2x^3 - 3x^4 = 8, \\ 3x^1 + 2x^2 - x^3 + 2x^4 = 4, \\ 2x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 = -8. \end{cases}$$

36. Пространство R^3 подвергается деформации под действием линейного оператора $\hat{A}$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти объём треугольной пирамиды с вершинами

$$A(0; 0; 0); B(3; 3; 0); C(0; 3; 3); D(3; 0; 3)$$

до и после деформации пространства.

37. Пусть $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \right\} \subset X^4$ – некоторый базис, а

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\hat{T}: X^4 \rightarrow X^4$. Найти матрицу оператора в базисе

$$\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4 \right\} \subset X^4, \text{ если:}$$

$$\text{а)} \vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4, \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4, \vec{g}_4 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4;$$

$$\text{б) } \vec{g}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 3\vec{a}_4, \vec{g}_2 = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4,$$

$$\vec{g}_3 = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3 + 2\vec{a}_4, \vec{g}_4 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4.$$

38. Используя понятие ранга матрицы и теоремы о совместности, выяснить вопрос о совместности следующих СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x^1 + x^2 - 4x^3 = 0, \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0, \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 = 0; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0, \\ x^1 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$$

39. При каких значениях параметра a СЛАУ является совместной:

$$\text{а) } \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + x^4 = a, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - 2x^2 + x^3 + 5x^4 = 5; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 3x^1 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 2, \\ 7x^1 - 4x^2 + x^3 + 3x^4 = a, \\ 5x^1 + ax^2 - 4x^3 - 6x^4 = 3. \end{cases}$$

40. Найти ядро оператора, заданного в пространстве R^3 своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дать геометрическую интерпретацию и получить параметрические уравнения ядра.

41. Найти ядро, дефект, ранг и множество значений линейного оператора $\hat{A}: R^m \rightarrow R^n$, заданного в некоторых базисах

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m \right\} \subset R^m, \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \right\} \subset R^n$$

своей матрицей:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\
 & \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{д) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}; \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Часть 2. ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА E^n

Практическое занятие 1. Подпространства. Специальные типы линейных операторов в евклидовом пространстве

Предварительные сведения

Пусть $\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$ – линейный оператор. Тогда, если для вектора $\vec{x} \in X^n$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$)

и некоторого числа μ выполняется соотношение

$$\hat{T} \vec{x} = \mu \vec{x},$$

то вектор $\vec{x}$ называется **собственным вектором** оператора $\hat{T}$, соответствующим **собственному значению** μ . Если в пространстве X^n зафиксирован базис, то последнее равенство сводится к однородной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (t_1^1 - \mu)x^1 + t_2^1 x^2 + \dots + t_n^1 x^n = 0, \\ t_1^2 x^1 + (t_2^2 - \mu)x^2 + \dots + t_n^2 x^n = 0, \\ \dots, \\ t_1^n x^1 + t_2^n x^2 + \dots + (t_n^n - \mu)x^n = 0. \end{cases}$$

Система $\left\{ \begin{matrix} \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \end{matrix} \right\}$ собственных векторов линейного оператора

$\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$, соответствующих попарно различным собственным значениям $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, линейно независима.

Линейный оператор $\hat{T}$, действующий в n -мерном пространстве X^n и имеющий n попарно различных собственных значений, называется **оператором простой структуры**. Матрица оператора простой структуры имеет диагональный вид.

Из критерия нетривиальной совместности однородной СЛАУ следует, что

$$T(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \det(t_j^i - \mu \delta_j^i) = \begin{vmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 & \dots & t_n^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu & \dots & t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^n & t_2^n & \dots & t_n^n - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Это равенство есть **характеристическое уравнение**, а многочлен в левой части – **характеристический многочлен**. Из характеристического уравнения определяются собственные значения линейного оператора, а из однородной СЛАУ его собственные векторы.

Подпространство $X_{inv} \subset X^n$ называется **инвариантным подпространством оператора**

$$\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n), \text{ если } \left(\forall \vec{x} \in X_{inv} \right) \vec{y} = \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}.$$

Пусть $\hat{T}: E^m \rightarrow E^n$ – некоторый линейный оператор. Оператор $\hat{T}^*: E^n \rightarrow E^m$ называется **сопряжённым по отношению к оператору $\hat{T}$** , если $\left(\forall \vec{x} \in E^m, \forall \vec{y} \in E^n \right)$

выполняется условие

$$\left(\hat{T} \vec{x}, \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \hat{T}^* \vec{y} \right).$$

Матрица оператора, сопряжённого с оператором $\hat{T}^*: E^n \rightarrow E^m$ связана следующим соотношением:

$$t_j^{k*} = \overline{t_k^j}.$$

В случае вещественных пространств комплексное сопряжение отсутствует.

Если $\hat{T}: E^m \rightarrow E^n$, $\hat{R}: E^m \rightarrow E^n$ – некоторые операторы и $\beta \in C$ – произвольное число, то справедливы следующие пять свойств сопряжённого оператора:

$$\begin{aligned} 1) \left(\hat{T}^* \right)^* &= \hat{T}; 2) \left(\hat{T}^* \right)^{-1} = \left(\hat{T}^{-1} \right)^*; 3) \left(\beta \hat{T} \right)^* = \overline{\beta} \hat{T}^*; \\ 4) \left(\hat{T} + \hat{R} \right)^* &= \hat{T}^* + \hat{R}^*; 5) \left(\hat{T} \hat{R} \right)^* = \hat{R}^* \hat{T}^*. \end{aligned}$$

Линейный оператор $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ называется **самосопряжённым (эрмитовым)**, если $\hat{T}^* = \hat{T}$. Матрица самосопряжённого оператора является симметрической, то есть связана с матрицей самого оператора соотношением

$$t_j^i = t_i^j.$$

Оператор $\hat{T}$, действующий в вещественном евклидовом пространстве E^n , называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \right) \left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y} \right).$$

Ортогональные операторы $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ в вещественном евклидовом пространстве E^n обладают следующими свойствами:

- 1) единичный оператор является ортогональным;
- 2) композиция ортогональных операторов также является ортогональным оператором;
- 3) оператор, обратный ортогональному оператору, также является ортогональным;

4) если $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ – ортогональный оператор, то оператор $\alpha \cdot \hat{T}$ является ортогональным в том и только в том случае, если $\alpha = \pm 1$.

Оператор $\hat{T}: E^n \rightarrow E^n$ является ортогональным в том и только в том случае, если он переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис.

Пусть $\hat{T}: X^n \rightarrow \hat{T}(X^n)$ и

$$F_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \in C[x]$$

– некоторый многочлен. Тогда оператор

$$F_m(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_m \hat{T}^m$$

называется многочленом от оператора $\hat{T}$ или **операторным многочленом**.

Примеры с решением

Пример 2.1.1. В каноническом базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \subset R^2$ оператор $\hat{T}$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Решение. 1. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(T - \mu \cdot I) = 0; \mu^2 - 7 \cdot \mu + 10 = 0.$$

Откуда получаем собственные значения оператора $\mu_1 = 2, \mu_2 = 5$.

2. Находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_1 = 2$, для чего решаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_1^1 = -1, x_1^2 = 1 \Rightarrow |x_1\rangle = c|a_1\rangle, c \in R^1 \Rightarrow |a_1\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c \vec{a}_1$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

3. Аналогично находим собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_2 = 5$, решая СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение в виде

$$x_2^1 = c/2, x_2^2 = c, c \in R^1 \Rightarrow |x_2\rangle = c|a_2\rangle \Rightarrow |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением является бесконечное множество векторов

$$\vec{x} = c \vec{a}_2$$

– одномерное линейное многообразие с базисным вектором

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Оператор имеет два одномерных собственных подпространства

$$L\left\{\vec{a}_1\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\right\}$$

и

$$L\left\{\vec{a}_2\right\} = \left\{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2; t \in R^1\right\},$$

с образующими векторами

$$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2. \otimes$$

Пример 2.1.2. Найти матрицу, собственные значения и собственные подпространства оператора (аффинора) зеркального отражения относительно координатной плоскости X^1OX^2 в пространстве R^3 .

Решение. Оператор зеркального отражения в пространстве R^3 относительно координатной плоскости X^1OX^2 , очевидно, действует по правилу (рисунок 2.2.1)

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3\right) \vec{y} = \hat{R} \vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 - x^3 \vec{e}_3.$$

Поддействуем на базисные векторы оператором отражения:

$$\hat{R} \vec{e}_1 = \vec{e}_1; \hat{R} \vec{e}_2 = \vec{e}_2; \hat{R} \vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$

Следовательно, для матрицы оператора отражения относительно координатной плоскости

X^1OX^2 получаем:

$$R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора $\hat{R}$ имеет вид:

$$R(\mu) = \det \begin{pmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mu \end{pmatrix} = (1-\mu) \cdot (1-\mu) \cdot (-1-\mu).$$

Откуда видно, что многочлен имеет простой корень $\mu_1 = -1$ и двукратный корень $\mu_2 = 1$.

1) Для собственного значения $\mu_2 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, c \in R^1$$

– любое действительное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = -1$, есть линейная оболочка вида

$$c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\left\{\vec{e}_3\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = c \cdot \vec{e}_3; c \in R^1\right\},$$

то есть ось OX^3 .

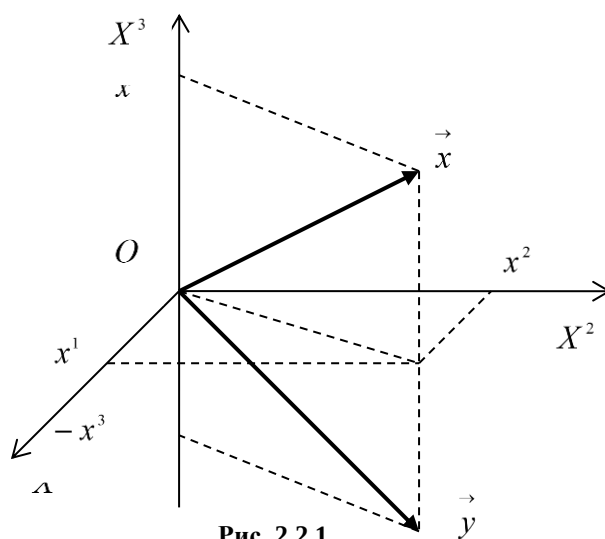


Рис. 2.2.1.

2) Для собственного значения $\mu_2 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R^1$ – любые действительные числа. Получаем собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\mu_1 = 1$, являющееся линейной оболочкой вида

$$L\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} = \left\{\vec{x} \in R^3 : \vec{x} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2; a, b \in R^1\right\},$$

то есть координатной плоскостью X^1OX^2 . Это подпространство является прямой суммой двух собственных подпространств $OX^1 \oplus OX^2$. $\otimes$

Пример 2.1.3. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения и собственные подпространства оператора.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$T = \begin{pmatrix} 3-\mu & 0 & 0 \\ 1 & 2-\mu & -1 \\ 1 & -1 & 2-\mu \end{pmatrix} \Rightarrow (3-\mu)(\mu^2 - 4\mu + 3) = 0.$$

Собственные значения $\mu_1 = 1, \mu_{2,3} = 3$.

Собственный вектор, соответствующий $\mu_1 = 1$ находится как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор, соответствующий $\mu_{2,3} = 3$ находится как решение системы уравне-

ний

$$\begin{cases} 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |x_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем два собственных подпространства:

$$X_1 = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_1; t \in R^1\}; X_2 = \{\vec{x} : \vec{x} = t\vec{a}_2 + \tau\vec{a}_3; t, \tau \in R^1\} \otimes$$

Пример 2.1.4. Линейный оператор $\hat{T} : E^3 \rightarrow E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ задан матрицей

$$T_e = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

Решение. Составим характеристический многочлен оператора $\hat{T}$:

$$T(\mu) = \begin{vmatrix} 11-\mu & 2 & -8 \\ 2 & 2-\mu & 10 \\ -8 & 10 & 5-\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + 18\mu^2 + 81\mu - 1458.$$

Откуда характеристическое уравнение

$$\mu^3 - 18\mu^2 - 81\mu + 1458 = 0 \Rightarrow (\mu - 18)(\mu^2 - 81) = 0,$$

или

$$(\mu - 18)(\mu - 9)(\mu + 9) = 0.$$

Откуда собственные значения оператора

$$\mu_1 = -9, \mu_2 = 9, \mu_3 = 18.$$

Оператор является симметрическим, то есть самосопряжённым. Поэтому все собственные значения оператора различны, а собственные векторы ортогональны. Найдём собственные векторы

оператора $\hat{T}$ в базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$.

1) Для собственного значения $\mu_1 = -9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор – угловой. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 10x^1 + x^2 = 4a, \\ 2x^1 + 11x^2 = -10a; \end{cases} \det A = 108 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, первое собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^1 = L \left\{ \vec{a}_1 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Для собственного значения $\mu_2 = 9$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

– СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор. Принимая третью координату за свободное неизвестное, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 8a, \\ 2x^1 - 7x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -18 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, второе собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^2 = L \left\{ \vec{a}_2 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

3) Для собственного значения $\mu_3 = 18$ имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения этой СЛАУ применим критерий нетривиальной совместности однородной СЛАУ.

Определитель СЛАУ

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, СЛАУ нетривиально совместна. Базисный минор матрицы СЛАУ – угловой минор

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} = 108.$$

Поэтому первые два уравнения СЛАУ линейно независимы. Принимая третью координату вектора за свободное неизвестное, то есть, полагая $x^3 = a$, где a – произвольное действительное число, решаем СЛАУ из первых двух уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -7x^1 + 1x^2 = -5a, \\ 2x^1 - 16x^2 = -10a; \end{cases} \det A = -54 \neq 0; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ \frac{1}{2}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, третье собственное подпространство оператора есть линейная оболочка вида

$$E^3 = L\left\{ \vec{a}_3 \right\},$$

где базисный вектор

$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

4) Найденные собственные векторы ортогональны. Нормируем их:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} \vec{a}_1 = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \vec{a}_2 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3;$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}} \vec{a}_3 = \frac{1}{3} \vec{e}_1 - \frac{2}{3} \vec{e}_2 + \frac{2}{3} \vec{e}_3.$$

5) Матрица перехода от старого базиса к новому базису

$$A: \left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \rightarrow \left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$$

имеет вид:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \det A = -1 \neq 0; A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице перехода от старого базиса к новому базису и транспонированная к ней имеют вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \operatorname{adg} A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; (A^{-1})^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора в новом базисе $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$:

$$\begin{aligned} T_a &= (A^{-1})^T T_e A^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 2.1.5. В евклидовом пространстве E^3 в ортонормированном (каноническом) базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ оператор $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\hat{T}^*$ в базисе

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Находим матрицу сопряжённого оператора в старом (ортонормированном) базисе:

$$T_e^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем матрицу перехода от старого базиса к новому базису и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому базису. Определитель матрицы

$$\det A = -2.$$

Алгебраические дополнения

$$A_1^1 = -2, A_2^1 = 0, A_3^1 = 0,$$

$$A_1^2 = 2, A_2^2 = -1, A_3^2 = -1,$$

$$A_1^3 = 0, A_2^3 = -1, A_3^3 = 1;$$

$$\text{adg}A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\hat{T}^*$ в новом базисе:

$$\begin{aligned}
T_g^* &= (A^{-1})^T T_e^* A^T = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \otimes
\end{aligned}$$

Пример 2.1.6. Ранее показано, что линейная оболочка $L\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\right\}$, где элементы L вы-

числяются по формулам

$$\vec{g}_1 = \alpha_1 \cdot \sin x + \beta_1 \cdot \cos x, \quad \vec{g}_2 = \alpha_2 \cdot \sin x + \beta_2 \cdot \cos x,$$

а скалярное произведение определено формулой

$$\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \cdot \beta_2 + \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1),$$

является двумерным линейным многообразием с ортонормированным базисом

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x, \quad \vec{e}_2 = \sin x - \cos x.$$

1) Найти матрицу оператора дифференцирования $\hat{D}$ в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ и матрицу сопря-

жённого оператора $\hat{D}^*$.

2) Выяснить, является ли оператор $\hat{D}$ симметрическим.

Р е ш е н и е. Находим матрицу оператора дифференцирования в базисе

$$\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\} \subset R^2.$$

Для чего находим образы базисных векторов $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$:

$$\begin{aligned}\hat{D} \vec{e}_1 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos x - \sin x) = \\ &= 0 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_2;\end{aligned}$$

$$\hat{D} \vec{e}_2 = \frac{d}{dx} (\sin x - \cos x) = \cos x + \sin x = \sqrt{3} \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2.$$

Следовательно, матрица оператора $\hat{D}$ в базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное многообразие является вещественным пространством, поэтому матрица сопряжённого оператора $\hat{D}^*$ равна транспонированной матрице оператора $\hat{D}$, то есть

$$D^* = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$ для матрицы оператора $\hat{D}$ имеем $d_2^1 \neq d_1^2$, оператор не является симметрическим. $\otimes$

Пример 2.1.7. В евклидовом пространстве E^3 линейный оператор $\hat{T}$ переводит систему векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ в систему векторов $\left\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \right\}$. Является ли этот оператор самосопряжённым, если:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|g_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; |g_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; |g_3\rangle = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. По условию задачи имеем

$$\hat{T} \vec{a}_1 = \vec{g}_1, \hat{T} \vec{a}_2 = \vec{g}_2, \hat{T} \vec{a}_3 = \vec{g}_3,$$

откуда для векторов-столбцов из координат получаем:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_2^1 + t_3^1 &= 2, \\ t_2^2 + t_3^2 &= 3, \\ t_2^3 + t_3^3 &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_1^1 + t_3^1 &= -1, \\ t_1^2 + t_3^2 &= 0, \\ t_1^3 + t_3^3 &= 3; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_1^1 + t_2^1 &= -5, \\ t_1^2 + t_2^2 &= 1, \\ t_1^3 + t_2^3 &= 4. \end{aligned}$$

Из последних равенств получаем три СЛАУ для элементов матрицы оператора:

для элементов первой строки

$$\begin{cases} t_2^1 + t_3^1 = 2, \\ t_1^1 + t_3^1 = -1, \\ t_1^1 + t_2^1 = -5; \end{cases}$$

для элементов второй строки

$$\begin{cases} t_2^2 + t_3^2 = 3, \\ t_1^2 + t_3^2 = 0, \\ t_1^2 + t_2^2 = 1; \end{cases}$$

для элементов третьей строки

$$\begin{cases} t_2^3 + t_3^3 = 1, \\ t_1^3 + t_3^3 = 3, \\ t_1^3 + t_2^3 = 4. \end{cases}$$

Решая эти СЛАУ по формулам Крамера, получаем матрицу оператора:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $(\forall i \neq j = 1, 2, 3) t_i^j = t_j^i$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ является самосопряжённым. $\otimes$

Пример 2.1.8. Матрица линейного оператора $\hat{T} : E^3 \rightarrow E^3$ в базисе векторов $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset E^3$ имеет вид:

$$T' = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, является ли оператор $\hat{T}$ ортогональным, если в ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ имеют место разложения

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Решение. 1) *Первый способ.* Проверим выполнение определения ортогональности, то есть выполнение условия

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \right) \left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y} \right).$$

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E^3$ в произвольном базисе

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\} \subset E^3 \text{ по формуле}$$

$$\left(\vec{x}, \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x^i y^j,$$

где

$$\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + x^3 \vec{a}_3, \quad \vec{y} = y^1 \vec{a}_1 + y^2 \vec{a}_2 + y^3 \vec{a}_3,$$

а матрица метрических коэффициентов имеет вид

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left(\vec{a}_1, \vec{a}_1 \right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right) & \left(\vec{a}_1, \vec{a}_3 \right) \\ \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1 \right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2 \right) & \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3 \right) \\ \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1 \right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2 \right) & \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3 \right) \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь получаем для скалярного произведения произвольных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следующий результат:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}, \vec{y} \right) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} x^i y^j = 2x^1 y^1 + x^1 y^2 + x^1 y^3 + \\ &+ x^2 y^1 + 2x^2 y^2 + x^2 y^3 + x^3 y^1 + x^3 y^2 + 2x^3 y^3. \end{aligned}$$

Находим координаты образов векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ при действии оператора $\hat{T}$:

$$\hat{T} \vec{x} = \vec{u} \Rightarrow T|x\rangle = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^1 + x^2 \\ -x^1 \\ \frac{2}{3}x^1 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$\hat{T} \vec{y} = \vec{v} \Rightarrow T|y\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y^1 + y^2 \\ -y^1 \\ \frac{2}{3}y^1 + y^3 \end{pmatrix}.$$

После подстановки найденных координат образов векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и метрических коэффициентов g_{ij} в формулу для скалярного произведения

$$\left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} u^i v^j$$

и сравнения с формулой для скалярного произведения преобразов, убеждаемся в справедливости равенства

$$\left(\hat{T} \vec{x}, \hat{T} \vec{y} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y} \right).$$

2) *Второй способ.* Матрица перехода от старого (ортонормированного) базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ к новому базису $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ и обратная к ней матрица имеют, соответственно, вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как формула преобразования матрицы оператора при переходе от старого базиса к новому базису имеет вид

$$T' = (A^{-1})^T T A^T,$$

то для матрицы оператора в старом базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$ получаем:

$$\begin{aligned} T &= A^T T' (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Убедиться в том, что полученная матрица является ортогональной, можно с помощью свойств ортогональных матриц. Например, умножая матрицу T на транспонированную матрицу T^T , получим

$$T T^T = T^T T = I.$$

Таким образом, выполняется свойство $T^T = T^{-1}$. Следовательно, оператор $\hat{T}$ и, соответственно, его матрица являются ортогональными. $\otimes$

Пример 2.1.9. Пусть $\hat{T} : X \rightarrow X$. Показать, что если $X_{inv}^{(1)}, X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, то $X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$ и $X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$ также являются инвариантными подпространствами оператора $\hat{T}$.

Решение. Пусть $X_{inv}^{(1)}, X_{inv}^{(2)}$ – инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$. Предположим, что вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$. Но тогда вектор $\vec{x} \in X_{inv}^{(1)}$ и $\vec{x} \in X_{inv}^{(2)}$, следовательно, и его образ

$$\hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(1)} \wedge \hat{T} \vec{x} \in X_{inv}^{(2)}.$$

Теперь очевидно, что образ вектора $\vec{X}$ принадлежит пересечению этих подпространств, то есть

$$\hat{T} \vec{X} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}.$$

Пусть теперь $\vec{X} \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}$. Тогда, по определению суммы подпространств

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2, \quad \vec{X}_1 \in X_{inv}^{(1)}, \quad \vec{X}_2 \in X_{inv}^{(2)},$$

откуда в силу того, что снова $\hat{T} \vec{X} \in X_{inv}^{(1)} \cap X_{inv}^{(2)}$, получаем

$$\hat{T} \vec{X} = \hat{T} \vec{X}_1 + \hat{T} \vec{X}_2 \in X_{inv}^{(1)} + X_{inv}^{(2)}. \quad \otimes$$

Пример 2.1.10. Пусть $\hat{T} : X \rightarrow X$. Показать, что если оператор $\hat{T}$ биективный, то его инвариантное подпространство X_{inv} является инвариантным подпространством и для обратного

оператора $\hat{T}^{-1}$.

Решение. Известно, что линейный оператор $\hat{T} : X \rightarrow X$ взаимно однозначен (биективен) в том и только в том случае, если он невырожденный.

Пусть

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\} \subset X_{inv}^m$$

– базис в X_{inv}^m , тогда система образов векторов исходной системы

$$\left\{ \hat{T} \vec{a}_1, \hat{T} \vec{a}_2, \dots, \hat{T} \vec{a}_m \right\}$$

принадлежат тому же инвариантному подпространству и образуют в нём другой базис.

Покажем сначала, что система образов линейно независима. Для этого составим линейную комбинацию образов векторов

$$\left\{ \hat{T} \vec{a}_1, \hat{T} \vec{a}_2, \dots, \hat{T} \vec{a}_m \right\}$$

и потребуем, чтобы

$$\alpha_1 \hat{T} \vec{a}_1 + \alpha_2 \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \hat{T} \vec{a}_m = \overset{\rightarrow}{0}.$$

Далее получаем в силу линейности оператора $\hat{T}$

$$\hat{T} \left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m \right) = \overset{\rightarrow}{0}.$$

Так как оператор невырожденный, то

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \overset{\rightarrow}{0}.$$

Последнее равенство, в силу линейной независимости системы

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \right\},$$

возможно только в случае одновременного обращения в нуль всех коэффициентов линейной комбинации. Что и доказывает линейную независимость системы образов.

Пусть теперь $\left(\forall \vec{X} \in X_{inv}^m \right)$. Разложим вектор $\vec{X}$ по базису из образов векторов исход-

ного базиса подпространства X_{inv}^m , то есть представим вектор $\vec{X}$ в виде

$$\vec{X} = x^1 \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + x^m \hat{T} \vec{a}_m.$$

Так как для невырожденного линейного оператора обратный оператор снова линейный, то, действуя

на обе части оператором $\hat{T}^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{T}^{-1} \vec{X} &= x^1 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_1 + x^2 \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_2 + \dots + x^m \hat{T}^{-1} \hat{T} \vec{a}_m = \\ &= x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \dots + x^m \vec{a}_m, \end{aligned}$$

причём

$$x^1 \vec{a}_1 + x^2 \vec{a}_2 + \dots + x^m \vec{a}_m \in X_{inv}^m,$$

так как он разложен по базису X_{inv} .

Итак, получили, что если $\vec{x} \in X_{inv}^m$, то $\hat{T}^{-1} \vec{x} \in X_{inv}^m \otimes$

Пример 2.1.11. Показать, что любое инвариантное подпространство оператора

$\hat{T}: X^n \rightarrow X^n$ является инвариантным и для операторного многочлена

$$F_p(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_p \hat{T}^p.$$

Решение. Пусть операторы $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ и $\hat{B}: X^n \rightarrow X^n$ имеют одно и тоже инвариантное подпространство $Y^m \subset X^n$. Тогда

$$\left(\forall \vec{x} \in Y^m \right) \vec{y}_1 = \hat{A} \vec{x} \in Y^m \wedge \vec{y}_2 = \hat{B} \vec{x} \in Y^m.$$

Так как любые линейные комбинации векторов подпространства Y^m снова являются векторами этого же подпространства, то имеем

$$\alpha \cdot \vec{y}_1 + \beta \cdot \vec{y}_2 = \alpha \cdot \hat{A} \vec{x} + \beta \cdot \hat{B} \vec{x} = \left(\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B} \right) \vec{x} \in Y^m.$$

То есть подпространство $Y^m \subset X^n$, инвариантное относительно операторов $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ и $\hat{B}: X^n \rightarrow X^n$, инвариантно и относительно оператора $\alpha \cdot \hat{A} + \beta \cdot \hat{B}$. Далее, из того, что

подпространство $Y^m \subset X^n$ является инвариантным относительно оператора $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$, следует, что оно инвариантно и относительно степеней этого оператора $\hat{A}^k$ ($k = 0, 1, \dots, p$)

.

Теперь очевидно, что любое инвариантное подпространство оператора $\hat{T}$ является инвариантным и относительно операторного многочлена

$$F_p(\hat{T}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{T} + a_2 \hat{T}^2 + \dots + a_p \hat{T}^p \otimes$$

Практическое занятие 2. Некоторые задачи геометрии

евклидова пространства

Предварительные сведения

Система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \subset E^n$ линейно зависима в том и только в том случае, если определитель Грама системы

$$G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_2 & \vec{x}_m \end{pmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vec{x}_m & \vec{x}_m \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве E^n некоторое подпространство L^m размерности $m < n$. Пусть дан некоторый вектор $\vec{x} \in E^n$, причём $\vec{x} \notin L^m$. Можно показать, что справедливо представление вектора $\vec{x}$ в виде следующего разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где вектор $\vec{g}_L$ принадлежит подпространству L^m , а вектор $\vec{h}^\perp$ ортогонален к этому подпространству. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{g}_L$ называются, соответственно, **наклонной** к подпространству L^m и **проекцией** наклонной $\vec{x}$ на подпространство L^m . Вектор $\vec{h}^\perp$ называется **перпендикуляром**, опущенным из конца наклонной $\vec{x}$ на подпространство L^m .

Пусть в евклидовом пространстве E^n зафиксирована система векторов

$$\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \right\} \quad (m < n).$$

Обозначим $\vec{h}_m^\perp$ перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\vec{x}_{m+1}$ на подпространство

$$L\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right\} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1).$$

Формула для вычисления объёма m -мерного параллелепипеда в пространстве E^n имеет вид:

$$V^2 = G\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\right) \equiv \begin{vmatrix} \left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_1, \vec{x}_m\right) \\ \left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_2, \vec{x}_m\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\vec{x}_m, \vec{x}_1\right) & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_2\right) & \dots & \left(\vec{x}_m, \vec{x}_m\right) \end{vmatrix}.$$

Примеры с решением

Пример 2.2.1. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов

$$\left\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right\} \subset R^3, \text{ если имеют место разложения}$$

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \quad \vec{x}_3 = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Решение. Находим попарные скалярные произведения векторов системы:

$$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_1\right) = 14, \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = 33, \quad \left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = 47.$$

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1\right) = 33, \quad \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 78, \quad \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) = 111,$$

$$\left(\vec{x}_3, \vec{x}_1\right) = 47, \quad \left(\vec{x}_3, \vec{x}_2\right) = 111, \quad \left(\vec{x}_3, \vec{x}_3\right) = 158.$$

Составляем определитель Грама и вычисляем его значение:

$$\begin{vmatrix} 14 & 33 & 47 \\ 33 & 78 & 111 \\ 47 & 111 & 158 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 78 & 111 \\ 111 & 158 \end{vmatrix} - 33 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 111 \\ 47 & 158 \end{vmatrix} + 47 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 78 \\ 47 & 111 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствии с критерием Грама система векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\}$ является линейно зависимой. $\otimes$

Пример 2.2.2. Радиус-вектор $\vec{x}$ в пространстве R^3 имеет разложение по стандартному базису (рисунок 1)

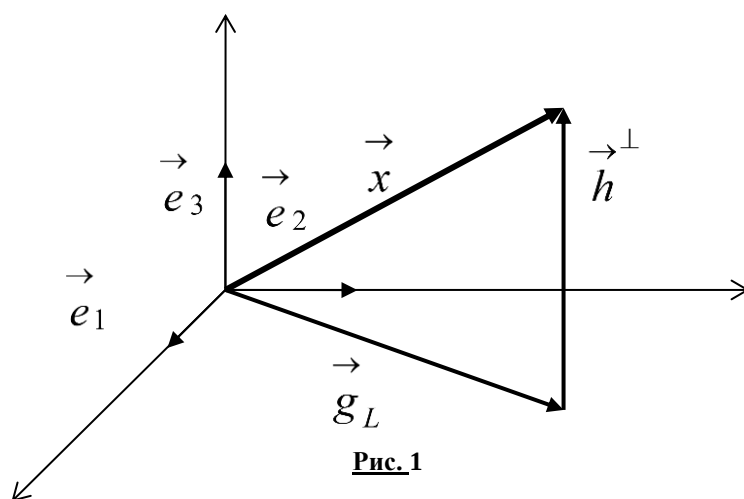
$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Обозначим координатную плоскость X^1OX^2 как L^2 .

Представить вектор $\vec{x}$ в виде разложения

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где $\vec{g}_L \in L^2$, $\vec{h}^\perp \in L^{2\perp}$.



Решение. Разложим вектор $\vec{g}_L$ по базису подпространства L^2 :

$$\vec{g}_L = g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2.$$

Вектор

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L \in L^{2\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален базису подпространства L^2 . Запишем условия ортогональности вектора $\vec{h}^\perp$ подпространству L^2 , состоящие в том, что вектор $\vec{h}^\perp$ должен быть ортогонален всем векторам базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}$:

$$\left(\vec{h}^\perp, \vec{e}_1 \right) = 0,$$

$$\left(\vec{h}^\perp, \vec{e}_2 \right) = 0.$$

Получаем СЛАУ

$$\begin{cases} \left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_1 \right) = 0, \\ \left(\vec{x} - \vec{g}_L, \vec{e}_2 \right) = 0, \end{cases}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{cases} \left(g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2, \vec{e}_1 \right) = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_1 \right), \\ \left(g^1 \vec{e}_1 + g^2 \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right) = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_2 \right). \end{cases}$$

После простых преобразований имеем

$$\begin{cases} g^1 = 3, \\ g^2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{g}_L = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2.$$

Далее имеем:

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \right) - \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \right) = 5\vec{e}_3.$$

Окончательно получаем

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3. \otimes$$

Пример 2.2.3. В пространстве R^4 опустить перпендикуляр из точки $P(-1; 5; 3; 2)$ на гиперплоскость H^3 , проходящую через заданные точки $A_1(1; 4; 2; 0)$, $A_2(3; 7; 3; 2)$, $A_3(2; 6; 3; -1)$, $A_4(1; 4; 5; 2)$.

Решение. В пространстве R^4 все координаты точек заданы в ортонормированном базисе, который обозначим $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$. Неявное уравнение гиперплоскости получено выше в примере 3.14 и имеет вид

$$23x^1 - 14x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 29 = 0.$$

Там же записаны направляющие векторы гиперплоскости:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \\ \vec{a}_2 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{a}_3 &= 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4. \end{aligned}$$

Проверим, что точка $P(-1; 5; 3; 2)$ не лежит в плоскости, для чего подставим координаты точки в неявное уравнение плоскости:

$$23 \cdot (-1) - 14 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 29 = -64 \neq 0.$$

Точка плоскости не принадлежит.

Поставим в соответствие точке $P(-1; 5; 3; 2)$ её радиус-вектор

$$\vec{x} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

– наклонную к плоскости. Представим наклонную в виде

$$\vec{x} = \vec{g}_L + \vec{h}^\perp,$$

где вектор $\vec{g}_L \in H^3$, а вектор $\vec{h}^\perp \in H^{3\perp}$.

Вектор

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L \in H^{3\perp}.$$

Следовательно, он ортогонален локальному базису подпространства H^3 . Запишем условия орто-

гональности вектора $\vec{h}^\perp$ подпространству H^3 (плоскость проходит через начало системы коор-

динат), состоящие в том, что вектор $\vec{h}^\perp$ должен быть ортогонален всем векторам базиса

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}:$$

$$\left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_1\right)=0, \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_2\right)=0, \left(\vec{h}^{\perp}, \vec{a}_3\right)=0.$$

Получаем СЛАУ

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L, \vec{a}_1\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L, \vec{a}_2\right)=0,$$

$$\left(\vec{x}-\vec{g}_L, \vec{a}_3\right)=0.$$

Представляя наклонную $\vec{g}_L$ разложением по направляющим векторам плоскости (по локальному базису), перепишем СЛАУ в виде

$$\left(g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3, \vec{a}_1\right)=\left(\vec{x}, \vec{a}_1\right),$$

$$\left(g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3, \vec{a}_2\right)=\left(\vec{x}, \vec{a}_2\right),$$

$$\left(g^1 \vec{a}_1 + g^2 \vec{a}_2 + g^3 \vec{a}_3, \vec{a}_3\right)=\left(\vec{x}, \vec{a}_3\right),$$

или в виде

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right) g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_1\right) g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_1\right),$$

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right) g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_2\right) g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_2\right),$$

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) g^1 + \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) g^2 + \left(\vec{a}_3, \vec{a}_3\right) g^3 = \left(\vec{x}, \vec{a}_3\right).$$

Далее, находим значения попарных скалярных произведений векторов локального базиса на плоскости

$$G^T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vec{a}_1, \vec{a}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_2, \vec{a}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{a}_3, \vec{a}_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

и записываем СЛАУ в окончательном виде:

$$\begin{cases} 18g^1 + 7g^2 + 7g^3 = 20, \\ 7g^1 + 7g^2 + g^3 = 10, \\ 7g^1 + g^2 + 13g^3 = 13. \end{cases}$$

Решение СЛАУ ищем по формулам Крамера.

1) Находим определитель основной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 738.$$

СЛАУ совместна и определённа.

2) Находим определители, соответствующие каждому неизвестному:

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 20 & 7 & 7 \\ 10 & 7 & 1 \\ 13 & 1 & 13 \end{pmatrix} = -6306,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & 20 & 7 \\ 7 & 10 & 1 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 573,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 18 & 7 & 20 \\ 7 & 7 & 10 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} = 471.$$

Записываем решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6306/738 \\ 573/738 \\ 471/738 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1051/123 \\ 191/123 \\ 157/123 \end{pmatrix}.$$

Записываем разложение проекции $\vec{g}_L$ на плоскость по локальному базису:

$$\vec{g}_L = -\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3.$$

Теперь находим перпендикуляр:

$$\vec{h}^\perp = \vec{x} - \vec{g}_L = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \left(-\frac{1051}{123}\vec{a}_1 + \frac{191}{123}\vec{a}_2 + \frac{157}{123}\vec{a}_3 \right).$$

Если теперь подставить в последнее равенство разложения векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по векторам ортонормированного базиса $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$, то получим вектор $\vec{h}$ – перпендикуляр, опущенный

из конца наклонной $\vec{g}_L$ на плоскость H^3 . $\otimes$

Пример 2.2.4. *) Записать матрицу оператора $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ ортогонального проектирования на координатную плоскость $X^1 O X^2$ в пространстве R^3 .

Р е ш е н и е. Этот оператор любому вектору пространства R^3 ставит в соответствие его проекцию на координатную плоскость $X^1 O X^2$ параллельно координатной оси $O X^3$. Согласно

изложенной выше теории, оператор $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ является прямой суммой единичного оператора

$$\hat{I}_{x^1 O x^2} : R_{x^1 O x^2}^2 \rightarrow R_{x^1 O x^2}^2$$

и нулевого оператора

$$\hat{O}_{O x^3} : R_{O x^3}^1 \rightarrow R_{O x^3}^1.$$

На главной диагонали его матрицы расположены 2×2 клетка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и 1×1 клетка вида $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$. Остальные элементы равны нулю:

$$P_{x^1 O x^2}^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что оператор $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ является самосопряжённым.

Найдём, например, проекцию вектора $\vec{X}$ из предыдущей задачи на координатную плоскость $X^1 O X^2$. Запишем для этого образ вектора

$$\vec{X} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

при действии оператора $\hat{P}_{x^1 O x^2}^\perp$ в координатной форме

$$P_{x^1 O x^2}^\perp |X\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат, очевидно, совпадает с результатом предыдущей задачи. $\otimes$

Практическое занятие 3. Поверхности второго порядка

Предварительные сведения

Квадратичной формой $\varphi(\vec{X}, \vec{X})$ от n переменных называется формальное выражение

$$\varphi(\vec{X}, \vec{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} X^i X^j,$$

где $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – симметрические вещественные коэффициенты.

При изменении базиса в пространстве в пространстве R^n матрица квадратичной формы преобразуется по закону

$$\Phi' = A^T \Phi A.$$

Квадратичная форма, определённая на векторах пространства R^n , является положительно определённой в том и только в том случае, если в каком-либо базисе $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subset R^n$ все

угловые миноры её матрицы $\phi_{ij}(\vec{a}_i, \vec{a}_j)$ положительны, то есть

$$M_1 = \varphi_{11} > 0, M_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\dots, M_n = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Поверхностью второго порядка в пространстве R^3 называется множество точек $\vec{x} \in R^3$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_{ij} x^i x^j + 2 \sum_{k=1}^3 b_k x^k + c = 0.$$

В пространстве R^2 существуют две **кривые второго порядка**, называемые **центрными**. Эти кривые описываются каноническими уравнениями вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

и называются, соответственно, **эллипсом** и **гиперболой**.

В пространстве R^3 существует три типа **невырожденные**, центральные поверхности второго порядка, определяемых каноническими уравнениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Поверхности, задаваемые в пространстве R^3 этими уравнениями, называются соответственно, **эллипсоидом**, **однополостным гиперboloидом** и **двуполостным гиперboloидом**.

В трёхмерном пространстве R^3 существует **коническая поверхность** с каноническим уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

В пространстве R^3 существуют две невырожденные нецентральные поверхности с каноническими уравнениями:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

– эллиптический параболоид;

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 2x_3$$

– гиперболический параболоид.

В пространстве R^3 общий вид **вырожденной поверхности** получается параллельным переносом вдоль оси OX_3 какой-либо кривой второго порядка на плоскости X_1OX_2 . При этом для эллипса, гиперболы и параболы получаются поверхности, носящие соответственно названия **эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры**. Пара параллельных, пересекающихся или слившихся прямых приводит, соответственно, к **паре параллельных, пересекающихся или слившихся плоскостей**

Примеры с решением

Пример 2.3.1. Привести квадратичную форму, имеющую в пространстве R^3 вид

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3,$$

к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Решение. Вид квадратичной формы задан в базисе

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \right\} \subset R^3.$$

Запишем симметричную матрицу квадратичной формы, для чего слагаемые с перекрёстными произведениями представим в виде суммы двух равных слагаемых:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) &= \\ &= 3(x^2)^2 + 3(x^3)^2 + (2x^1x^2 + 2x^2x^1) + (2x^1x^3 + 2x^3x^1) - (x^2x^3 + x^3x^2) = \\ &= 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^1 + 3(x^2)^2 - x^2x^3 + 2x^3x^1 - x^3x^2 + 3(x^3)^2. \end{aligned}$$

Теперь матрица квадратичной формы принимает вид:

$$\Phi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\mu & 2 & 2 \\ 2 & 3-\mu & -1 \\ 2 & -1 & 3-\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^3 - 6\mu^2 + 32 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -2$, $\mu_{2,3} = 4$.

Чтобы построить матрицу ортогонального преобразования найдём собственные векторы этого оператора. Для этого решим следующие системы линейных алгебраических уравнений.

1) Случай $\mu_1 = -2$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 5x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 5x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

2) Случай $\mu_{2,3} = 4$. Система уравнений записывается в виде:

$$\begin{cases} -4x^1 + 2x^2 + 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0, \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений является вектор-столбец

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второй и третий собственные векторы

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{x}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Векторы $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ ортогональны вектору $\vec{x}_1$, но не ортогональны между собой. Для ортогонализации системы собственных векторов применим алгоритм ортогонализации Шмидта. Положим

$$\vec{g}_1 = \vec{x}_1, \vec{g}_2 = \vec{x}_2, \vec{g}_3 = \vec{x}_3 + \alpha \vec{x}_2.$$

Так как должно быть $\left(\vec{g}_2, \vec{g}_3\right) = 0$, то

$$\left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 + \alpha \vec{x}_2\right) = 0, \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3\right) + \alpha \left(\vec{x}_2, \vec{x}_2\right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \alpha = 0, \alpha = -\frac{1}{5}.$$

Приходим к ортогональной системе собственных векторов ассоциированного оператора:

$$\vec{g}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{g}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{g}_3 = \frac{2}{5}\vec{e}_1 - \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\|\vec{g}_1\| = \sqrt{6}, \|\vec{g}_2\| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \|\vec{g}_3\| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Нормируя эту систему, получаем:

$$\vec{h}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{h}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Матрица ортогонального преобразования

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

осуществляет переход между ортонормированными базисами

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \Rightarrow \left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$$

и, следовательно, является ортогональной. Учитывая, что для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{-1} = A^T,$$

Запишем формулу преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от старого базиса к новому базису:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}^T.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначая координаты в базисе $\left\{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3 \right\}$ как $\{y^1, y^2, y^3\}$, запишем канонический вид квадратичной формы

$$\phi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = -2(y^1)^2 + 4(y^2)^2 + 4(y^3)^2. \otimes$$

Пример 2.3.2. Найти значения параметра λ , при которых является положительно определённой квадратичная форма

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 4(x^1)^2 + 2x^1x^2 + (x^2)^2 + 4x^1x^3 - 6x^2x^3 + \lambda(x^3)^2.$$

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Находя её главные миноры и применяя критерий Сильвестра, имеем:

$$M_1 = \varphi_{11} = 4 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, $\lambda > \frac{52}{3}$. $\otimes$

Пример 2.3.3. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 0.$$

Решение. Уравнение перепишем в виде

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 5.$$

Вводим новые координаты по формулам

$$x_{1'} = x_1 + 1, \quad x_{2'} = x_2 - 2.$$

Эти формулы описывают параллельный перенос начала системы координат в точку $O'(-1; 2)$, в которой уравнение принимает вида

$$x_{1'}^2 + x_{2'}^2 = 5.$$

Это уравнение, очевидно, описывает окружность с центром в точке $O'(-1; 2)$ радиуса

$$R = \sqrt{5}. \quad \otimes$$

Пример 2.3.4. Какую линию описывает уравнение

$$x_2 = 1 - \sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}.$$

Решение. Уравнение переписываем в виде

$$x_2 - 1 = -\sqrt{11 - 4x_1 - x_1^2}$$

и возводим обе части в квадрат (приобретаем новые корни)

$$(x_2 - 1)^2 = 11 - 4x_1 - x_1^2.$$

Преобразуем уравнение, выделяя полный квадрат:

$$x_1^2 + 4x_1 + 4 + (x_2 - 1)^2 = 15,$$

$$(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15.$$

Это уравнение описывает часть окружности с центром в точке $O'(-2; 1)$ радиуса $R = \sqrt{15}$, лежащую ниже новой горизонтальной оси с уравнением $x_2 = 1$. $\otimes$

Пример 2.3.5. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 5 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение запишем в виде

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0.$$

Это уравнение описывает точку $M(2; 1)$. $\otimes$

Пример 2.3.6. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$100x_1^2 + 25x_2^2 + 200x_1 - 100x_2 - 200 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение переписываем в виде

$$100(x_1 + 1)^2 + 25(x_2 - 2)^2 = 400$$

и делим обе части на 400:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{4} + \frac{(x_2 - 2)^2}{16} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(-1; 2)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 4$. $\otimes$

Пример 2.3.7. Какую линию на плоскости описывает уравнение

$$x_1 = -2\sqrt{-5 - 6x_2 - x_2^2}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение преобразуем к виду

$$x_1^2 + 4(x_2 + 3)^2 = 16,$$

возводя обе части в квадрат. Делим обе части на 16:

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{(x_2 + 3)^2}{4} = 1.$$

Уравнение описывает часть эллипса с центром в точке $O'(0; -3)$ и полуосями $a = 4$ и $b = 2$, лежащую слева относительно оси OX_2 . $\otimes$

Пример 2.3.8. Линия второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\} \subset R^2 \text{ уравнением}$$

$$11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 - 20x^1 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Привести уравнение линии к каноническому виду и определить её тип.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) &= 11(x^1)^2 - 20x^1x^2 - 4(x^2)^2 = \\ &= 11(x^1)^2 - 10x^1x^2 - 10x^2x^1 - 4(x^2)^2 \end{aligned}$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Квадратичной форме $\varphi\left(\begin{smallmatrix} \rightarrow \\ X \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ X \end{smallmatrix}\right)$ ставим в соответствие симметрический оператор $\hat{T}$ с матрицей $T = \Phi$ и записываем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} t_1^1 - \mu & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 - \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 - \mu & -10 \\ -10 & -4 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \mu^2 - 7 \cdot \mu - 144 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$. Находим собственные векторы оператора $\hat{T}$, соответствующие собственным значениям $\mu_1 = -9$ и $\mu_2 = 16$, для чего решаем две однородные СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 + 5x^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x^1 - 10x^2 = 0, \\ -10x^1 - 20x^2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений первой СЛАУ приводит к первому собственному вектору

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

а фундаментальная система решений второй – ко второму собственному вектору

$$\vec{x}_2 = -2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Эти векторы ортогональны, но не нормированы. Нормируем их:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\|\vec{x}_1\|} \vec{x}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_2;$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\|\vec{x}_2\|} \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_2.$$

Матрица перехода от старого базиса к новому базису имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Преобразование от нового базиса к старому осуществляется при помощи обратной матрицы, которая в силу ортогональности матрицы A равна транспонированной к ней, то есть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Координаты в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе при помощи матрицы

$$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A,$$

обратный переход от новых координат к старым производится при помощи матрицы A^{-1} . Имеем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\}$ квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\mu_1(y^1)^2 + \mu_2(y^2)^2 = -9(y^1)^2 + 16(y^2)^2.$$

Линейные слагаемые преобразуются так:

$$-20x^1 = -\frac{20}{\sqrt{5}}y^1 + \frac{40}{\sqrt{5}}y^2;$$

$$-8x^2 = -\frac{16}{\sqrt{5}}y^1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y^2.$$

Подстановка в уравнение приводит его к виду:

$$-9(y^1)^2 + 16(y^2)^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}y^1 + \frac{32}{\sqrt{5}}y^2 + 1 = 0.$$

Выделяя полный квадрат по y^1 , y^2 и приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение линии в виде

$$-9\left(y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5 = 0,$$

Откуда совершая параллельный перенос, то есть полагая

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

окончательно имеем:

$$\frac{(z^1)^2}{5/9} - \frac{(z^2)^2}{5/16} = 1.$$

Получили каноническое уравнение линии второго порядка – гиперболы. Отметим, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

перехода от старого базиса к новому базису является матрицей оператора (аффинора) поворота системы координат на такой угол φ , что $\cos \varphi = 1/\sqrt{5}$ и $\sin \varphi = 2/\sqrt{5}$. Далее, в соответствии с формулами

$$z^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{\sqrt{5}},$$

осуществляется параллельный перенос начала системы координат в новое положение – точку с координатами $O' \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. $\otimes$

Пример 2.3.9. Поверхность второго порядка задана в каноническом (ортонормированном) базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$ уравнением

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 + 506 = 0.$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду и определить её тип.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$\varphi \left(\vec{x}, \vec{x} \right) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Матрица квадратичной формы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ассоциированного оператора $\mu_1 = -2$, $\mu_{2,3} = 4$. Собственные векторы

$$\vec{x}_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{30}}\vec{e}_2 + \frac{5}{\sqrt{30}}\vec{e}_3.$$

Это ортонормированная система. Матрица перехода от старого базиса к новому базису получается непосредственно из приведённых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

и является ортогональной ($A^{-1} = A^T$).

Преобразование координат осуществляется с помощью матрицы A

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix}$$

и приводит квадратичную форму к виду

$$\varphi\left(\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{matrix}\right) = 4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2.$$

Линейные члены преобразуются так:

$$-12\sqrt{30}x_1 - 14\sqrt{30}x_2 + 2\sqrt{30}x_3 = -40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'}.$$

В новой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$4x_{1'}^2 - 2x_{2'}^2 + 4x_{3'}^2 - 40\sqrt{6}x_{1'} + 12\sqrt{5}x_{2'} + 506 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим уравнение к виду

$$4(x_{1'} - 5\sqrt{6})^2 - 2(x_{2'} - 3\sqrt{5})^2 + 4x_{3'}^2 - 4 = 0.$$

Вводя обозначения $y_1 = x_{1'} - 5\sqrt{6}$, $y_2 = x_{2'} - 3\sqrt{5}$, $y_3 = x_{3'}$, получаем следующий вид уравнения:

$$y_1^2 - \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3,$$

имеющего в каноническом базисе пространства $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$ матрицу:

$$1) A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}; 2) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора

$\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$, действие которого задано приведёнными ниже координатные равенства:

$$\left(\forall \vec{x} \in R^3 \right)$$

$$1) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 2x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix}; 2) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix};$$

$$3) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x^2 \\ 0 \\ x^1 + x^2 \end{pmatrix}; 4) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$5) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; 6) A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

3. Линейный оператор $\hat{T}: E^3 \rightarrow E^3$ в некотором ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$

задан матрицей:

$$1) T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; 2) T = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix};$$

$$3) T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; 4) T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построить в пространстве E^3 ортонормированный базис собственных векторов оператора $\hat{T}$ и записать матрицу оператора $\hat{T}$ в этом базисе.

4. Пусть в пространстве зафиксирован канонический базис

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\} \subset R^3$$

и пусть дан некоторый линейный оператор $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$. Показать, что линейные оболочки следующего вида

$$L\left\{ \vec{e}_1 \right\}, L\left\{ \vec{e}_2 \right\}, L\left\{ \vec{e}_3 \right\}, L\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\}, L\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_3 \right\}, L\left\{ \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}$$

являются инвариантными подпространствами относительно оператора $\hat{A}$.

5. Пусть подпространства $L_1 \subset X^n$ и $L_2 \subset X^n$ инвариантны относительно оператора

$$\hat{A}: X^n \rightarrow X^n.$$

Показать, что подпространства $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$ также инвариантны относительно оператора $\hat{A}$.

6. Показать, что если $L \subset X^n$ – инвариантное подпространство оператора

$$\hat{A}: X^n \rightarrow X^n,$$

то L является инвариантным подпространством и относительно операторного многочлена

$$\hat{F}(\hat{A}) = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + \dots + a_m \hat{A}^m.$$

7. Пусть $\hat{A}: X^n \rightarrow X^n$ – некоторый линейный оператор. Доказать, что если оператор $\hat{A}$ биективный, то его инвариантные подпространства являются инвариантными и относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

8. Пусть $\hat{T}: R^2 \rightarrow R^2$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Пусть $\hat{T}: R^3 \rightarrow R^3$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix}.$$

Найти все инвариантные подпространства оператора $\hat{T}$, если

$$1) T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; 2) T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Пусть $\hat{T}: R^4 \rightarrow R^4$ имеет матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и собственные подпространства оператора $\hat{T}$.

Показать, что линейная оболочка

$$L\left\{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\right\}$$

является инвариантным подпространством оператора $\hat{T}$.

11. Получить параметрические и неявные уравнения плоскости $H^m \subset R^n$, проходящей через заданные точки

$$A_1(0; 6; 3; 5; 1), A_2(-3; 2; 4; 1; 0), \\ A_3(5; 1; 4; 3; 2), A_4(-1; 3; -4; 2; -1).$$

12. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \right\} \subset R^3$:

$$1) \vec{x}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$

$$2) \vec{x}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 7\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3.$$

13. Используя критерий Грама линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве, выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $\left\{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \right\} \subset R^4$:

$$\vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,$$

$$\vec{x}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4.$$

14. Пусть $L^3 \left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ – линейное многообразие в E^4 , а $\vec{x}$ – наклонная к многообразию

L^3 . Найти наименьший угол между вектором $\vec{x}$ и многообразием L^3 , если:

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_4.$$

15. В ортонормированном базисе $\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\}$ пространства E^4 задана система векторов

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3 - 13\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_4 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4.$$

1) Выяснить, является ли эта система векторов линейно независимой.

2) Найти объём параллелепипеда, построенного на тройке векторов

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}.$$

3) Используя процесс ортогонализации Шмидта, построить на их основе

новый ортонормированный базис пространства R^4 .

16. В пространстве R^5 найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

$$1) \vec{a}_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = 9\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 - \vec{e}_5;$$

$$2) \vec{a}_1 = 4\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4,$$

$$\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_5.$$

17. Систему строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

дополнить двумя строками так, чтобы вся система стала ортогональной.

18. В пространстве R^4 даны две плоскости H_1 и H_2 с направляющими векторами

$$\left\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \right\} \subset H_1, \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \right\} \subset H_2,$$

соответственно. Найти наименьший угол, образованный векторами первой плоскости с векторами второй плоскости, если:

$$1) \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4;$$

$$2) \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \vec{a}_2 = \vec{e}_2,$$

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$$

19. Выяснить, какую линию на плоскости описывает уравнение:

$$1) x_2 = -1 - \frac{3}{5} \sqrt{26 - 2x_1 + x_1^2};$$

$$2) x_1 = -4x_2^2 + 8x_2 - 1;$$

$$3) x_1 = 2 - \sqrt{3 - x_2}.$$

20. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка:

$$1) 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 - 80 = 0;$$

$$2) 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16 = 0.$$

21. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

$$1) 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2 + \frac{32}{3}x_3 + 10 = 0;$$

$$2) \alpha x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{3}x_3 - 7 = 0,$$

где $\alpha = 5$ или $\alpha = 0$.

ЧАСТЬ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Практическое занятие 1. Понятие предела числовой последовательности

Предварительные сведения

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону ставится в соответствие вполне определённое действительное число, то говорят, что задана **бесконечная числовая последовательность**

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Числа a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) называются **элементами (членами)** последовательности (a_n) .

Числовая последовательность (a_n) называется **монотонно возрастающей (монотонно убывающей)**, если

$$(\forall n \in N): a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}),$$

и **строго монотонно возрастающей (строго монотонно убывающей)**, если

$$(\forall n \in N): a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}).$$

Пусть $\varepsilon \in R^1$ ($\varepsilon > 0$) и $x_0 \in R^1$. Тогда множество

$$U_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^1 : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

называется **ε -окрестностью** числа (точки) x_0 .

Последовательность (x_n) действительных чисел **сходится к действительному числу x_0** , если для каждого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся номер n_0 , такой, что начиная с этого номера, то есть, для всех номеров $n \geq n_0$, выполняется неравенство

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Пусть (x_n) и (y_n) – числовые последовательности, сходящиеся, соответственно, к пределам x_0 и y_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $x_n \equiv C$, где C – некоторая постоянная величина (число), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C;$$

2) существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 + y_0;$$

3) существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 y_0;$$

4) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x_0}.$$

Примеры с решением

Пример 3.1.1. Показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Решение. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли номер $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, такой, что

$(\forall n \geq n_0) \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, следовательно, 1 является пределом данной последовательности.

⊗

Пример 3.3.1.2. Доказать существование предела последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}.$$

Решение. Покажем, что данная последовательность монотонна и ограничена. Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}+1} \Rightarrow x_{n+1} > x_n,$$

то есть последовательность монотонно возрастает и ограничена снизу, например, первым элементом x_1 . При любом n , очевидно, $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$. Последовательность ограничена сверху:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1. \end{aligned}$$

Последовательность монотонна и ограничена, следовательно, по критерию сходимости имеет предел. ⊗

Пример 3.3.1.3. Доказать, что последовательность (x_n) есть бесконечно малая последовательность, если

$$1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; 2) x_n = \frac{2n}{n^3+1}; 3) x_n = \frac{1}{n!}; 4) x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n.$$

Составить для каждого случая таблицу следующего вида:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
n_0				

Р е ш е н и е. 1) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0,1$. Тогда

$$n_0 = \left[\frac{1}{1/10} \right] + 1 = 11.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε . Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
n_0	11	1001	10001	...

2) По определению

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) \left| \frac{2n}{n^3 + 1} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство:

$$\left| \frac{2n}{n^3 + 1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow n > \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] \Rightarrow n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right] + 1.$$

Таким образом, по произвольному положительному числу ε мы нашли номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с этого номера, выполнено определение предела последовательности. Следовательно, последовательность имеет предел, который равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0.$$

Таким образом, последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Пусть, например, $\varepsilon = 0,1$. Тогда

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{1/10}} \right] + 1 \approx [4,472] + 1 = 5.$$

И так далее, для указанных в таблице значений ε . Искомая таблица принимает вид:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
n_0	5	46	142	...

Остальные примеры решаются аналогично и предлагаются для самостоятельного решения.

⊗

Пример 3.3.1.4. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 - 1}.$$

Решение. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Используя правила действий с пределами последовательностей, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 2. \otimes$$

Пример 3.3.1.5. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2}.$$

Решение. Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n = \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2} = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{3n+1}{n} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right).$$

Используя правила действий с пределами, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot (3n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot 3 = 6. \otimes$$

Пример 3.3.1.6. Найти предел последовательности с общим членом

$$x_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Преобразуем формулу для общего члена:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Вычисляем предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 3.3.1.7. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Решение. Преобразуем формулу для общего члена последовательности:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 3.3.1.8 (неперово число e). Показать, что последовательность с общим членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

сходится, то есть, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Решение. Приведём значение этого числа, применяемое в обычных расчётах, не требующих слишком большой точности: $e = 2,71828\dots$

Приступим к строгому исследованию данного предела. Докажем сходимость последователь-

ность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что

$$(\forall b > -1) \wedge (\forall n \in N) (1+b)^n \geq 1+nb.$$

Для этого применим индукцию по n :

1) при $n=1$ имеем $1+b \geq 1+b$, что всегда выполняется;

2) предположим, что $(\forall n=k) (1+b)^k \geq 1+kb$;

3) покажем, что $(\forall b > -1) \wedge (n=k+1) (1+b)^{k+1} \geq 1+(k+1)b$.

Справедливость заключения следует из цепочки выкладок:

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)^k (1+b) \geq (1+b)(1+kb) = 1+kb+b+kb^2 \geq 1+(k+1)b,$$

так как $kb^2 > 0$.

Так как неравенство справедливо при $n=1$, оно справедливо и при любом $n \in N$. Итак, $(\forall b > -1)$ и $(\forall n \in N)$

$$(1+b)^n \geq 1+nb. \quad (1)$$

Рассмотрим последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Для этой последовательности

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1} \cdot (n-1)}{(n-1)^n \cdot (n+1)^{n+1} \cdot (n-1)} = \\ &= \frac{(n^2)^{n+1} \cdot (n-1)}{(n^2-1)^{n+1} \cdot n} = \frac{(n^2-1+1)^{n+1} \cdot n-1}{(n^2-1)^{n+1} \cdot n} = \\ &= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \{используем(1)\} \geq \\ &\geq \left(1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\forall n \in N) \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$$

а, следовательно, $y_n \leq y_{n-1}$, то есть, последовательность с общим членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

монотонно убывает. Так как

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1,$$

эта последовательность ограничена снизу. Но тогда по критерию сходимости ограниченной последовательности данная последовательность сходится.

Далее имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где использовано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Так как предел в правой части равенства существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

то существует и предел левой части. Итак, предел существует и обозначается

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \otimes$$

Пример 3.3.1.9. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Решение. Неравенство справедливо при $n = 1, 2$, что легко проверяется.

Например, для $n = 2$ имеем:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 \geq 1 + x_1 + x_2.$$

Предположим, что неравенство справедливо при $n = k$, то есть

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

и покажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq \\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}. \end{aligned}$$

По заключению индукции неравенство справедливо при любом $k = n$. $\otimes$

Пример 3.3.1.10. Показать, что если $x > -1$, то

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1),$$

причём знак равенства имеет место только при $x = 0$.

Решение. Полагая в неравенстве предыдущего примера

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x,$$

получаем требуемое неравенство. $\otimes$

Пример 3.3.1.11. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = n[\ln(n+3) - \ln n].$$

Решение. Преобразуем формулу для общего члена:

$$x_n = n[\ln(n+3) - \ln n] = \ln \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = 3 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n/3} \right)^{n/3}.$$

Переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n/3} \right)^{n/3} = 3 \cdot \ln e = 3. \quad \otimes$$

Пример 3.3.1.12. Доказать, что последовательность (a^n) является:

- 1) бесконечно большой последовательностью при $|a| > 1$;
- 2) бесконечно малой последовательностью при $|a| < 1$.

Решение. 1) Пусть $|a| > 1$. Покажем, что последовательность (a^n) удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, то есть $(\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}): (\forall n \geq n_0)$

$$|a|^n > A. \quad (1)$$

Зададимся произвольным числом $A > 0$. Для нахождения номера n_0 решим неравенство (1) относительно номера. Получим

$$\log_{|a|} |a|^n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \log_{|a|} A \Rightarrow n > \lfloor \log_{|a|} A \rfloor.$$

Следовательно, выполнение неравенства (1) начинается с номера

$$n_0 = \lfloor \log_{|a|} A \rfloor + 1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть $|a| < 1$. Если $a = 0$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) a^n = 0$ и, следовательно, последовательность (a^n) бесконечно малая. Пусть $a \neq 0$. Тогда

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}. \quad (2)$$

Так в этом случае $\frac{1}{|a|} > 1$, то последовательность $\left(\frac{1}{a^n} \right)$ является бесконечно большой последовательностью, последовательность

$$a^n = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^n \right)^{-1}$$

– бесконечно малой последовательностью. Поэтому в силу (2) при $|a| < 1$ последовательность (a^n) – бесконечно малая последовательность. $\otimes$

Пример 3.3.1.13. Показать, что если (x_n) – сходящаяся последовательность, а (y_n) – бесконечно большая последовательность, то последовательность

$$(z_n) = (x_n + y_n)$$

– бесконечно большая последовательность.

Решение. Покажем, что

$$(\forall A > 0) (\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) |x_n + y_n| > A.$$

В силу критерия сходимости последовательности сходящаяся последовательность (x_n) ограничена, то есть

$$(\exists M > 0): (\forall n \in N) |x_n| < M. \quad (1)$$

Пусть задано произвольное $A > 0$. Так как последовательность (y_n) бесконечно большая, то для числа $A + M$

$$(\exists n_0 \in N): (\forall n \geq n_0) |y_n| > A + M. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем: $|x_n + y_n| \geq |y_n| - |x_n| > A + M - M = A$.

Что и требовалось доказать. $\otimes$

Пример 3.3.1.14. Вычислить предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n. \quad (1)$$

Решение. Так как $(\forall x \in R^1) |\cos x| < 1$, то последовательность $(\cos n)$ ограничена.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$ – бесконечно малая последовательность. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0.$$

По свойствам бесконечно малых последовательностей произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность, то есть последовательность с общим членом (1), является бесконечно малой последовательностью и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cos n = 0. \otimes$$

Практическое занятие 2. Непрерывность и предел функции

Предварительные сведения

Функция $f: M \rightarrow f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in M$, если для каждой последовательности (x_n) точек множества M , сходящейся к точке x_0 , последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции f сходится к значению $f(x_0)$ функции в этой точке (определение непрерывности по Гейне).

Функция $f: M \rightarrow f(M)$ называется **непрерывной в точке** $x_0 \in M$, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(определение непрерывности по Коши).

Говорят, что функция f , определённая на множестве M , имеет **предел** C при $x \rightarrow x_0$, и пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C,$$

если для каждой последовательности точек

$$x_n \in M - \{x_0\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

последовательность $(f(x_n))$ соответствующих значений функции сходится к точке (числу) C , то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C.$$

Говорят, что функция f , определённая на множестве M , имеет предел C при $x \rightarrow x_0$, и при этом пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C,$$

если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех точек x удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - C| < \varepsilon.$$

Пусть x_0 – предельная точка множества M . Функция $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется **бесконечно малой функцией** при условии $x \rightarrow x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пусть f и g – две действительные функции, имеющие одно и то же множество определения

$M \subset \mathbb{R}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ – некоторое действительное число, а x_0 – предельная точка множества M . Тогда

если пределы этих функций в точке x_0 существуют и соответственно равны

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$$

где $a, b \in \mathbb{R}^1$, то справедливы следующие правила выполнения рациональных операций с пределами функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha a;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = ab;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Примеры с решением

Пример 3.3.1.15. Вычислить предел функции в точке: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5)$.

Решение. Выбираем произвольную последовательность значений аргумента (x_n) , сходящуюся к 1, то есть такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Используем определение по Гейне:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + x + 5) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 + x_n + 5) = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 3 + 1 + 5 = 9. \otimes\end{aligned}$$

Пример 3.3.1.16. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$.

Решение. Выбираем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём для него такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$|x - 6| < \delta \Rightarrow 6 - \delta < x < 6 + \delta. \quad (1)$$

будет следовать неравенство

$$|(2x - 5) - 7| < \varepsilon.$$

Производя тождественные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned}|(2x - 5) - 7| < \varepsilon &\Rightarrow |2x - 12| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |x - 6| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow 6 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 6 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)\end{aligned}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее и доказывает, что $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 5) = 7$. $\otimes$

Пример 3.3.1.17. Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8.$$

Решение. По определению предела нужно чтобы выполнялось условие:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): \left| x - \frac{1}{3} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Решаем неравенство

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{15 \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{5} \right)}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|15x - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15} < x < \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15}.$$

Таким образом, как только

$$x \in \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon}{15}, \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{15} \right),$$

так сразу

$$\left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon.$$

Из этого следует, что $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$. Итак,

$$(\forall \varepsilon > 0) \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{15} \Rightarrow \left| \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} - 8 \right| < \varepsilon,$$

а значит $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{3}} = 8. \otimes$

Пример 3.3.1.18. Найти предел функции в точке: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4}.$

Р е ш е н и е. Непосредственно перейти к пределу в числителе и знаменателе нельзя, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right], \text{ то есть получаем так называемую } \textit{неопределённость вида } \frac{0}{0}. \text{ Для «рас-}$$

крытия» этой неопределённости разложим числитель и знаменатель на множители, предварительно прирав-

няв их к нулю ($x^2 - 3x + 2 = 0, 3x^2 + x - 4 = 0$) и решив соответствующие квадратные урав-

нения. В результате получаем:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{3(x-1)\left(x + \frac{4}{3}\right)}.$$

Так как $x \rightarrow 1$, но $x \neq 1$, то на множитель $(x-1)$, дающий в пределе $x \rightarrow 1$ нуль, можно сокра-

тить. В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)}{3\left(x + \frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{4}{3}\right)} = -\frac{1}{7}. \otimes$$

Пример 3.3.1.19. Пользуясь определением непрерывности по Коши, показать, что функция $f(x) = 5x^2 + 5$ непрерывна в точке $x_0 = 8$.

Р е ш е н и е. Значение функции в точке $x_0 = 8$ равно $f(8) = 325$. По определению функция будет в точке $x_0 = 8$ непрерывной, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0): |x - 8| < \delta \Rightarrow |5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon.$$

Решаем последнее неравенство, чтобы найти промежуток числовой оси M такой, что как только $x \in M$, так сразу $|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon$. Имеем:

$$|5x^2 + 5 - 325| < \varepsilon \Rightarrow |5x^2 - 320| < \varepsilon \Rightarrow 64 - \frac{\varepsilon}{5} < x^2 < 64 + \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}} < x < \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}}.$$

Таким образом,

$$x \in \left(\sqrt{64 - \frac{\varepsilon}{5}}, \sqrt{64 + \frac{\varepsilon}{5}} \right) \Rightarrow |(5x^2 + 5) - 325| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функция в точке $x_0 = 8$ непрерывна. $\otimes$

Пример 3.3.1.20. Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Функция непрерывна в промежутках

$$(-\infty, 0], \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right).$$

Исследуем функцию в точках 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (2 - x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = 1,$$

то $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, в ней функция испытывает скачок

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 2.$$

Далее имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \cos x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 0 = 0.$$

Так как $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

и функция в точке $x = \frac{\pi}{2}$ непрерывна. Таким образом, функция непрерывна на всей числовой оси

$\mathbb{R}$, кроме точки $x = 0$, которая является точкой разрыва первого рода. $\otimes$

Пример 3.3.1.21. Найти точки разрыва функции, определённой формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x^2 - 9}, & x \neq 3, \\ 1, & x = 3. \end{cases}$$

Если точки разрыва существуют, то дать их классификацию.

Р е ш е н и е. Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{3x^2 - 9} = \frac{1}{18};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{3x^2 - 9} = \frac{1}{18}.$$

Итак, пределы слева и справа существуют, равны, но не равны значению функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \frac{1}{18} \neq 1.$$

Имеем точку разрыва первого рода, а именно, точку устранимого разрыва. $\otimes$

Пример 3.3.1.22. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x}.$$

Р е ш е н и е. Непосредственно вычислить предел нельзя. Поэтому заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \sin x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0.$$

Таким образом, функции в числителе и знаменателе при $x \rightarrow 0$ являются бесконечно малыми функциями.

Для нахождения предела их отношения заменим эти функции эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow 0$ функциями. Вспомним, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то есть, $\sin x \approx x$ при $x \rightarrow 0$.

Далее, вспоминая, что $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ и заменяя $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$, получим, что

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \approx 2 \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}.$$

Теперь предел легко находится как предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 4. \quad \otimes$$

Практическое занятие 3. Дифференцируемость функции одного переменного

Предварительные сведения

Пусть $M \subset R^1$ – допустимое множество. Действительная функция $f: M \rightarrow R$ называется **дифференцируемой в точке** $x_0 \in M$, если выполняется условие:

$$(\exists U(x_0) \subset M): (\forall x \in U(x_0))$$

$$f(x) = f(x_0) + D(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0$.

Пусть f – функция, определённая на множестве $M \subset R^1$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in M$. Тогда величина $D(x_0)$, определённая предельным соотношением

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D(x_0),$$

называется **первой производной функции f в точке x_0** и обозначается

$$\frac{df}{dx}(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv f^{(1)}(x_0).$$

Линейная по смещению $x - x_0$ часть

$$df(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) \equiv f'(x_0)(x - x_0)$$

приращения функции

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

дифференцируемой в точке x_0 функции f , называется **первым дифференциалом** этой функции в точке x_0 .

Пусть функции f, f_1, f_2 определены на одном и том же множестве M и дифференцируемы в точке $x_0 \in M$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) сумма $f_1 + f_2$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d(f_1 + f_2)}{dx}(x_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0) + \frac{df_2}{dx}(x_0);$$

2) если $c \in \mathbb{R}^1$, то функция cf дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d(cf)}{dx}(x_0) = c \frac{df}{dx}(x_0);$$

3) произведение $f_1 f_2$ дифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d(f_1 f_2)}{dx}(x_0) = \frac{df_1}{dx}(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) \frac{df_2}{dx}(x_0);$$

4) если $f(x_0) \neq 0$, то функция $1/f$ дифференцируема в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(\frac{1}{f}\right)}{dx}(x_0) = -\frac{1}{[f(x_0)]^2} \frac{df}{dx}(x_0);$$

5) если $f_2(x_0) \neq 0$, то частное f_1/f_2 дифференцируемо в точке x_0 и имеет место формула

$$\frac{d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)}{dx}(x_0) = \frac{1}{[f_2(x_0)]^2} \left[\frac{df_1}{dx}(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) \frac{df_2}{dx}(x_0) \right].$$

Примеры с решением

Пример 3. 2.1. Найти производную функцию и дифференциал для функции, определённой формулой

$$f(x) = 4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{17}}.$$

Решение. Для решения задачи используем правило вычисления производной суммы (дифференцируемых) функций, правило вычисления производной функции на число, а также табличную производную $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^5 - 25x^{1/5} - 2\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^{17}} \right)' = \\ &= \left(4x^5 - 25x^{1/5} - 2x^{3/2} + 7x^4 \right)' = 20x^4 - 5x^{-4/5} - 3x^{1/2} + \frac{119}{4}x^{13/4} = \end{aligned}$$

$$= 20x^4 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}}.$$

Так как дифференциал функции (в произвольной точке x) $df(x) = f'(x)dx$, то имеем:

$$df(x) = \left(20x^4 + 9x^2 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^4}} - 3\sqrt{x} + \frac{119}{4}\sqrt[4]{x^{13}} \right) dx. \otimes$$

Пример 3. 2.2. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

Решение. В этом примере следует воспользоваться правилом дифференцирования частного двух (дифференцируемых) функций

$$f'(x) = \left(\frac{g_1}{g_2} \right)'(x) = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2},$$

для чего вычислим сначала производные числителя и знаменателя:

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2, \quad g'(x) = (x^2 + 2x + 5)' = 2x + 2$$

(здесь мы воспользовались тем, что согласно таблице производных производная постоянной равна нулю, а производная степенной функции вычисляется по формуле $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$).

Теперь используем правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \right]' = \frac{g_1'(x) \cdot g_2(x) - g_1(x) \cdot g_2'(x)}{[g_2(x)]^2} = \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 5} \right]' = \\ &= \frac{(2x - 2)(x^2 + 2x + 5) - (x^2 - 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \\ &= \frac{4x^2 + 4x - 16}{(x^2 + 2x + 5)^2} = 4 \frac{x^2 + x - 4}{(x^2 + 2x + 5)^2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.3. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = a^2 \cdot (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2,$$

и вычислить $f'(5)$ при $a = 3, b = 10$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [a^2 \cdot (x-a) \cdot (x^2 + ax + a^2) + x^2 - 2bx + b^2]' = \\ &= a^2(x^3 - a^3)' + (x^2 - 2bx + b^2)' = 3a^2x^2 + 2(x-b). \end{aligned}$$

Далее получаем при $a = 3$, $b = 10$:

$$f'(5) = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot (5 - 10) = 675 - 10 = 665. \otimes$$

Пример 3. 2.4. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 \cos x}{\sin x}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и табличные производные для синуса и косинуса, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + 2 \cos x}{\sin x} \right] = \frac{(2x - 2 \sin x) \cdot \sin x - (x^2 + 2 \cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{2x \sin x - x^2 \cos x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x - 2}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{2x}{\sin x} - x^2 \frac{\operatorname{ctgx}}{\sin x} - \frac{2}{\sin^2 x}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.5. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Р е ш е н и е. Используя правило дифференцирования частного двух функций и формулу дифференцирования композиции функций

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

имеем:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)' \sqrt{x^2+1} - (\sqrt{x^2+1})'(2x-1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' (2x-1)}{x^2+1} = \\
&= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} 2x(2x-1)}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \\
&= \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+2}{(x^2+1)^{3/2}}. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 3. 2.6. Найти производную функцию для функции, действие которой определено формулой

$$f(x) = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}).$$

Решение. Используя правила рациональных операций с производными функций и табличную производную от логарифма, получаем:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) \right]' = \\
&= \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot (x+1+\sqrt{x^2+2x+3})' = \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot 2 \cdot (x+1)}{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}} = \\
&= \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+3}}{(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) \cdot (\sqrt{x^2+2x+3})} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 3. 2.7. Найти производную функцию для функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ и вычислить производные } f'(e), f'\left(\frac{1}{e}\right), f'(e^2).$$

Решение. Сначала находим производную функцию:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Вычисляем производные в указанных точках:

$$f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0; \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1 + 1}{\frac{1}{e^2}} = 2e^2;$$

$$f'(e^2) = \frac{1 - 2 \ln e}{(e^2)^2} = \frac{1 - 2}{e^4} = -e^{-4}. \otimes$$

Пример 3. 2.8. Найти производную функцию $f''(x)$ для функции f , если $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-1) \cdot 2x = -2x \cdot e^{-x^2}, \\ f''(x) &= (-2x \cdot e^{-x^2})' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2} = \\ &= 2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.9^{*}. Найти производную функцию $f'''(x)$ для функции f , если $f(x) = x^2 \cdot \sin x$.

Решение. Используя формулу для нахождения производной сложной функции, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \cdot \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x; \\ f''(x) &= 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x; \\ f'''(x) &= 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x. \otimes \end{aligned}$$

Рассмотрим случай мультипликативных функций, которые могут быть записаны в виде $(\forall x \in M)$

$$f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x),$$

где $M \subset R^1$ – общее множество определения для функций $g_k^{\alpha_k}(x)$, а числа α_k ($k = 1, 2, \dots, m$) – показатели степени. Предположим, что функция f удовлетворяет условию

$$(\forall x \in M) f(x) = g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x) > 0.$$

Найти производную функции $f(x)$, очевидно, затруднительно даже для малых ($k = 1, 2, \dots$). Поступим следующим образом.

Введём новую функцию:

$$u(x) = \ln f(x) = \ln[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x)].$$

Нетрудно видеть, что эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln f(x) = \ln[g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x)] = \\ &= \alpha_1 \ln g_1(x) + \alpha_2 \ln g_2(x) + \dots + \alpha_m \ln g_m(x). \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию

$$u(x) = \ln f(x)$$

с учётом последнего равенства, получаем:

$$u'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot u'(x);$$

$$u'(x) = \alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \dots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)}.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot u'(x) = \\ &= g_1^{\alpha_1}(x) g_2^{\alpha_2}(x) \dots g_m^{\alpha_m}(x) \left[\alpha_1 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} + \alpha_2 \frac{g_2'(x)}{g_2(x)} + \dots + \alpha_m \frac{g_m'(x)}{g_m(x)} \right]. \end{aligned}$$

Выражение

$$u' = (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется *логарифмической производной функции* $f(x)$.

Пример 3. 2.10. Найти производную функцию для функции

$$f(x) = \frac{x}{(x+1) \cdot (x+2)}.$$

Решение. Имеем:

$$u = \ln f = \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2).$$

Далее получаем:

$$u' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{-(x^2-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)}.$$

Используя формулу для логарифмической производной, имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot u'(x) = \\ &= \frac{x}{(x+1) \cdot (x+2)} \cdot \frac{-(x^2-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \frac{-(x^2-2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)^2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.11 ^{*)}. Найти производную функцию для функции

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

Решение. Логарифмируя, имеем:

$$u(x) = \ln f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1).$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{8x^2+7x-4}{2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)}, \\ f'(x) &= x^2 \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \cdot \frac{8x^2+7x-4}{2 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)} = \frac{x \cdot (8x^2+7x-4)}{2 \cdot (x+1) \cdot (2x-1)} \cdot \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}. \otimes \end{aligned}$$

Если функция, определённая формулой $y = f(x)$, задана неявно, то есть посредством уравнения $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной функции нужно продифференцировать это уравнение (то есть, обе его части) по x , помня, что $y = f(x)$, и разрешить уравнение относительно y' .

Пример 3. 2.12. Найти первую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y = \cos(x + y).$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения

$$y = \cos(x + y),$$

помня, что $y = f(x)$, получаем:

$$y' = (\cos(x + y))' = -\sin(x + y) \cdot (1 + y'),$$

откуда имеем $y' = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}.$ $\otimes$

Пример 3. 2.13. Найти вторую производную функцию для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, имеем

$$3y^2 y' - 3y' + 3 = 0 \Rightarrow y^2 y' - y' + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$2yy' y' + y^2 y'' - y'' = 0,$$

откуда имеем

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2}.$$

Заменяя y' полученным выше выражением, получаем окончательно:

$$y'' = \frac{2y(y')^2}{1 - y^2} = \frac{2y}{(1 - y^2)^3}. \otimes$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически, то есть

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Тогда

$$dy = \psi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

откуда имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)}.$$

Пример 3. 2.14. Найти первую и вторую производную функцию для функции y , заданной параметрически

$$\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = t^3 + 5. \end{cases}$$

Решение. Непосредственно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t^2}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3t^2}\right)}{3t^2} = -\frac{2}{3t^3}.$$

Так как из второго уравнения для x имеем $t = \sqrt[3]{x-5}$, отсюда получаем:

$$y_{xx}'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}}. \quad \otimes$$

Пример 3. 2.15^{*}). Найти первую производную функцию для функции y , заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 3\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{3\cos t}{3\sin t} = -\operatorname{ctgt}. \quad \otimes$

Пример 3. 2.16. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = \frac{3 \cdot \cos x}{2x + 1}.$$

Р е ш е н и е. Находим дифференциал функции y , используя определение:

$$dy = y'(x)dx = -3 \frac{2x \sin x + \sin x + 2 \cos x}{(2x + 1)^2} dx. \otimes$$

Пример 3. 2.17. Найти дифференциал функции, определённой формулой

$$y(x) = e^{x^3}.$$

Р е ш е н и е. Путём непосредственного дифференцирования получаем:

$$dy = y'(x)dx = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3} dx. \otimes$$

Пример 3. 2.18. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции, определённой формулой

$$y = f(x) = (2x^2 - 3)^5.$$

Р е ш е н и е. Для первого дифференциала имеем:

$$df(x) = 5 \cdot (2x^2 - 3)^4 \cdot 4x \cdot dx = 20x(2x^2 - 3)^4 dx.$$

Аналогично, для второго и третьего дифференциалов получаем:

$$\begin{aligned} d^2 df(x) &= [20x(2x^2 - 3)^4] (dx)^2 = 60 \cdot (2x^2 - 3)^3 (6 \cdot x^2 - 1) \cdot (dx)^2; \\ d^3 df(x) &= [12 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (6x^2 - 1) + 12 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^3] \cdot (dx)^3 = \\ &= 720x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (8x^2 - 4) \cdot (dx)^3 = \\ &= 2880 \cdot x \cdot (2x^2 - 3)^2 \cdot (2x^2 - 1) \cdot (dx)^3. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3. 2.19. Вычислить приближённо $\sin 32^\circ$.

Р е ш е н и е. Используя приближённую формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

получаем:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + df(x_0).$$

Определяя функцию f формулой $f(x) = \sin x$, видим, что нам нужно вычислить значение

$f(x)$ в точке $x = 32^0$ при $x_0 = 30^0$, или в радианах $x = \frac{\pi}{180} \cdot 32$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Учитывая, что

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos x, \text{ имеем:}$$

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0),$$

или

$$\begin{aligned} \sin 32^0 &\approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{32}{180} \cdot \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0,5 + \frac{1,73 \cdot 3,14}{90} \approx 0,5 + 0,03 = 0,53. \end{aligned}$$

Для сравнения табличное значение с точностью до четырёх знаков $\sin 32^0 = 0,5299$. $\otimes$

Пример 3. 2.20 ^{*)}. Вывести приближённую формулу

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Найти приближённо значения $\sqrt{101}$, $\sqrt{1,04}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию f , определив её формулой $f(x) = \sqrt{x}$. По приближённой формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = a^2$, $\Delta x = h$, получаем требуемую формулу:

$$\sqrt{a^2 + h} \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2}} \cdot h = a + \frac{h}{2a}.$$

Вычислим $\sqrt{101}$ и $\sqrt{1,04}$:

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} = \sqrt{10^2+1} \approx 10 + \frac{1}{20} = 10,05;$$

$$\sqrt{1,04} = \sqrt{1+0,04} \approx 1 + \frac{0,04}{2} = 1,02. \otimes$$

Пример 3. 2.21 ^{*}). Найти приближённо приращение

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

функции, определённой формулой $y = x^2$ при $x_0 = 2$, $\Delta x = x - x_0 = 0,01$.

Решение. Из приближённой формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

имеем

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{df}{dx}(x_0) \cdot (x - x_0) = df(x_0).$$

Подставляя в формулу $x_0 = 2$, $\Delta x = x - x_0 = 0,01$, получаем:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = (2 + 0,01)^2 - 2^2 \approx 2 \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04. \otimes$$

Практическое занятие 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Предварительные сведения

Говорят, что функция $f : M \rightarrow f(M)$ имеет в точке $x_0 \in M$ **локальный максимум** (**локальный минимум**), если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что

$$f(x_0) = \max_{U \cap M} f \quad \left(f(x_0) = \min_{U \cap M} f \right).$$

Теорема Ферма. Если функция f определена и дифференцируема на открытом множестве $J = (a, b)$ и имеет в точке $x_0 \in J$ локальный экстремум (всё равно, максимум или минимум), то $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Если функция f определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\bar{J} = [a, b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J = (a, b)$, причём $f(a) = f(b) = c$, то

$$(\exists x_0 \in J): \frac{df}{dx}(x_0) = 0.$$

Теорема Лагранжа. Если функция f определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $\bar{J} = [a, b]$ и дифференцируема на соответствующем открытом промежутке $J = (a, b)$, то

$$(\exists x_0 \in (a, b)): f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Коши. Если функции f и g непрерывны на замкнутом и ограниченном промежутке $\bar{J} = [a, b]$ и дифференцируемы на открытом промежутке $J = (a, b)$, причём

$$(\forall x \in J) \frac{dg}{dx}(x) \neq 0,$$

то $g(b) \neq g(a)$ и

$$(\exists x_0 \in J): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Теорема Тейлора. Если функция $f: J \rightarrow f(J)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном промежутке $[x_0, x] \subset J$ и $n+1$ раз дифференцируема на соответствующем открытом промежутке (x_0, x) , а её производные до порядка n включительно имеют предельные значения $f^{(k)}(x_0)$, $(k = 0, 1, 2, \dots, N)$, то существует точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что для функции f справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Примеры с решением

Пример 3.3.1. Выяснить, удовлетворяет ли функция, заданная формулой

$$f(x) = 3 - x^2$$

условиям теоремы Ферма на промежутке $(1, 4)$.

Решение. Данная функция на промежутке $(1, 4)$ монотонно убывает и, следовательно, достигает своего максимума в точке 1, а минимума в точке 4. Следовательно, в промежутке $(1, 4)$ не существует точки x_0 локального экстремума, в которой $f'(x_0) = 0$. Поэтому данная функция условиям теоремы Ферма на данном промежутке не удовлетворяет. $\otimes$

Пример 3.3.2. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x) = 3 + 2x - x^2,$$

на промежутке $[0, 4]$ условиям теоремы Ферма. Если функция условиям теоремы Ферма удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (0, 4)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Решение. На промежутке $(0, 4)$ функция дифференцируема, следовательно $(\exists x_0 \in (0, 4)) f'(x_0) = 0$. Находим эту точку:

$$f'(x) = 2 - 2x \Rightarrow 2 - 2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1. \otimes$$

Пример 3.3.3. Выяснить, удовлетворяет ли функция, определённая формулой

$$f(x) = x^2 + 6x - 35,$$

на промежутке $[-5, -1]$ условиям теоремы Ролля. Если функция условиям теоремы Ролля удовлетворяет, найти точку $x_0 \in (-5, -1)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Решение. Функция представляет собой многочлен, который непрерывен и дифференцируем на всей числовой оси. Кроме этого, имеем

$$f(-5) = f(-1) = -40.$$

Поэтому условия теоремы Ролля для данной функции выполнены, следовательно точка $x_0 \in (-5, -1)$, в которой $f'(x_0) = 0$, существует. Найдём её:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 + 6 = 0 \Rightarrow x_0 = -3. \otimes$$

Пример 3.3.4. На дуге кривой, определяемой уравнением

$$y = x^3 - 3x$$

найти точку, в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 18)$.

Решение. Функция определена на промежутке $[-1, 3]$, непрерывна на этом промежутке и дифференцируема на открытом промежутке $(-1, 3)$. Условия теоремы Лагранжа выполнены. Следовательно, по теореме Лагранжа найдётся такая точка $x_0 \in (-1, 3)$, что

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 4.$$

Так как $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$, то имеем $3x^2 - 3 = 4$. Из этого уравнения находим

$x_{01} = +\sqrt{\frac{7}{3}}$, $x_{02} = -\sqrt{\frac{7}{3}}$. Так как из этих двух точек $x_{01} \in [-1, 3]$ а $x_{02} \notin [-1, 3]$, то

$$x_0 = x_{01} = \sqrt{\frac{7}{3}}. \otimes$$

Пример 3.3.5. В какой точке касательная к кривой, определённой уравнением

$$y = f(x) = x^2 - 8x,$$

параллельна хорде, стягивающей точки $A(-1; 9)$, $B(5; -15)$.

Решение. На промежутке $[-1, 5]$ функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа.

Поэтому имеем:

$$\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{-24}{6} = -4 \Rightarrow f'(x_0) \equiv 2x_0 - 8 = -4 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Подставляя это значение x в формулу для функции, получаем

$$y = f(2) = -12.$$

Таким образом, искомой является точка $C(2; -12)$. $\otimes$

Пример 3.3.6. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2$$

на промежутке $[1, 2]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0 , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Решение. Обе функции непрерывны на промежутке $[1, 2]$ и дифференцируемы на промежутке $(a, b) = (1, 2)$, причём $(\forall x \in (a, b))g'(x) \neq 0$. Поэтому условия теоремы Коши выполнены. Так как

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x,$$

то из условия

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{7}{3}$$

находим

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3x_0^2}{2x_0} = \frac{3}{2}x_0 = \frac{7}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{14}{9}. \otimes$$

Пример 3.3.7. Проверить справедливость теоремы Коши для функций, заданных формулами

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

на промежутке $[1, 4]$. Если теорема Коши справедлива, найти точку x_0 , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Решение. Обе функции на данном промежутке непрерывны и дифференцируемы. Производные функций, соответственно равны

$$f'(x) = 2x - 2, \quad g'(x) = 3x^2 - 14x + 20.$$

Кроме этого, производная функции g в точках промежутка $(1, 4)$ не обращается в нуль, так как для дискриминанта уравнения $3x^2 - 14x + 20 = 0$ имеем $D = b^2 - 4ac = -44 < 0$ (график функции g не имеет точек пересечения с осью OX). Следовательно, теорема Коши для данных функций справедлива. Поэтому имеем:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{11-2}{27-9} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x_0-2}{3x_0^2-14x_0+20} = \frac{1}{2}.$$

Откуда получаем

$$x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0 \Rightarrow x_{01} = 4, \quad x_{02} = 2$$

Так как из этих двух точек промежутку $(1, 4)$ принадлежит только точка $x_{02} = 2$, то она и является искомой точкой. $\otimes$

Пример 3.3.8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Решение. Имеем неопределённость

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x^{-x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} ((e^x + x^{-x}) \cdot (1+x)) = 2. \otimes$$

Пример 3.3.9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3}$.

Решение. Имеем неопределённость

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{9x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{18x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \otimes$$

Пример 3.3.10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = [-\infty \cdot 0]$. Для раскрытия не-

определённости заменим переменную:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = \{x = -t\} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^3 \cdot e^{-t}) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \cdot e^x) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{e^t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{e^t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t}{e^t} = -6 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0. \otimes$$

Пример 3.3.11. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Для раскрытия неопределённости приводим выражения, стоящие в скобках, к общему знаменателю:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{x \cdot \ln x - \ln x} \right).$$

Получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Применяя правило Лопиталя два раза, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{x \cdot \ln x - \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.3.12. Разложить многочлен

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$$

по степеням $x - 1$ по формуле Тейлора.

Решение. В нашем случае формула Тейлора имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \\ &+ \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, \end{aligned}$$

где $x_0 = 1$. Находим значение многочлена и его производных в точке $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1, & P(1) &= 0; \\ P^{(1)}(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2, & P^{(1)}(1) &= 0; \\ P^{(2)}(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 6x - 2, & P^{(2)}(1) &= 0; \\ P^{(3)}(x) &= 60x^2 - 48x + 6, & P^{(3)}(1) &= 18; \\ P^{(4)}(x) &= 120x - 48, & P^{(4)}(1) &= 72; \\ P^{(5)}(x) &= 120, & P^{(5)}(1) &= 120. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$P(x) = 3 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^4 + (x-1)^5. \otimes$$

Пример 3.3.13. Разложить многочлен

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$$

по степеням $x + 1$ по формуле Тейлора.

Решение. Вычисляя значение многочлена и его производных в точке $x_0 = -1$, получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, & P(-1) &= -9; \\ P^{(1)}(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4, & P^{(1)}(-1) &= 22; \\ P^{(2)}(x) &= 12x^2 + 12x - 16, & P^{(2)}(-1) &= -16; \\ P^{(3)}(x) &= 24x + 12, & P^{(3)}(-1) &= -12; \\ P^{(4)}(x) &= 24, & P^{(4)}(-1) &= 24. \end{aligned}$$

Подставляя найденные производные в формулу Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} P(x) &= -9 + \frac{22}{1!} \cdot (x+1) + \frac{-16}{2!} \cdot (x+1)^2 + \frac{-12}{3!} \cdot (x+1)^3 + \\ &+ \frac{24}{4!} \cdot (x+1)^4 = -9 + 22 \cdot (x+1) - 8 \cdot (x+1)^2 - \\ &- 2 \cdot (x+1)^3 + (x+1)^4. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.3.14. Представить функцию $f(x) = e^x$ в виде разложения по формуле Маклорена.

Решение. Формула Маклорена имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f}{dx^k}(0) \frac{x^k}{k!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно выполнение равенств: $(\forall n \in N)$

$$f(0) = \frac{df}{dx}(0) = \frac{d^2 f}{d^2 x}(0) = \dots = \frac{d^n f}{d^n x}(0) = e^0 = 1.$$

Кроме этого, очевидно, что $\frac{d^{n+1} f}{d^{n+1} x}(x) = e^x$.

Тогда формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В этой формуле можно положить $\xi = \theta \cdot x$, где $0 < \theta < 1$. $\otimes$

Приведём вид формулы Тейлора с **остаточным членом в форме Пеано**:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \frac{x-x_0}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \\ & + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Здесь многочлен Тейлора

$$\begin{aligned} T_n(x_0, x) = & \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \frac{(x-x_0)^1}{1!} + \\ & + \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}, \end{aligned}$$

а остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$

При условии $\Delta x \rightarrow 0$ выполняется

$$R_n(x, n) = f(x) - T_n(x_0, x) = o((x-x_0)^n) = o((\Delta x)^n).$$

Теперь формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((\Delta x)^n).$$

Последняя форма записи называется **формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**.

Пример 3.3.15. Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Маклорена.

Решение. Рассмотрим производные функции $f(x) = \sin x$ в точке x :

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin x = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

.....;

$$\frac{d^k}{dx^k} \sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Кроме этого, имеем

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

Действительно, видим, что

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta x\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

Здесь мы положили $\xi = \theta x$, где $0 < \theta < 1$, $x \in (a, b)$.

Формула Маклорена принимает вид

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \alpha^{(2n+1)}(x) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x. \end{aligned}$$

В виде разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано это разложение записывается так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \otimes$$

Аналогично можно получить и разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

Пример 3.3.16. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. Записываем для $\sin x$ разложение по формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Подставляя это разложение, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3!} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}. \otimes$$

Пример 3.3.17. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x}$.

Решение. Используем разложение для e^x , $\sin x$ и $\cos x$. Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^3 \cdot (x + o(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^4 + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^5)}{x^4}} = \frac{1}{12}. \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 5. Исследование функций одного переменного

Предварительные сведения

Пусть функция $f: J \rightarrow f(J)$ дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и монотонно возрастает (монотонно убывает) на нём. Тогда на этом множестве её производная неотрицательна (неположительна), то есть

$$(\forall x \in (a, b)) \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Пусть функция $f: J \rightarrow f(J)$ дифференцируема на $J = (a, b)$ и существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$. Тогда если при переходе через точку x_0 в направлении

роста аргумента x производная f' функции f меняет знак с «плюса» на «минус» (с «минуса» на «плюс»), то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (локальный минимум). Если же знак производной f' при переходе через точку x_0 не меняется, то функция в точке x_0 экстремума не имеет.

График G_f функции $f : J \rightarrow f(J)$, дифференцируемой на $J = (a, b)$, называется **выпуклым в окрестности** $U(x_0)$ точки $x_0 \in J$, если точки $(x; f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика лежат ниже касательной к графику в точке x_0 . Если же все точки $(x; f(x))$, где $x \in U(x_0)$, графика G_f функции лежат выше касательной к нему в точке x_0 , то график называется **вогнутым в окрестности** $U(x_0)$ точки x_0 . •

Пусть функция $f : J \rightarrow f(J)$ определена и дифференцируема на множестве $J = (a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Тогда если при переходе через точку x_0 (в направлении роста аргумента x) график функции G_f меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), то точка $(x_0; f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции.

Пусть $f : J \rightarrow f(J)$, где $J = (a, b)$. Тогда, если вторая производная функция f'' для функции f во всех точках множества J положительна (отрицательна), то график функции G_f является вогнутым (выпуклым) на этом множестве.

Пусть дана функция $f : M \rightarrow f(M)$ и G_f – её график. Прямая линия, с уравнением $x = a$, где $a \in M$, называется **вертикальной асимптотой графика функции** f , если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

не существует.

Прямая линия с уравнением

$$y = kx + b$$

называется **наклонной асимптотой графика** G_f функции $f : M \rightarrow f(M)$ (правой при $x \rightarrow +\infty$ и левой при $x \rightarrow -\infty$), если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Справедливо представление

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$. Нетрудно видеть также, что справедливы формулы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Примеры с решением

Пример 3.4.1. Найти промежутки монотонности функции, определённой формулой

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2.$$

Решение. Множеством определения функции является вся числовая ось. Находим первую производную функции

$$f' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x+1)^2 - 12.$$

Поэтому имеем:

$$f' > 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 > 0;$$

$$f' < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+1)^2 - 12 < 0.$$

Корни уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

есть

$$x_1 = -3, x_2 = 1.$$

График функции – парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $x_0 = -1$, $y_0 = -12$. Следовательно, неравенство $f'(x) > 0$ выполняется при $x < -3$ и $x > 1$, а неравенство $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 1$.

На множестве $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ функция строго монотонно возрастает, а на множестве $(-3, 1)$ строго монотонно убывает. $\otimes$

Пример 3.4.2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объёма выпуска выражается формулой

$$\Phi = -0,01 \cdot x^3 + 300 \cdot x - 500.$$

Определить количество единиц продукции, начиная с которого финансовые накопления предприятия начинают убывать.

Решение. Производная от Φ равна:

$$\Phi' = -0,03 \cdot x^2 + 300.$$

Финансовые накопления убывают, если

$$\Phi' = -0,03 \cdot x^2 + 300 < 0,$$

откуда имеем $x^2 - 10000 > 0$. Из последнего неравенства получаем: $x_1 > 100$, $x_2 < -100$. Имеет экономический смысл только неравенство $x_1 > 100$. Следовательно, при $x > 100$ финансовые накопления предприятия начинают убывать, то есть повышать выпуск продукции свыше 100 единиц становится экономически не выгодно. $\otimes$

Пример 3.4.3. Исследовать на наличие локальных экстремумов функцию, заданную формулой $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

Р е ш е н и е. 1) Производная функция для функции f есть

$$f'(x) = 3x^2 - 5.$$

2) Находим критические точки функции, решая уравнение

$$3x^2 - 5 = 0.$$

Корни уравнения (критические точки) есть $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3) Выясняем вопрос о наличии локальных экстремумов функции согласно теореме, для чего определяем знаки производной $f'(x)$ справа и слева от каждой критической точки, результаты заносим в таблицу:

x	$x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}} < x < \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x > \sqrt{\frac{5}{3}}$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		Максимум $f(x_1) = 6,3$		Минимум $f(x_2) = -2,3$	

4. Вычисляем значения функции в точках x_1 , x_2 и результаты вычислений тоже заносим в таблицу.

Получаем следующий результат: функция имеет в точке

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

локальный максимум $f(x_1) = 6,3$, а в точке

$$x_2 = +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

– локальный минимум $f(x_2) = -2,3$. $\otimes$

Пример 3.4.4. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3.$$

Решение. Множеством определения функции является вся числовая ось R .

1) Находим производную функции:

$$f'(x) = x^2 + 5x + 4.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

В результате решения имеем корни: $x_1 = -1$, $x_2 = -4$. Критические точки разбивают R^1 на промежутки

$$-\infty < x < -4, -4 < x < -1, -1 < x < \infty.$$

3) Исследуем поведение первой производной функции в полученных промежутках:

в промежутке $(-\infty, -4)$ имеем $y' > 0$;

в промежутке $(-4, -1)$ имеем $y' < 0$;

в промежутке $(-1, \infty)$ имеем $y' > 0$.

Следовательно, в точке -4 имеем **максимум**; в точке -1 имеем **минимум**.

4) Вычисляем экстремальные значения функции:

$$\max f(x) = f(-4) \approx 5,67; \min f(x) = f(-1) = 1,17. \otimes$$

Пример 3.4.5. Найти экстремумы функции, определённой формулой

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 10.$$

Решение. 1) Находим производную функции:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2.$$

2) Находим критические точки функции, для чего решаем уравнение

$$15x^4 - 15x^2 = 0, x^4 - x^2 = 0, x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Имеем три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

3) Находим вторую производную функцию:

$$f''(x) = 60 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

4) Находим вторую производную в критических точках:

$$f''(0) = 0; f''(1) = 30; f''(-1) = -30.$$

В точке $x_2 = 1$ функция имеет **минимум**, а в точке $x_3 = -1$ - **максимум**. В точке $x_1 = 0$ функция экстремума не имеет, так как первая производная при переходе через эту точку не меняет своего знака. $\otimes$

Промежутки выпуклости и вогнутости и асимптоты графика функции

Пример 3.4.6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = (x^2 + 7x) \cdot \sqrt[3]{x} - 5x - 8.$$

Р е ш е н и е. Множество определения функции $M = R$. Преобразованная формула

$$f(x) = x^{\frac{7}{3}} + 7 \cdot x^{\frac{4}{3}} - 5x - 8.$$

1) Находим нули и точки разрыва второй производной функции, для чего находим $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - 5;$$

$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Очевидно, что точка $x = -1$ является нулём второй производной $f''(x)$, а точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода второй производной $f''(x)$. Эти точки делят множество определения функции $f(x)$ на промежутки

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty).$$

2) Определяем знак второй производной в полученных промежутках:

$$(\forall x \in (-\infty, -1)) f''(x) < 0;$$

$$(\forall x \in (-1, 0)) f''(x) > 0;$$

$$(\forall x \in (0, +\infty)) f''(x) > 0.$$

Следовательно: на $(-\infty, -1)$ график функции *выпуклый*; на $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ график функции *вогнутый*.

3) Так как функция в точке $x_0 = -1$ определена, а $f''(-1) = 0$, то в точке $x_0 = -1$ график функции испытывает перегиб, а точка

$$(x_0; f(x_0)) = (-1; 3)$$

является точкой перегиба графика функции. $\otimes$

Пример 3.4.7. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 7x}{x - 3}.$$

Решение. 1) Точка $x = 3$ является точкой разрыва второго рода, следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 3$.

2) По определению асимптоты, функция может быть представлена в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при неограниченном удалении точки графика от начала системы координат более высокого порядка, чем x , то есть

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Чтобы записать функцию в указанном виде, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$\frac{-x^2 + 7x}{x - 3} = -x + 4 + \frac{12}{x - 3}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{x - 3} = 0,$$

график функции имеет наклонную асимптоту с уравнением $y = -x + 4$. $\otimes$

Пример 3.4.8. Найти асимптоты графика функции, заданной формулой:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x.$$

Решение. 1) Так как функция определена на всей числовой оси, вертикальных асимптот нет.

2) Из представления функции в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x)$$

Следует, что для нахождения наклонных асимптот нужно найти правый и левый пределы, которые равны соответственно

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx],$$

$$k_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx].$$

Правый предел:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - 2 \right) = -1;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Правая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -x.$$

Левый предел:

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - 2x}{x} = \{x = -z\} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+z^2} + 2z}{-z} = \\ &= -\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} + 2 \right) = -3; \end{aligned}$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0.$$

Левая наклонная асимптота графика функции имеет уравнение

$$y = -3x. \otimes$$

Пример 3.4.9. Исследовать функцию, заданную формулой $y(x) = x \cdot e^{-x}$.

Решение. 1) Множеством определения функции служит всё множество действительных чисел R .

2) Нуль функции – точка $x = 0$, причём $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$. Следовательно, функция в точке

$x = 0$ асимптот не имеет.

3) Находим критические точки функции:

$$y'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x) \Rightarrow x = 1.$$

4) Имеем два промежутка $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$. На этих промежутках

$$(\forall x \in (-\infty, 1)) \quad y'(x) > 0,$$

$$(\forall x \in (1, \infty)) \quad y'(x) < 0,$$

соответственно. Следовательно, при $x \in (-\infty, 1)$ функция строго монотонно возрастает, а при $x \in (1, \infty)$ функция строго убывает.

5) Вторая производная функции равна

$$y''(x) = -e^{-x} \cdot (1 - x) - e^{-x} = e^{-x} \cdot (x - 2).$$

Так как в точке $x = 1$ вторая производная равна

$$y''(1) = \frac{1-2}{e} = -\frac{1}{e} < 0,$$

то функция в этой точке имеет локальный максимум, равный $\frac{1}{e}$.

6) Вторая производная функции в точке $x = 2$ обращается в нуль, а при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график функции при $x = 2$ имеет перегиб,

причём при $x < 2$ график функции выпуклый, а при $x > 2$ – вогнутый. Значение функции в точке перегиба равно

$$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}. \otimes$$

Практическое занятие 6. Интегрируемость функции одного переменного

Предварительные сведения

Определённым интегралом от определённой на промежутке $[a, b]$ функции f называется предел последовательности интегральных сумм Римана

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

если он существует. Можно показать, что этот предел существует для непрерывной на $[a, b]$ функции.

Свойства определённого интеграла:

- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- 2) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
- 3) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$;
- 4) $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$;
- 5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ при $a < c < b$;
- 6) $\int_a^b f(x) dx > 0$, если $(\forall x \in [a, b]) f(x) > 0$.

Пусть f и F – две функции, определённые на открытом промежутке $M = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Функция F называется **первообразной (примитивной) функцией** для функции f на промежутке M , если она дифференцируема на этом промежутке и выполняется следующее условие:

$$(\forall x \in (a, b)) \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

Неопределённым интегралом от функции f на промежутке (a, b) действительной числовой оси называется бесконечное множество $H(x)$ всех её первообразных. Неопределённый интеграл обозначается так:

$$H(x) = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Если F – первообразная функция для функции f на промежутке $\bar{J} = [a, b]$, то определённый интеграл от функции f по заданному промежутку равен разности значений первообразной на концах промежутка (формула Ньютона-Лейбница):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Примеры с решением

Пример 3.5.1. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt[3]{x^2} dx.$$

Решение. Непосредственно имеем:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C. \otimes$$

Пример 3.5.2. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int (6x^2 - 3\sqrt{x} + 5) dx.$$

Решение. Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных, получаем:

$$\begin{aligned} \int (6x^2 - 3\sqrt{x} + 5) dx &= 6 \int x^2 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 5 \int dx = \\ &= 2x^3 - 2x^{\frac{3}{2}} + 5x + C = 2x^3 - 2\sqrt{x^3} + 5x + C, \end{aligned}$$

где все постоянные интегрирования объединены в одну постоянную C . $\otimes$

Пример 3.5.3. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \left(5x^2 + 11 - 3\sin x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Решение. Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, имеем:

$$\begin{aligned} \int \left(5x^2 + 11 - 3\sin x + \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx &= \\ &= 5 \int x^2 dx + 11 \int dx - 3 \int \sin x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{3}x^3 + 11x + 3\cos x + 2\ln|x| + \operatorname{ctgx} + C. \otimes$$

По определению логарифмической производной имеем:

$$y(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df}{dx}(x) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Тогда по определению неопределённого интеграла имеем:

$$\int (\ln f(x))' dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + C.$$

Этот метод нахождения неопределённого интеграла называется *методом подведения под дифференциал*.

Пример 3.5.4. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+1}.$$

Решение. Замечая, что $dx = d(x+1)$ и, используя табличную первообразную для

функции $\frac{1}{x}$, в соответствии с формулой подведения под дифференциал получаем:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C. \otimes$$

Пример 3.5.5. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}.$$

Решение. Замечая, что $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, имеем:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \otimes$$

Пример 3.5.6. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Решение. Так как $x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2)$, получаем:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \otimes$$

Пример 3.5.7. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{x+5} dx.$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{3x+2}{x+5} \equiv \frac{3x+15-13}{x+5} = \frac{3(x+5)}{x+5} - \frac{13}{x+5} = 3 - \frac{13}{x+5}.$$

Используя свойства неопределённого интеграла и табличные первообразные, получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x+5} dx &= \int \left(3 - \frac{13}{x+5} \right) dx = 3 \int dx - 13 \int \frac{1}{x+5} dx = \\ &= 3x - 13 \ln|x+5| + C. \otimes \end{aligned}$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена на промежутке $\bar{J} \in [\alpha, \beta]$, имеет непрерывную производную на (α, β) и принимает значения в промежутке $\bar{M} \in [a, b]$, а функция $f: \bar{M} \rightarrow f(\bar{M})$ – непрерывная функция, определённая при всех $x \in \bar{M}$. Тогда в неопределённом интеграле

$$I = \int f(x) dx + C$$

можно заменить переменную x функцией $\varphi(t)$ от переменной t , причём dx заменяется на $\frac{d\varphi}{dt}(t)dt$, то есть, справедлива формула **замены переменной**

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt + C.$$

Если функции u и v имеют непрерывные производные $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$, то

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

(формула интегрирования по частям).

Пример 3.5.8. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \sqrt{x+3} dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную по формуле $t = x + 3 \Rightarrow dx = dt$, получаем:

$$\int \sqrt{x+3} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.9. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx.$$

Р е ш е н и е. Заменяя переменную

$$t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2 + 1} dt,$$

получаем:

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^3} + C = -\frac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3} + C. \otimes$$

Пример 3.5.10. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \cos x dx.$$

Р е ш е н и е. Замечая, что $\cos x dx = d(\sin x)$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx \equiv d(\sin x), \quad v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C = x \cdot \sin x + \cos x + C. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.11. Найти неопределённый интеграл

$$I = \int x \cdot \ln x dx.$$

Р е ш е н и е. Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.12. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x^2 dx$$

по формуле Ньютона-Лейбница, дать геометрическую интерпретацию.

Решение. Проводя непосредственное интегрирование и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Полученное число $\frac{1}{3}$ имеет смысл площади криволинейного треугольника с вершинами в точках

$$O(0, 0), A(1, 1), B(1, 0). \otimes$$

Пример 3.5.13. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Решение. Используя таблицу первообразных и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \otimes$$

Пример 3.5.14. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^2 2^{3x-4} dx.$$

Решение. Используем методом “подведения под дифференциал”:

$$\begin{aligned} \int_1^2 2^{3x-4} dx &= \left\{ dx = \frac{1}{3} d(3x-4) \right\} = \frac{1}{3} \int_1^2 2^{3x-4} d(3x-4) = \\ &= \left\{ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x-4}}{\ln 2} \Big|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.15. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx.$$

Р е ш е н и е. Для решения воспользуемся методом замены переменной. Введём новую переменную $t = 2 - x^2$. Дифференциал новой переменной равен

$$dt = d(2 - x^2) = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{1}{2} dt.$$

Пределы изменения новой переменной определяются так:

$$x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Учитывая эти формулы, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx &= \left\{ \begin{array}{l} dt = d(2 - x^2) = -2x dx; x dx = -\frac{1}{2} dt; \\ x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_2^1 t^5 dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot t^6 \Big|_1^2 = \frac{1}{12} \cdot (64 - 1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 3.5.16. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Р е ш е н и е. Используя замену переменной интегрирования $t = \ln x$, имеем:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x, \\ dt = \frac{dx}{x}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = 0, \\ x = e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \otimes$$

Пример 3.5.17. Вычислить определённый интеграл

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

Р е ш е н и е. Данный интеграл вычисляется методом «интегрирования по частям»:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}. \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} d(-x) = -x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 - e^{-x} \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2 \cdot e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} = e - \frac{2}{e}. \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Выяснить тип монотонности последовательностей:

$$1) \left(\frac{n}{2n+1} \right); 2) \left(\frac{n}{5^n} \right); 3) \left(\frac{n}{4n-3} \right); 4) \left(\frac{n}{n+1} \right); 5) \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

2. Используя определение, показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, если:

$$1) x_n = \frac{3n+1}{5n+2}, x_0 = \frac{3}{5}; 2) x_n = \frac{2n-2}{3n-1}, x_0 = \frac{2}{3};$$

$$3) x_n = \frac{4n-2}{2n+3}, x_0 = 2; 4) x_n = \frac{4n^2+1}{n^2+2}, x_0 = 4;$$

$$5) x_n = \frac{3-n^3}{1+n^3}, x_0 = -1; 6) x_n = \frac{6n-2}{2n+1}, x_0 = 3;$$

$$7) x_n = \frac{3+8n^2}{1+4n^2}, x_0 = 2; 8) x_n = \frac{5n+2}{3n+1}, x_0 = \frac{5}{3}.$$

3. Вычислить предел последовательности:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n}; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+5};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-n)^2 + (5+n)^2}{(5-n)^2 - (5+n)^2}; 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n)^2 - (2+n)^2}{(2+n)^2 - (1-n)^2}; 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3}{(n+2)^2 - (n+1)^3};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n+5)^3}{(3-n)^3}; 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{n}{2^n}}{n^2 - 1};$$

- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 1} - \frac{3n^2}{3n - 1} \right)$; 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a^2 n^2 + bn} - an \right)$;
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}$; 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{2n^2 + 3}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 2}}$;
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3 + 2}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$; 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{8n^3 + 3}}{\sqrt[4]{n+5} + n}$;
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^{n+1}}{2^n + 5^n}$; 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} \sin x)$;
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^n$; 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2}$;
- 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 3}{n^2 + n - 1} \right)^{-n^2}$; 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + n + 1} \right)^{3n^2}$;
- 21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$; 22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n} \right)^n$.

23. Найти множество определения M и множество значений $f(M)$ функции $f(x) = \lg x$.

24. Найти множество определения M следующих функций:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; 2) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}$; 3) $f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$;
- 4) $f(x) = \lg(x - 2) - \sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$; 5) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$.

25. Выяснить, какие из данных функций являются чётными, а какие нечётными:

- 1) $f(x) = 1 - x$; 2) $f(x) = x^3 + x$; 3) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$;
- 4) $f(x) = x^5 - x^3 + x$; 5) $f(x) = x^2 + x - 1$.

26. Выяснить, является ли данная функция периодической и если функция является периодической, то найти её период:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = \sin(5x + 3)$; 3) $f(x) = \cos x^2$;

4) $f(x) = 2[x] + 1$, где $[x]$ – целая часть x .

27. Используя определение непрерывности функции по Гейне, доказать, что функция $f(x) = x^2 + 3x + 3$ непрерывна в любой точке действительной числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

28. Используя определение непрерывности по Коши показать, что следующие функции непрерывны в заданных точках x_0 :

1) $f(x) = 3x - 5$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = 4x^2 - 1$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = -3x^2 + 8$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = 4x^2 + 1$, $x_0 = 8$;

5) $f(x) = \sin x - \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

29. Решить неравенство $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} < 0$.

30. Найти предел данной функции при $x \rightarrow x_0$:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 - x - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x - 2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$;

5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos 2x}$;

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 3x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 5x - \cos 3x}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x3^x}{1 + x2^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

31. Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, найти следующие пределы:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{x-5}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x} \right); \\
& 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2}; 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 4}; \\
& 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^5 + x + 1}; 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}; \\
& 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right); 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}; 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}.
\end{aligned}$$

32. Используя таблицу производных, найти первую производную функцию для заданной функции и, если требуется, её значение в заданных точках:

$$\begin{aligned}
& 1) f(x) = \ln \frac{5-4x^2}{3+7x^2}, x_0 = 3; 2) f(x) = \ln \frac{(1+x^2) \cdot (1-2x)^3}{(x^2-5)^2}; \\
& 3) f(x) = x \cdot \ln x, x=1, x=1x=e, x=\frac{1}{e}, x=\frac{1}{e^2}; \\
& 4) f(x) = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5 \ln x - 7 \cos x + \operatorname{tg}(3x^2 + 2) + \operatorname{ctg} 6x; \\
& 5) f(x) = \ln^2(1 - \cos x); 6) f(x) = \frac{3^x (\sin x + \cos x \cdot \ln 3)}{1 + \ln^2 3}; \\
& 7) f(x) = \ln \sin 3 - \frac{\cos^2 x}{\sin x}; 8) f(x) = \ln(1 + \sqrt{thx}).
\end{aligned}$$

33. Найти первую производную и дифференциал функции

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} + (1+x^2) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

34. Найти $f'(0)$ и $df(0)$, если $f(x) = \frac{1-10^x}{1+10^x}$.

35. Найти $f'(x)$ и $df(x)$, если $f(x) = \ln(5e^x + 7)$.

36. Пусть функции f и g , определённые на одном и том же множестве $M \subset R$, n -раз дифференцируемы на этом множестве. Показать, что сумма и произведение этих функций также n -раз дифференцируемы на M .

37. Найти производные указанных порядков для данных функций:

1) $f(x) = \ln(2x - 3)$, $f''(x) = ?$;

2) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$, $f'''(x) = ?$;

3) $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$, $f'''(x) = ?$;

4) $f(x) = \ln(3x+1)$, $f'''(x) = ?$;

5) $f(x) = 3^{2x+1}$, $f'''(x) = ?$;

6) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$, $f^{(3)} = ?$.

38. Найти производные и дифференциалы указанных порядков:

1) $f(x) = \cos^2 x$, $f''(x) = ?$, $d^2 f(x) = ?$;

2) $f(x) = e^x \cos x$, $f^{(3)}(x) = ?$, $d^{(3)} f(x) = ?$.

39. Проверить справедливость теоремы Ферма для функции $f(x) = 3x^2 - 1$ на промежутке $[1, 2]$.

40. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = x$ на промежутке $[0, 1]$.

41. Проверить справедливость первой теоремы о среднем для функции $f(x) = 2x - x^2$ на про-

межутке $[1, 3]$. Найти точку ξ , удовлетворяющую условию $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

42. Раскрыть неопределённости по правилам Лопиталя:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{3x^3 - x^2 - x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty]$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$;

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3} = \left[\frac{0}{0} \right]; 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

43. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства неопределённого интеграла и таблицу первообразных:

$$\begin{aligned} &1) \int (x^6 - 6x^5 + 40x^3 - 24x^2) dx; 2) \int \sqrt[3]{x^2} (8\sqrt[3]{x} - 1) dx; \\ &3) \int \frac{(4 - 3\sqrt{x})^2}{x^2} dx; 4) \int \frac{x+2}{x+3} dx; 5) \int \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) dx; \\ &6) \int (2x^2 + 1)^3 dx; 7) \int (1 + \sqrt{x})^4 dx; 8) \int \frac{(x+1) \cdot (x^2 - 3)}{3x^2} dx; \\ &9) \int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx; 10) \int (5^x - 1)(5^{-x} + 1) dx; \\ &11) \int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx; 12) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx; 13) \int \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 4x} dx; \\ &14) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; 15) \int \frac{dx}{2 + 3x^2} dx. \end{aligned}$$

44. Найти неопределённые интегралы методом подведения под дифференциал:

$$\begin{aligned} &1) \int \frac{dx}{ax+b}, \text{ где } a, b - \text{ постоянные}; \\ &2) I = \int \frac{x dx}{1+x^2}; \\ &3) \int \sqrt{x+3} dx \text{ (Указание: использовать подстановку } t = x+3); \\ &4) I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \text{ (Указание: использовать подстановку } t = e^x); \\ &5) \int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^4} dx; 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \end{aligned}$$

$$7) \int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x} dx; 8) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$9) \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^3} dx; 10) \int \frac{\sin 2x - \cos x}{(\cos^2 x + \sin x)^2} dx.$$

45. Найти неопределённые интегралы методом подстановки:

$$1) \int x \cdot e^{x^2} dx \text{ (Указание: использовать подстановку } t = x^2);$$

$$2) \int \frac{\ln^3 x}{x} dx; 3) \int (12x-5)^7 dx; 4) \int e^{4-3x} dx;$$

$$5) \int 6^{5x+2} dx; 6) \int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx; 7) \int \frac{e^x dx}{2e^x+7}; 8) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$9) \int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x} dx; 10) \int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}} dx; 11) \int \sin x \cos^2 x dx;$$

$$12) \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx; 13) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx;$$

$$14) \int \frac{\sqrt{5 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; 15) \int e^{4 \cos x - 1} \sin x dx.$$

46. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям:

$$1) \int x^2 \cdot \cos x dx; 2) \int x^2 \cdot \sin x dx; 3) \int x \cdot e^x dx;$$

$$4) \int (x^2 + 2x + 3) \cdot \cos x dx; 5) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx; 6) \int e^{2x} \cos x dx;$$

$$7) \int x^2 e^x dx; 8) \int x \ln x dx.$$

47. Найти определённый интеграл:

$$1) \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx; 2) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; 3) \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} dx; 5) \int_1^e \frac{1 + \ln^3 x}{x} dx; 6) \int_{-2}^5 \sqrt[3]{5x+2} dx;$$

$$\begin{aligned}
& 7) \int_{0,5}^{0,5} \frac{3^x}{1+9^x} dx; 8) \int_0^{0,5} e^{\sin \pi x} \cos \pi x dx; 9) \int_0^1 x e^{-x} dx; \\
& 10) \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx; 11) \int_0^\pi (\pi - x) \sin x dx; 12) \int_{-1}^0 (2x + 3) e^{-x} dx; \\
& 13) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}; 14) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + \cos x} dx; 15) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx; 16) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.
\end{aligned}$$

ЧАСТЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЯДЫ

Практическое занятие 1. Дифференцируемость функций

нескольких переменных

Предварительные сведения

Функция $f: R^n \rightarrow R^1$ называется дифференцируемой в области $\Omega \subset R^n$, если выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned}
& \left(\forall \vec{x}_0 \in \Omega \right) \left(\exists U \left(\vec{x}_0 \right) \subset \Omega \right) : \left(\forall \vec{x} \in U \left(\vec{x}_0 \right) \right) \\
& f \left(\vec{x} \right) = f \left(\vec{x}_0 \right) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} \left(\vec{x}_0 \right) \cdot \Delta x^k + o \left(\left\| \Delta \vec{x} \right\| \right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta \vec{x} = \sum_{k=1}^m \left(x^k - x_0^k \right) \vec{e}_k \equiv \sum_{k=1}^m \Delta x^k \vec{e}_k,$$

$$\lim_{\left\| \Delta \vec{x} \right\| \rightarrow 0} \frac{o \left(\left\| \Delta \vec{x} \right\| \right)}{\left\| \Delta \vec{x} \right\|} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x}_0 \right) \equiv \lim_{\Delta x^k \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k + \Delta x^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_0^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^m)}{\Delta x^k}.$$

частная производная по переменной x^k первого порядка.

Частные производные функции нескольких переменных высших порядков находятся посредством рекуррентной формулы:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \left(\vec{x} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left(\vec{x} \right).$$

Вторая формула даёт выражение для смешанной частной производной второго порядка.

Справедлива следующая теорема.

Пусть $f: M \rightarrow f(M)$ ($M \subset R^n$ и $f(M) \subset R^1$) – некоторая дифференцируемая в окрестности $U(\vec{x}_0) \subset M$ точки $\vec{x}_0 \in M$ функция. Тогда, если в окрестности $U(\vec{x}_0)$ существуют (смешанные) частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left(\vec{x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} \left(\vec{x} \right),$$

непрерывные в точке $\vec{x}_0$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_k} \left(\vec{x}_0 \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p} \left(\vec{x}_0 \right).$$

Теорема обобщается и на смешанные производные любого порядка, вычисленные одинаковое число раз по одним и тем же переменным, даже в разном порядке.

Высшие дифференциалы определяются аналогично высшим производным посредством рекуррентной формулы следующего вида

$$d^n f \left(\vec{x} \right) \stackrel{\text{def}}{=} d \left(d^{n-1} f \left(\vec{x} \right) \right).$$

Так, например, второй дифференциал функции $f: M \rightarrow f(M)$ в точке $\vec{x} \in M \subset R^n$ вычисляется по формуле:

$$d^2 f \left(\vec{x} \right) = d \left(df \left(\vec{x} \right) \right) = d \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x} \right) dx_k \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x} \right) dx_k \right) dx_j.$$

Примеры с решением

Пример 4.1.1. Используя определение, найти первые частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$z(x, y) = x^2 y + 4x - 2y + 5,$$

в точке $M_0(5; 1)$.

Решение. Для частной производной по переменной x имеем по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Фиксируя значение $y = y_0$, находим сужение функции $z(x, y)$ на прямую линию $y = y_0$, параллельную оси Ox . На этой прямой сужение

$$z(x, y_0) = y_0 x^2 + 4x - 2y_0 + 5$$

функции $z(x, y)$ является функцией одной переменной x . Используем схему нахождения производной функции одного переменного для сужения $z(x, y_0)$.

1) Придавая переменной x приращение Δx в точке $(x_0; y_0)$, получим:

$$\begin{aligned} z(x_0 + \Delta x, y_0) &= x_0^2 y_0 + 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + \\ &+ 4x_0 + 4 \cdot \Delta x - 2y_0 + 5. \end{aligned}$$

2) Находим приращение функции $z(x, y_0)$ в точке $(x_0; y_0)$, придавая переменной x приращение Δx :

$$z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = 2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4 \cdot \Delta x.$$

3) Находим предел конечно-разностного отношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0 y_0 \cdot \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 y_0 + 4. \end{aligned}$$

4) Подставляя координаты точки $(x_0; y_0) = (5; 1)$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(5, 1) = (2x_0 y_0 + 4) \Big|_{\substack{x_0=5 \\ y_0=1}} = 14.$$

Аналогично находим частную производную в точке $(x_0; y_0) = (5; 1)$ по второй переменной y :

$$\frac{\partial z}{\partial y}(5, 1) = (x_0^2 - 2) \Big|_{\substack{x_0=5 \\ y_0=1}} = 23. \quad \otimes$$

Пример 4.1.2. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y - y^3.$$

Решение. Фиксируя переменные и используя формулу вычисления производной степенной функции, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 3y^2. \quad \otimes$$

Пример 4.1.3. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = \frac{xy}{x + y}.$$

Решение. Фиксируя переменные и используя формулы вычисления производной частного и произведения двух функций, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x + y} \right) = \frac{y^2}{(x + y)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x + y} \right) = \frac{x^2}{(x + y)^2}. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 4.1.4. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1 - x)^{y^2}.$$

Решение. Для вычисления частной производной по переменной x фиксируем переменную y и используем формулу для производной степенной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -y^2(1-x)^{y^2-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем формулу $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot (1-x)^{y^2} \cdot \ln(1-x). \quad \otimes$$

Пример 4.1.5. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y.$$

Решение. Используя таблицу производных, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2 + 2 \ln y + yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y + \frac{2x}{y} + x^y \ln x. \quad \otimes$$

Пример 4.1.6. Используя таблицу и правила рациональных операций с производными, найти частные производные функции двух переменных, заданной формулой

$$u(x, y) = (1 + xy)^y.$$

Решение. Фиксируя переменную y и используя формулу дифференцирования степенной функции, для частной производной по переменной x получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y(1 + xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1 + xy)^{y-1}.$$

Для вычисления частной производной по переменной y фиксируем переменную x и используем понятие логарифмической производной:

$$z = \ln u(x, y) = y \ln(1 + xy) \rightarrow z'_y = \ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \rightarrow$$

$$z' = \frac{u'}{u} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (1 + xy)^y \cdot \ln(1 + xy) + (1 + xy)^y \frac{xy}{1 + xy} =$$

$$= (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{x \cdot y}{(1+xy)} \right]. \otimes$$

Пример 4.1.7. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных, заданной формулой

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

в точке $M_0(1; -1; -2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных используем таблицу производных и правила дифференцирования функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \frac{2x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \frac{2x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x_3}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(1; -1; -2) = -\frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(1; -1; -2) = \frac{1}{\sqrt{216}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(1; -1; -2) = -\frac{2}{\sqrt{216}}. \otimes$$

Пример 4.1.8. Найти частные производные первого порядка функции трёх переменных

$$u(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \equiv e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

в точке $M(0; 1; 2)$.

Р е ш е н и е. Для нахождения частных производных, используя таблицу производных и правила дифференцирования функций, дифференцируем сужения функции на отрезки прямых, параллельных осям системы координат:

$$1) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M) = 0;$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(M) = 2e^5;$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) =$$

$$= 2x_3 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(M) = 4e^5. \otimes$$

Пример 4.1.9. Показать, что функция, заданная формулой

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные функции в произвольной точке (x, y) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Подставляя в правую часть уравнения, получаем

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0. \otimes$$

Пример 4.1.10. Показать, что функция

$$u(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1^2 - x_2^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2^2}.$$

Решение. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(x_1^2 - x_2^2) = x_2 \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 - x_2^2) = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \ln(x_1^2 - x_2^2) =$$

$$= \ln(x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 - x_2^2) = \ln(x_1^2 - x_2^2) - \frac{2x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}.$$

Полученные выражения подставим в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{1}{x_2} \left[\ln(x_1^2 - x_2^2) - \frac{2x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \right] = \\ & = \frac{2x_2}{x_1^2 - x_2^2} - \frac{2x_2}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{\ln(x_1^2 - x_2^2)}{x_2} = \frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к тождеству:

$$\frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2} = \frac{u(x_1, x_2)}{x_2^2}.$$

То есть функция $u(x_1, x_2) = x_2 \ln(x_1^2 - x_2^2)$ удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{u}{x_2^2}. \otimes$$

Пример 4.1.11. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных, заданной формулой:

$$u(x, y) = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy + 5.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 10xy^2 + 6y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 10x^2y + 6x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 10y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 10x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 20xy + 6. \otimes$$

Пример 4.1.12. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x, y) = e^x \ln y.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \ln y; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \ln y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{e^x}{y}. \otimes$$

Пример 4.1.13. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных $u(x, y) = \sin(x + y)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x + y); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x + y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin(x + y). \otimes$$

Пример 4.1.14. Найти частные производные до второго порядка включительно функции двух переменных

$$u(x_1, x_2) = x_1^{x_2}.$$

Решение. 1) Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_1^{x_2-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$$

2) Находим частные производные второго порядка, дифференцируя частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = x_2(x_2 - 1)x_1^{x_2-2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = x_1^{x_2-1} + x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_2 x_1^{x_2-1} \ln x_1 + x_1^{x_2} \frac{1}{x_1} = x_1^{x_2-1}(1 + x_2 \ln x_1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1^{x_2} (\ln x_1)^2. \otimes$$

Пример 4.1.15. Вычислить полный дифференциал функции двух переменных, заданной формулой

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

в точке $M_0(1; -1)$.

Решение. Находим частные производные функции:

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = -\frac{1}{\frac{3}{2^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = \frac{1}{\frac{3}{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$3) dz(1, -1) = -\frac{\sqrt{2}}{4} dx + \frac{\sqrt{2}}{4} dy. \otimes$$

Пример 4.1.16. Вычислить приближённо $(0,98)^{2,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $Z = X^Y$. В точке $(1; 2)$ значение функции $z(1; 2) = 1$. Вычислим значение функции в точке $(0,98; 2,01)$. Имеем $\Delta x = -0,02$, $\Delta y = 0,01$. Находим частные производные функции $Z = X^Y$ в точке $(1; 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 0.$$

Получаем:

$$(0,98)^{2,01} = z(1; 2) + \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} \cdot \Delta y = 1 - 0,04 = 0,96. \otimes$$

Пример 4.1.17. Найти дифференциал функции

$$f = f(x + y^2, y + x^2)$$

в точке $M(-1; 1)$.

Решение. Обозначим, например,

$$u = x + y^2, v = y + x^2.$$

Для нахождения дифференциала используем формулу дифференциала и правило нахождения производной композиции функций:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2).$$

Подставляя в выражение для полного дифференциала, получаем:

$$\begin{aligned} df(M) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M) dy = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) - 2 \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2) \right] dx + \left[2 \frac{\partial f}{\partial u}(0; 2) + \frac{\partial f}{\partial v}(0; 2) \right] dy. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 4.1.18. Найти дифференциал второго порядка функции

$$f = f(x + y, xy).$$

Решение. Обозначим $u = x + y$, $v = xy$. Теперь находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy) \cdot y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, xy) \cdot x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot xy + \frac{\partial f}{\partial v} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x+y) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2 = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \otimes
\end{aligned}$$

Пусть функция $u = f(x, y)$ задана *параметрическим способом*, то есть, с помощью формул

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Тогда функция u является функцией одного переменного t :

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы в некоторой точке t , то есть, существуют производные

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} &= \frac{d\varphi}{dt}(t), \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} &= \frac{d\psi}{dt}(t).
\end{aligned}$$

Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема, то придавая переменной t приращение Δt , видим, что все функции получают соответствующие приращения Δx , Δy и Δu , причём по определению дифференцируемости

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y
\end{aligned}$$

где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta = 0$. Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Итак, имеем формулу:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $x = \varphi(t, s)$ и $y = \psi(t, s)$, то имеем две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Пример 4.1.19. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = x^3 - x^2 y, \quad x = 1 - t^2, \quad y = t^4.$$

Решение. Находим непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (3x^2 - 2xy)2t + (-x^2)4t^3 = \\ &= 4t^7 + 2t^6 + 8t^5 + 4t^4 - 4t^3 - 12t^2 + 2t. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 4.1.20. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = \ln \frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sin(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$x_1 = a \sin t, \quad x_2 = b \cos t, \quad x_3 = ce^{-kt},$$

где a, b, c, k – некоторые постоянные.

Пример 4.1.21. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ для функции $z = x^3 e^y$, если

$$x = ts, \quad y = t^2 - s^2.$$

Решение.

$$1) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^{t^2-s^2} t^2 s^3 (3+2t^2).$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^{t^2-s^2} t^3 s^2 (3-2s^2). \otimes$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно посредством уравнения

$$F(x, y) = 0,$$

тогда её производная находится с использованием правила дифференцирования сложной функции путём прямого дифференцирования уравнения, определяющего функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

где учтено, что $\frac{dx}{dx} = 1$. Если $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, то получаем

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

Пусть теперь уравнение

$$F(x, y, u) = 0$$

задаёт функцию двух переменных $u = \varphi(x, y)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Пример 4.1.22. Найти частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y - 1 = 0.$$

Решение. Здесь

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y - 1,$$

следовательно, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y; \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y - 4; \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Используя формулы дифференцирования неявно заданной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x+y}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2-x-y}{z}. \otimes$$

Практическое занятие 2. Исследование функции нескольких переменных

Предварительные сведения

Пусть $f : M \rightarrow f(M)$ – некоторая функция n переменных, дифференцируемая в области $M \subset R^n$, а N_0 и N – точки множества её определения. Тогда **производной по направлению** вектора $\vec{N_0 N} = t \vec{h}$, где $t \in R^+ \cup \{0\}$, в точке N_0 (с радиус-вектором $\vec{x_0}$) функции f называется правый предел

$$\frac{\partial f}{\partial h} \left(\vec{x_0} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f \left(\vec{x_0} + t \vec{h} \right) - f \left(\vec{x_0} \right)}{t}.$$

Градиентом функции $f : M \rightarrow f(M)$ в точке $\vec{x_0} \in M$ называется вектор, имеющий в каноническом базисе пространства R^n координаты $\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x_0} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то есть вектор

$$\vec{\text{grad}} f \left(\vec{x_0} \right) \equiv \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\vec{x_0} \right) \vec{e}_k.$$

Связь производной по направлению и градиента даётся формулой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h} \left(\vec{x_0} \right) &= \left(\vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right), \vec{h} \right) = \left\| \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right) \right\| \cdot \left\| \vec{h} \right\| \cdot \cos \left\{ \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right), \vec{N_0 N} \right\} = \\ &= \left\| \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right) \right\| \cdot \cos \left\{ \vec{\nabla} f \left(\vec{x_0} \right), \vec{N_0 N} \right\}. \end{aligned}$$

Внутренняя точка $\vec{x}_0 \in M$ называется **точкой локального минимума** (точкой локального максимума) функции f , если существует окрестность $U(\vec{x}_0)$ такая, что

$$\left(\forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \right) \text{ выполняется неравенство}$$

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \left(f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \right).$$

Справедлива теорема, позволяющая исследовать на экстремум функцию двух переменных.

Пусть функция $f: M \rightarrow f(M)$, $M \subset R^2$, $f(M) \subset R^1$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in M$ и удовлетворяет условию

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Составим определитель следующего вида

$$D(\vec{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда в точке $\vec{x}_0$ функция f :

- 1) имеет локальный минимум, если $D(\vec{x}_0) > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) > 0$;
- 2) имеет локальный максимум, если $D(\vec{x}_0) > 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) < 0$;
- 3) не имеет экстремума, если $D(\vec{x}_0) < 0$.

Примеры с решением

Пример 4.2.1. Найти $\vec{\text{grad}} f$ и $\left\| \vec{\text{grad}} f \right\|$ для функции, определённой формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

в точке $M_0(1; -1; 2)$.

Решение. Находим частные производные и их значение в указанной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 2) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 2) = -4.$$

Теперь имеем:

$$\vec{\text{grad}} f(M_0) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3,$$

$$\|\vec{\text{grad}} f\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}. \otimes$$

Пример 4.2.2. Найти производную функции, заданной формулой

$$u(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2$$

в точке $M_0(1; 2; -1)$ по направлению вектора $\vec{M_0M}$, где $M(2; 4; -3)$.

Решение. Находим вектор

$$\vec{M_0M} : \vec{M_0M} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Далее, находим градиент функции в произвольной точке и в точке $M_0(1; 2; -1)$:

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_3 = (2x - 2z)\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 - 2x\vec{e}_3,$$

$$\vec{\text{grad}} u(M_0) = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Находим производную по направлению вектора $\vec{M_0M}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \vec{M_0 M}}(M_0) &= \frac{\left(\left. \vec{\text{grad}} u \right|_M, \vec{M_0 M} \right)}{\left\| \vec{M_0 M} \right\|} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \\ &= \frac{4 + 8 + 4}{\sqrt{9}} = \frac{16}{3}. \quad \otimes\end{aligned}$$

Пример 4.2.3. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Решение. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Точка $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ является точкой экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ является точкой локального **минимума**.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{7}{3}. \otimes$$

Пример 4.2.4. Исследовать на экстремуму функцию, заданную формулой:

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{2}.$$

Р е ш е н и е. 1) Находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ x + 3y = 16. \end{cases}$$

Эта СЛАУ имеет решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/7 \\ 32/7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем одну критическую точку $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$.

2) Вычисляем определитель:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Точка $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$ является точкой локального экстремума. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) > 0,$$

то точка $M_0\left(\frac{16}{7}; \frac{32}{7}\right)$ является точкой локального минимума.

3) Находим значение функции в точке локального минимума:

$$z(M_0) \approx 36,6. \otimes$$

Практическое занятие 3. Числовые ряды

Предварительные сведения

Пусть $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ – некоторая последовательность действительных чисел ($a_k \in R, k=1, 2, 3, \dots$). Сопоставим из элементов этой последовательности новую последовательность, определив её члены так:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\dots\dots\dots$$

Формула для общего члена получившейся последовательности имеет, очевидно, вид

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Последовательность (s_n) определяет **числовой ряд**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и называется последовательностью частичных сумм числового ряда.

Бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **сходящимся (расходящимся)**, если сходится (расходится) последовательность его частичных сумм. Если ряд сходится, то его **суммой** называется число

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Необходимое условие сходимости числового ряда даётся следующей теоремой.

Последовательность (a_k) членов сходящегося числового ряда сходится к нулю.

Геометрическая прогрессия $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ при $|q| < 1$ сходится к

$$S = \frac{1}{1-q},$$

а при $|q| \geq 1$ расходится.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда с положительными членами.

Если для почти всех k выполняется неравенство $a_k \leq b_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

называется **минорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – **мажорантой** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Признак сравнения. Каждая миноранта сходящегося ряда сходится, а каждая мажоранта расходящегося ряда расходится.

Признак Даламбера. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд с положительными членами. Если существует та-

кое число $q \in (0, 1)$, что для почти всех номеров k выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$, то ряд

сходится. Если же для почти всех k выполняется неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, то ряд расходится.

Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

где (a_k) – последовательность положительных чисел, называется **знакопеременным рядом**.

Знакопеременный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

сходится в том и только в том случае, если последовательность из абсолютных величин его членов монотонно убывает и сходится к нулю.

Примеры с решением

Пример 4.3.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

Решение. Общий член ряда равен

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности частичных сумм ряда имеем

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \dots = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Сумма ряда находится путём непосредственного предельного перехода:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \otimes$$

Пример 4.3.2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Р е ш е н и е. Общий член ряда можно представить в виде:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Записывая общий член последовательности частичных сумм ряда в виде

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

и переходя непосредственно к пределу, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \right] = \frac{1}{2}. \otimes$$

Пример 4.3.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Р е ш е н и е. Имеем геометрическую прогрессию, которая в силу неравенства $q = \frac{1}{2} < 1$

сходится и имеет сумму

$$S = \frac{1}{1-q} = 2. \otimes$$

Пример 4.3.4. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Решение. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.5. Проверить выполнение необходимого признака сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Решение. Вычисляя предел последовательности членов ряда, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется. $\otimes$

Пример 4.3.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$.

Решение. Для почти всех n выполняется неравенство

$$\frac{2^n}{1 + 2^{2n}} < \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$ является минорантой ряда геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, ко-

торый сходится, так как $q = \frac{1}{2} < 1$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 2^{2n}}$ по признаку сравнения сходится. $\otimes$

Пример 4.3.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)}$.

Решение. Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Общий член ряда удовлетворяет следующим условиям: $(\forall n \in N)$

$$-1 \leq \sin n \leq 1; 1 < 2 + \sin n < 3; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} > 0.$$

Имеем ряд с положительными членами, для которого можно применить признак сравнения.

Предположим, что ряд сходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} < 2n^{3/2}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} < \frac{2n^{3/2}}{n^2} = \frac{2}{n^{1/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/2}}$ является так называемым обобщённым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^{\alpha}}$, который при

$0 < \alpha < 1$ расходится. Поэтому предположение о сходимости исходного ряда подтвердить не удалось.

Предположим, что ряд расходится, и попробуем подтвердить это предположение. Для этого заметим, что

$$\sqrt{n^3+1} > \sqrt{n^3}.$$

Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2(2+\sin n)} \geq \frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac{1}{3n^{1/2}}.$$

Так как обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{1/2}}$ расходится, то и исходный ряд также расходится.

⊗

Пример 4.3.8. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Решение. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}, a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} \cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Поэтому ряд сходится по признаку

Даламбера. ⊗

Пример 4.3.9. Выяснить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Решение. Находя отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, получаем:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что для всех n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ по признаку Даламбера расходится. ⊗

Пример 4.3.10. Выяснить вопрос о сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

Последовательность абсолютных величин членов ряда сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ по признаку Лейбница сходится. $\otimes$

Пример 4.3.11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

суммой четырёх его первых членов.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. предыдущую задачу). Ошибка, получающаяся при замене суммы ряда суммой четырёх его первых членов, меньше абсолютной величины пятого члена: $\Delta < 0,2$. $\otimes$

Пример 4.3.12. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

Р е ш е н и е. Ряд сходится (см. задачу 8.11). Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Вычисляем отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Для всех n , очевидно, имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < 1.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно. $\otimes$

Пример 4.3.13. Выяснить вопрос о типе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Ряд знакочередующийся, последовательность его членов монотонно убывает и сходится к нулю. Поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Сравнивая его с гармоническим рядом, замечаем, что для почти всех n (начиная с $n = 2$) каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ не является абсолютно сходящимся, то есть сходится условно. $\otimes$

Практическое занятие 4. Функциональные и степенные ряды

Предварительные сведения

Последовательность функций (f_n) называется сходящейся на множестве M **поточечно** (или **в обычном смысле**), если для **каждой точки** $x_0 \in M$ сходится числовая последовательность $(f_n(x_0))$.

Предельной функцией, или **пределом** $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ сходящейся поточечно последовательности функций (f_n) , называется функция f , определённая на множестве M условием: $(\forall x_0 \in M) f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$.

Таким образом, для поточечно сходящейся функциональной последовательности неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется для каждой точки $(\forall x_0 \in M)$ и для своего ε , то есть $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$.

Функциональная последовательность (f_n) называется **равномерно сходящейся на множестве M к предельной функции f** , если для произвольного положительного числа ε и для

любой точки $x \in M$ найдётся такой номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется условие $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, для равномерно сходящейся на множестве M функциональной последовательности неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех $x \in M$ и, следовательно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k : M \rightarrow f_k(M)$ называется **сходящимся на множестве M поточечно или в обычном смысле**, если на этом множестве поточечно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n f_k \right).$$

Функция $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ называется **суммой ряда** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, и при этом пишут

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ называется **равномерно сходящимся на множестве**

$M \subset R^1$, если на M равномерно сходится последовательность его частичных сумм

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n f_k \right).$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходящийся числовой ряд с неотрицательными членами, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, где $f_k : M \rightarrow f_k(M)$ – функциональный ряд. Тогда если $|f_k(x)| \leq a_k$ для всех точек $x \in M$ и для почти всех номеров $k \in N$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на множестве M абсолютно и равномерно.

Функциональный ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ называется **степенным рядом с центром в**

точке x_0 . Числа a_k называются **коэффициентами** степенного ряда.

Первая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

сходится в некоторой точке X_1 , то он сходится абсолютно и равномерно во всякой точке X , удовлетворяющей условию $|X - X_0| < |X_1 - X_0|$.

Кроме этого, для каждой такой точки X существуют такие числа $S > 0$, $0 < q < 1$, что для всех номеров k справедливо неравенство

$$|a_k| \cdot |X - X_0|^k \leq Sq^k.$$

Причём, если $X \neq X_0$, $X_1 \neq X_0$ то $q = \frac{|X - X_0|}{|X_1 - X_0|}$, а число S от X не зависит.

Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (X - X_0)^k = a_0 + a_1 (X - X_0) + a_2 (X - X_0)^2 + \dots$$

в точке X_1 не сходится абсолютно (например, расходится), то он расходится в каждой точке X , удовлетворяющей условию

$$|X - X_0| > |X_1 - X_0|.$$

Число

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

называется **радиусом сходимости**, а открытое множество $M_r = \{X : |X - X_0| < r\}$ – **множеством (интервалом) сходимости степенного ряда** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (X - X_0)^k$.

Примеры с решением

Пример 4.4.1. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^n + \dots$$

в точках $X_1 = 0$ и $X_2 = 1$.

Решение. 1) В точке $X_1 = 0$ имеем

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot 2^n + \dots$$

Это ряд с положительными членами. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n}{2n-1}; u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{2^n} = 2 \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = 2 \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) > 1.$$

Поэтому в точке $x_1 = 0$ ряд расходится.

2) В точке $x_2 = 1$ имеем

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$$

Применяем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{3^n \cdot (2n-1)}; u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1) \cdot 3^n}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2n+1-2}{2n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) < 1.$$

Поэтому в точке $x_2 = 1$ ряд сходится. $\otimes$

Пример 4.4.2. Найти промежуток сходимости и сумму ряда

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-(n-1)x} + \dots$$

Решение. В точке $x = 0$ не выполняется необходимый признак сходимости и ряд, очевидно, расходится. Рассмотрим промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

1) На промежутке $(-\infty, 0)$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(n-1)x} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)(-x)} = \{-x = t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)t},$$

где $t \in (0, \infty)$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n-1)t} \neq 0$. Снова не выполняется необходимый при-

знак сходимости. Ряд на промежутке $(-\infty, 0)$ расходится.

2) На промежутке $(0, \infty)$ выполняется необходимый признак сходимости. Далее имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-nx}}{e^{-(n-1)x}} = \frac{e^{(n-1)x}}{e^{nx}} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

На $(0, \infty)$ всегда $\frac{1}{e^x} < 1$. Поэтому ряд сходится.

Перепишем ряд в виде:

$$1 + \frac{1}{e^x} + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{e^x}\right)^n + \dots$$

Имеем геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{e^x} < 1$. Поэтому сумма ряда равна

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x-1}. \quad \otimes$$

Пример 4.4.3. Исследовать сходимость степенного ряда

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots$$

Решение. Здесь

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ряд сходится в промежутке $-1 < x < 1$.

Если $x = 1$, имеем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Если $x = -1$, то получаем ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

Это ряд Лейбница и, следовательно, он сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $x \in [-1, 1)$, который можно задать двойным неравенством $-1 \leq x < 1$. $\otimes$

Пример 4.4.4. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$$

Решение. Коэффициенты ряда выражаются формулами:

$$a_n = \frac{1}{n^2}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, если

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3.$$

На левом конце промежутка сходимости $x = 1$ имеем ряд

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$$

Это знакочередующийся ряд Лейбница, который сходится, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

На правом конце промежутка сходимости $x = 3$ имеем ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Этот ряд сходится, так как при $p > 1$ сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots,$$

что является табличным фактом.

Степенной ряд сходится для значений x , удовлетворяющих двойному неравенству $1 \leq x \leq 3$. $\otimes$

Пример 4.4.5. Исследовать сходимость ряда

$$1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots + n!(x-5)^n + \dots$$

Решение. Коэффициенты ряда

$$a_n = n!; a_{n+1} = (n+1)!.$$

Поэтому радиус сходимости

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится только при $x - 5 = 0$, то есть в точке $x = 5$. $\otimes$

Пример 4.4.6. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2}$ сходится равномерно на промежутке $(-\infty, \infty)$.

Решение. Выпишем несколько первых членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} = -\frac{1}{x^4 + 1^2} + \frac{2}{x^4 + 2^2} - \frac{3}{x^4 + 3^2} + \dots$$

Имеем знакочередующийся ряд, причём

$$|u_1| = \frac{1}{x^4 + 1} > |u_2| = \frac{2}{x^4 + 4} > |u_3| = \frac{3}{x^4 + 9} > \dots$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x^2}{n} \right)^2 + 1} = 0.$$

Ряд сходится для любых $x \in (-\infty, \infty)$.

Для остатка ряда имеем

$$|r_n| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{x^4 + n^2} \right| < |u_{m+1}| = \left| \frac{(-1)^{(m+1)} \cdot (m+1)}{x^4 + (m+1)^2} \right| < \frac{1}{m+1},$$

так как $x^4 > 0$. Рассмотрим неравенство $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Из этого неравенства получаем

$m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Если теперь мы выберем $m_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$, то $(\forall m \geq m_0)$ получаем

$|r_m| < \frac{1}{m+1} < \varepsilon$. Таким образом, ряд сходится на $(-\infty, \infty)$ независимо от x , то есть равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$. $\otimes$

Ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)(x-x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

для бесконечно дифференцируемой функции $f: M \rightarrow f(M)$, вне зависимости от его сходимости и суммы, называется **рядом Тейлора** для этой функции. При $x_0 = 0$ ряд называется **рядом Маклорена**.

Пример 4.4.7. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$$

по степеням x ($x_0 = 0$) в ряд Тейлора.

Решение. Данную функцию разложим на элементарные дроби:

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2}.$$

Теперь можно использовать готовое табличное разложение

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Применяя это разложение, получаем:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-2, 2).$$

Получаем разложение для исходной функции:

$$f(x) = \frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n.$$

Область сходимости данного ряда – пересечение указанных областей сходимости:

$$M = (-1, 1) \cap (-2, 2) = (-1, 1). \quad \otimes$$

Пример 4.4.8. Разложить в ряд Маклорена функцию, определённую формулой

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Решение. Вычисляем производные данной функции:

$$f^{(0)}(x) = \sin^2 x;$$

$$f^{(1)}(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3)}(x) = -4 \cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin\left(2x + 2 \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \sin\left(2x + 3 \frac{\pi}{2}\right);$$

.....;

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \cdot \sin\left[2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right];$$

.....

Вычисляем производные в точке $x = 0$:

$$f^{(0)}(0) = 0;$$

$$f^{(1)}(0) = 0;$$

$$f^{(2)}(0) = 2;$$

$$f^{(3)}(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(0) = 2^3;$$

$$f^{(5)}(0) = 0;$$

$$f^{(6)}(0) = 2^5;$$

.....

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{2^n \cdot \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2 \cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right).$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \left| \sin\left(2 \cdot \xi + \frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right| \leq 1,$$

получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Поэтому функция $f(x) = \sin^2 x$ может быть разложена в ряд Маклорена

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{2^3}{4!} \cdot x^4 + \frac{2^5}{6!} \cdot x^6 - \frac{2^7}{8!} \cdot x^8 + \dots$$

на любом промежутке $[-b, b]$. $\otimes$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти частные производные первого порядка функций, заданных формулами:

$$1) u(x, y) = x^3 \sin y + y^4; \quad 2) u(x, y) = x^2 \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

2. Найти частные производные в заданных точках:

$$1) u(x, y) = \frac{1-xy}{1+xy}, \quad A(0; 1);$$

$$2) u(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, \quad A(1; 1);$$

$$3) u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A(\sqrt{2}; 1).$$

3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

$$1) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad 2) u = \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2});$$

3) $u = \ln \sin(x_1 - 2x_2)$; 4) $u = x^2 y z^4$; 5) $u = \ln(x^3 - y^3 + 2z^3)$.

4. Пусть функция задана формулой $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$. Вычислить $df(x_0, y_0)$ в точке $(x_0, y_0) = \left(-1; \frac{\pi}{4}\right)$.

5. Вычислить значения полных дифференциалов функций, заданных формулами:

1) $u = \frac{x_2}{x_2 - x_1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $dx_1 = \frac{1}{2}$, $dx_2 = -\frac{1}{3}$;

2) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $dx = -0,1$, $dy = 0,3$, $dz = 0,2$.

6. Вычислить приближённое значение выражения $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$.

7. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = t^2$.

8. Найти $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, если $f = \ln(x^2 + y^2)$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

9. Функция задана уравнением $e^u = \cos x \cos y$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

28. Найти производную функции

$$u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$$

по направлению радиус-вектора точки $M(3; 4)$ в начале координат.

29. Найти производную функции, определённой формулой

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{3},$$

в точке $M_0(1; 2; 3)$ по направлению вектора $\vec{M_0 M}$, если $M(4; 1; 6)$.

30. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

31. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$$

32^{*)}. Исследовать на экстремум функцию, заданную формулой

$$z = x^2 + y^2$$

при условии, что $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

33^{*)}. Найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой

$$f(x, y) = xy$$

в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

34. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:

$$1) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots; 2) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots;$$

$$3) 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \dots; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 5n + 6}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{25n^2 + 5n - 6};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 + 3n}; 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 - 1}; 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}; 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

35. Проверить, выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{n^2(2 + \sin n)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^2 - (2+n)^4}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

36. Исследовать сходимость ряда, используя признак сравнения:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot (1+2^n)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2\sin n}{n-\ln n}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2+3};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3-2}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+6}{n^3+5}; 10) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^4+3}{n^4+2};$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{3^n+n}{7^n+2n}; 12) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{2n^3}} - 1 \right).$$

37. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}; 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

38. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3 + n}{3n^3 - 1} \right)^{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1} \right)^{n^3}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+3} \right)^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n}; 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}.$$

39. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и выяснить тип сходимости (абсолютная или условная):

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n-2}{3n-1}; 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{n}{10^n} \right);$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2 + n + 1}.$$

40. Исследовать сходимость функциональных рядов в указанных точках:

$$1) \frac{3x+1}{x^2+x+1} + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1} \right)^n + \dots,$$

$$x=1, x=2, x=3;$$

$$2) \frac{1!}{1} (x^2 - 4x + 6) + \frac{2!}{2^2} (x^2 - 4x + 6)^2 + \dots + \frac{n!}{n^2} (x^2 - 4x + 6)^n + \dots,$$

$$x=1, x=2, x=3.$$

41. Найти область сходимости функционального ряда

$$1) \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2^2(1+x^2)^2} + \dots + \frac{1}{n^2(1+x^2)^n} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2 - 6x + 10)^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2 - 5x + 9)^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2(x^2 + 3)^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2 - 4x + 8)^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(x^2 - 2x + 6)^n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n + \sqrt{n})^x}.$$

42. Найти радиус и промежуток сходимости степенного ряда:

$$1) \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

$$2) 1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \dots + \frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}} + \dots;$$

$$3) 2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \dots + \frac{2^n x^{5n}}{2n-1} + \dots;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 9^n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}.$$

43. Разложить данную функцию в ряд Тейлора в окрестности данной точки, или в ряд Маклорена в окрестности нуля;

$$1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}; \quad 2) f(x) = \frac{x}{3+2x};$$

$$3) f(x) = \sqrt[4]{16+x}; 4) f(x) = 2^x;$$

$$5) f(x) = \cos^2 x; 6) f(x) = e^{-x^2};$$

$$7) f(x) = \frac{1}{x} \text{ по степеням } x-2; 8) f(x) = 3^x;$$

$$9) f(x) = e^{-2x}; 10) f(x) = \sqrt{x+2}.$$

ЧАСТЬ 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практическое занятие 1. Базисные векторные поля

Предварительные сведения

Регулярной системой координат в области $D \subset E^n$ называется система гладких функций

$$\begin{cases} q^1 = q^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ q^2 = q^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \dots, \\ q^n = q^n(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases},$$

задающих взаимно однозначное (биективное) отображение области $G \subset R^n$ на область $D \subset E^n$, и удовлетворяющих условию

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial q^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial q^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial q^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial q^n} \end{vmatrix} \neq 0$$

во всех точках области D .

Если радиус-вектор является функцией декартовых координат, то есть

$$\vec{x} = \vec{x}(x^1, x^2, x^3) = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3,$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^3} dx^3 \equiv dx^j \vec{e}_j.$$

Если радиус-вектор является функцией криволинейных координат, то есть

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}(q^1, q^2, q^3) = \\ &= x^1(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_1 + x^2(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_2 + x^3(q^1, q^2, q^3) \vec{e}_3, \end{aligned}$$

или в скалярной форме

$$\begin{cases} x^1 = x^1(q^1, q^2, q^3), \\ x^2 = x^2(q^1, q^2, q^3), \\ x^3 = x^3(q^1, q^2, q^3), \end{cases}$$

то для дифференциала радиус-вектора имеем

$$d\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} dq^j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^3} dq^3 \equiv dq^j \vec{g}_j,$$

где по определению введены новые векторы

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j},$$

которые зависят от криволинейных координат и являются, следовательно, не векторами, а **векторными полями**.

→

Можно показать, что векторные поля $\vec{g}_k$ при выполнении приведённого выше условия регулярности отображения, образуют базис пространства E^3 . Эти поля называются **натуральными базисными векторными полями**.

Взаимные базисные векторные поля определяются по формуле

$$\vec{g}^i \stackrel{\text{def}}{=} \nabla q^i,$$

или формулами

$$\vec{g}^i \stackrel{\text{def}}{=} g^{ij} \vec{g}_j,$$

где g^{ij} – некоторая, пока произвольная невырожденная симметрическая матрица.

Полярные координаты $\{q^1; q^2\} \equiv \{r; \varphi\}$ на плоскости R^2 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^2\{r; \varphi\} \rightarrow R^2\{x^1; x^2\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Координата r называется **полярным радиусом**, а координата φ – **полярным углом**. Якобиан этого преобразования равен:

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Цилиндрические координаты в пространстве R^3 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3\{r; \varphi; h\} \rightarrow R^3\{x^1; x^2; x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \\ x^3 = h. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \{(r; \varphi; h) \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\}.$$

Якобиан преобразования

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Сферические координаты в пространстве R^3 задаются отображением

$$\hat{F}^{-1} : R^3\{r, \varphi, \theta\} \rightarrow R^3\{x^1, x^2, x^3\},$$

которое в координатной форме записи имеет вид (рисунок 1.3)

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ x^3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Здесь

$$D = \{ \{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta \leq \pi \}.$$

Якобиан преобразования (1.35)

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} \right) = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2 \sin \vartheta.$$

Примеры с решением

Пример 5.1.1. Показать, что орты полярной системы координат связаны с ортами декартовой системы координат соотношениями

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2. \quad (1)$$

Решение. В полярной системе координат связь между старыми (декартовыми) и новыми (полярными) координатами даётся обратным отображением

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi. \quad (2)$$

Следовательно, для радиус-вектора получаем

$$\vec{r} = r \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (3)$$

Воспользуемся формулами связи базисных векторных полей:

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \vec{e}_i = A_{\cdot j}^i \vec{e}_i. \quad (4)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (5)$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \\
&= -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Так как

$$\left\| \vec{g}_r \right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r \right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормировано и, следовательно, имеем

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \tag{7}$$

Векторное поле $\vec{g}_\varphi$ не нормировано, а его норма

$$\left\| \vec{g}_\varphi \right\| = \sqrt{\left(\vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi \right)} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r. \tag{8}$$

Орт векторного поля $\vec{g}_\varphi$ равен

$$\begin{aligned}
\vec{g}_{\langle \varphi \rangle} &= \frac{1}{\left\| \vec{g}_\varphi \right\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r} \left(-r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) = \\
&= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Формулы (7) и (9) решают поставленную задачу. $\otimes$

Пример 5.1.2. В полярной системе координат закон движения точки задан уравнениями

$$x^1(t) = r(t) \cdot \cos \varphi(t), \quad x^2(t) = r(t) \cdot \sin \varphi(t), \tag{1}$$

где t – время. Найти скорость и ускорение точки в декартовых и полярных координатах.

Решение. Векторная параметризация движения имеет вид

$$\vec{r} = r \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (2)$$

Вектор скорости

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{d}{dt}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi + r \cdot \frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \\ &+ \left(\frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi + r \cdot \frac{d}{d\varphi}(\sin \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2 = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(\frac{dr}{dt} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Найдём проекции вектора скорости на оси полярной системы координат. Для этого вычислим значения скалярных произведений вектора скорости и ортов полярной системы координат, найденных в предыдущей задаче (формулы (7) и (9)):

$$\begin{aligned} v_r &\equiv \text{Pr}_{\vec{e}_r} \vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle r \rangle} \right) = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right) \sin \varphi = \frac{dr}{dt}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &\equiv \text{Pr}_{\vec{e}_\varphi} \vec{v} = \left(\vec{v}, \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} \right) = \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \right) (-\sin \varphi) + \left(\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \right) \cos \varphi = \\ &= r \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, вектор скорости в полярной системе координат имеет вид

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{g}_{\langle r \rangle} + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \quad (6)$$

Найдём разложение вектора ускорения по ортам полярной системы координат. Для этого используем формулы (7) и (9) из предыдущей задачи и формулу (6) из этой задачи:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{g}_{\langle r \rangle} + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{g}_{\langle r \rangle}}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{g}_{\langle \varphi \rangle}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle r \rangle}}{dt} = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2;$$

$$\frac{d\vec{g}_{\langle \varphi \rangle}}{dt} = -\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 - \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2;$$

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{g}_{\langle r \rangle} + \frac{dr}{dt} \left(-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 \right) + \\ &+ \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} + \\ &+ r \frac{d\varphi}{dt} \left(-\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 - \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 \right) = \\ &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{g}_{\langle r \rangle} + \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \end{aligned}$$

Итак, в полярной системе координат для ускорения получаем следующее выражение:

$$\vec{w} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{g}_{\langle r \rangle} + \left(r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{g}_{\langle \varphi \rangle}. \quad \otimes \quad (7)$$

Пример 5.1.3. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$\begin{cases} r = t \cdot \sin 3t, \\ \varphi = t^3. \end{cases} \quad (1)$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 1 \text{ с}$. Радиус дан в метрах.

Р е ш е н и е. 1) Полярные координаты точки в заданный момент времени:

$$r(1) = \sin 3 = 0,141; \varphi(1) = 1.$$

2) Дифференцируя уравнения движения (1) по времени, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = \sin 3t + 3t \cos 3t, \\ \dot{\varphi} = 3t^2. \end{cases} \quad (2)$$

При $t = 1 \text{ с}$ имеем:

$$\dot{r}(1) = -2,829, \dot{\varphi}(1) = 3.$$

3) По формулам (4) и (5) предыдущей задачи находим компоненты скорости в полярных координатах:

$$v_r(1) = \dot{r}(1) = -2,829 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v_\varphi(1) = r(1) \cdot \dot{\varphi}(1) = 0,423 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4) Норма скорости:

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_\varphi^2(1)} = 2,860 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5) Дифференцируя формулы связи полярных и декартовых координат по времени, находим компоненты скорости в декартовых координатах:

$$v^1 = \dot{x}^1 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi;$$

$$v^2 = \dot{x}^2 = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi.$$

В заданный момент времени имеем:

$$v^1(1) = -1,883 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v^2(1) = -2,148 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проверка правильности вычислений (норма вектора скорости в декартовых и полярных координатах должна быть одинаковой):

$$v = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2} = 2,85 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

6) Находим вторые производные, дифференцируя (2):

$$\ddot{r} = 6 \cos 3t - 9t \sin 3t; \ddot{\varphi} = 6t.$$

При $t = 1$ имеем:

$$\ddot{r}(1) = -9,74; \ddot{\varphi}(1) = 6.$$

7) Находим компоненты ускорения в полярных координатах:

$$w_r(1) = \ddot{r}(1) - r(1)\dot{\varphi}^2(1) = -11,01 \frac{M}{c^2};$$

$$w_\varphi(1) = r(1)\ddot{\varphi}(1) + 2\dot{r}(1)\dot{\varphi}(1) = -16,128 \frac{M}{c^2}.$$

8) Норма ускорения

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = 19,52 \frac{M}{c^2}.$$

9) Компоненты ускорения в декартовых координатах находим двукратным дифференцированием формулы (2) по времени:

$$w^1 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right) \cos \varphi - \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \right) \sin \varphi \equiv w_r \cos \varphi - w_\varphi \sin \varphi;$$

$$w^2 = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \right) \sin \varphi + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \right) \cos \varphi = w_r \sin \varphi + w_\varphi \cos \varphi.$$

При $t = 1$ имеем:

$$w^1(1) = 7,602; w^2(1) = -17,95.$$

Проверка:

$$w = \sqrt{(w^1)^2 + (w^2)^2} = 19,49. \otimes$$

Пример 5.1.4. Закон движения точки в полярных координатах имеет вид:

$$r = 22 \cdot \frac{1 - \frac{t^2}{121}}{t}; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{t}{11}\right).$$

Найти скорость и ускорение точки в полярных и декартовых координатах в момент времени $t = 9 \text{ с}$. Радиус дан в метрах.

Ответ:

r	$\dot{r}$	φ	$\dot{\varphi}$	v_r	v_φ	v	v^1	v^2
м	м/с	рад	рад/сек			м/с		
0,81	-0,45	0,61	-0,16	-0,45	-0,13	0,47	-0,3	-0,37

Пример 5.1.5. Выразить базисные векторные поля цилиндрической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Решение. Связь декартовых и цилиндрических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \\ x^3 = h, \end{cases} \det \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(r, \varphi, h)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

где для цилиндрических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \{(r; \varphi; h) \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < h < +\infty\}.$$

Для радиус-вектора имеем

$$\vec{r} = r \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \varphi \vec{e}_2 + h \vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по цилиндрическим координатам и используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат

$$\vec{g}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \vec{e}_i = \frac{\partial x^1}{\partial q^j} \vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^j} \vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^j} \vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\vec{g}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r} h \cdot \vec{e}_3 = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_r$

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{\left(\vec{g}_r, \vec{g}_r\right)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

то базисное векторное поле $\vec{g}_r$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} h \cdot \vec{e}_3 = \\ &= -r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Так как для векторного поля $\vec{g}_\varphi$

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{\left(\vec{g}_\varphi, \vec{g}_\varphi\right)} = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} = r,$$

то поле $\vec{g}_\varphi$ ненормированное. Находим орт поля:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\langle \varphi \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r} \left(-r \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) = \\ &= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_h$ имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_h &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial h} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial h} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial h} = \\ &= \frac{\partial}{\partial h}(r \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial h}(r \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial h} h \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Таким образом, базисное векторное поле $\vec{g}_h$ нормированное, то есть

$$\vec{g}_{\langle h \rangle} = \vec{e}_3. \otimes$$

Пример 5.1.6. Выразить базисные векторные поля сферической системы координат в виде разложения по ортам декартовой системы координат.

Решение. Связь декартовых и сферических координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ x^3 = r \cos \theta, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\det \left(\frac{\partial (x^1, x^2, x^3)}{\partial (r, \varphi, \theta)} \right) &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \sin \theta,\end{aligned}$$

где для сферических координат принимаются следующие пределы изменения:

$$D = \{ \{r, \varphi, \vartheta\} \in R_2^3 : 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \theta \leq \pi \}.$$

Радиус-вектор имеет вид:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \vec{e}_1 + r \sin \theta \cdot \sin \varphi \vec{e}_2 + r \cos \theta \vec{e}_3.$$

Дифференцируем разложение радиус-вектора последовательно по сферическим координатам и снова используем формулу разложения базисных векторных полей по ортам декартовой системы координат.

Для базисного векторного поля $\vec{g}_r$ имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial r} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 + \cos \theta \cdot \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Норма поля

$$\|\vec{g}_r\| = \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta} = 1.$$

Поле нормированное. Следовательно, имеем:

$$\vec{g}_{\langle r \rangle} \equiv \vec{g}_r = \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 + \cos \theta \cdot \vec{e}_3.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\varphi$ имеем:

$$\begin{aligned}\vec{g}_\varphi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= -r \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Норма поля

$$\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\vec{g}_{\langle \varphi \rangle} = \frac{1}{\|\vec{g}_\varphi\|} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left(-r \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 \right) =$$

$$= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

Для базисного векторного поля $\vec{g}_\theta$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \sin \varphi) \cdot \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \cdot \vec{e}_3 = \\ &= r \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - r \sin \theta \cdot \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Норма поля

$$\|\vec{g}_\theta\| = \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2} = r.$$

Поле ненормированное. Находим орт поля:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\langle \theta \rangle} &= \frac{1}{\|\vec{g}_\theta\|} \vec{g}_\theta = \frac{1}{r} \left(r \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - r \sin \theta \cdot \vec{e}_3 \right) = \\ &= \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 - \sin \theta \cdot \vec{e}_3. \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 2. Криволинейные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода по параметризованному замкнутому пути $\hat{W}(\bar{J})$, $\bar{J} = [\alpha, \beta]$

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^3 w_k(t) \vec{e}_k$$

имеет вид:

$$\int_{W_{\alpha, \beta}} f(\vec{x}(t)) dl \equiv \int_{W_{\alpha, \beta}} f(x_1, x_2, x_3) dl = \int_{W_{\alpha, \beta}} f(\vec{x}(t)) \left\| \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \right\| dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \cdot \sqrt{\left[\frac{dw_1(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dw_2(t)}{dt} \right]^2 + \left[\frac{dw_3(t)}{dt} \right]^2} dt.$$

В случае естественной параметризации

$$y = y(x), z = z(x), x \in \bar{J}$$

формула принимает вид

$$\int_{L_{a, b}} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x, y(x), z(x)) \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{dy(x)}{dx} \right]^2 + \left[\frac{dz(x)}{dx} \right]^2} dx,$$

где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$,

Формула вычисления криволинейного интеграла второго рода для общего случая параметризации имеет вид:

$$\int_{W_{\alpha, \beta}} F_1(\vec{x}(t)) dx^1 + F_2(\vec{x}(t)) dx^2 + F_3(\vec{x}(t)) dx^3 =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_1(t)}{dt} + F_2(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_2(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + F_3(w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \frac{dw_3(t)}{dt} \right] dt.$$

Если путь задан естественной параметризацией

$$y = y(x), z = z(x),$$

то есть параметром является переменная x , формула переписывается так:

$$I_{W_{a, b}} = \int_{W_{a, b}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} + R(x, y(x), z(x)) \frac{dz(x)}{dx} \right] dx,$$

где

$$a = x(\alpha), b = x(\beta)$$

— пределы изменения переменной x и учтено, что $\frac{dx}{dx} = 1$. Аналогичные формулы можно записать

и в тех случаях, когда в качестве параметра рассматривается переменная y или z .

Примеры с решением

Пример 6.2.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_L (x + y) dl$$

по меньшей части окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченной точками $A(0, 0, R)$, $B\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. Параметризация окружности:

$$x = t, y = t, z = \sqrt{R^2 - 2t^2}, 0 \leq t \leq \frac{R}{2},$$

$$\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Используем формулу

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz(t)}{dt}\right]^2} dt.$$

Получаем:

$$I = \int_L (x + y) dl = \int_0^{R/2} 2t \frac{\sqrt{2}R dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2(\sqrt{2} - 1). \otimes$$

Пример 6.2.2. Найти массу $\frac{1}{4}$ окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

если $\rho(x_1, x_2) = x_2$ и $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Решение. Воспользуемся формулой для случая плоского пути, заданного непрерывно дифференцируемой параметризацией. Параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x_1 = R \cos t, \\ x_2 = R \sin t. \end{cases}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} M &= \int_W \rho(x_1, x_2) dl = \\ &= \int_0^{\pi/2} R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt = R^2. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.2.3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y) dx - x dy,$$

где путь W — отрезок прямой, соединяющий точки $M_0(0; 0)$ и $M_1(4; 2)$.

Решение. Используем формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода для случая плоского пути:

$$\begin{aligned} I_{W_{a,b}} &= \int_{W_{a,b}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy = \\ &= \int_a^b \left[P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x)) \frac{dy(x)}{dx} \right] dx. \end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{M_0 M_1} = 4 \vec{e_1} + 3 \vec{e_2}, \quad \vec{M_0 M} = x \vec{e_1} + y \vec{e_2},$$

$$\vec{M_0 M} = t \cdot \vec{M_0 M_1}, \quad \begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x \in [0, 4].$$

Имеем:

$$\int_W (x + y) dx - x dy = \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8. \otimes$$

Пример 6.2.4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy$$

по пути с параметризацией $x = t, y = t^3, t \in [0, 1]$.

Р е ш е н и е. Используем формулу с естественной параметризацией для случая плоского пути:

$$\begin{aligned} \int_{W_{\alpha, \beta}} F_1 \left(\vec{x} \right) dx_1 + F_2 \left(\vec{x} \right) dx_2 = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

Получаем:

$$\int_W x^2 y dx + y^2 x dy = \int_0^1 (t^5 + 3t^9) dt = \left(\frac{t^6}{6} + 3 \frac{t^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{15}. \otimes$$

Пример 6.2.5. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\hat{W}} (x_2^2 - x_3^2) dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 - x_1^2 dx_3$$

по замкнутому пути с параметризацией $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$, начальной и конечными точками $M_0(0; 0; 0)$, $M_1(1; 1; 1)$ соответственно.

Р е ш е н и е. Для вычисления применим формулу:

$$\begin{aligned} I_{W_{a, b}} = \int_{W_{a, b}} F_1 \left(\vec{x} \right) dx_1 + F_2 \left(\vec{x} \right) dx_2 + F_3 \left(\vec{x} \right) dx_3 = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} + F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_2(t)}{dt} + \right. \\ \left. + F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \frac{dx_3(t)}{dt} \right] dt. \end{aligned}$$

Пределы изменения параметра $t \in [0, 1]$, то есть $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Подстановка данных задачи даёт:

$$\int_{\hat{W}} (x_2^2 - x_3^2) dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 - x_1^2 dx_3 = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 4t^6 - 3t^4] dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \left(\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{35}. \quad \otimes$$

Пример 6.2.6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_W (x + y)dx + (x - y)dy,$$

где W – окружность с уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Решение. Запишем параметризацию окружности:

$$\vec{x}(t) = (1 + 2\cos t)\vec{e}_1 + (1 + 2\sin t)\vec{e}_2,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Интеграл вычисляем, пользуясь формулой

$$\int_W F_1\left(\vec{x}\right)dx + F_2\left(\vec{x}\right)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_1\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dx(t)}{dt} + F_2\left(\vec{x}(t)\right)\frac{dy(t)}{dt} \right] dt$$

и тем, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\sin t, \quad \frac{dy(t)}{dt} = 2\cos t.$$

Имеем:

$$\oint_W (x + y)dx + (x - y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2 + 2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t - 2\sin t)2\cos t] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t - 8\sin t \cdot \cos t + 4\cos 2t) dt = 0. \quad \otimes$$

Практическое занятие 3. Кратные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

Пусть

$$P = \{(x; y) \in R^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

– замкнутый прямоугольник, $f : P \rightarrow R^1$ – непрерывная функция двух переменных x, y и

$$\iint_P f(x, y) d\mu \equiv \iint_P f(x, y) dx dy$$

– двойной интеграл от функции $f : P \rightarrow R^1$ по прямоугольнику P . Тогда, если для каждой точки $x \in [a, b]$ существует определённый интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

то существует и **повторный интеграл** от функции $f(x, y)$ вида

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right),$$

причём справедливо равенство:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right).$$

Таким образом, формула вычисления двойного интеграла в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b I(x) dx &= \iint_P f(x, y) dx dy = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \left(\int_c^d dy f(x, y) \right). \end{aligned}$$

Формула вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат через последовательное вычисление трёх (одномерных) определённых интегралов имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Формула вычисления двойного интеграла в криволинейной системе координат имеет следующий вид

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right) \right| d\xi d\eta,$$

где положено

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi, \eta), \\ y = \psi(\xi, \eta), \end{cases} \left| \det \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)} \right) \right| \equiv \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \right|.$$

В частности, вычисление двойного интеграла в полярных координатах

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

производится по формуле

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где якобиан

$$\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

где

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{z_1}^{z_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz, \end{aligned}$$

где якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Аналогично, Формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix},$$

где

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

имеет вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) dr.
\end{aligned}$$

Примеры с решением

Пример 6.3.1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

Решение. Область интегрирования D ограничена линиями

$$x = -1, x = 1, y = -\sqrt{1-x^2}, y = 1-x^2.$$

Первые две линии – вертикальные прямые линии, третья линия – нижняя полуокружность радиуса 1, четвёртая линия – парабола с вершиной в точке $(0; 1)$, ветви параболы направлены вниз. Область D представим объединением двух областей: области D_1 , ограниченной ветвями параболы $x = \pm\sqrt{1-y}$ и прямыми линиями $y = 0, y = 1$; области D_2 , ограниченной линиями $x = \pm\sqrt{1-y^2}, y = -1, y = 0$. Тогда имеем:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \otimes$$

Пример 6.3.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x \ln y dx dy,$$

где $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq e\}$.

Решение. Так как область D является прямоугольником, то интеграл вычисляется непосредственно по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D x \ln y dx dy &= \int_0^4 x dx \int_1^e \ln y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln y, \quad du = \frac{dy}{y}, \\ dv = dy, \quad v = y. \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^4 x dx \left\{ y \ln y \Big|_1^e - \int_1^e dy \right\} = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 \cdot \left\{ y \ln y \Big|_1^e - y \Big|_1^e \right\} = 8 \cdot (e - e + 1) = 8. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.3. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + 2y) dx dy$ по области D , ограниченной

линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

Решение. Область D ограничена, соответственно, слева – вертикальной прямой линией $x = 2$, справа – вертикальной прямой линией $x = 3$, сверху – прямой линией $y = 2x$, снизу – прямой линией $y = x$. Область простая относительно оси OY , следовательно, вычисляем интеграл по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x + 2y) dy = \int_2^3 dx \left(xy + y^2 \right) \Big|_{y=x}^{y=2x} = \\ &= \int_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2) dx = 4 \int_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3} x^3 \Big|_2^3 = \frac{76}{3}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (2x - y) dx dy$ по области D , ограниченной

линиями $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = x^2$.

Решение. Пользуясь формулой вычисления двойного интеграла по простой области, получаем:

$$\iint_D (2x - y) dx dy = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) dy = \int_1^2 dx \left(2xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^{y=x^2} =$$

$$= \int_1^2 \left(2x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{10}. \otimes$$

Пример 6.3.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 4y - y^2, \quad x + y = 6.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 4y + x = 0, \\ x + y = 6, \end{cases}$$

находим точки пересечения линий: $A(4; 2)$, $B(3; 3)$. Поэтому площадь фигуры равна

$$\begin{aligned} S \equiv \mu(D) &= \iint_D dx dy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left(x \Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy = \\ &= \int_2^3 (-y^2 + 5y - 6) dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.6. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью

$$\sigma(x, y) = 16x + \frac{9}{2}y^2$$

и ограниченной линиями с уравнениями

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = 0, \quad y^2 = 16x, \quad y \geq 0.$$

Решение. Так как

$$x = \frac{1}{16}y^2,$$

то $x \geq 0$. Поэтому область D можно задать неравенствами

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq y \leq 4\sqrt{x}.$$

Вычисляя двойной интеграл в декартовых координатах, получаем:

$$m(D) = \iint_D \sigma(x, y) dx dy = \iint_D \left(16x + \frac{9}{2}y^2 \right) dx dy =$$

$$= \int_0^{1/4} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9}{2} y^2 \right) dy = \int_0^{1/4} \left(16xy + \frac{3}{2} y^3 \right) \Big|_0^{4\sqrt{x}} dx = 160 \int_0^{1/4} x^{3/2} dx = 2. \otimes$$

Пример 6.3.7. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

переходя к полярным координатам, где область D – 1-я четверть круга

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Решение. Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то область в полярных координатах имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : 0 \leq r \leq a; 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

и, применяя формулу перехода к полярной системе координат, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{\Omega} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} r^3 \Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi a^3}{6}. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.8. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, переходя к полярным

координатам, если область D – кольцо, заключённое между окружностями $x^2 + y^2 = e^2$ и $x^2 + y^2 = e^4$.

Решение. Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Omega} \ln r^2 r dr d\varphi = 2 \iint_{\Omega} r \ln r dr d\varphi = \\ &= \left\{ \Omega : 0 \leq \varphi \leq 2\pi; e \leq r \leq e^2 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} r \ln r dr = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln r, \quad du = \frac{dr}{r}, \\ dv = r dr, \quad v = \frac{r^2}{2}. \end{array} \right\} = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{r^2}{2} \ln r \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} r dr \right\} = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} e^2 (3e^2 - 1) \right] d\varphi = \pi e^2 (3e^2 - 1). \otimes
\end{aligned}$$

Пример 6.3.9. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 4.$$

Решение. Тело ограничено кругом на плоскости XOY с центром в начале системы координат, координатными плоскостями и плоскостью

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1.$$

Поэтому в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr = \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (4 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) r dr = 16 \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] d\varphi = \\
&= 16 \left[\varphi - \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin \varphi - \cos \varphi) \right]_0^{\pi/2} = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 6.3.10. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x dx dy,$$

где область D ограничена линиями с уравнениями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0; \quad y^2 - 8y + x^2 = 0; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} x; \quad x = 0.$$

Р е ш е н и е. Задаём область D неравенствами в декартовой системе координат, для чего выделяем полные квадраты в уравнениях окружностей:

$$(y-2)^2 + x^2 = 4; (y-4)^2 + x^2 = 16,$$

Центры обеих окружностей имеют координаты $(0; 2)$ и $(0; 4)$, а сами окружности касаются начала системы координат. Первая окружность имеет радиус 2 и лежит, следовательно, внутри второй окружности с радиусом 4. Область D лежит между окружностями и координаты её точек удовлетворяют неравенствам

$$(y-2)^2 + x^2 \geq 4; (y-4)^2 + x^2 \leq 16.$$

Кроме этого, область D лежит между указанными прямыми линиями, проходящими через начало системы координат. Так как окружности лежат выше оси OX , то область D лежит над прямой линией $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ и справа от прямой линии $x = 0$. Поэтому координаты точек области

D удовлетворяют неравенствам

$$y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0.$$

Таким образом,

$$D = \left\{ (x; y) : \begin{array}{l} (y-2)^2 + x^2 \geq 4, \\ (y-4)^2 + x^2 \leq 16, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0. \end{array} \right.$$

Для вычисления используем полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

Формула вычисления двойного интеграла принимает вид

$$\iint_D x dx dy = \iint_{\Omega} r \cos \varphi r dr d\varphi.$$

В неравенствах, определяющих область интегрирования, производим замену $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получаем

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : \begin{cases} (r \sin \varphi - 2)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \geq 4, \\ (r \sin \varphi - 4)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \leq 16, \\ r \sin \varphi \geq \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{3}}, r \cos \varphi \geq 0. \end{cases} \right.$$

Решение этих неравенств относительно r и φ имеет вид

$$\Omega = \left\{ (r; \varphi) : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4 \sin \varphi \leq r \leq 8 \sin \varphi. \end{cases} \right.$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$\iint_D x dx dy = \iint_{\Omega} r \cos \varphi r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r^2 dr,$$

Интегрируя последовательно, получаем:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_{4 \sin \varphi}^{8 \sin \varphi} r^2 dr = 35. \otimes$$

Пример 6.3.11. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V (x - 2y + z) dx dy dz,$$

где область V – параллелепипед, заданный неравенствами

$$-1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1.$$

Решение. Используя формулу (1.50)

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

получаем:

$$I = \iiint_V (x - 2y + z) dx dy dz = \int_{-1}^2 dx \int_1^3 dy \int_0^1 (x - 2y + z) dz = -18. \otimes$$

Пример 6.3.12. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz,$$

где область V – пирамида, ограниченная плоскостями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2.$$

Решение. Запишем уравнение плоскости

$$z = 2 - x - y,$$

«ограничивающей пирамиду» сверху, в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

Теперь можем изобразить пирамиду (рисунок 3.1).

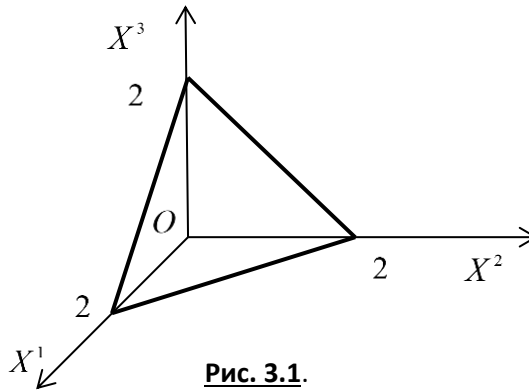


Рис. 3.1.

Применяем для решения формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} dy \int_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

расставляя пределы в соответствии с условиями задачи:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left[x \cdot z + y \cdot z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} dy = \int_0^2 dx \left[2y - x \cdot \frac{y^2}{2} - y \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{2-x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{8}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left[\frac{8}{3}x - x^2 + \frac{x^4}{24} \right]_0^2 = 2. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.3.13. Найти объём кругового цилиндра высоты H с радиусом основания R .

Р е ш е н и е. Формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат имеет вид:

цилиндрических координатах:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H dz = \pi R^2 H. \otimes$$

Пример 6.3.14. Найти объём шара радиуса R .

Р е ш е н и е. Для вычисления объёма шара используем формулу вычисления тройного интеграла в сферических координатах. Учитывая, что

$$f(x, y, z) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \equiv 1,$$

получаем:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3. \otimes$$

Пример 6.3.15. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями

$$z = \frac{9}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (конус),}$$

$$z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2 \text{ (эллиптический параболоид).}$$

Р е ш е н и е. Область V – тело вращения вокруг оси OZ , поэтому переходим к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Для искомого интеграла получаем:

$$\iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \cos^2 \varphi r dr d\varphi dz.$$

Задаём область Ω' неравенствами, заменяя в уравнениях поверхностей декартовы координаты цилиндрическими координатами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Получаем два двойных неравенства:

$$\frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2 \quad \text{и} \quad \frac{11}{2} - r^2 \leq z \leq \frac{9}{2}r.$$

Для выбора верного неравенства решаем уравнение

$$\frac{9}{2}r = \frac{11}{2} - r^2.$$

Единственное положительное решение $r = 1$, следовательно, $0 \leq r \leq 1$. При этих значениях верное неравенство

$$\frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2.$$

Область

$$\Omega = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{9}{2}r \leq z \leq \frac{11}{2} - r^2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Переход к повторному интегралу даёт:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \cos^2 \varphi r dr d\varphi dz = \\ &= \iiint_{\Omega'} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi dz = \dots = \pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 4. Некоторые приложения криволинейных и кратных интегралов

Предварительные сведения

Электрическое поле линейного непрерывно-распределённого электрического заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\int_W \frac{\gamma\left(\vec{x}\right) \cdot\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{4 \pi \varepsilon \varepsilon_0\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3} d l, \quad (1)$$

где $\vec{x}_0$ – точка наблюдения, а линейная плотность заряда равна

$$\gamma\left(\vec{x}\right)=\frac{d Q\left(\vec{x}\right)}{d l}.$$

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат вычисляется по формуле

$$S=\iint_{D'} r^2(\varphi) d r d \varphi.$$

Формула Грина имеет вид

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y) d x d y=\oint_{\Gamma} P(x, y) d x+Q(x, y) d y$$

Примеры с решением

Пример 6.4.1. Найти напряжённость электрического поля однородно заряженной проволоки длиной L , имеющей форму дуги окружности радиуса r , в центре окружности, считая линейную плотность заряда постоянной.

Решение. Так как $\gamma\left(\vec{x}\right)=const$, то формула (1) принимает вид

$$\vec{E}\left(\vec{x}_0\right)=\frac{\gamma}{4 \pi \varepsilon \varepsilon_0} \int_W \frac{\left(\vec{x}_0-\vec{x}\right)}{\left\|\vec{x}_0-\vec{x}\right\|^3} d l =$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_W \frac{x_0 - x}{\|\vec{x_0} - \vec{x}\|^3} dl \right) \vec{e}_1 + \left(\int_W \frac{y_0 - y}{\|\vec{x_0} - \vec{x}\|^3} dl \right) \vec{e}_2 \right]. \quad (2)$$

Вспомним параметрические уравнения окружности (рисунок 4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cos t \cdot \vec{e}_1 + r \sin t \cdot \vec{e}_2 \quad (3)$$

– векторная форма;

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \quad (4)$$

– скалярная форма.

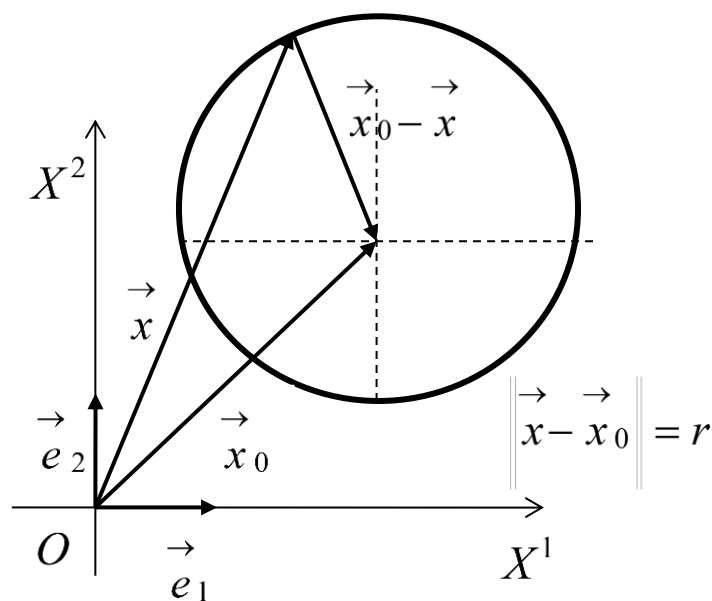


Рис. 4.1.

Чтобы воспользоваться для вычисления интеграла формулой

$$\int_W f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}(t) \right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}(t) \right]^2} dt,$$

нам нужен дифференциал длины дуги кривой $dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt$. По формуле (3) имеем:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -r \sin t \cdot \vec{e}_1 + r \cos t \cdot \vec{e}_2.$$

Отсюда для нормы вектора скорости получаем

$$\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r,$$

откуда имеем

$$dl = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt = r dt.$$

С учётом того, что в рассматриваемом случае точка наблюдения помещена в центр окружности, а точки источника поля находятся в точках самой окружности и очевидного равенства

$$\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\| = \left\| \vec{x}_0 - \vec{x} \right\|,$$

дальнейшие вычисления напряжённости электрического поля в центре окружности проводятся так:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}_0) &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_W \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl \right) \vec{e}_1 + \left(\int_W \frac{y_0 - y}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|^3} dl \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r \cos t}{r^3} r dt \right) \vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{r \sin t}{r^3} r dt \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\cos t}{r} dt \right) \vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\sin t}{r} dt \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[\left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos t dt \right) \vec{e}_1 + \left(\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin t dt \right) \vec{e}_2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[\left(\sin t \begin{vmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_1 + \left(-\cos t \begin{vmatrix} \alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_2 \right] = \\
&= -\frac{\gamma}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \left[2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1 - \underbrace{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right)}_{=0} \vec{e}_2 \right] = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1.
\end{aligned}$$

Получили следующую формулу для электрического поля, создаваемого в центре окружности линейным равномерным распределением заряда

$$\vec{E} \left(\begin{matrix} \vec{x}_0 \end{matrix} \right) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \vec{e}_1. \quad (6)$$

Из формулы (6) легко получаем формулу для нормы напряжённости электрического поля

$$E = \left\| \vec{E} \left(\begin{matrix} \vec{x}_0 \end{matrix} \right) \right\| = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (7)$$

из которой следует:

$$1) E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \text{ при } \alpha = \pi;$$

$$2) E = 0 \text{ при } \alpha = 2\pi. \otimes$$

Пример 6.4.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad x = 0.$$

Р е ш е н и е. Область ограничена окружностями и прямыми, поэтому решаем задачу в полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

При переходе к полярным координатам область D перейдёт в область D' , ограниченную линиями

$$r = 4 \cos \varphi, \quad r = 8 \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна $S = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi$. В полярных координатах область D' задаётся неравен-

ствами

$$D' = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 4\cos\varphi \leq r \leq 8\cos\varphi. \end{cases}$$

Переход от двойного интеграла к повторному интегралу даёт:

$$S = \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr.$$

Результат получается интегрированием:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D'} r^2 dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r dr = 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi = \left\{ \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right\} = \\ &= 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = 8\pi - (6 + 3\sqrt{3}). \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.4.3. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy, \quad (1)$$

где Γ – окружность с уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, причём обход окружности осуществляется против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Формула Грина имеет вид:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Сравнивая с (1), видим, что $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) = x^2 + y^2.$$

Следовательно, получаем

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\Omega} r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}. \otimes$$

Пример 6.4.4. Применяя формулу Грина, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми линиями с уравнениями

$$y = x^2, x = y^2, 8xy = 1,$$

примыкающей к началу системы координат.

Решение. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле:

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Рассмотрим вид фигуры. Первая и вторая кривые линии – это стандартные параболы с осью OY и OX соответственно. Решая совместно уравнения кривых линий, найдём точки их пересечения:

$$A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right).$$

Применим формулу для вычисления площади плоской фигуры:

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{OA} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{AB} x dy - y dx + \frac{1}{2} \int_{BO} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x^2 dx - \frac{1}{8} \int_{1/2}^{1/4} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int_{1/4}^0 \sqrt{x} dx = \frac{1+3\ln 2}{24} \approx 0,13. \otimes \end{aligned}$$

Практическое занятие 5. Поверхностные интегралы

Предварительные сведения

Формула вычисления поверхностного интеграла первого рода имеет вид

$$\iint_F f(x^1, x^2, x^3) dS =$$

$$= \iint_{G^{12}} f(x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x^1, x^2) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}(x^1, x^2) \right]^2} dx^1 dx^2,$$

где двойной интеграл в правой части формулы вычисляется по проекции G^{12} поверхности F , задаваемой уравнением $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$ на координатную плоскость $X^1 O X^2$.

Если поверхность F однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то **общий поверхностный интеграл второго рода** является суммой частных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 + \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 + \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 &\stackrel{def}{=} \\ &= \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 + \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 + \\ &+ \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \iint_F H_3(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 &= \iint_{G^{12}} H_3(x^1, x^2, \varphi^3(x^1, x^2)) dx^1 dx^2, \\ \iint_F H_1(x^1, x^2, x^3) dx^2 dx^3 &= \iint_{G^{23}} H_1(\varphi^1(x^2, x^3), x^2, x^3) dx^2 dx^3, \\ \iint_F H_2(x^1, x^2, x^3) dx^3 dx^1 &= \iint_{G^{13}} H_2(x^1, \varphi^2(x^1, x^3), x^3) dx^1 dx^3 \end{aligned}$$

– двойные интегралы, вычисляемые по однозначным проекциям поверхности на координатные плоскости.

Примеры с решением

Пример 6.5.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS,$$

где F – часть конической поверхности, заключённой между плоскостями с уравнениями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \iint_F f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{G^{12}} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

В силу условий задачи выбираем верхнюю часть конической поверхности с уравнением

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл по формуле (1):

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy.$$

Так как область G^{12} – это круг, определённый неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$, то

$$\iint_F (x^2 + y^2) dS = \iint_{G^{12}} \sqrt{2} \cdot (x^2 + y^2) dx dy = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi \cdot \otimes$$

Пример 6.5.2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_F (\sqrt{a^2 - x^2} + z) y dS,$$

где F – поверхность цилиндра

$$x^2 + z^2 = a^2,$$

заклѳчѳнная между плоскостями $y = b$ и $y = c$.

Р е ш е н и е. Из уравнения

$$x^2 + z^2 = a^2$$

следует

$$z = \varphi^3(x, y) = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Поверхность F разбилась на две части: F_1 ($z \geq 0$) и F_2 ($z \leq 0$). Определим элемент поверхности dS в соответствии с формулой вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0;$$

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Подставляя элемент поверхности в формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_F f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy,$$

получим:

$$\begin{aligned} \iint_F (\sqrt{a^2 - x^2} + z) y dS &= \\ &= \iint_{F_1} (\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}) y dS + \iint_{F_2} (\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}) y dS = \\ &= \iint_{G_1} 2\sqrt{a^2 - x^2} y \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a \iint_{G_1} y dx dy = \\ &= 2a \int_{-a}^a dx \int_b^c y dy = 2a^2 (c^2 - b^2). \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.5.3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F x^2 y^2 z dx dy$$

по верхней стороне верхней половины сферы с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Решение. Проекцией верхней полусферы на координатную плоскость XOY является круг, ограниченный окружностью

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение верхней полусферы

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл так:

$$\iint_F x^2 y^2 z dx dy = \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Вычисления проводим в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \iint_{G^{12}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_{G^{12}} r^5 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \sqrt{R^2 - r^2} dr d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^5 \sqrt{R^2 - r^2} dr = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{R^2 - r^2} = t; R^2 - r^2 = t^2; \\ r dr = -t dt; r^4 = (R^2 - t^2)^2. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \int_0^R (R^2 - t^2)^2 t^2 dt \\ &= \frac{2}{105} \pi R^7. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.5.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_F x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где F – верхняя сторона части плоскости с уравнением $x + z - 1 = 0$, отсечённая плоскостями с уравнениями $y = 0$, $y = 4$ и лежащая в первом октанте.

Р е ш е н и е. Заданная поверхность изображена на рисунке 5.1. Для вычисления интеграла используем формулу вычисления общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\begin{aligned} \iint_F P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iint_{G_{23}} P(\varphi(y, z), y, z) dy dz + \iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz + \\ &+ \iint_{G_{12}} R(x, y, \omega(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

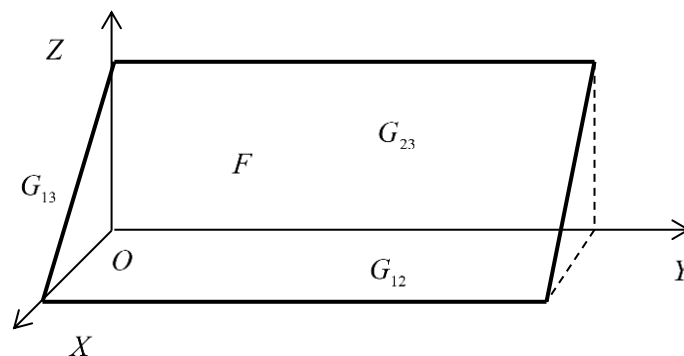


Рис. 5.1.

Так как плоскость параллельна оси OY , то

$$\iint_{G_{13}} Q(x, \psi(x, z), z) dx dz = 0.$$

Получаем:

$$\iint_F x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_{G_{23}} (1-z) dy dz + \iint_{G_{12}} (1-x) dx dy = 4. \otimes$$

Практическое занятие 6. Векторный анализ

Предварительные сведения

В декартовой системе координат градиент скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \vec{e}_3.$$

Производная скалярного поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ в точке N_0 по направлению, заданному век-

тором $\vec{N}_0 N$, имеющим орт

$$\vec{h} = \frac{1}{\|\vec{N}_0 N\|} \vec{N}_0 N$$

по определению равна

$$\frac{\partial f}{\partial h} \left(\vec{x}_0 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f \left(\vec{x}_0 + t \vec{h} \right) - f \left(\vec{x}_0 \right)}{t}$$

и вычисляется по одной из следующих формул

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{h}} \left(\vec{x} \right) = \left(\vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x} \right), \vec{h} \right) = \frac{\left(\vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x} \right), N_0 N \right)}{\left\| N_0 N \right\|} = \text{Pr}_{\vec{h}} \left\{ \vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x} \right) \right\}.$$

Дивергенция векторного поля $\vec{A} \left(\vec{x} \right)$ в некоторой точке $\vec{x}$ в декартовой системе координат

вычисляется по формуле:

$$\text{div} \vec{A} \left(\vec{x} \right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{A} \left(\vec{x} \right) \right).$$

Формула для нахождения ротора векторного поля в декартовой системе координат имеет вид:

$$\text{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \left(\vec{x} \right) \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Потоком Φ векторного поля $\vec{A} \left(\vec{x} \right)$ через поверхность F называется поверхностный интеграл

второго рода

$$\begin{aligned} \Phi &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_F \left(\vec{A}, d\vec{s} \right) = \iint_F \left(\vec{A} \left(\vec{x} \right), \vec{n} \right) dS = \\ &= \iint_F \left(A_1 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_1 + A_2 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_2 + A_3 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_3 \right) dS = \\ &= \iint_F A_1 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_1 dS + \iint_F A_2 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_2 dS + \iint_F A_3 \left(\vec{x} \right) \cos \theta_3 dS = \\ &= \iint_{G^{23}} A_1 \left(\omega \left(x^2, x^3 \right), x^2, x^3 \right) dx^2 dx^3 + \iint_{G^{13}} A_2 \left(x^1, \psi \left(x^1, x^3 \right), x^3 \right) dx^1 dx^3 + \\ &+ \iint_{G^{12}} A_3 \left(x^1, x^2, \phi \left(x^1, x^2 \right) \right) dx^1 dx^2, \end{aligned}$$

где

$$d\vec{s} = \left\| d\vec{s} \right\| \frac{d\vec{s}}{\left\| d\vec{s} \right\|} = ds \vec{n}.$$

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля через замкнутую поверхность (в направлении внешней нормали) равен тройному интегралу от дивергенции поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью:

$$\oiint_F \left(\vec{A}(\vec{x}), d\vec{s} \right) = \iiint_V \left(\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right) dV.$$

Циркуляцией векторного поля $\vec{A}(\vec{x})$ по замкнутому контуру Γ называется криволинейный интеграл второго рода

$$C_A \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\Gamma} \left(\vec{A}, d\vec{l} \right) = \oint_{\Gamma} A_t dl.$$

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\vec{A}(\vec{x})$ по замкнутому контуру Γ равна

потoku векторного поля

$$\text{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right]$$

через поверхность, ограниченную контуром Γ :

$$\oint_{\Gamma} \left(\vec{A}(\vec{x}), d\vec{l} \right) = \iint_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A}(\vec{x}) \right], d\vec{s} \right) \equiv \iint_S \left(\text{rot} \vec{A}(\vec{x}), \vec{n} \right) ds.$$

Приведём краткую сводку наиболее часто используемых формул векторного анализа:

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \cdot \text{grad}\psi + \psi \cdot \text{grad}\varphi;$$

$$\text{div}(\psi \vec{A}) = \psi \cdot \text{div} \vec{A} + \left(\vec{A}, \text{grad}\psi \right);$$

$$\text{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{B}, \text{rot} \vec{A} \right) - \left(\vec{A}, \text{rot} \vec{B} \right);$$

$$\text{rot}(\psi \vec{A}) = \psi \cdot \text{rot} \vec{A} + \left[\text{grad}\psi, \vec{A} \right];$$

$$\text{grad}f(\xi) = f'(\xi) \cdot \text{grad}\xi;$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A};$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \psi \right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^3)^2}.$$

В декартовых координатах справедлива также формула

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{e}_1 \vec{\nabla}^2 A^1 + \vec{e}_2 \vec{\nabla}^2 A^2 + \vec{e}_3 \vec{\nabla}^2 A^3.$$

Примеры с решением

Пример 6.6.1. Найти градиент сферически-симметричного скалярного поля

$$u = \varphi(r),$$

где $r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. По определению градиента имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi(r) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(r) \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r) \vec{e}_3 = \\ &= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x}{r} \vec{e}_1 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y}{r} \vec{e}_2 + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z}{r} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \otimes \end{aligned}$$

Отметим, что векторное поле, определяемое соотношением $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$, называется **по-**

тенциальным полем, а скалярная функция φ называется **потенциалом** векторного поля $\vec{a}$. Само

векторное поле $\vec{a} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ называется **потенциальным** полем. Иногда потенциальное поле

определяют соотношением $\vec{a} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Пример 6.6.2. Найти дивергенцию сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}.$$

Решение. По определению дивергенции имеем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \varphi(r) \vec{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)x] + \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)y] + \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)z] =$$

$$= \frac{d\varphi}{dr} \frac{x^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{y^2}{r} + \varphi(r) + \frac{d\varphi}{dr} \frac{z^2}{r} + \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \cdot r + 3\varphi(r). \quad \otimes$$

Векторное поле называется *соленоидальным*, если выполнено условие $\operatorname{div} \vec{a} = 0$. $\otimes$

Пример 6.6.3. Найти условие соленоидальности векторного поля из предыдущего примера.

Решение. Условие соленоидальности $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ для поля $\vec{a} = \varphi(r) \vec{r}$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi}{dr} \cdot r + 3\varphi(r) = 0$$

С разделяющимися переменными. Разделяя переменные и учитывая, что в случае функций одного

переменного производная $\frac{d\varphi}{dr}$ – это отношение двух дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -3 \frac{dr}{r}. \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем $\ln|\varphi| = -3\ln r + C_1$. Записывая произвольную постоянную в логарифмическом виде $C_1 = \ln C$, где C – произвольная положительная постоянная, по-

лучаем $\varphi = \frac{C}{r^3}$. Здесь C уже произвольная (не обязательно положительная) постоянная. $\otimes$

Пример 6.6.4. Найти ротор сферически-симметричного векторного поля

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r},$$

где $r = \left\| \vec{r} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. Записывая векторное поле в разложении по декартовому базису

$$\vec{a} = \varphi(r) \vec{r} = \varphi(r)x \vec{e}_1 + \varphi(r)y \vec{e}_2 + \varphi(r)z \vec{e}_3,$$

и используя определение ротора, получаем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{a} &= \left[\vec{\nabla}, \vec{a} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi(r)x & \varphi(r)y & \varphi(r)z \end{vmatrix} = \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)z] - \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)y] \right\} \vec{e}_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(r)x] - \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)z] \right\} \vec{e}_2 \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(r)y] - \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(r)x] \right\} \vec{e}_3 = \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r} \right) \vec{e}_1 + \\
&+ \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{zx}{r} - \frac{xz}{r} \right) \vec{e}_2 + \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r} \right) \vec{e}_3 = \vec{0}. \otimes
\end{aligned}$$

Векторное поле, для которого выполнено соотношение $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$, называется **безвихревым** полем. Из предыдущей задачи следует, что сферически-симметричное векторное поле является безвихревым полем.

Пример 6.6.5. Доказать, что

$$\operatorname{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \right) - \left(\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right). \quad (1)$$

Решение. Для решения применим правило действия оператора $\vec{\nabla}$ на произведение функций

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\varphi \cdot \omega \cdot \dots \cdot \psi) &= \\
&= \vec{\nabla} \left(\overset{\vee}{\varphi} \cdot \omega \cdot \dots \cdot \psi \right) + \vec{\nabla} \left(\varphi \cdot \overset{\vee}{\omega} \cdot \dots \cdot \psi \right) + \dots + \vec{\nabla} \left(\varphi \cdot \omega \cdot \dots \cdot \overset{\vee}{\psi} \right), \quad (2)
\end{aligned}$$

где символ $\vee$ над функцией устанавливает порядок действия оператора $\vec{\nabla}$ на соответствующую функцию. Для скалярных полей имеется в виду просто произведение функций, для векторных полей произведение может быть как скалярным, так и векторным.

Учитывая, что

$$\operatorname{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \vec{B} \right] \right),$$

в левой части (1) получаем:

$$\operatorname{div} \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \vec{B} \right] \right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B} \right] \right) + \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right),$$

Первое смешанное произведение в правой части последнего равенства преобразуется к виду:

$$\left(\vec{\nabla}, \left[\overset{\vee}{\vec{A}}, \vec{B} \right] \right) = \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right], \vec{B} \right) = \left(\vec{B}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right) = \left(\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A} \right). \quad (3)$$

Аналогично, второе смешанное произведение в правой части того же равенства преобразуется к виду

$$\left(\vec{\nabla}, \left[\vec{A}, \overset{\vee}{\vec{B}} \right] \right) = - \left(\vec{\nabla}, \left[\overset{\vee}{\vec{B}}, \vec{A} \right] \right) = - \left(\vec{A}, \left[\vec{\nabla}, \vec{B} \right] \right) = - \left(\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right). \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), получаем (1). $\otimes$

Пример 6.6.6. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot} \left(u \cdot \vec{A} \right) = \left[\vec{\operatorname{grad}} u, \vec{A} \right] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{A},$$

где $u(M)$ – скалярное, а $\vec{A}(M)$ – векторное поля.

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(u \cdot \vec{A} \right) &= \left[\vec{\nabla}, u \cdot \vec{A} \right] = \left[\vec{\nabla}, \overset{\vee}{u} \cdot \vec{A} \right] + \left[\vec{\nabla}, u \cdot \overset{\vee}{\vec{A}} \right] = \\ &= \left[\vec{\nabla} u, \vec{A} \right] + u \cdot \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right] = \left[\vec{\operatorname{grad}} u, \vec{A} \right] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{A}. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.7. Доказать, что справедлива формула

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

где Δ – оператор Лапласа $\Delta = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right)$.

Решение. Для доказательства используем формулу для двойного векторного произведения

$$\left[\vec{A}, \left[\vec{B}, \vec{C} \right] \right] = \vec{B} \left(\vec{A}, \vec{C} \right) - \vec{C} \left(\vec{A}, \vec{B} \right),$$

полагая $\vec{A} = \vec{B} = \vec{\nabla}$, получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right] = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla}, \vec{A} \right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \right) \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \otimes$$

Пример 6.6.8. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{A} = x^3 \vec{e}_1 - y^2 \vec{e}_2 + y \vec{e}_3$$

по замкнутому контуру $(t \in [0, 2\pi])$, заданному уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = \cos t - \sin t.$$

Решение. По определению циркуляция равна криволинейному интегралу второго рода

$$C = \oint_{\Gamma} \left(\vec{A}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz.$$

Криволинейный интеграл вычисляем, сводя его к определённым интегралам:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} x^3 dx - y^2 dy + y dz = \\ & = \int_0^{2\pi} \left(-\cos^3 t \sin t - 27 \sin^2 t \cos t - 3 \sin^2 t - 3 \sin t \cos t \right) dt = \\ & = - \int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t dt - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \\ & = \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\cos t) - 27 \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) - \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) d(2t) - 3 \int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t) = -3\pi. \otimes$$

Пример 6.6.9. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = -\omega x_2 \vec{e}_1 + \omega x_1 \vec{e}_2$$

по простому замкнутому контуру, представляющему собой окружность с центром в начале системы координат и радиусом R , в положительном направлении.

Решение. Параметризация окружности

$$x_1 = R \cos t, \quad x_2 = R \sin t,$$

где $t \in [0, 2\pi]$. Поэтому по определению циркуляции получаем:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} -\omega x_2 dx_1 + \omega x_1 dx_2 = \\ &= \omega \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) dt = 2\pi R^2 \omega. \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.10. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \vec{e}_1 + (2x_1 + x_3) \vec{e}_2 + (x_1 - x_2) \vec{e}_3$$

по контуру треугольника ABC , если $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

Решение. Для решения применим формулу Стокса, согласно которой

$$C = \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F} \right) ds.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник, имеет вид

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{1} = 1,$$

или

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6.$$

Находим ротор векторного поля:

$$\begin{aligned}
\vec{rot F} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & 2x_1 + x_3 & x_1 - x_2 \end{vmatrix} = \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (2x_1 + x_3) \right] \vec{e}_1 - \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \right] \vec{e}_2 + \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (2x_1 + x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 + 3x_2 + 2x_3) \right] \vec{e}_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Теперь циркуляция

$$\begin{aligned}
C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, \vec{rot F} \right) ds = \\
&= -2 \iint_{G^{23}} dx_2 dx_3 + \iint_{G^{13}} dx_3 dx_1 - \iint_{G^{12}} dx_1 dx_2 = \\
&= -2 \int_0^3 dx_2 \int_0^{1-x_2/3} dx_3 + \int_0^1 dx_3 \int_0^{2-x_3} dx_1 - \int_0^2 dx_1 \int_0^{3-3x_1/2} dx_2 = \\
&= -2 \left[x_2 - \frac{1}{6} x_2^2 \right]_0^3 + \left[2x_3 - x_3^2 \right]_0^1 - \left[3x_1 - \frac{3}{4} x_1^2 \right]_0^2 = -5. \otimes
\end{aligned}$$

Пример 6.6.11. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{F} = x_2 \vec{e}_1 - x_1 \vec{e}_2 + a \vec{e}_3 \quad (a = \text{const})$$

вдоль окружности с уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0$$

в положительном направлении двумя способами.

Решение. 1) Вычислим циркуляцию непосредственно, учитывая, что параметризация окружности имеет вид ($R = 1$):

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \oint_{\Gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t] dt = - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

2) Вычислим циркуляцию по формуле Стокса. Сначала найдём ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 & -x_1 & a \end{vmatrix} = -2 \vec{e}_3.$$

Нормаль плоскости треугольника $\vec{n} = \vec{e}_3$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} C &= \oint_{\Gamma} \left(\vec{F}, d\vec{x} \right) = \iint_S \left(\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{F} \right) ds = -2 \iint_S \left(\vec{n}, \vec{e}_3 \right) ds = -2 \iint_S dx_1 dx_2 = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -2\pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.12. Найти поток радиус-вектора

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

через произвольную гладкую замкнутую поверхность F , ограничивающую область Ω , имеющую объём V .

Решение. Находим дивергенцию поля радиус-вектора:

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса (10.10.13):

$$\oint_F \left(\vec{r}, d\vec{s} \right) = \iiint_V \left(\vec{\nabla}, \vec{r} \right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V.$$

Из полученной формулы следует формула для вычисления объёма области Ω при помощи поверхностных интегралов

$$V = \frac{1}{3} \oiint_F \left(\vec{r}, \vec{n} \right) ds,$$

которая в декартовых координатах принимает вид

$$V = \frac{1}{3} \oiint_F (x n_1 + y n_2 + z n_3) ds = \frac{1}{3} \oiint_F (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – координаты орта нормали $\vec{n}$. $\otimes$

Пример 6.6.13. Найти поток векторного поля радиус-вектора

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

Через поверхность с уравнением

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0 \quad (0 \leq z \leq 1).$$

Решение. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Phi = \oiint_S \left(\vec{F}, \vec{n} \right) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv.$$

Так как

$$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

а поверхность – это конус с вершиной в точке $(0; 0; 1)$, ограниченный плоскостями с уравнениями

$z = 0$ и $z = 1$, то переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_S \left(\vec{r}, \vec{n} \right) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} dv = 3 \iiint_V dv = 3 \iiint_{\Omega} r d\varphi dr dz = \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(1-r) dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \pi. \quad \otimes \end{aligned}$$

Пример 6.6.14. Найти поток поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2}$$

точечного источника электрического поля через сферу с уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Поток векторного поля через поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi = \iint_S \left(\vec{F}, d\vec{s} \right) = \iint_S \left(\vec{F}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds.$$

Так как $r = R = \text{const}$ и скалярное произведение ортов

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) = 1,$$

получаем:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}, \vec{n} \right) ds = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \iint_S ds = \frac{q4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi q}{4\pi\epsilon\epsilon_0}. \otimes$$

Практическое занятие 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Предварительные сведения

Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Его общее решение находится по определению первообразной:

$$y(x) = \int f(x) dx + C,$$

где C – произвольная постоянная величина.

Уравнение с разделёнными переменными имеют вид

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0.$$

Общее решение этого уравнения находится по формуле

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$P(x)T(y)dx + Q(x)S(y)dy = 0.$$

После разделения переменных получаем уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \frac{S(y)}{T(y)}dy = 0,$$

решая которое, получаем общее решение в виде

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int \frac{S(y)}{T(y)} dy = C.$$

Линейное неоднородное ОДУ первого порядка в приведённой форме записи имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Однородное уравнение решается путём разделения переменных, а неоднородное методом вариации произвольной постоянной. Формула для общего решения неоднородного уравнения имеет вид

$$z(x) = \left(\int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + A \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Простейшее ОДУ высшего порядка имеет вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Его общее решение находится путём последовательного интегрирования и имеет вид:

$$y(x) = \underbrace{\int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx}_{n \text{ раз}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + C_3 + \dots \\ + C_{n-2} \frac{x^2}{2!} + C_{n-1} x + C_n.$$

Линейное ОДУ высшего порядка, соответственно, неоднородное и однородно, имеет вид:

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = g(x),$$

$$p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + p_n(x) y = 0.$$

Задача Коши для уравнения (неоднородного, или однородного) ставится так: **найти решение соответствующего уравнения, удовлетворяющее начальным условиям**

$$y|_{x=x_0} = y_0, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = y_0^1, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}|_{x=x_0} = y_0^{n-1}.$$

Линейное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = f(x).$$

Находя линейно независимую систему решений соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

– **фундаментальную систему решений** (ФСР) $\{y_1, y_2\}$, можем составить общее решение однородного уравнения в виде линейной комбинации найденных частных решений.

При подстановке в однородное уравнение функции e^{kx} приходим к характеристическому уравнению

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0.$$

В зависимости от того, какие решения будут у характеристического уравнения, приходим к следующим трём случаям построения общего решения однородного дифференциального уравнения.

1) Корни характеристического уравнения простые и вещественные, то есть $k_1 \neq k_2 \in R^1$.

Тогда ФСР есть $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Корень k вещественный, кратности 2. Тогда ФСР есть $\{e^{kx}, xe^{kx}\}$ и общее решение

имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{kx} (C_1 + x C_2).$$

3) Корни комплексно-сопряжённые $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Тогда ФСР есть $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$ и общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Для решения неоднородного уравнения применяется **метод Лагранжа**. Решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$z(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

Составляется СЛАУ следующего вида

$$\begin{cases} y_1(x) \frac{dC_1(x)}{dx} + y_2(x) \frac{dC_2(x)}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1(x)}{dx} \frac{dC_1(x)}{dx} + \frac{dy_2(x)}{dx} \frac{dC_2(x)}{dx} = f(x). \end{cases}$$

Здесь $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – новые функции, подлежащие определению, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – элементы ФСР соответствующего однородного уравнения. Решение СЛАУ относительно производных новых функций ищется любым методом. В общем виде это решение записывается так

$$\begin{cases} \frac{dC_1(x)}{dx} = \varphi(x), \\ \frac{dC_2(x)}{dx} = \psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти независимые простейшие ОДУ, и подставляя результаты в общий вид решения неоднородного уравнения, получаем общее решение в форме

$$z(x) = A_1 y_1(x) + A_2(x) y_2(x) + y_1(x) \int \varphi(x) dx + y_2(x) \int \psi(x) dx.$$

Примеры с решением

Пример 6.7.1. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx.$$

Решение. 1) Перепишем данное уравнение в виде

$$2y(x^2 + 3)dy = 3x(2 + y^2)dx.$$

2) Замечаем, что $x^2 + 3 > 0$, $2 + y^2 > 0$. Поэтому можно разделить переменные, деля обе части уравнения на $(x^2 + 3)(2 + y^2)$:

$$\frac{2y}{2 + y^2} dy = \frac{3x}{x^2 + 3} dx.$$

3) Используем формулу для нахождения решения:

$$\int \frac{2y}{2 + y^2} dy + C_1 = \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + C_2;$$

$$\ln(2 + y^2) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C;$$

$$C = C_2 - C_1.$$

4) Преобразуем полученный интеграл:

$$2 \ln(2 + y^2) - 3 \ln(x^2 + 3) = C;$$

$$\ln \frac{(2 + y^2)^2}{(x^2 + 3)^3} = C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$\ln \frac{(2+y^2)^2}{(x^2+3)^3} = C$$

при всевозможных значениях параметра C . $\otimes$

Пример 6.7.2. Найти частное решение уравнения

$$(1+y^2)dx = xydy,$$

если $y=1$ при $x=2$.

Решение. 1) Разделяем переменные:

$$\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{dx}{x}.$$

2) Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{dx}{x} + \ln C;$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln|x| + \ln C;$$

$$(1+y^2) = Cx^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то имеем

$$y^2 = Cx^2 - 1$$

3) Используем начальные условия:

$$4 = 2C; C = 2; x^2 = 2(1+y^2).$$

4) Частный интеграл:

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}.$$

Ответ: $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}$. $\otimes$

Пример 6.7.3. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение с однородной правой частью.

1) Разделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2\frac{y}{x} - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 - 6\frac{y}{x}}.$$

2) Совершаем подстановку

$$u(x) = \frac{y}{x},$$

где $u(x)$ — новая искомая функция. Так как

$$y' = u + xu',$$

получаем новый вид уравнения:

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u}.$$

После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1 + u^2}{2 - 6u}.$$

3) Разделяем переменные, предполагая, что $1 + u^2 \neq 0$, $x \neq 0$:

$$\frac{2 - 6u}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

4) Интегрируем:

$$2\arctgu - 3\ln(1 + u^2) = \ln|x| + C.$$

Заменяя $u(x) = \frac{y}{x}$, получаем:

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C.$$

Ответ: Интегральные кривые определяются уравнением

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 3\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln|x| = C. \otimes$$

Пример 6.7.4. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}.$$

Решение. Здесь $p(x) = 3$, $f(x) = e^{2x}$.

1) Сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -3y,$$

соответствующее данному неоднородному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = -3y;$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx;$$

$$\ln|y| = -3x + \ln C_1;$$

$$|y| = C_1 e^{-3x};$$

$$y = C_2 e^{-3x}.$$

2) Ищем решение исходного уравнения в виде $z = C_2(x)e^{-3x}$. Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$\frac{dC_2(x)}{dx} = e^{5x};$$

$$C_2(x) = \int e^{5x} dx + C;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

3) Подставляем в решение:

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

Ответ: общее решение имеет вид

$$z = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}. \otimes$$

Пример 6.7.5. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$$

с начальным условием $y(1) = 1$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right),$$

следующей из метода вариации произвольной постоянной.

1) Находим общее решение:

$$z = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \right) = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(-2 \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} \right) = \frac{1}{x} + Cx.$$

2) Используем начальное условие

$$\frac{1}{1^2} + C = 1,$$

откуда $C = 0$. Решение задачи Коши принимает вид:

$$z = \frac{1}{x}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{x}. \otimes$

Пример 6.7.6. Найти частное решение ОДУ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 1, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$.

Решение. Интегрируем уравнение последовательно:

$$\begin{aligned} 1) \frac{dy}{dx} &= \int xe^x dx + C_1 = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx + C_1 = \\ &= (x-1)e^x + C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) y &= \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = \left\{ \begin{array}{l} u = x-1, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = \\ &= (x-2)e^x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Так как в силу первого начального условия $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$, получаем:

$$(0-1)e^0 + C_1 = 0, \quad C_1 = 1.$$

Так как в силу второго начального условия $y|_{x=0} = 1$, получаем:

$$(0-2)e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1, \quad C_2 = 3.$$

Теперь частное решение, удовлетворяющее заданным условиям, принимает вид

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \quad \otimes$$

Пример 6.7.7. Найти общее решение ОДУ

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 = 0.$$

Решение. Решаем уравнение относительно $z = \frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2.$$

Интегрируем получившиеся ОДУ последовательно:

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \frac{dy}{dx} = x + C_1, y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2;$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} = 2, \frac{dy}{dx} = 2x + C_3, y = x^2 + C_3x + C_4.$$

Совокупность этих решений образует общий интеграл ОДУ.

Так как квадратный трёхчлен имеет разложение

$$z^2 - 3z + 2 = (z - z_1)(z - z_2),$$

то общий интеграл ОДУ имеет вид:

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - C_1x - C_2\right) \cdot (y - x^2 - C_3x - C_4) = 0. \otimes$$

Пример 6.7.8. Найти общее решение ОДУ

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3.$$

Решение. Положим $\frac{d^2 y}{dx^2} = Z$, тогда из уравнения получаем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}z^3.$$

Интегрируя получившееся уравнение, получаем

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}z^3, \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2}dx, \frac{1}{z^2} = x + C_1, z^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Заменяя $Z = \frac{d^2 y}{dx^2}$, получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Уравнение содержит только x и y . Разрешая его относительно $\frac{d^2 y}{dx^2}$, получаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x + C_1}}.$$

Это уравнение интегрируем последовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{x + C_1}} + C_2 = \{dx = d(x + C_1)\} =$$

$$= \pm \int (x + C_1)^{-1/2} d(x + C_1) + C_2 = \pm (x + C_1)^{1/2} + C_2$$

$$y_1 = \int (x + C_1)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = (x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C^3,$$

$$y_2 = -\int (x + C_1)^{1/2} dx + C_2 x + C^3 = -(x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C^3. \otimes$$

Пример 6.7.9. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -2, k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-2x}, e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x. \otimes$$

Пример 6.7.10. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравне-

ния

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^x, xe^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x. \otimes$$

Пример 6.7.11. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 13y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin x). \otimes$$

Пример 6.7.12. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Преобразуем характеристическое уравнение:

$$(k^2 - 1)(k - 2) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 2.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}. \otimes$$

Пример 6.7.13. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = 0.$$

Корень ищем среди множителей свободного члена, это 2 и 4. Проверяем 2, для чего делим уголком:

$$k^3 - 4k^2 + 6k - 4 = (k - 2)(k^2 - 2k + 2).$$

Уравнение принимает вид:

$$(k - 2)(k^2 - 2k + 2) = 0.$$

Находим оставшиеся корни характеристического уравнения

$$k_1 = 2, k_2 = 1 + i, k_3 = 1 - i.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{2x}, e^x \cos x, e^x \sin x\}.$$

Общее решение записывается в виде:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x). \otimes$$

Пример 6.7.14. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = x^2 - x + 1.$$

Р е ш е н и е. 1) Однородное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = -1, k_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений

$$\{e^{-x}, e^x\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

2) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$z(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^x.$$

Система линейных алгебраических уравнений для производных новых функций в общем виде

$$\begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} e^{-x} \frac{dC_1}{dx} + e^x \frac{dC_2}{dx} = 0, \\ -e^{-x} \frac{dC_1}{dx} + e^x \frac{dC_2}{dx} = x^2 - x + 1. \end{cases}$$

Решаем систему, например, по формулам Крамера, в результате получаем:

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{2} e^x (x^2 - x + 1); \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2} e^{-x} (x^2 - x + 1).$$

3) Решение первого из уравнений:

$$C_1 = -\frac{1}{2} \int e^x (x^2 - x + 1) dx + A_1 = \dots = \left(-\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - 2 \right) e^x + A_1.$$

Решение второго уравнения:

$$C_2 = -\frac{1}{2} \int e^{-x} (x^2 - x + 1) dx + A_2 = \dots = \left(-\frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + 12 \right) e^{-x} + A_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$z(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^x - x^2 + x - 1. \otimes$$

Пример 6.7.15. С аэростата, падающего с высоты H со скоростью V_0 , сбросили балласт, после чего его падение замедлилось и через некоторое время сменилось подъёмом, так что через время t_0 аэростат поднялся на высоту, с которой сбросили балласт. Считая, что масса аэростата без балласта равна m , а сила сопротивления воздуха R и подъёмная сила аэростата T постоянны, определить, сколько времени после сброса балласта аэростат опускался.

Решение. Начало системы координат поместим в нижнюю точку траектории аэростата, ось OZ направим вертикально вверх (рисунок 1). По условию задачи силы, действующие на аэростат в течение всего времени движения остаются постоянными.

Уравнение второго закона динамики для опускающегося аэростата имеет вид:

$$m \ddot{z} = T + R - G, \quad (1)$$

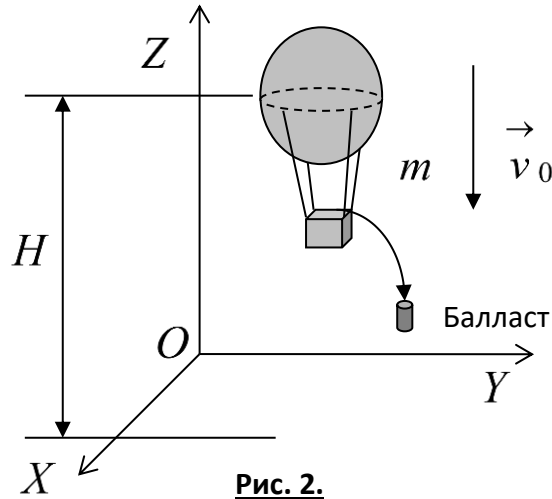
где $G = mg$ – сила тяжести. В начальный момент времени аэростат находился на высоте H , поэтому начальные условия запишутся в виде

$$z(0) = H, \quad \dot{z}(0) = -v_0. \quad (2)$$

Уравнение (1) – это простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение, не содержащее в правой части искомой функции и независимой переменной. Интегрируя два раза, получаем:

$$m \dot{z} = (T + R - G)t + C_1, \quad (3)$$

$$mz = \frac{T + R - G}{2} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (4)$$



Используя начальные условия (2), получаем для постоянных: $C_1 = -mv_0$, $C_2 = mH$.

Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\dot{z} = \frac{T + R - G}{m}t - v_0, \quad (5)$$

$$z = \frac{T + R - G}{2m}t^2 - v_0t + H. \quad (6)$$

Для поднимающегося аэростата уравнение второго закона динамики и начальные условия имеют вид:

$$m\ddot{z} = T - R - G, \quad (7)$$

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя (7), получаем:

$$m\dot{z} = (T - R - G)t + C_1, \quad (9)$$

$$mz = \frac{T - R - G}{2}t^2 + C_1t + C_2. \quad (10)$$

Из начальных условий (8) для постоянных получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, откуда получаем уравнение движения:

$$z = \frac{T - R - G}{2m} t^2. \quad (11)$$

Обозначим время падения аэростата t_1 , а время подъёма t_2 . Из условия задачи $t_0 = t_1 + t_2$

. Подставляя $t = t_1$, $\dot{z}(t_1) = 0$, $z(t_1) = 0$ в (5) и (6) и $t = t_2$, $z(t_2) = H$ в (11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{T + R - G}{m} t_1 - v_0 = 0, \\ \frac{T + R - G}{2m} t_1^2 - v_0 t_1 + H = 0, \\ \frac{T - R - G}{2m} t_2^2 = H. \end{cases} \quad (12)$$

Исключая из уравнений системы (12) неизвестные H и v_0 с учётом того, что $t_2 = t_0 - t_1$, получаем:

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \frac{\sqrt{T + R - mg}}{T - R - mg}}. \quad \otimes$$

Пример 6.7.16. Грузовик массой m имеет максимальную скорость $V_{\max}$ и разгоняется с места до скорости V_* за время t_* . Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равняется средняя сила тяги двигателя грузовика?

Решение. Силы, действующие на грузовик, изображены на рисунке 2. При решении задачи предполагаем, что средняя сила тяги двигателя $\vec{F}$ постоянна.

После проектирования на оси системы координат дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m \ddot{x} = F - R.$$

Здесь сила трения $\vec{R} = k \vec{v}$, где коэффициент динамического трения $k > 0$ неизвестен; $\vec{N}$ – сила реакции опоры (дороги); $\vec{G}$ – сила тяжести.

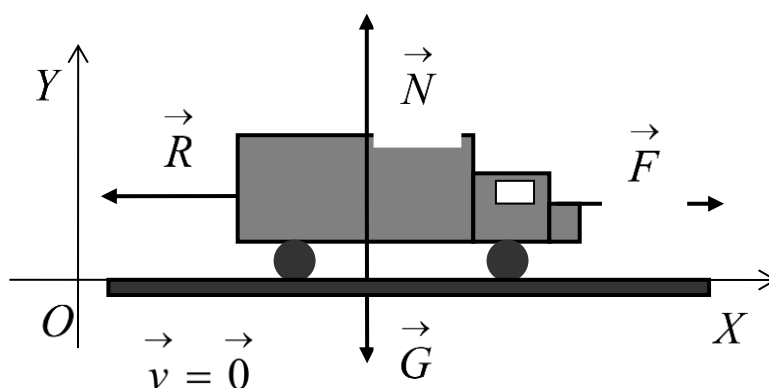


Рис. 2.

Обозначая $\dot{X} = v$, получаем:

$$m\dot{v} = F - kv \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F - kv \Rightarrow \frac{mdv}{F - kv} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k} \int \frac{d(F - kv)}{F - kv} = t + C \Rightarrow -\frac{m}{k} \ln(F - kv) = t + C.$$

Начальные условия $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = v(0) = 0$. Из условия на скорость получаем, что

$$C = -\frac{m}{k} \ln F. \text{ Подстановка даёт}$$

$$t = -\frac{m}{k} \ln(F - kv) + \frac{m}{k} \ln F = -\frac{m}{k} \ln \frac{F - kv}{F} \Rightarrow t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{kv}{F} \right). \quad (1)$$

Так как задана максимальная скорость $v_{\max}$, то из необходимого условия экстремума получаем:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0 \Rightarrow k = \frac{F}{v_{\max}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), при $t = t_*$ и $v = v_*$, получаем:

$$t_* = -\frac{m}{F/v_{\max}} \ln \left(1 - \frac{(F/v_{\max})v_*}{F} \right) \Rightarrow t_* = -\frac{mv_{\max}}{F} \ln \left(1 - \frac{v_*}{v_{\max}} \right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \frac{v_{\max} - v_*}{v_{\max}} \Rightarrow F = \frac{mv_{\max}}{t_*} \ln \frac{v_{\max}}{v_{\max} - v_*}. \otimes$$

Практическое занятие 8. Системы ОДУ

Предварительные сведения

Системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = f^1(t, y^1, y^2, \dots, y^n), \\ \frac{dy^2}{dt} = f^2(t, y^1, y^2, \dots, y^n), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy^n}{dt} = f^n(t, y^1, y^2, \dots, y^n). \end{cases}$$

называются **системами ОДУ в нормальной форме**, или просто нормальными системами.

Если функции в правой части системы нормальной ОДУ зависят от искомых функций $\{y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t)\}$ линейным образом, то есть

$$f^k(t, y^1, y^2, \dots, y^n) = \sum_{j=1}^n p_j^k y^j + f^k(t),$$

то нормальную систему ОДУ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^1 y^j + f^1(t), \\ \frac{dy^2}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^2 y^j + f^2(t), \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{dy^n}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j^n y^j + f^n(t). \end{cases}$$

Эквивалентная матрично-векторная форма имеет вид

$$I \frac{d}{dt} |y(t)\rangle + P(t) |y(t)\rangle = |f(t)\rangle,$$

где введены обозначения для матричного дифференциального оператора

$$L = I \frac{d}{dt} + P(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & p_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix},$$

и вектор-столбцов

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix}, \quad |f(t)\rangle = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Линейная однородная система ОДУ в нормальной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^1(t) & p_2^1(t) & \dots & p_n^1(t) \\ p_1^2(t) & p_2^2(t) & \dots & p_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^n(t) & p_2^n(t) & \dots & p_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в матрично-векторной записи

$$I \frac{d}{dt} |y(t)\rangle + P(t) |y(t)\rangle = |0\rangle.$$

Система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из n частных решений системы

$$|y_1\rangle = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \\ \dots \\ y_1^n(t) \end{pmatrix}, \quad |y_2\rangle = \begin{pmatrix} y_2^1(t) \\ y_2^2(t) \\ \dots \\ y_2^n(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |y_m\rangle = \begin{pmatrix} y_m^1(t) \\ y_m^2(t) \\ \dots \\ y_m^n(t) \end{pmatrix}$$

называется **линейно независимой на промежутке** (a, b) , если $(\forall t \in (a, b))$

$$\alpha_1 |y_1(t)\rangle + \alpha_2 |y_2(t)\rangle + \dots + \alpha_n |y_n(t)\rangle = |0\rangle \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Линейно независимая система $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ из n частных решений однородно системы ОДУ в нормальной форме называется **фундаментальной системой решений (ФСР)** этой системы. Векторы ФСР можно расположить в виде матрицы, составленной из их координат по столбцам:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Если $\{|y_1(t)\rangle, |y_2(t)\rangle, \dots, |y_n(t)\rangle\}$ – линейно независимая система частных решений системы уравнений (4.30), то любое её решение имеет вид

$$|y(t)\rangle = \sum_{k=1}^n C_k |y_k(t)\rangle.$$

Общее решение записывается через фундаментальную матрицу в виде:

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_2^1(t) & \dots & y_n^1(t) \\ y_1^2(t) & y_2^2(t) & \dots & y_n^2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(t) & y_2^n(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

или

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Решение задачи Коши

$$I \frac{d}{dt} |y\rangle + P(t)|y\rangle = |0\rangle, \quad |y(t_0)\rangle = |y_0\rangle$$

получается из последней формулы за счёт выбора произвольного числового вектора $|C\rangle$. Действительно, имеем

$$|y_0\rangle = Y(t_0)|C\rangle \Rightarrow |C\rangle = Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle,$$

причём обратная матрица $Y^{-1}(t_0)$ существует, так как матрица $Y(t_0)$ невырожденная. Подставляя найденный вектор $|C\rangle$ в формулу для общего решения, получаем решение задачи Коши в виде

$$|y(t)\rangle = Y(t)Y^{-1}(t_0)|y_0\rangle.$$

Матричная функция

$$G(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$$

называется **функцией Коши**.

Решение однородной системы ОДУ

$$\frac{dy^i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n a_j^i y^j(t) = 0$$

Ищется в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t}, \quad y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}, \quad \dots, \quad y^n(t) = x^n e^{-\mu t}.$$

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \dots \\ y^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 e^{-\mu_1 t} & x_2^1 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ x_1^2 e^{-\mu_1 t} & x_2^2 e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n e^{-\mu_1 t} & x_2^n e^{-\mu_2 t} & \dots & x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} C_1 x_1^1 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^1 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^1 e^{-\mu_n t} \\ C_1 x_1^2 e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^2 e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^2 e^{-\mu_n t} \\ \dots \\ C_1 x_1^n e^{-\mu_1 t} + C_2 x_2^n e^{-\mu_2 t} + \dots + C_n x_n^n e^{-\mu_n t} \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Пусть корни характеристического уравнения (4.69) различные, но среди них имеются комплексно-сопряжённые. Тогда частные решения (4.72) и, следовательно, общее решение (4.75) будут комплексными функциями. Выделим одну из пар комплексно-сопряжённых корней: $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = \alpha - i\beta$. Этой паре корней соответствуют вещественные частные решения. Исследуем их.

Построим частное решение, соответствующее корню $\mu_1 = \alpha + i\beta$. Это *комплексное* решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ \dots \\ y_1^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_1^1 + iz_1^1 \\ x_1^2 + iz_1^2 \\ \dots \\ x_1^n + iz_1^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_2^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_2^1 + iz_2^1 \\ x_2^2 + iz_2^2 \\ \dots \\ x_2^n + iz_2^n \end{pmatrix}, \\
\dots, \quad \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix} = e^{-(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} x_n^1 + iz_n^1 \\ x_n^2 + iz_n^2 \\ \dots \\ x_n^n + iz_n^n \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вещественная и мнимая части решения сами являются решениями однородной системы ОДУ. Эти решения в совокупности образуют линейно независимую систему, которую можно использовать для построения фундаментальной матрицы.

Случай 3. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется корень μ_1 кратности k . Можно показать, что тогда ему соответствует решение системы ОДУ вида

$$y^1 = F_1(t)e^{-\mu_1 t}, \quad y^2 = F_2(t)e^{-\mu_1 t}, \quad \dots, \quad y^n = F_n(t)e^{-\mu_1 t},$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$, ..., $F_n(t)$ – многочлены от t степени не выше чем $k-1$, имеющие в совокупности k произвольных коэффициентов. Полагая последовательно в этом решении, что один из

произвольных коэффициентов многочленов равен единице, а остальные – нулю, получим линейно независимую систему k частных решений системы уравнений ОДУ.

Если μ_1 – вещественное характеристическое число, то полученные частные решения будут вещественными.

Если $\mu_1 = \alpha + i\beta$ – комплексное характеристическое число, то имеется комплексно-сопряжённое характеристическое число $\alpha - i\beta$ той же кратности.

Построив k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих характеристическому числу $\mu_1 = \alpha + i\beta$ и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых частных решений. Таким образом, паре комплексно-сопряжённых характеристических чисел $\alpha \pm i\beta$ кратности k соответствует $2k$ линейно независимых вещественных частных решений.

В общем случае каждому простому вещественному корню характеристического уравнения соответствует одно частное решение, каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения, вещественному корню характеристического уравнения кратности k соответствуют k линейно независимых частных решения, а каждой паре комплексно-сопряжённых корней кратности k характеристического уравнения соответствуют $2k$ линейно независимых частных решения. В совокупности получается n линейно независимых частных решений, из которых можно составить фундаментальную матрицу и, следовательно, записать общее решение системы ОДУ.

Описанная совокупность действий носит название «Метод Эйлера интегрирования линейной однородной системы ОДУ».

Примеры с решением

Пример 6.8.1. Дана система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dy^1}{dt} + y^1 + 2y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение этой системы.

Решение. Систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение ищем в виде

$$y^1(t) = x^1 e^{-\mu t}, \quad y^2(t) = x^2 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений частное решение и сокращая на неравный нулю множитель $e^{-\mu t}$, получаем

$$\begin{cases} (1 - \mu)x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - (\mu + 4)x^2 = 0. \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ, характеристическое уравнение для неё имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 2 \\ -3 & -\mu-4 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\mu^2 + 3\mu + 2 = 0.$$

Характеристические числа (собственные значения)

$$\mu_1 = -2, \mu_2 = -1.$$

1) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к уравнению

$$3x^1 + 2x^2 = 0.$$

Решение этого уравнения, полагая $x^2 = a \in R^1$, запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, имеем первый собственный вектор

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее первому собственному значению, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_1 = -2$ имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 = 0, \\ -3x^1 - 3x^2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$x^1 + x^2 = 0.$$

Полагая $x^2 = b \in R^1$, получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Второй собственный вектор имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение, соответствующее второму собственному вектору, имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

3) Составляем фундаментальную матрицу:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение находится по формуле

$$|y(t)\rangle = Y(t)|C\rangle.$$

Подставляя в эту формулу выражение для фундаментальной матрицы, получаем:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^{2t} & -e^t \\ e^{2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}C_1e^{2t} - C_2e^t \\ C_1e^{2t} + C_2e^t \end{pmatrix}. \otimes$$

Пример 6.8.2. Найти общее решение системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Решение ищем в виде

$$y_1 = x_1 e^{-\mu t}, \quad y_2 = x_2 e^{-\mu t}, \quad y_3 = x_3 e^{-\mu t}.$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем СЛАУ для определения собственных векторов

$$\begin{cases} -\mu x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - \mu x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - \mu x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система уравнений нетривиально совместна, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1 & -1 \\ -1 & -\mu & -1 \\ -1 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_1 = -2, \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Корню $\mu_1 = -2$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Если решать данную систему методом Гаусса, то получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем одно решение исходной системы уравнений

$$|y_1\rangle = a|a_1\rangle = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы СЛАУ (2) при $\mu_2 = \mu_3 = 1$ равен 1, то система уравнений сводится к одному уравнению

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Полагая $x_2 = a$, $x_3 = b$, получаем решение в виде

$$|x\rangle = a|a_2\rangle + b|a_3\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Каждому из базисных решений

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

соответствует одно частное решение

$$|y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, |y_3\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определитель, составленный из этих решений

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, найденные решения образуют линейно независимую систему, то есть фундаментальную систему решений исходной системы ОДУ. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение запишем в виде

$$|y(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix} \otimes$$

Для решения линейной неоднородной системы ОДУ в нормальной форме можно использовать метод Лагранжа. Продемонстрируем его на примере.

Пример 6.8.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Решаем систему методом Лагранжа. Для этого сначала находим общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя $y_1 = x_1 e^{-\mu t}$ и $y_2 = x_2 e^{-\mu t}$, записываем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \mu^2 - 1 = 0: \mu_1 = -1; \mu_2 = 1.$$

Находим собственные векторы.

1) Для $\mu_1 = -1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = a \Rightarrow x_1 = a.$$

Вектор решения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первый собственный вектор

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Для $\mu_2 = 1$ система сводится к уравнению

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Второй собственный вектор

$$|x_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь частные решения имеют вид:

$$\mu_1 = -1 \Rightarrow |y_1\rangle = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix};$$

$$\mu_2 = 1 \Rightarrow |y_2\rangle = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (2) записывается так:

$$|y(t)\rangle = C_1 |y_1\rangle + C_2 |y_2\rangle = C_1 e^{-\mu_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\mu_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

откуда имеем

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}, \\ z_2(t) = C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t}. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя в систему уравнений (1), получаем после дифференцирований и приведения подобных

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t + \frac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = 0, \\ \frac{dC_1}{dt}(t) \cdot e^t - \frac{dC_2}{dt}(t) \cdot e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2.$$

Решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$\frac{dC_1}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{t^2} + \ln t & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t^2} + \ln t \right).$$

Откуда, после интегрирования получаем

$$C_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) + A_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{2} e^t \left(\frac{1}{t} - \ln t \right) + A_2.$$

Подставляя в формулы (3), получаем общее решение неоднородной системы уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} - \ln t, \\ z_2(t) = A_1 e^t - A_2 e^{-t} - \frac{1}{t}. \end{cases} \otimes$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$I = \int_W xy dl,$$

где путь W — контур треугольника с вершинами: $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W (x + y) dx - x dy,$$

где путь W — отрезок ломаной линии, соединяющий точки

$$A(0; 0), B(2; 0), C(4; 2).$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x dy - y dx,$$

где W — путь, заданный неявным уравнением $y = x^3$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(2; 8)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_W x^2 dx + y^2 dy,$$

где W — путь, заданный неявным уравнением $y = \sqrt{x}$, соединяющий точки $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$.

5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (5x^2 y - 2y^3) dx dy$$

по прямоугольнику $D = \{(x, y) \in R_2 : 2 \leq x \leq 5 \wedge 1 \leq y \leq 3\}$.

6. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (x^2 + y) dx dy$$

по области, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y^2 = x$.

7. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярным координатам:

а) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 1$;

б) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 4$;

в) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 2x$;

г) $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$, где D — первая четверть круга $x^2 + y^2 \leq 1$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями:

а) $y = \ln x, x - y = 1, y = -1$;

б) $y = x^2, 4y = x^2, x = 2, x = -2$.

9. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1;$$

б) $\iiint_V (x+y) dx dy dz$, где область V ограничена плоскостями с уравнениями

$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1.$$

10. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1, z = 2;$$

б) $\iiint_V z dx dy dz$, где область V ограничена поверхностями с уравнениями $x^2 + y^2 = 1$,

$$z = 0, z = a \ (a > 0).$$

11. Переходя к сферическим координатам, вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где область V – это шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$;

б) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область V – это верхняя половина шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

12. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint_F (x + 18y + 24z) ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$$x + 2y + 3z = 1,$$

и неравенствами $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

б) $\iint_F (x^2 + y^2) ds$, где поверхность F задана неявным уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

и неравенствами $0 \leq z \leq 1$.

13. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint_F z dx dy$, где поверхность F – верхняя сторона верхней половины сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9;$$

б) $\iint_F (x^2 + y^2) dx dy$, где поверхность F – верхняя сторона части параболоида с уравне-

нием

$$z = 1 - x^2 - y^2,$$

отсечённая плоскостью $z = 0$.

14. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ по направлению радиуса-вектора точки $M(3; 4)$ в начале координат.

15. Найти градиент плоского скалярного поля $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точке $M(2; 1)$.

16. Найти производную функции, определённой формулой $u = \frac{xyz}{3}$, в точке $M_0(1; 2; 3)$ по

направлению вектора $\vec{M_0 M}$, если $M(4; 1; 6)$.

17. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}; \text{ б) } \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

18. Показать, что

$$\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

19. Найти

$$\text{а) } \operatorname{div} \vec{r}; \text{ б) } \operatorname{div} \left(r^4 \vec{r} \right); \text{ в) } \operatorname{div} \left(\left(\vec{A}, \vec{r} \right) \vec{B} \right).$$

20. Найти $\operatorname{div} \vec{A}$, если:

$$\text{а) } \vec{A} = (x - y)(y - z)\vec{e}_1 + (y - z)(z - x)\vec{e}_2 + (z - x)(x - y)\vec{e}_3;$$

$$\text{б) } \vec{A} = (x^2 + y^2)(y - z)\vec{e}_1 + (y^2 + z^2)(z - x)\vec{e}_2 + (z^2 + x^2)(x - y)\vec{e}_3.$$

21. Найти ротор векторного поля $\vec{A}(M)$:

$$\text{а) } \vec{A} = \frac{y}{x} \vec{e}_1 + \frac{z}{y} \vec{e}_2 + \frac{x}{z} \vec{e}_3;$$

$$\text{б) } \vec{A} = yz \vec{e}_1 + z(x+2y) \vec{e}_2 + y(x+y) \vec{e}_3.$$

22. Доказать двумя способами (в декартовых координатах и с помощью оператора Гамильтона), что

для произвольного скалярного поля $\varphi(M)$ и для произвольных векторных полей $\vec{A}(M)$ и

$\vec{B}(M)$ справедливы следующие формулы:

$$\text{а) } \left(\vec{A}, \nabla \right) \varphi \vec{B} = \vec{B} \left(\vec{A}, \nabla \varphi \right) + \varphi \left(\vec{A}, \nabla \right) \vec{B};$$

$$\text{б) } \vec{C} \cdot \nabla \left(\vec{A}, \vec{B} \right) = \vec{A} \cdot \left(\left(\vec{C}, \nabla \right), \vec{B} \right) + \vec{B} \cdot \left(\left(\vec{C}, \nabla \right), \vec{A} \right);$$

$$\text{в) } \left(\vec{C}, \nabla \right) \left[\vec{A}, \vec{B} \right] = \left[\vec{A}, \left(\vec{C}, \nabla \right) \vec{B} \right] - \left[\vec{B}, \left(\vec{C}, \nabla \right) \vec{A} \right].$$

23. Найти результат действия векторных дифференциальных операций:

$$\text{а) } \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi);$$

$$\text{б) } \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} \psi);$$

$$\text{в) } \operatorname{rot} \left[\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B} \right].$$

24. Найти векторные линии векторных полей:

$$\text{а) } \vec{A} \left(\vec{x} \right) = 2y \vec{e}_1 + 6x \vec{e}_2;$$

$$\text{б) } \vec{A} \left(\vec{x} \right) = 2x \vec{e}_1 + 3y \vec{e}_2;$$

$$\text{в) } \vec{A} \left(\vec{x} \right) = 2y \vec{e}_2 + 6z \vec{e}_3.$$

25. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}(\vec{x})$ вдоль заданного замкнутого контура с заданной параметризацией:

$$\text{а) } \vec{A}(\vec{x}) = y \vec{e}_1 - z \vec{e}_2 + x^2 y \vec{e}_3,$$

$$x = 2 \cos t, y = \sin t, z = 1, t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{б) } \vec{A}(\vec{x}) = z \vec{e}_1 - x \vec{e}_2 + yz \vec{e}_3,$$

$$x = 2 \cos t, y = 6 \sin t, z = 3, t \in [0, 2\pi];$$

$$\text{в) } \vec{A}(\vec{x}) = 4y \vec{e}_1 + x \vec{e}_2 + y \vec{e}_3,$$

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t - \sin t, t \in [0, 2\pi].$$

26. Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$1) \text{ Решить уравнение } (1 + y)dx - (1 - x)dy = 0.$$

$$2) \text{ Решить уравнение } (1 + e^x)yy' = e^x.$$

$$3) \text{ Решить уравнение } x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

27. Найти общее решение уравнения с однородной правой частью.

$$1) \text{ Найти интегральные кривые уравнения } y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

$$2) \text{ Найти интегральные кривые уравнения } y' = \frac{y}{x} - 1.$$

3) Найти интегральные кривые уравнения

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

28. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, то найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию.

$$1) (2x+1)\frac{dy}{dx} = 4x + 2y.$$

$$2) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0.$$

$$3) x\frac{dy}{dx} + y - e^x = 0, y(a) = b.$$

$$4) \frac{dy}{dx} \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = 0.$$

$$5) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

$$6) \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x, y(0) = 0.$$

$$7) \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{\sin x}, y(0) = 0.$$

$$8) x\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

$$9) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3.$$

$$10) x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y.$$

$$11) \frac{dy}{dx} - ay = e^{bx}.$$

29. Найти общее решение линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше второго.

$$1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 8y = 0. \quad 2) \frac{d^4 y}{dx^3} - y = 0. \quad 3) \frac{d^4 y}{dx^4} - 5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0.$$

$$4) \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

$$5) \frac{d^5 y}{dx^5} - 6 \frac{d^4 y}{dx^4} + 9 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

30. Найти общее решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 4y = -12x^2 + 6x - 4.$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 4e^x.$$

$$3) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = -4e^x + 3.$$

$$4) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 6 \sin 2x.$$

$$5) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = -13 \sin 2x.$$

31. Найти общее решение однородных систем ОДУ методом Эйлера.

$$1) \begin{cases} \frac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy^1}{dt} - 2y^1 + 3y^2 = 0, \\ \frac{dy^2}{dt} - 3y^1 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 4y_1 + y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - 3y_1 - y_2 + y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_3 = 0. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + y_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_1 + y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$$

$$5) \frac{d}{dt} |y\rangle = A |y\rangle, |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6) \frac{d}{dt}|y\rangle = A|y\rangle, |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32. Решить неоднородные системы ОДУ методом Лагранжа.

$$1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - y_2 = \cos t, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_1 = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 2y_1 + 4y_2 = 4e^{-2t}, \\ \frac{dy_2}{dt} - 2y_1 + 2y_2 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 2y_1 - y_2 + 2y_3 = -t + 2, \\ \frac{dy_2}{dt} + y_1 = 1, \\ \frac{dy_3}{dt} - y_1 - y_2 + y_3 = -t + 1. \end{cases}$$



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

**«Уральский государственный горный
университет»**

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

Ф И З И К А

***МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ**

Екатеринбург

2020

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:
 - Внимательно прочитать условие задачи.
 - Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
 - Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
 - Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
 - Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
 - Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать по оси координат и записать в скалярной форме.
 - Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
 - После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.
 - Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3,52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1,29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.
2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением $1,2 \text{ м/с}^2$, останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?
3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.
4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.
5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?
6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0,5 t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?
8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.
9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.
10. На горизонтальной платформе шахтной клетки находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/с^2 , при спуске с ускорением $9,8 \text{ м/с}^2$.
11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.
12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.
13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. = 736 Вт). Определить коэффициент трения.
14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30° .
15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5° .
16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин^{-1} . Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.
17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10 с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки $1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом $0,6 \text{ м}$, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен $0,5$.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с . Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж , чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8 с^{-1} . Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5 кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин ? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м .

23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин . После выключения он останавливается через 10 с . Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом $0,4 \text{ м}$ и имеющий массу 100 кг , был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с . Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 10^6 Па и температуре 20°C ? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л . Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и температура 16°C . Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°C и 7°C . Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом C_2H_2 при температуре 27°C до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена израсходована, если давление в баллоне при температуре 23°C стало равным 14 МПа? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°C . Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450°C . Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600°C , если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17°C ?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 см^3 воздуха в секунду при давлении 50 атм?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800°C . До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°C , $\gamma=1,4$?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 см^3 при указанном давлении и температуре 27°C ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20°C , а после него 2600°C . Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO , принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°C до 100°C надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47°C , а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600°C до 2000°C . Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны $1,25 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ и $0,96 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$.

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 м^3 в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227°C . Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится еже часно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9°C . Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит $0,02 \text{ Кл}$ заряда. Ширина ремня $0,3 \text{ м}$, скорость его движения 20 м/с . Какой заряд проходит каждую секунду через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?
48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3 \text{ км}$ и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м .
49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ , заряд каждой пластины 10 нКл . Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см .
50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ , расстояние 1 мм , диэлектрик слюда ($\epsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 см^2 ?
51. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от $0,03 \text{ м}$ до $0,1 \text{ м}$? Площадь пластин 100 см^2 . Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В .
52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В , потребляя ток в 40 А . Напряжение на электростанции 120 В , а расстояние до нее 1 км . Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом м}$).
53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром $1,5 \text{ мм}$ для изготовления спирали вулканизатора, применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали $5,5 \text{ Ом}$, а удельное сопротивление нихрома $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом м}$?
54. Цена деления прибора $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ А /дел}$. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом . Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А ?
55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30° С . Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м . Площадь сечения проводов $0,8 \text{ мм}^2$, $\rho = 0,017 (\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м})$, $\alpha = 0,0044 \text{ град}^{-1}$.
56. ЭДС батареи 12 В , ток короткого замыкания 5 А . Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?
57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность $9,5 \text{ Вт}$, а при токе 8 А мощность $14,4 \text{ Вт}$.

58. Ток в проводнике сопротивлением $100\ \text{Ом}$ равномерно нарастает от 0 до $10\ \text{А}$ в течение $30\ \text{с}$. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $50\ \text{А}$. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние $5\ \text{см}$ от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи $50\ \text{А}$ и $100\ \text{А}$ в противоположных направлениях. Расстояние между проводами $20\ \text{см}$. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на $25\ \text{см}$ от первого и на $40\ \text{см}$ от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром $10\ \text{см}$, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе $0,2\ \text{А}$. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля $12,8\ \text{А/м}$. Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли, если обмотка тангенс-буссоли имеет 10 витков радиусом $25\ \text{см}$. При токе $0,64\ \text{А}$ стрелка отклоняется на угол 45° .

63. Плоский контур площадью $20\ \text{см}^2$ находится в однородном магнитном поле с индукцией $0,03\ \text{Тл}$. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром $51\ \text{см}$ и вакуумным зазором $2\ \text{мм}$. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800 .

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита, если проводник массой $10\ \text{г}$ и длиной $1\ \text{м}$ при токе в нем $19,6\ \text{А}$ висит в поле, не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией $0,1\ \text{Тл}$ движется проводник длиной $10\ \text{см}$ со скоростью $15\ \text{м/с}$, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника $15\ \text{см}^2$, Индукция магнитного поля в сердечнике $1,4\ \text{Тл}$. Вычислить величину средней ЭДС, возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение $0,001\ \text{с}$.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 см^2 , длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника 0,56 м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин^{-1} . Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин^{-1} . Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин^{-1} . Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с^{-1} .

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0,5 \sin t$, $y = 2 \cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340 м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0,1\sin 0,5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2,3 \cdot 10^3$ кг/м³.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4\pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25 см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см² и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см².

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см² имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух

пластин площадью 75 см^2 каждая, расстояние между пластинами 5 мм , диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $1,02 \text{ Гн}$ и конденсатора емкостью 25 нФ . На обкладках конденсатора сосредоточен заряд $2,5 \text{ мкКл}$. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц ?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $0,01 \text{ м}^2$ и расстоянием между ними $0,1 \text{ мм}$. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м .

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью $0,5 \text{ мГн}$. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В . На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50 \cos 10^4 \pi t (\text{В})$. Емкость конденсатора равна $0,1 \text{ мкФ}$. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80 пФ и катушки с индуктивностью $1,2 \text{ мГн}$. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура $0,5 \text{ мГн}$. Какова должна быть емкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м ?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см^2 каждая, расстояние между пластинами 5 мм , диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц ?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 см^2 каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10 м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга 1 мм, расстояние от щелей до экрана 3 м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластины освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0° , длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза ($n=1,5$) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете ($\lambda=600 \text{ нм}$).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Ньютона в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1° . Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda=0,6$ мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на 1 мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35° . Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.

116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43° . Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57° . Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60° ?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4 \text{ K}$. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 K , определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт . Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 см^2 .

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна $0,55 \text{ Дж}$. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 K посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм . Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 см^2 , чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм . Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона 1 эВ ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм . Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм .

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм .

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см . Стенки лампы

отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 см^2 ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно $2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}^2$. Сколько фотонов падает на 1 см^2 за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна $1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.

136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, масса протона $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью $6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51 МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения ($\lambda_{\text{мин}} = 77,6$ пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n=2$).

Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.

46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?

147. В одномерной потенциальной яме шириной l находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l

с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии ($n=3$).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция ${}_{38}\text{Sr}^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β -частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа ${}_{11}\text{Na}^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат ${}_{92}\text{U}^{238}$ массой 1 г излучает $1,24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода ${}_{53}\text{I}^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β -частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора ${}_{15}\text{P}^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.

158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра ${}_{7}\text{N}^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. ($m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра ${}_{6}\text{C}^{12}$, если известно, что $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_{12}\text{C}}^6 = 12,00000$ а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. ($m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода ${}_{8}\text{O}^{16}$, если $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_8\text{O}}^{16} = 15,99491$ а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома ${}_{11}\text{Na}^{23}$, если $m_{{}_{11}\text{Na}}^{23} = 22,98977$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра ${}_{3}\text{Li}^7$, если известно, что $m_{{}_3\text{Li}}^7 = 7,01601$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}}^1 = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}}^1 = 1,00867$ а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода ${}_1\text{H}^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра ${}_5\text{B}^{11}$, если известны следующие массы: $m_{{}_5\text{B}^{11}} = 11,00931$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}_{11}\text{Na}^{23}$, если известны следующие массы: $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_{11}\text{Na}^{23}} = 22,98977$ а.е.м.; $m_{{}_{11}\text{Na}^{22}} = 21,99444$ а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра ${}_2\text{He}^4$, если известны массы: $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^3} = 3,01603$ а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра ${}_8\text{O}^{16}$ (${}_8\text{O}^{16} \rightarrow {}_7\text{N}^{15} + {}_1\text{H}^1$). $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_8\text{O}^{16}} = 15,99491$ а.е.м.; $m_{{}_7\text{N}^{15}} = 15,00011$ а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
 ${}_{13}\text{Al}^{27} + {}_2\text{He}^4 \rightarrow {}_{15}\text{P}^{30} + {}_0\text{n}^1$, если $m_{{}_{13}\text{Al}^{27}} = 26,98154$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_{15}\text{P}^{30}} = 29,97263$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.

172. Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: ${}_1\text{H}^2 + {}_1\text{H}^3 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_0\text{n}^1$, если $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^3} = 3,01605$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция ${}_2\text{He}^3 + {}_1\text{H}^2 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_1\text{H}^1$. Вычислить энергию этой реакции. ($m_{{}_2\text{He}^3} = 3,01603$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции ${}_7\text{N}^{14} + {}_0\text{n}^1 \rightarrow {}_6\text{C}^{14} + {}_1\text{H}^1$. ($m_{{}_7\text{N}^{14}} = 14,00307$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_6\text{C}^{14}} = 14,00324$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции ${}_3\text{Li}^6 + {}_1\text{H}^2 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_2\text{He}^4$. ($m_{{}_3\text{Li}^6} = 6,01513$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^2} = 2,01410$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра ${}_6\text{C}^{14}$? Известны массы: $m_{{}_6\text{C}^{14}} = 14,00324$ а.е.м.; $m_{{}_0\text{n}^1} = 1,00867$ а.е.м.; $m_{{}_6\text{C}^{13}} = 13,00335$ а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить ${}_6\text{C}^{12}$ на три равные части. ($m_{{}_6\text{C}^{12}} = 12,00000$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции ${}_{20}\text{Ca}^{44} + {}_1\text{H}^1 \rightarrow {}_{19}\text{K}^{41} + 2\text{He}^4$. ($m_{{}_{20}\text{Ca}^{44}} = 43,95549$ а.е.м.; $m_{{}_1\text{H}^1} = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}_2\text{He}^4} = 4,00260$ а.е.м.; $m_{{}_{19}\text{K}^{41}} = 40,96184$ а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И.Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/48021.html> -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30092.html> - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45392.html> - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	$1a.e.m.$	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с
	$\hbar$	$1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Мно жи- тель	Приставка			Мно жи- тель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^9	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^6	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^3	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^2	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^1	атто	а	a	10^{-18}

Примечание: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	10^3 кг
	атомная единица массы	а.е.м.	$1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3600 с
	сутки	сут	86400 с
Плоский угол	градус	...°	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...'	$2.91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	...''	$4.85 \cdot 10^{-6}$ рад
	град	град	($\pi/200$) рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} м ³
Длина	астрономическая единица	а.е.	$1.50 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св. год	$9.46 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	пк	$3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 м ⁻¹
Площадь	гектар	Га	10^4 м ²
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
<i>Примечание:</i> Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см ³	Твердое тело	Плотность, г/см ³
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,80
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7,15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г./см ³	Газ (при нормальных условиях)	Плотность, кг/м ³
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2,53 \cdot 10^{-8}$	Ртуть	$9,6 \cdot 10^{-7}$
Алюминий провод	$2,87 \cdot 10^{-8}$	Свинец	$2,08 \cdot 10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Вода	10^4	Сталь литая	$1,3 \cdot 10^{-7}$
дистиллированная			
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1,01 \cdot 10^{-7}$
Вольфрам	$5,5 \cdot 10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3,9 \cdot 10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Угольные щётки	$4 \cdot 10^{-5}$
Железо	$8,7 \cdot 10^{-8}$	Цинк	$5,9 \cdot 10^{-8}$
Золото	$2,2 \cdot 10^{-8}$	Чугун серый	$1 \cdot 10^{-6}$
Константан	$5 \cdot 10^{-7}$	Никель	$8,7 \cdot 10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1,12 \cdot 10^{-6}$
Магний	$4,4 \cdot 10^{-8}$	Олово	$1,2 \cdot 10^{-7}$
Манганин	$4,3 \cdot 10^{-7}$	Платина	$1,07 \cdot 10^{-7}$
Медь	$1,72 \cdot 10^{-8}$	Медь провод	$1,78 \cdot 10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	Альфа	Ν, ν	ню
Β, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	Дельта	Π, π	пи
Ε, ε	Эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	Дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	Эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	Иота	Φ, φ	фи
Κ, κ	Каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	10
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	12
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	19
Список литературы	23
Приложения	24



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»

Н. А. Зайцева

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ

***Учебно-методическое пособие
для выполнения лабораторных и контрольных
работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия»
для студентов всех специальностей***

**Екатеринбург
2020**

Рецензент: Т. И. Красненко, д-р химических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории оксидных систем ИХТТ УрО РАН

Зайцева Н. А.

317 КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ: учебно-методическое пособие для выполнения лабораторных и контрольных работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей / Н. А. Зайцева. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. – 35 с.

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения о качественных реакциях в неорганической химии. Пособие содержит необходимые сведения для выполнения лабораторных работ по качественному анализу катионов и решения задач.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

© Зайцева Н. А., 2017

© Уральский государственный
горный университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH_4^+ (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом**. При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от *pH*-среды.
2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.
3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	$\text{Na}^+, \text{K}^+, \text{NH}_4^+$	–	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	$\text{Ag}^+, \text{Pb}^{2+}, \text{Hg}_2^{2+}$	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	$\text{Ca}^{2+}, \text{Sr}^{2+}, \text{Ba}^{2+}$	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	$\text{Al}^{3+}, \text{Cr}^{3+}, \text{Zn}^{2+},$ * As^{3+} , * As^{5+} , Sn^{2+} , Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	$\text{Fe}^{2+}, \text{Fe}^{3+}, \text{Mn}^{2+},$ $\text{Mg}^{2+}, \text{Bi}^{3+}, \text{Sb}^{3+}, \text{Sb}^{5+}$	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	$\text{Cu}^{2+}, \text{Co}^{2+}, \text{Ni}^{2+},$ $\text{Hg}^{2+}, \text{Cd}^{2+}$	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

* As^{3+} и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+} .

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов FeCl_3 и FeSO_4 , добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $\text{Fe}(\text{OH})_3$ и $\text{Fe}(\text{OH})_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с

осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание KMnO_4 ? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+} , уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+} , уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+} , добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительные свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора FeCl_3 и FeSO_4 , добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($\text{C}_4\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа $[\text{Fe}(\text{C}_4\text{H}_7\text{O}_2\text{N}_2)_2]$.

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы FeCl_3 и FeSO_4 подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав $\text{Fe}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]_3$.

На растворы FeCl_3 и FeSO_4 подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини

имеет состав $\text{Fe}_3 [\text{Fe} (\text{CN})_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+} , и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+} .

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком $\text{Fe} (\text{OH})_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2 ? Запишите уравнение реакции, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов FeCl_3 и NaOH , если $\text{ПР} (\text{Fe} (\text{OH})_3) = 3,8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов FeSO_4 и NaOH , если $\text{ПР} (\text{Fe} (\text{OH})_2) = 4,8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка $\text{Fe} (\text{OH})_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для FeCl_3 и FeSO_4 , определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения — минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1 мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* — метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм³. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрористаллоскопический анализ* — метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс перевода вещества из водной фазы в органическую, используется для разделения и концентрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживаемого вещества.

6. *Каталитические реакции.*

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего $\text{Co}(\text{OH})\text{Cl}$, голубого $\text{Cu}(\text{OH})\text{Cl}$ и зелёного $\text{Ni}(\text{OH})\text{Cl}$. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексобразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+} , Ni^{2+} и Cu^{2+} , добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

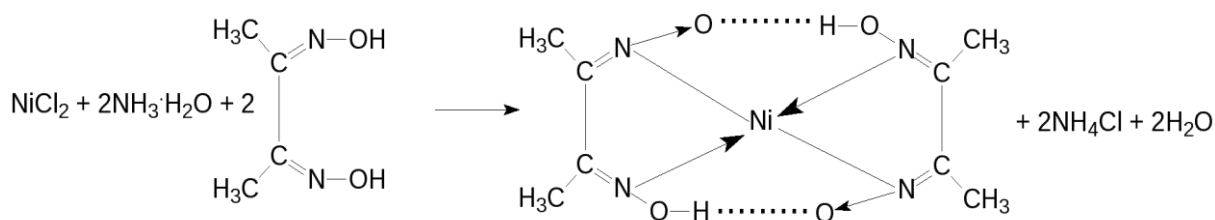
Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $\text{C}_4\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования

диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе.

Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли NH_4SCN , при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(\text{NH}_4)_2[\text{Co}(\text{SCN})_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(\text{NH}_4)_2[\text{Co}(\text{SCN})_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайте. Дождитесь разделения в пробирке водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+} , открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02 мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+} , соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы Al^{3+} , Cr^{3+} и Zn^{2+} , научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: pH -среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением pH водного раствора. Значение pH можно контролировать с помощью индикаторов или прибора pH -метра. Для поддержания нужного значения pH при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение pH при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроксохромата натрия.

Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}

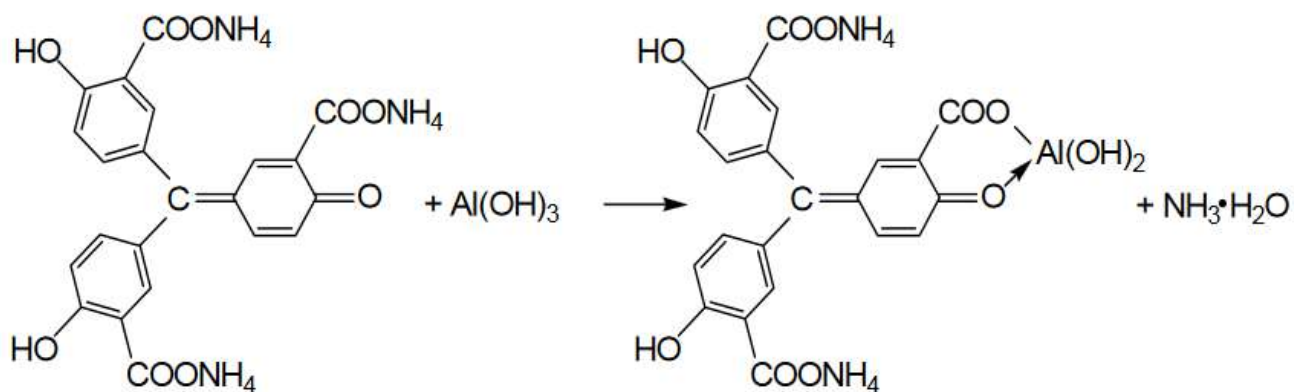
В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9(NH_4)_3$). Смесь нагрейте на

водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

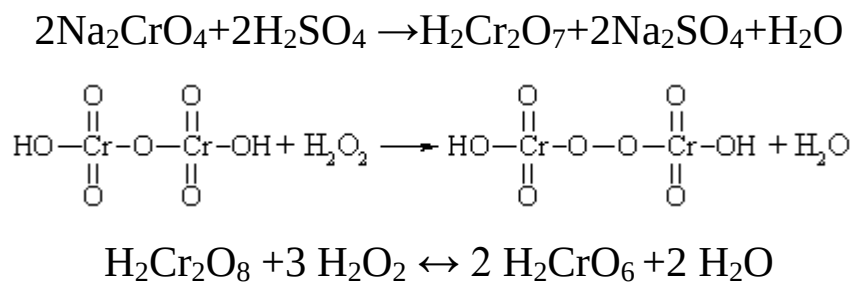
В пробирке к 1 мл раствора ZnCl_2 добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $\text{K}_2\text{Zn}_3[\text{Fe(CN)}_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2 . Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно-восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2 , ~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6 . Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:



Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.
2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.
3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+ , Pb^{2+} , Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушите фильтры на воздухе в чашке Петри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} и Pb^{2+} , после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgI (жёлтый), HgI_2 (оранжевый), PbI_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Бледно-желтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH . При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2 , йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид серебра (I), который затем разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^+ , Hg^{2+} , Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?
2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.
3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов AgNO_3 и KI , если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра $\text{ПР}(\text{AgI}) = 8,3 \cdot 10^{-17}$.
4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.
5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.
6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «сорбция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить, какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы соли:

Раствор бесцветный	Раствор может быть окрашенным
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

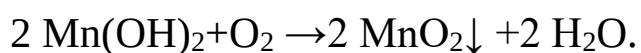
Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсутствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щёлочи стал розовым	CoOHCl Co(OH)_2	В пробирке был CoCl_2
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

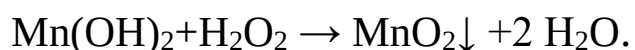
Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $\text{Pb}(\text{OH})_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2 , а светло-бежевый гидроксид марганца $\text{Mn}(\text{OH})_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

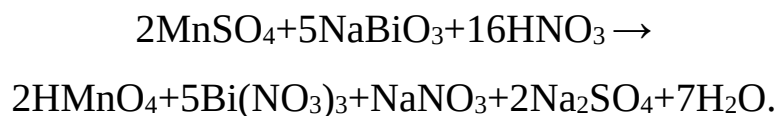


Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:



Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильноокислой среде:



Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвет. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвета. Про другой известно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделения бурого газа и образования чёрного порошка. При пропускании над нагретым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эршино А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2015. 1280 с.

Карпетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Лабораторная работа № 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА.....	6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	9
Лабораторная работа № 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+} , Ni^{2+} И Cu^{2+}	10
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	14
Лабораторная работа № 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+} , Cr^{3+} , Zn^{2+}	15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	18
Лабораторная работа № 4. РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+ , Pb^{2+} , Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ.....	19
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ.....	22
Лабораторная работа № 5. ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ.....	23
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ».....	26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	34

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ЧАСТЬ 1**

Составили: Н.Б. Смирнова, доц., канд. хим.наук
В.М. Сахарова, доц., канд. техн. наук

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение	4
Общие правила работы в химической лаборатории	7
Правила техники безопасности при работе с химическими реактивами	7
Оказание первой медицинской помощи	8
Оформление лабораторного журнала	8
1. Периодичность изменения свойств оксидов и гидроксидов	9
1.1. Экспериментальная часть	11
1.2. Контрольные вопросы и задания	12
2. Химическая кинетика	14
2.1. Экспериментальная часть	16
2.2. Контрольные вопросы и задания	18
3. Химическое равновесие	19
3.1. Экспериментальная часть	20
3.2. Контрольные вопросы и задания	21
4. Ионные равновесия в растворах электролитов	23
4.1. Экспериментальная часть	25
4.2. Контрольные вопросы и задания	26
5. Реакции ионного обмена	27
5.1. Экспериментальная часть	29
5.2. Контрольные вопросы и задания	31
6. Гидролиз солей	32
6.1. Экспериментальная часть	34
6.2. Контрольные вопросы и задания	35
Список литературы	37

ВВЕДЕНИЕ

Горные инженеры, геологи и геофизики сталкиваются с самыми разнообразными явлениями природы, химическими по своей сущности: быстрой выветриваемостью, окисляемостью, различной смачиваемостью горных пород, с особенностями воздушной среды под землей, с обводненностью горных выработок, агрессивностью рудничных вод. Поэтому им требуются более глубокие знания по химии, чем любому другому специалисту. Инженеры горнодобывающей отрасли способны справиться с современными задачами горно-металлургической и горно-химической промышленности только зная весь путь от разведки полезного ископаемого до его переработки. Физико-химическая некомпетентность горных инженеров и геологов является причиной недостатков в развитии горной науки, техники и технологии, бедственного экологического положения горных предприятий.

Роль химии в подготовке инженеров непрерывно возрастает в связи с необходимостью решения задач по снижению уровня потерь полезных компонентов и увеличению комплексности использования руд, рациональному применению вскрышных пород, очистке и использованию шахтных вод и сточных вод обогатительных фабрик, защите от коррозии бурового и горнодобывающего оборудования, заблаговременной дегазации угольных месторождений, применению физико-химических методов упрочнения грунтов, геотехнологическим методам добычи полезных ископаемых.

В горном деле широко применяются химические материалы: химические растворы при бурении и тампонаже скважин, взрывчатые вещества при отбойке угля, руды и породы, химические добавки, препятствующие распылению угля и налипанию льда на конвейерную ленту, материалы для покрытия из пены, предохраняющей от промерзания участка разработки, компоненты для отвердевания закладочных смесей, огнетушащие составы, синтетические смолы для укрепления горных пород, реагенты для флотации и обогащения руд и большой ассортимент таких обычных химикатов как горючие и смазочные материалы, цемент, стекло, керамика, гидро-, термо- и электроизоляционные материалы, лаки, краски, пластмассы, резина.

Еще благодаря усилиям Д.И. Менделеева, химию, как одну из фундаментальных дисциплин, стали преподавать во всех высших школах России. Химия вместе с физикой и математикой составляет основу профессиональной подготовки специалистов высокой квалификации.

Будущие специалисты должны получить такой комплекс знаний по химии, который составит базу для успешного освоения последующих дисциплин и правильного использования материалов, применяемых в технике.

Теоретические разделы химии, такие как строение электронных оболочек атомов, основные виды химических связей, химическая кинетика и равновесие, окислительно-восстановительные потенциалы, водородный показатель, произведение растворимости, свойства комплексных соединений, позволяет правильно ориентироваться в вопросах, связанных непосредственно со свойствами и превращениями минералов и горных пород.

Горные породы и руды состоят из минералов. К минералам относят природные химические соединения. Неорганические минералы подразделяются на минеральные типы, названия которым присваиваются согласно классификации неорганических веществ и их номенклатуре. По химическому составу минералы подразделяют на:

- а) простые вещества (металлы, неметаллы),
- б) карбиды, нитриды, фосфиды, сульфиды, арсениды, селениды, оксиды, гидроксиды, галогениды и др.,
- в) соли кислородсодержащих кислот (силикаты, фосфаты, арсенаты, ванадаты, бораты, карбонаты, сульфаты, нитраты, вольфраматы, молибдаты, хроматы, иодаты и др.).

Основа химической номенклатуры - русские названия химических элементов, приведенные в периодической системе Д.И. Менделеева, которые не всегда совпадают с латинскими названиями, например, гидрогениум - водород, оксигениум - кислород.

К неметаллам относят:

He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn, F, Cl, Br, I, At, O, S, Se, Te, N, P, As, C, Si, B, H, остальные элементы - металлы.

Названия простых веществ состоят из одного слова - наименования химического элемента с числовой приставкой, например: O₃ - трикислород, P₄ - тетрафосфор, S₈ - октасера.

Используют также числовые приставки:

1 - моно	7 - гепта
2 - ди	8 - окта
3 - три	9 - нона
4 - тетра	10 - дека
5 - пента	11 - ундека
6 - гекса	12 - додека

В химических формулах сложных веществ на первом месте (слева) всегда записывают формульные обозначения электроположительных составляющих, а за ними указывают формульные обозначения электроотрицательных составляющих. Например, PCl_3 .

Названия сложных веществ составляются по их химическим формулам справа налево. Они складываются из двух слов - названий электроотрицательных составляющих (условных или реальных катионов) в именительном падеже и электроположительных составляющих (условных или реальных катионов) в родительном падеже, например: PCl_3 - трихлорид фосфора, CO - монооксид углерода.

Названия одноэлементных анионов оканчиваются на -ид, а названия многоэлементных анионов - на -ат.

Для построения названий сложных веществ используются корни (иногда усеченные) русских названий элементов, например, бериллий - бериллат, молибден - молибдат, фосфор - фосфид и фосфат. Традиционно применяются корни латинских названий для элементов: серебро, мышьяк, золото, углерод, медь, железо, ртуть, марганец, азот, никель, свинец, сера, сурьма, кремний, олово:

Ag - аргентат	N - нитрид, нитрат
As - арсид, арсенат	Ni - никелат
Au - аурат	Pb - плюмбат
C - карбид, карбонат	S - сульфид, сульфат
Cu - купрат	Sb - стибид (антимонид), стибат
Fe - феррат	Si - силицид, силикат
Hg - меркурат	Sn - станнат
Mn - манганат	

В названиях сложных веществ употребляются как числовые приставки, так и степени окисления катиона (обычно металлического) при точно известном заряде аниона, например, P_4O_{10} - декаоксид тетрафосфора, V_2O_5 - оксид ванадия (V), $\text{Bi}(\text{OH})_3$ - гидроксид висмута (III).

Названия кислот и кислотных остатков приводятся в учебном пособии [1]. Названия кислотных остатков используют построения названий солей. Соли - продукты реакций нейтрализации. Соли, содержащие кислотные остатки с незамещенными атомами водорода, - к и с л ы е соли. Соли, содержащие гидроксид-ионы, называют о с н о в н ы м и солями.

$\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2$ - дигидрофосфат кальция

KHSO_4 - гидросульфат калия

$\text{FeOH}(\text{NO}_3)_2$ - гидроксонитрат железа (III)
 $(\text{CaOH})_2\text{SO}_4$ - гидроксосульфат кобальта (II)
 $\text{Cu}_2\text{CO}_3(\text{OH})_2$ - дигидроксид-карбонат димеди

Если соли содержат два разных катиона, то их называют
д в о й н ы м и.

$\text{KAl}(\text{SO}_4)_2$ - сульфат алюминия-калия
 $\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$ - карбонат магния-кальция

ОБЩИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ В ХИМИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

Прежде чем приступить к работе по данной теме, следует изучить ее по описанию, уяснить цель задания и план его выполнения.

Не загромождайте рабочее место портфелями, свертками, сумками, перчатками и т.п. Для них отведены специальные этажерки. На рабочем столе должны находиться только необходимые приборы и лабораторный журнал.

Работайте тщательно, аккуратно, без лишней торопливости, соблюдайте в лаборатории тишину.

Внимательно наблюдайте за ходом опыта, отмечая и записывая каждую его особенность.

Категорически запрещается в лаборатории принимать пищу, пробовать химические вещества на вкус.

Без указания преподавателя не проводите никаких дополнительных опытов.

После окончания работы вымойте использованную посуду, выключите воду, электрические приборы и приведите в порядок рабочее место.

ПРАВИЛА ТЕХНИКИ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ РАБОТЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКТИВАМИ

Для выполнения работ в лаборатории имеется определенный набор химических реактивов, часть которых размещается на лабораторных столах (водные растворы солей), а остальные - концентрированные и разбавленные кислоты и щелочи, сухие соли, дурно пахнущие вещества - в вытяжных шкафах.

При использовании реактивов следует соблюдать следующие правила:

1. Не разрешается уносить реактивы из вытяжного шкафа на рабочее

место.

2. Сухие реактивы набирают чистым шпателем или ложечкой.
3. Для проведения опыта в пробирке брать сухое вещество в количестве, закрывающем дно пробирки, а раствора - не более $1/6$ ее объема.
4. Избыток реактива нельзя высыпать (выливать) обратно в те склянки, из которых они были взяты.
5. Не следует путать пробирки от разных склянок. Крышки и пробирки кладут на стол поверхностью, не соприкасающейся с реактивом.
6. При нагревании растворов в пробирке держать ее таким образом, чтобы отверстие пробирки было направлено в сторону от работающего и его соседей по рабочему месту.
7. При разбавлении концентрированных кислот вливать кислоту в воду, а не наоборот.
8. Остатки растворов, содержащих кусочки металлов, собирают в специальные склянки, находящиеся в вытяжных шкафах.

ОКАЗАНИЕ ПЕРВОЙ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ

При порезах стеклом удаляют осколки из раны, смазывают края раны раствором йода и перевязывают бинтом.

При ожоге горячей жидкостью или горячим предметом обожженное место обрабатывают раствором перманганата калия, накладывают мазь от ожога.

При ожогах кислотами сразу промывают обожженное место большим количеством воды, а затем 3%-ным раствором гидрокарбоната натрия.

При ожогах едкими щелочами хорошо и обильно промыть обожженное место проточной водой, затем разбавленным раствором уксусной кислоты и опять водой.

При попадании кислоты или щелочи в глаза немедленно промыть глаза в течение трех минут большим количеством воды, а затем раствором гидрокарбоната натрия или борной кислоты.

ОФОРМЛЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОГО ЖУРНАЛА

Каждый студент должен иметь лабораторный журнал - отдельную тетрадь для записей.

В лабораторном журнале студент выполняет отчеты по лаборатор-

ным работам, домашние задания, решает задачи, отвечает на контрольные вопросы.

Все наблюдения и выводы по экспериментальной работе студент заносит в лабораторный журнал непосредственно после выполнения опыта.

Отчеты по выполненным лабораторным работам должны содержать:

- 1) название лабораторной работы,
- 2) названия всех проделанных опытов,
- 3) после названия опыта записывается уравнение проделанной реакции, в котором указываются осадки ($\downarrow$) и их окраска, газы ($\uparrow$), изменения окраски растворов,
- 4) задания, указанные в методическом руководстве,
- 5) выводы по каждому опыту и общий вывод по работе.

1. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ОКСИДОВ И ГИДРОКСИДОВ

Цель работы - изучение изменения кислотно-основных свойств гидроксидов в периодах и группах периодической системы Д.И. Менделеева.

Периодическая система Д.И. Менделеева - естественная система химических элементов, созданная на основе периодического закона.

Положение элемента в периодической системе определяет физико-химические свойства соответствующих им простых веществ и химических соединений.

Периодичность свойств химических соединений удобно проследить на примере оксидов и гидроксидов. Оксиды и гидроксиды относятся к основным пороодообразующим минералам, они широко распространены и составляют 17% от массы земной коры.

В табл.1.1. приведены наиболее часто встречающиеся реакции взаимодействия оксидов и гидроксидов с водой.

Кислотно-основные свойства соединений можно объяснить на основе электростатических представлений. Ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроксидов связано с изменением поляризующего действия элемента, образующего гидроксид, на группу OH^- . Поляризующее действие катиона сильно зависит от его строения и может быть охарактеризовано следующими закономерностями:

- 1) Поляризующее действие иона очень быстро возрастает с увеличением его заряда;

Таблица 1.1

Кислотно-основные реакции оксидов и гидроксидов

Тип оксида (гидроксида)	Типичная реакция
Сильно - кислый	$\text{SO}_3(\text{г}) + \text{H}_2\text{O} = \text{SO}_4^{2-}(\text{р}) + 2\text{H}^+(\text{р})$
Слабо - кислый	$\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HCO}_3^-(\text{р}) + \text{H}^+(\text{р})$
Амфотерный	$\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{к}) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{H}^+(\text{р})} \text{Zn}^{2+}(\text{р}) + \text{H}_2\text{O} \\ \xrightarrow{\text{OH}^-(\text{р})} [\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-}(\text{р}) \end{cases}$
Слабо - основной	$\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{к}) \rightleftharpoons \text{FeOH}^+(\text{р}) + \text{OH}^-(\text{р})$
Сильно - основной	$\text{Li}_2\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} = 2\text{Li}^+(\text{р}) + 2\text{OH}^-(\text{р})$

2) большое значение имеет строение внешней электронной оболочки, по этому признаку катионы разделяются на ионы с незаконченным внешним слоем, переходным от 8-электронного и 18-электронному (Mg^{2+} , Fe^{2+} , Fe^{3+}) и ионы с 18-электронным внешним слоем (Zn^{2+} , Ag^+);

3) при сходном строении внешней электронной оболочки и равном заряде поляризующее действие иона возрастает по мере уменьшения его радиуса.

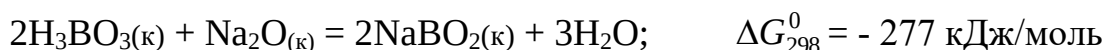
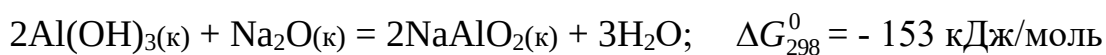
Итак, ослабление основных и усиление кислотных свойств гидроокисей связано с увеличением поляризующего действия катиона, т.е. с убыванием его радиуса и возрастанием положительной степени окисления, а также с увеличением числа внешних электронов. Например, если катион имеет малый заряд сравнительно большой радиус, его электростатическое притяжение к группе OH^- невелико и OH^- выступает в гидроксиде как единое целое. Поэтому типичными основаниями являются гидроксиды элементов, находящихся в главных подгруппах I и II групп периодической системы (KOH , NaOH), а также NH_4OH .

По мере увеличения поляризующего действия катиона возрастает ковалентность связей элемент-кислород и усиливается ионный характер связей $\text{O} - \text{H}$. Основные свойства гидроксидов ослабляются и появляются кислотные свойства. Из элементов II группы бериллий и цинк дают амфо-

дают атмосферные гидроксиды, в (III) группе амфотерны гидроксиды алюминия, галлия, индия. Амфотерность характерна для большинства элементов четвертой группы периодической системы.

Когда катион имеет большой положительный заряд и малый радиус (что типично для неметаллов), усиление его поляризующего действия приводит к тому, что водород становится подвижным и преобладает диссоциация по кислотному типу. Среди элементов третьей группы гидроксид бора - типичная кислота. В четвертой группе кислотами являются гидроксиды углерода и кремния, однако, эти кислоты еще очень слабые. Гидроксиды многих элементов с максимальной степенью окисления пятой, шестой, седьмой групп - сильные кислоты.

Способность веществ к взаимодействию определяется изменением изобарно-изотермического потенциала (ΔG) химической реакции. Чем меньше алгебраическая величина энергии Гиббса химического процесса, тем больше вероятность ее протекания в данном направлении.



Увеличение отрицательного значения ΔG_{298}^0 свидетельствует об усилении кислотных свойств гидроксида бора H_3BO_3 .

1.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Гидроксиды магния и кальция

Поместите в пробирку небольшое количество оксида магния или кальция и прибавьте 5 мл воды. Взболтайте содержимое пробирки и испытайте реакцию среды 1-2 каплями фенолфталеина. Составьте уравнение реакции взаимодействия оксида с водой. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 2. Получение и свойства гидроксида алюминия

В пробирку налейте 2 мл раствора соли алюминия и прибавьте примерно такой же объем раствора гидроксида аммония. Содержимое пробирки распределите в две пробирки. В одну из пробирок при взбалтывании прилейте по каплям разбавленный раствор серной кислоты до полного рас-

творения осадка. Во вторую пробирку прилейте разбавленный раствор гидроксида натрия также до полного растворения осадка. Составить уравнение реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида алюминия.

ОПЫТ 3. Двуокись углерода

Налейте в пробирку несколько мл воды и прибавьте 1-2 капли индикатора. Пропустите из аппарата Киппа в воду двуокись углерода до изменения окраски индикатора. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 4. Гидроксид кремния

В пробирку поместите раствор силиката натрия и пропустите через него углекислый газ из аппарата Киппа, при этом наблюдайте образование осадка гидроксида кремния. Напишите уравнение реакции. Сделайте вывод о кислотно-основном характере гидроксида кремния.

ОПЫТ 5. Оксид фосфора (V)

В пробирку поместите немного фосфорного ангидрида и добавьте несколько мл воды. Наблюдайте растворение, встряхивая пробирку. Испытайте реакцию среды индикаторами. Составьте уравнение реакции. Сделайте вывод о характере гидроксида.

ОПЫТ 6. Гидроксиды олова (II) и свинца (II)

а) Налейте в пробирку 2 мл раствора хлорида олова. Добавьте по каплям разбавленный раствор щелочи до образования осадка. Содержимое пробирки разделите на две части. Подействовать на одну концентрированным раствором щелочи, а на другую - соляной кислотой. Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида олова.

б) Такой же опыт проделать с раствором соли азотнокислого свинца. На полученный гидроксид свинца подействовать азотной кислотой и щелочью. Почему для растворения гидроокиси свинца нельзя воспользоваться соляной или серной кислотами? Составьте уравнения реакций. Сделайте вывод о характере гидроксида свинца.

1.2. Контрольные вопросы и задания

1. Сравнив результаты опытов, сделайте вывод, как изменяется характер гидроксидов элементов: Mg, Al, Si, P в третьем периоде слева

направо. Чем объясняется это изменение характера гидроксидов? Как оно связано с изменением металлических свойств элементов?

2. По результатам опытов сделайте вывод об изменении кислотно-основных свойств гидроксидов элементов: C, Si, Sn, Pb в главных подгруппах сверху вниз. Как увязать такое изменение характера гидроксидов с возрастанием порядкового номера элемента и изменением металлических свойств элементов?

3. Запишите кислородные соединения марганца со степенями окисления II, IV, VI, VII и покажите, как с увеличением степени окисления изменяется характер оксидов и соответствующих им гидроксидов.

4. Укажите, какая из сравниваемых двух кислот H_2SO_3 или H_2SO_4 является более сильной и как объяснить такое явление.

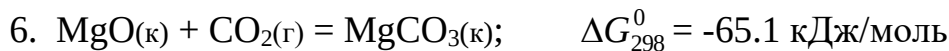
5. Какой из галогенов имеет наибольшее сродство к натрию, если энергия Гиббса для галогенидов натрия имеет следующую величину (кДж/моль):

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaJ} = -237.2,$$

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaBr} = -347.7,$$

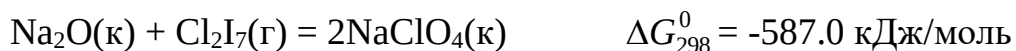
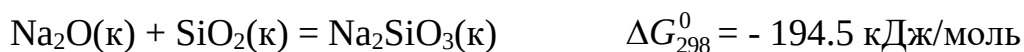
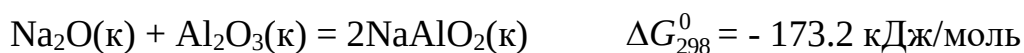
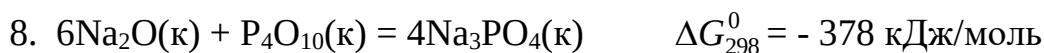
$$\Delta G_{298}^0 \text{NaCl} = -384.0,$$

$$\Delta G_{298}^0 \text{NaF} = -541.0.$$



Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значением ΔG_{298}^0 образования рассматриваемых карбонатов из оксидов?

7. Как изменяется сила кислот в ряду $\text{H}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{SeO}_4 - \text{H}_2\text{TeO}_4$?



Как изменяются кислотно-основные свойства оксидов (расположите их в ряд) и как это согласуется со значениями ΔG_{298}^0 образования рассматриваемых солей из оксидов?

9. Укажите, какое из рассматриваемых двух соединений является более сильным основанием: а) гидроксид натрия или гидроксид цезия; б) гидроксид бария или гидроксид кальция? Объясните это изменение характера гидроксидов, исходя из расположения элементов в таблице Д.И. Менделеева.

2. ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Ц е л ь р а б о т ы - изучение скорости химической реакции и ее зависимости от концентрации и температуры.

Раздел химии, изучающей скорость химических реакций, называется химической кинетикой.

Скорость химической реакции - это изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени. Зависимость скорости химической реакции выражается законом действующих масс: при постоянной температуре скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ, взятых в степенях, равных стехиометрическим коэффициентам в уравнении реакции.

Для реакции $aA + bB = cC + dD$ скорость выразится уравнением:

$$v = k \cdot [A]^a \cdot [B]^b \quad (\text{для гомогенной системы}),$$

где v - скорость реакции;

$[A]$, $[B]$ - молярные концентрации реагирующих веществ;

k - константа скорости реакции

(при $[A] = [B] = 1$ моль/л, k численно равна v).

Для реакции $2NO_{(г)} + O_{2(г)} = 2NO_{2(г)}$ выражение скорости имеет следующий вид:

$$v = k \cdot [NO]^2 \cdot [O_2].$$

Гомогенная система состоит из одной фазы - между реагентами нет поверхности раздела. Гетерогенная система состоит из двух и более фаз. Реакция в гетерогенной системе осуществляется на поверхности раздела фаз. Скорость гетерогенной реакции не зависит от площади поверхности раздела фаз, так же как скорость гомогенной реакции не зависит от объема системы.

Концентрация твердого вещества принимается за единицу.

Зависимость скорости химической реакции от температуры описывается экспериментально найденным уравнением Вант-Гоффа:

$$v_{t_2} = v_{t_1} \cdot \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}},$$

где v_{t_1} , v_{t_2} - скорость реакции при температурах соответственно t_1 и t_2 ;

γ - температурный коэффициент скорости реакции,
равный обычно 2-4.

Эта зависимость может быть выражена в виде следующего правила: при увеличении температуры на каждые 10° скорость химической реакции увеличивается в 2-4 раза.

Зависимость скорости реакции от температуры более точно может быть выражена уравнением Аррениуса:

$$k = c \cdot e^{-\frac{E_{\text{акт}}}{RT}},$$

где k - константа скорости реакции;

c - постоянная;

$E_{\text{акт}}$ - энергия активации;

R - универсальная газовая постоянная (8.31 Дж/моль · К);

T - абсолютная температура.

Из уравнения Аррениуса следует, что скорость реакции с повышением температуры увеличивается по закону экспоненты, однако интенсивность теплоотвода в конкретных условиях реакции может возрасти только линейно. В этом случае возможен скачкообразный переход от стационарного режима к нестационарному, быстрое ускорение - самовоспламенение, или цепной взрыв. По такому механизму происходят взрывы метана и угольной пыли в шахтах. Например, при повышении концентрации метана на несколько процентов достигается нижний предел взрываемости метана в воздухе, в тысячи раз ускоряется реакция окисления метана кислородом воздуха $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 = \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + Q$. Концентрационные пределы взрываемости метана в воздухе от 5 до 15% по объему.

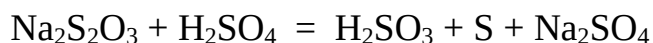
Одним из направлений в решении проблемы предупреждения взры-

вов метана и угольной пыли в шахтах, опасных по газу и пыли, является применение способов взрывозащиты, основанных на использовании распыленной воды или специальных химических соединений, которые играют роль отрицательных катализаторов (ингибиторов), теплопоглотителей в реакциях окисления углеводородов. Такие вещества носят общее название флегматизаторов горения. Этим свойством обладают гидрокарбонаты натрия и калия, гидрофосфаты аммония, бура и др.

2.1. Экспериментальная часть.

ОПЫТ 1. Зависимость скорости химической реакции от концентрации реагирующих веществ.

Соли тиосерной кислоты устойчивы в твердом состоянии и в растворе. Тиосерная кислота неустойчива и при получении распадается самопроизвольно по реакции



с образованием сернистой кислоты и свободной серы.

Постановка опыта основывается на следующем: в результате реакции между серной кислотой и тиосульфатом натрия образуется сера, выделяющаяся в виде белой мути. Время от начала реакции до момента появления мути зависит от скорости этой реакции.

В три пробирки налить по 6 мл раствора серной кислоты.

В первую пробирку влить 6 мл раствора $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$, быстро перемешать ее содержимое и одновременно включить секундомер. Отсчитать время (τ) до начала появления белой мути - коллоидной серы.

Во вторую пробирку влить смесь 4 мл раствора тиосульфата натрия и 2 мл воды. Наблюдать, через сколько секунд растворы сделаются мутными.

Результаты наблюдений записать по следующей форме, выразив значения скоростей реакций в условных единицах (десятичных дробях!) в виде $v = 1/\tau$, где τ - время в секундах.

Относительная концентрация раствора тиосульфата натрия записана в условных единицах $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3} = v_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3} / V_{\text{раствора}}$, где $V_{\text{раствора}}$ - общий объем раствора 12 мл. Тогда для первого случая $C_{\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3}$ 50%, для второго - 33% и третьего - 17%, что соответствует значениям 3а, 2в, а.

№ опы-та	Объем в мл			Относит. концентр. $C_{Na_2S_2O_3}$	Время до появления мути, τ	$v = \frac{1}{\tau}$
	раствора H_2SO_4	раствора $Na_2S_2O_3$	H_2O			
1	6	6	0	3a		
2	6	4	2	2a		
3	6	2	4	a		

Результаты измерений необходимо представить в виде графика. На ось абсцисс наносят значения относительных концентраций в виде трех точек, отстоящих от начала координат на a , $2a$, $3a$, где a - произвольно выбранный отрезок. Из каждой точки восстанавливается перпендикуляр, длина которого соответствует значениям скоростей реакции в условных единицах. Далее следует обдумать, каким образом, пользуясь верхними концами этих перпендикуляров, провести линию, характеризующую зависимость скорости реакции от концентрации. Подсказкой будет служить математическое выражение для скорости изучаемой реакции, которое нужно записать согласно закону действия масс.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от концентрации реагирующих веществ.

ОПЫТ 2. Зависимость скорости реакции от температуры опыта

Налить в одну пробирку 5 мл раствора $Na_2S_2O_3$, а другую - 5 мл раствора H_2SO_4 . Обе пробирки поместить в стакан с водопроводной водой. Спустя 5-7 минут измерить температуру воды и слить вместе содержимое обеих пробирок. Измерить время появления помутнения.

В две другие пробирки налить по 5 мл тех же растворов. Поместить пробирки в стакан с водой, нагретой на 10° выше, чем в предыдущем опыте. Через 5-7 минут слить содержимое пробирок. Измерить время до появления мути.

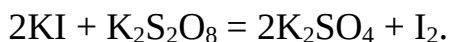
Повторить опыт, повысив температуру еще на 10° .

Результаты наблюдений выразить в виде графика, откладывая по оси абсцисс температуру опыта, по оси ординат - относительную скорость реакции.

Сделать вывод о зависимости скорости реакции от температуры.

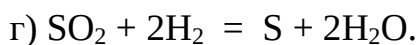
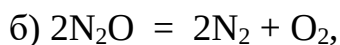
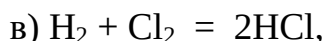
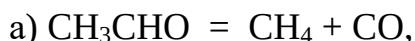
2.2. Контрольные вопросы и задания.

1. Реакция в водном растворе выражается уравнением:



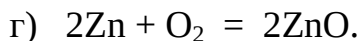
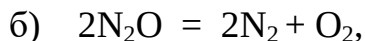
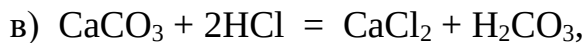
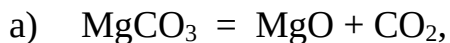
Как изменится скорость этой реакции при разбавлении реагирующей смеси в 2 раза?

2. Записать математические выражения для скорости следующих газовых реакций



Предсказать изменение скорости этих реакций при увеличении концентрации каждого из реагирующих веществ в 2 раза.

3. Записать выражения для скорости реакций



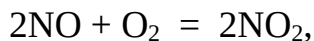
Как изменится скорость вышеуказанных реакций, если:

а) увеличить концентрацию исходных веществ в 2 раза;

б) увеличить давление в 2 раза.

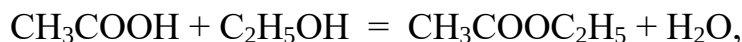
4. Срок хранения флотационного реагента, поступившего на обогательную фабрику, согласно техническим условиям составляет при температуре 20°C 2 месяца. Воспользовавшись правилом Вант-Гоффа, рассчитать срок годности этого флотореагента, если на складе фабрики поддерживается 0°C, а температурный коэффициент скорости разложения равен 2.

5. Во сколько раз изменится скорость реакции



если концентрация оксида азота уменьшится в 2 раза, а концентрация кислорода увеличивается в 2 раза?

6. Реакция протекает по уравнению



концентрацию CH_3COOH увеличили от 0.3 до 0.45 моль/л, а концентрацию $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ увеличили от 0.4 до 0.8 моль/л. Во сколько раз возросла скорость прямой реакции?

7. Кальцинированная сода (безводная Na_2CO_3) используется в виде раствора в качестве регулятора щелочности флотационного процесса. При температуре 55°C сода растворяется в 6 раз быстрее, чем при 15° . Рассчитать температурный коэффициент скорости растворения соды.

8. Для приготовления раствора силиката натрия требуемой плотности, используемого в качестве подавителя пустой породы, твердые прозрачные куски силикат-глыбы Na_2SiO_3 загружают в воду: нагревают до 95° и ведут перемешивание в течение четырех часов. Какой срок потребуется для получения раствора необходимой концентрации, если поддерживать температуру 90° ($\gamma = 2$)?

3. ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение влияния концентрации на сдвиг химического равновесия.

Многие реакции идут не до исчезновения исходных веществ, а до состояния, не изменяющегося во времени, когда в реакционной смеси можно обнаружить как исходные вещества, так и продукты реакции. Такое состояние системы называется химическим равновесием.

С термодинамической точки зрения состояние равновесия характеризуется тем, что система достигает минимального значения энергии Гиббса (при заданных температуре, давлении и общем составе).

С кинетической точки зрения при равновесии скорости процессов образования продуктов реакции из исходных веществ и исходных веществ из продуктов выравниваются. Скорость достижения равновесия в зависимости от природы процесса, условий, а также наличия подходящих катализаторов может варьировать от малых долей секунды до веков и тысячелетий.

Если равновесие достигнуто, то для реакции



называемая константой равновесия, принимает определенное значение. Константа равновесия зависит от температуры, но не зависит от конкретных количеств реагентов и порядка их взаимодействия.

Изменение равновесных концентраций при внешнем воздействии называется **с м е щ е н и е м х и м и ч е с к о г о р а в н о в е с и я**.

Основным законом, управляющим смещением равновесия, служит принцип Ле-Шателье: «Если на систему, находящуюся в равновесии, оказывается внешнее воздействие, то равновесие смещается в сторону, указываемую воздействием, до тех пор, пока нарастающее в системе противодействие не станет равно оказанному воздействию».

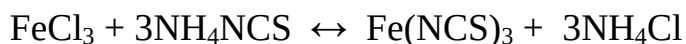
Внешним воздействием, смещающим равновесие, может быть изменение температуры, давления, концентрации одного или нескольких веществ, участвующих в реакции. «Смещение равновесия в сторону, указанную воздействием» означает, что при повышении давления преимущество получает процесс, ведущий к уменьшению объема, т.е. к тому же результату, что и само воздействие. Нагревание ведет к увеличению роли эндотермического процесса, т.е. процесса, увеличивающего запас энергии в системе (эндотермические реакции идут с поглощением тепла, а экзотермические - с его выделением).

Увеличение концентрации одного из веществ приводит к смещению равновесия в сторону расходования этого вещества.

3.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Влияние концентрации веществ на смещение химического равновесия.

Реакция между хлоридом железа и тиоцианатом аммония протекает по уравнению:



Красная окраска образовавшегося раствора обусловлена содержанием в нем тиоцианата (роданида) железа. По изменению интенсивности этой окраски можно судить о направлении смещения равновесия при изменении концентрации какого-либо реагирующего вещества.

В одной пробирке приготовить смесь (по 4 мл) разбавленных растворов FeCl_3 и NH_4NCS . Полученный окрашенный раствор разлить поровну в 4 пробирки.

В первую пробирку добавить 2 капли насыщенного раствора FeCl_3 . Во вторую пробирку добавить несколько кристалликов NH_4NCS (или KNCS). В третью пробирку всыпать немного твердой соли NH_4Cl (или KCl). Четвертую пробирку оставить для сравнения.

Записать уравнение химической реакции и выражение для константы

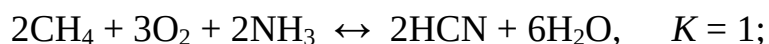
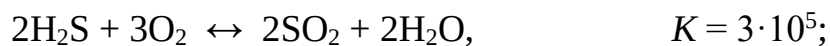
равновесия. Сделать выводы о влиянии концентрации веществ на смещение химического равновесия с использованием принципа Ле-Шателье.

Форма записи

Что добавлено	Изменение интенсивности окраски	Смещение равновесия
1. FeCl ₃	более интенсивная	вправо
2. NH ₄ NCS		
3. NH ₄ Cl		

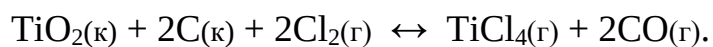
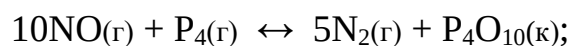
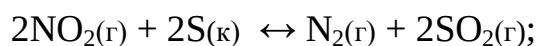
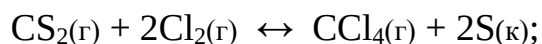
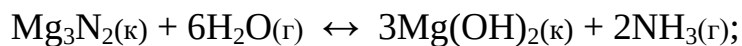
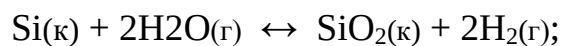
3.2. Контрольные вопросы и задания

1. К гомогенных химических системах при постоянных давлении и температуре установилось состояние равновесия:



По данным значениям констант равновесия укажите, реагенты или продукты будут преобладать в равновесной смеси веществ. На основании закона действующих масс составьте выражения для констант равновесия.

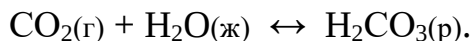
2. В гетерогенных химических системах установилось состояние равновесия:



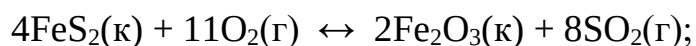
На основании закона действующих масс составьте выражения для

констант равновесия.

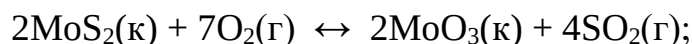
3. За последние 100 лет количество углекислого газа, поступающее за счет сжигания ископаемого топлива, возросло в 50 раз, а парциальное давление CO_2 в атмосфере за это же время увеличилось в 1.2 раза. Объясните это соотношение, допустив, что CO_2 поглощается океаном:



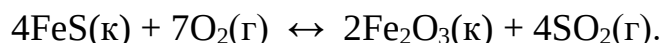
4. Рассчитать равновесный выход диоксида серы в реакциях окислительного обжига сульфидных минералов - пирита, молебденита, пирротина, если в состоянии равновесия количество SO_2 равно 0.4 моль, а начальный объем O_2 составлял 33.6 л (н.у.):



пирит



молибденит



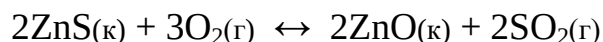
пирротин

5. Равновесный процесс, протекающий в подземных пещерах при образовании сталактитов и сталагмитов, можно описать уравнением



Напишите выражение для константы равновесия этого процесса. Укажите, в какую сторону сдвигается равновесие а) при улетучивании CO_2 , б) испарении воды, в) увлажнении атмосферы в пещерах.

6. Состояние равновесия реакции окисления сфалерита



установилось при равновесной концентрации диоксида серы, равной 0.25 моль/л. Рассчитать исходную концентрацию кислорода.

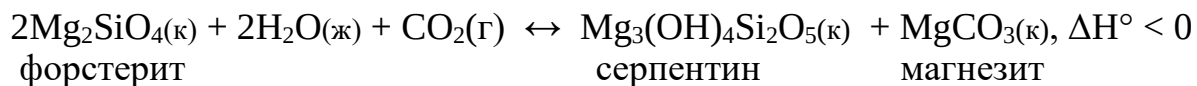
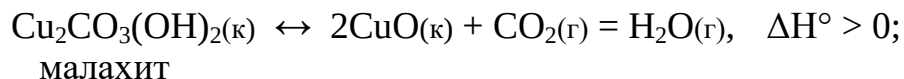
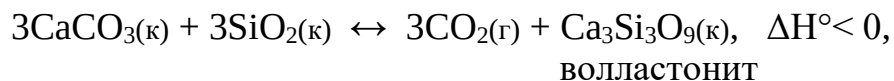
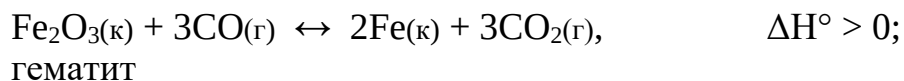
7. В герметически закрытом сосуде объемом 0.25 л проводят реакцию восстановления антимонита



Равновесная концентрация каждого газообразного вещества равна 0.3 моль/л. Для смещения равновесия добавляют 0.1 моль CO . Определить новые равновесные концентрации CO и COS .

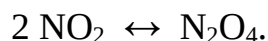
8. Определить, влево или вправо сместится положение равновесия

реакций



при следующих воздействиях: а) введение избытка диоксида углерода, б) нагревание, в) увеличение давления.

9. На некоторых предприятиях систематически из труб в атмосферу выбрасываются оксиды азота, что можно наблюдать как газ красно-желтого цвета (лисий хвост). Объяснить причину различной интенсивности окраски этого газа в зависимости от времени года (лето, зима), если известно, что NO_2 - бурый газ при -11°C превращается в димер N_2O_4 - бесцветные кристаллы, а при обычных условиях существует смесь NO_2 и N_2O_4



Укажите знак при ΔH в этом уравнении.

4. ИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В РАСТВОРАХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение смещения ионного равновесия в водных растворах.

Электrolитами называют вещества, диссоциирующие в растворах (или расплавах) на ионы и способные проводить электрический ток. Распад вещества на ионы называется электролитической диссоциацией. Перенос тока в растворах (и расплавах) электролитов осуществляется положительными и отрицательными ионами, которые называются катионами и анионами. К электролитам относятся соли, кислоты и основания.

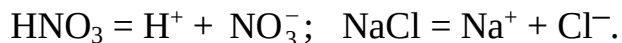
Для количественной характеристики электролитической диссоциации используется степень диссоциации α - доля моля электролита, существующая в растворе в виде ионов:

$$\alpha = C/C_0,$$

где C - концентрация молекул, распавшихся на ионы, моль/л;

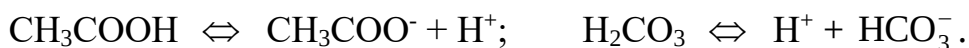
C_0 - исходная концентрация раствора, моль/л.

По величине степени диссоциации все электролиты делятся на сильные и слабые. К сильным относятся те электролиты, α - степень диссоциации которых равна единице, т.е. $C = C_0$. Распад на ионы сильных электролитов протекает необратимо. В растворе сильного электролита не может быть недиссоциированных молекул.



К сильным электролитам относятся практически все соли, гидроксиды щелочных и щелочно-земельных металлов и некоторые кислоты (например, HCl , HNO_3 , H_2SO_4 , HBr , HI , HClO_4)

Степень диссоциации слабых электролитов меньше единицы ($C < C_0$). Их ионизация протекает обратимо:



Константу равновесия электролитической диссоциации слабого электролита называют константой диссоциации. Например, при 298 К

$$K_{\text{CH}_3\text{COOH}} = \frac{C_{\text{CH}_3\text{COO}^-} \cdot C_{\text{H}^+}}{C_{\text{CH}_3\text{COOH}}} = 1.8 \cdot 10^{-5}.$$

$$K_{\text{H}_2\text{CO}_3} = \frac{C_{\text{H}^+} \cdot C_{\text{HCO}_3^-}}{C_{\text{H}_2\text{CO}_3}} = 4.4 \cdot 10^{-7}.$$

Из величин констант видно, что угольная кислота по первой ступени электролит более слабый, чем уксусная кислота.

Степень и константа ионизации слабого электролита связаны зависимостью (закон Оствальда):

$$K = \frac{\alpha^2 \cdot C_0}{1 - \alpha}.$$

Если степень ионизации электролита значительно меньше единицы, то уравнение можно записать $K = \alpha^2 \cdot C_0$, откуда следует, что α возрастает с разведением раствора.

В чистой воде кроме молекул H_2O содержатся протоны и гидроксид-ионы, при этом

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = 1 \cdot 10^{-7} \text{ моль/л (25}^\circ \text{C)}.$$

Содержание протонов и гидроксид-ионов выражают также через водород-

ный показатель $pH = 1g [H^+]$. При $pH = 7$ среду водного раствора называют нейтральной, при $pH < 7$ - кислотной и при $pH > 7$ - щелочной.

Каковы пределы значений pH в природе? Рудничные воды выветривающихся колчеданных месторождений, содержащие свободную серную кислоту, имеют pH около 2, а воды окисляющихся месторождений самородной серы в песчаниках - еще ниже. Воды кратерных озер имеют pH 1-3, торфяных болот около 4, буроугольных месторождений около 5, pH дождевой воды примерно 5.5. Обычные грунтовые воды имеют pH 6.5 - 8.5, морская вода (в зависимости от времени года, ее температуры, количества растворенной в ней углекислоты, органических кислот, привнесенных реками) колеблется от 8.2 до 8.5. В содовых озерах pH достигает 9-10.

4.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Сравнение относительной силы кислот

В одну пробирку наливают 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты, в другую - столько же раствора соляной кислоты той же концентрации. В обе пробирки добавляют небольшое количество мелко измельченного известняка. Взбалтывая пробирки с содержимым, наблюдать, одинаково ли быстро растворяется $CaCO_3$ во взятых кислотах.



Интенсивность выделения CO_2 при этой реакции служит относительным индикатором концентрации водородных ионов. Рассчитайте, во сколько раз концентрация протонов в растворе HCl больше, чем в растворе CH_3COOH , если $K_{CH_3COOH} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

Напишите уравнения диссоциации обеих кислот.

ОПЫТ 2. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабой кислоты.

К 1-2 мл 2М раствора уксусной кислоты в двух пробирках прибавьте 2 капли метилоранжа. Отметьте окраску индикатора. Добавьте при перемешивании в одну пробирку несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Как изменился pH раствора? Объясните изменение pH , применяя правило Ле Шателье и используя выражение константы диссоциации CH_3COOH

ОПЫТ 3. Влияние концентрации одноименных ионов на ионизацию слабого основания.

В две пробирки наливают по 1-2 мл 2М раствора гидроксида аммония и по 2 капли фенолфталеина. В одну из пробирок добавляют при перемешивании несколько кристалликов ацетата аммония до изменения цвета раствора. Объясните причину наблюдаемого изменения окраски на основании уравнения диссоциации NH_4OH , принципа Ле Шателье и константы диссоциации NH_4OH .

ОПЫТ 4. Определение характера диссоциации гидроксидов

В три пробирки наливают по 2-3 мл растворов: в 1-ю - силиката натрия, во 2-ю - сульфата никеля, в 3-ю - сульфата цинка. До начала выпадения осадков гидроксидов добавляют по каплям в 1-ю - раствор серной кислоты, а во 2-ю - раствор гидроксида натрия.

Содержимое каждой пробирки взбалтывают и разливают каждый осадок гидроксидов на две пробирки. В одну пробирку добавляют разбавленной кислоты, а в другую концентрированной щелочи. На основании наблюдений за растворением осадков кремниевой кислоты, гидроксида никеля и гидроксида цинка в кислоте и щелочи сделайте вывод о кислотно-основном характере электролитической диссоциации этих гидроксидов.

Напишите уравнения диссоциации гидроксидов.

4.2. Контрольные вопросы и задания

1. Присутствие каких ионов можно ожидать в водном растворе сернистой кислоты H_2SO_3 ? Запишите выражения для констант диссоциаций этой кислоты.
2. Почему константа электролитической диссоциации служит более удобной характеристикой, чем степень диссоциации?
3. Объясните, почему соли являются сильными электролитами. На примере NaHCO_3 укажите характер химических связей, по которым электролитическая диссоциация протекает в водном растворе: а) практически полностью; б) частично; в) отсутствует.
4. Укажите, корректно ли сопоставлять такие свойства, как растворимость вещества и способность его к электролитической диссоциации.
5. В практике флотации используются процессы с низкими и высо-

кими значениями pH флотационной пульпы. Можно ли приготовить растворы с pH 0, -1, -2, 14, 15, 16?

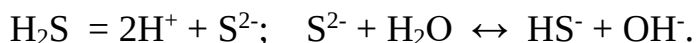
6. Вычислите концентрацию ионов водорода в 1М (9.45 %-ном) растворе серной кислоты, pH которого - 0.005. Объясните полученный результат.

7. В Первоуральске выпал кислотный дождь, водородный показатель которого равен 2.5. Во сколько раз превышена концентрация иона водорода, если обычная дождевая вода имеет pH = 5.5?

8. Шахтные воды Кизеловского бассейна содержат 0.01 г/л ионов водорода. Рассчитайте водородный показатель этих вод, концентрацию OH^- ионов. Укажите, кислотный или щелочной характер имеют эти воды.

9. Во сколько раз уменьшится концентрация ионов водорода, если к 1 литру раствора уксусной кислоты с концентрацией 0.005 моль/л прибавить 0.05 моль ацетата натрия, считая, что концентрация недиссоциированных молекул уксусной кислоты, как и объем раствора остаются практически постоянными? $K_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

10. Для оценки pH раствора сероводорода студент записал следующие уравнения:



Таким образом, студент сделал вывод, что среда щелочная. Найдите ошибки в его рассуждениях.

5. РЕАКЦИИ ИОННОГО ОБМЕНА

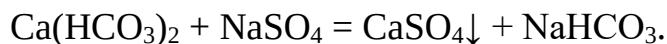
Ц е л ь р а б о т ы - выявление закономерностей протекания реакций ионного обмена в растворах электролитов.

Минералы и горные породы в условиях земной поверхности стремятся перейти в более устойчивые соединения. Известняки медленно растворяются в водах, содержащих уголекислоту, образуя гидрокарбонат кальция. Грунтовые воды, содержащие $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$, реагируют с сульфатно-хлоридно-магниевыми (морскими) водами. При этом осаждаются гипс и доломит:

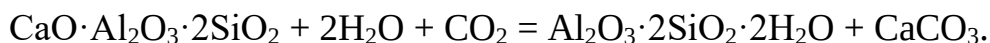


Так озера морского типа превращаются в озера континентального типа. Сульфатно-натриевые воды - результат выщелачивания горных по-

род, могут образовывать содовые озера.



Изверженные горные породы выветриваются, в полевых шпатах содержание алюминия увеличивается от ранних пород к поздним. При этом из них выносятся катионы щелочноземельных металлов. Например, из анорита образуется каолинит



В результате воздействия растворов, содержащих в повышенных концентрациях ионы Mg^{2+} и SO_4^{2-} , происходит доломитизация известняков



Если химическая реакция протекает, то она отличается следующими признаками:

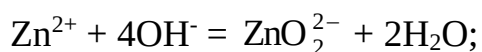
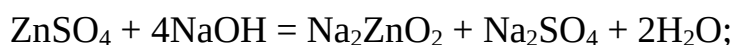
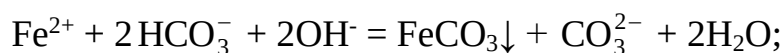
происходит образование осадка, или растворение осадка, или изменяется цвет осадка или раствора, или появляются пузырьки газа.

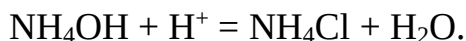
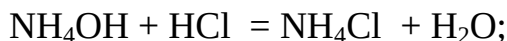
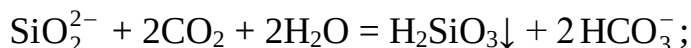
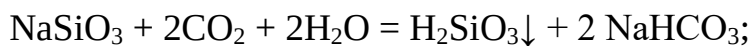
Сущность ионных реакций обмена сводится к соединению ионов в молекулы новых веществ. Равновесия ионных реакций в растворах смещаются в сторону образования слабых электролитов (слабых кислот, слабых оснований, воды) и сильных электролитов (осадков, летучих веществ).

Все кислые соли в воде растворяются, основные соли, как правило, нерастворимы.

В ионных уравнениях сильные, хорошо растворимые электролиты записываются в форме ионов, а слабые электролиты, газы и осадки - в виде молекул.

Рассмотрим следующие примеры реакций. Запишем их сначала в молекулярной форме, а затем в виде кратких ионных уравнений.





5.1. Экспериментальная часть

ОПЫТ 1. Образование осадков

а) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида бария и добавляют в одну пробирку сульфата натрия, а в другую - нитрата калия. Написать молекулярное и ионное уравнения и сделать вывод, в каком случае соль реагирует с другой солью;

б) В две пробирки наливают по 2 мл раствора сульфата меди. В одну пробирку добавляют 1 мл очень разбавленный (1%-ный) раствор гидроксида натрия, а в другую - столько же разбавленного раствора той же щелочи. Написать молекулярные и ионные уравнения, указав окраску образующихся осадков и учитывая, что в первом случае образуется основной сульфат меди $(\text{CuOH})_2\text{SO}_4$. Сделайте вывод об условиях образования основной соли и гидроксида. Осадки сохранить для выполнения опыта 2б;

в) В две пробирки наливают по 2 мл раствора хлорида кобальта. В одну пробирку добавляют разбавленного раствора щелочи до образования синего осадка основной соли. Во вторую пробирку приливают еще столько же щелочи и нагревают с целью получения гидроксида кобальта розового цвета. Содержимое пробирок оставляют для проведения опыта 2в. Написать молекулярное и ионные уравнения, указав цвет осадков.

ОПЫТ 2. Растворение осадков.

а) Наливают в пробирку известковую воду $\text{Ca}(\text{OH})_2$, через этот раствор пропускают углекислый газ из аппарата Киппа. Наблюдают образование белого осадка средней соли, продолжают пропускать пузырьки CO_2 до растворения белого осадка и получения бесцветного прозрачного раствора кислой соли $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$. Написать молекулярные и ионные уравнения образования карбоната кальция и растворения его. Сделайте вывод об условии получения кислой соли.

б) В обе пробирки опыта 1б добавляют серной кислоты до растворения осадков. Написать молекулярные и ионные уравнения реакции растворения. Объяснить причину сдвига ионного равновесия;

в) Берут пробирки с осадками опыта 1в. В пробирку с синим осадком добавляют хлороводородной кислоты, в пробирку с розовым осадком - разбавленной щелочи. Напишите молекулярные и ионные уравнения. Наблюдать растворение одного из осадков. Дать объяснения наблюдениям.

О П Ы Т 3. Образование газообразного вещества

Все сульфиты, растворимые и нерастворимые в воде, разлагаются минеральными кислотами с выделением диоксида серы, который определяют как запах горящей серы.

К раствору сульфита натрия приливают разбавленной серной кислоты. Обнаруживают запах SO_2 , стараясь запомнить его. Это позволит впредь распознавать диоксид серы органолептически.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции.

О П Ы Т 4. Образование слабых электролитов

а) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора ацетата натрия и добавляют разбавленной серной кислоты. Определяют по запаху образующуюся уксусную кислоту;

б) Наливают в пробирку 1-2 мл раствора хлорида аммония и добавляют разбавленной щелочи. Определяют по запаху выделяющийся аммиак;

в) Наливают в пробирку 3 мл раствора сульфата хрома (III) и приливают к нему по каплям раствор разбавленной щелочи до появления серо-зеленого осадка гидроксида хрома.

Содержимое пробирки разделяют на две части. К одной части приливают раствор серной кислоты, к другой - раствор щелочи. Сравнить цвет полученных растворов. Сделать вывод о характере гидроксида хрома.

Для опытов а), б), в) написать молекулярные и ионные уравнения реакций, объяснить причины сдвига ионных равновесий.

Сделать вывод, в каком направлении протекают реакции ионного обмена в растворах электролитов.

5.2. Контрольные вопросы и задания

1. Составить в молекулярном виде уравнения реакций растворения следующих малорастворимых минералов:

а) стронцианит SrCO_3 переводят в водный раствор насыщением CO_2 суспензии минерала в воде;

б) сассолин $\text{B}(\text{OH})_3$ обрабатывают избытком раствора едкого натра;

в) гиббсит $\text{Al}(\text{OH})_3$ хорошо растворяется известковым молоке;

г) азурит $\text{Cu}(\text{OH})_2 \cdot 2\text{CuCO}_3$ обрабатывают хлороводородной кислотой;

д) гетит Fe_2O_3 хорошо растворяется в серной кислоте;

е) гемиморфит $\text{Zn}(\text{OH})_2 \cdot \text{Zn}_3\text{Si}_2\text{O}_7$ нагревают в растворе гидроксида натрия;

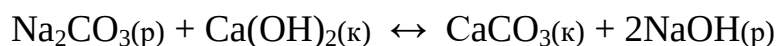
ж) брусит $\text{Mg}(\text{OH})_2$ разлагается раствором серной кислоты;

з) борнит $\text{FeS} \cdot \text{CuS} \cdot 2\text{Cu}_2\text{S}$ обрабатывают соляной кислотой.

2. При смещении водных растворов одного из следующих веществ: NaOH , KOH , CsOH концентрацией 1 моль/л с одинаковыми объемами 1М раствором HCl , HBr , HNO_3 , HClO_4 выделяется примерно одно и то же количество теплоты, составляющее 55-59 кДж/моль. О чем это свидетельствует? Напишите уравнения реакции в ионном виде.

3. При смешении 1М водных растворов одной из следующих кислот: азотной, уксусной, бензойной с одинаковыми объемами 1М растворов KOH обнаруживаются различные тепловые эффекты. Объясните, приведя уравнения реакций в молекулярно-ионном виде.

4. Укажите причины, по которым реакция



обратима, составьте выражение для константы равновесия. Почему в этом процессе образуется только разбавленный раствор гидроксида натрия, а получение концентрированного раствора невозможно?

5. Для переработки карбонатных марганцевых руд предложен способ, основанный на выщелачивании их раствором хлорида кальция:



Можно ли регенерировать раствор хлорида кальция и вывести одновременно марганец в осадок добавлением к продуктам выщелачивания суспензии $\text{Ca}(\text{OH})_2$? Напишите уравнение реакции.

6. Растворение соли слабой кислоты в растворах кислот должно проходить тем быстрее, чем больше концентрация ионов водорода. Однако кальцит CaCO_3 растворяется в растворе уксусной кислоты быстрее, чем в растворе серной. Почему?

7. В 250 мл раствора содержится 1 г NaOH . Вычислите молярную концентрацию и pH этого раствора.

8. Кислые растворы имеют кислый вкус, щелочные - вкус мыла. Сливаются равные объемы растворов хлороводородной кислоты и гидроксида натрия одинаковой концентрации. Какой вкус полученного раствора?

9. Гашеную известь $\text{Ca}(\text{OH})_2$ используют при флотации для создания щелочной среды (pH 12 и более), отделения пирита от сфалерита и сульфидов меди. Как изменяется pH растворов извести при хранении их в открытых емкостях? Напишите уравнение реакции.

6. ГИДРОЛИЗ СОЛЕЙ

Ц е л ь р а б о т ы - Изучение свойств водных растворов, связанных с реакцией гидролиза солей.

Природные воды часто не бывают нейтральными, а имеют либо кислую, либо щелочную среду вследствие гидролиза. При химическом выветривании известняков образуются щелочные растворы, а пиритсодержащих - кислые. Изменение нейтральной реакции среды водного раствора - признак гидролиза соли, обменной химической реакции, протекающей с участием воды. Однако не все соли вступают в реакцию гидролиза. Если растворить в воде хлорид калия KCl , нейтральная реакция среды (pH = 7), характерная для чистой воды, не изменится. Соли, образованные сильным основанием и сильной кислотой (NaCl , LiNO_3 , CsBr и т.п.), в реакцию гидролиза не вступают.

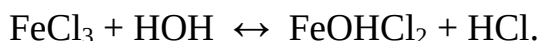
С водой взаимодействуют: 1) соли, образованные слабыми основаниями и сильными кислотами (NH_4Cl , CuSO_4 , $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ и т.п.); 2) соли, образованные слабыми кислотами и сильными основаниями (Na_2S , KCN , BaCO_3 и т.п.); 3) соли, образованные слабыми основаниями и слабыми

кислотами ($\text{NH}_4\text{CH}_3\text{COO}$ и т.п.).

Из рассмотренных примеров следует, что в реакцию с водой вступают катионы слабых оснований и анионы слабых кислот. Если эти ионы многозарядны (Fe^{3+} , Cu^{2+} , CO_3^{2-} , SiO_3^{2-} и т.п.), их взаимодействие с водой обычно идет до образования основного или кислого иона (первая ступень гидролиза). Например, соль FeCl_3 , образованная слабым основанием с сильной кислотой, подвергается гидролизу по катиону:

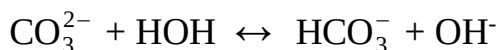


Или в молекулярной форме:

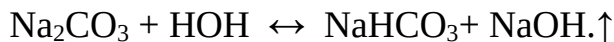


В результате гидролиза соли FeCl_3 появляется избыток катионов H^+ и раствор приобретает кислую реакцию, $\text{pH} < 7$.

Гидролизу по аниону подвергаются соли, образованные сильным основанием и слабой кислотой. В качестве примера запишем уравнение гидролиза соли Na_2CO_3 в ионном виде:

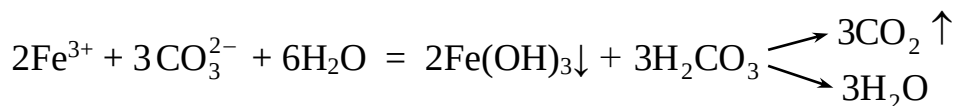
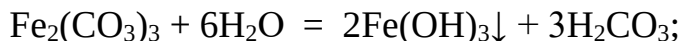


И в молекулярной форме:



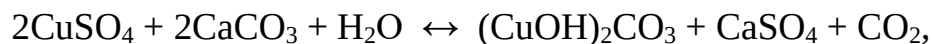
Избыток анионов OH^- придает раствору щелочную реакцию, $\text{pH} > 7$.

Если же соль образована слабым малорастворимым основанием и слабой летучей кислотой, то происходит полный необратимый гидролиз. В таблице растворимости такие соли обозначены прочерком, означающим, что эти соли в водных растворах не существуют. Например, гидролиз карбоната железа (III):

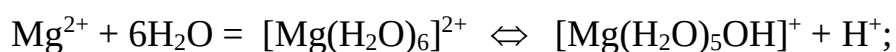


т.е. карбонат железа (III) может существовать только в виде сухой соли, а в растворе он подвергается полному гидролизу, образуя труднорастворимый гидроксид железа (III) и слабую летучую угольную кислоту. В подобных случаях в осадок выпадает наименее растворимый из возможных продуктов гидролиза. Так, растворимость $(\text{CuOH})_2\text{CO}_3$ меньше, чем $\text{Cu}(\text{OH})_2$,

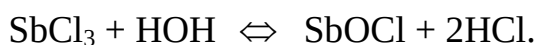
поэтому в зоне окисления минералов меди в известняках встречается малахит



В водном растворе положительные ионы металлов гидратированы. Многие из них связывают воду так прочно, что их можно рассматривать как комплексные ионы. Гидролиз солей, образованных слабыми основаниями и сильными кислотами, происходит за счет молекул воды, входящих в комплексный ион. При этом катион металла выталкивает за пределы внутренней сферы одноименно заряженный ион водорода из молекулы воды, среда становится кислой. Например, при гидролизе хлорида магния координационное число Mg^{2+} равно шести



Ионы Bi^{3+} , Sb^{3+} , Ti^{4+} , V^{4+} обладают настолько сильным поляризующим действием, что выталкивает из молекулы воды оба иона водорода, вследствие чего образуются ионы BiO^+ висмутит, SbO^+ антимонид, TiO^{2+} титанил, VO^{2+} ванадил.



6.1. Экспериментальная часть

О П Ы Т 1. Образование основной соли при гидролизе

В три пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора лакмуса и добавляют по 2 мл растворов: в одну пробирку - дистиллированной воды, в другую - сульфата натрия, в третью - сульфата алюминия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей. Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором Na_2SO_4 .

О П Ы Т 2. Образование кислой соли при гидролизе

В две пробирки наливают по 3-4 капли нейтрального раствора фенолфталеина и добавляют по 2 мл растворов: хлорида натрия и карбоната натрия. Сравнивают окраску индикатора в воде и растворах солей.

Сделать вывод о возможности гидролиза.

Написать молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза: отразить отсутствие гидролиза в пробирке с раствором NaCl.

О П Ы Т 3. Смещение равновесия гидролиза

Налить в пробирку 1-2 мл раствора нитрата висмута $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3$ и разбавить его водой в 3-5 раз. Наблюдать образование осадка, т.е. помутнение раствора. Составить молекулярное и ионное уравнение реакции гидролиза, зная, что труднорастворимым продуктом является соль BiONO_3 .

В пробирку с осадком BiONO_3 прибавить несколько капель концентрированной азотной кислоты. Наблюдать растворение осадка. Объяснить наблюдаемое, исходя из уравнения гидролиза.

О П Ы Т 4. Влияние нагревания на гидролиз ацетата натрия

К 3-4 мл раствора уксуснокислого натрия CH_3COONa прибавить 1-2 капли фенолфталеина и нагреть до кипения. Обратит внимание на появление розовой окраски, исчезающей при охлаждении раствора.

Написать ионное и молекулярное уравнение реакции гидролиза уксуснокислого натрия. Объясните различие окраски при нагревании и охлаждении раствора.

О П Ы Т 5. Полный гидролиз (совместный гидролиз)

К 1-2 мл раствора сернокислого алюминия $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ прилить такой же объем раствора карбоната натрия Na_2CO_3 . Наблюдать выделение углекислого газа и образование осадка гидроксида алюминия. Написать молекулярное и ионное уравнение совместного гидролиза взятых солей.

6.2. Контрольные вопросы и задания

1. На некоторых обогащательных фабриках иногда барабаны (емкости) из-под цианида натрия обезвреживают 10%-ным раствором железного купороса FeSO_4 . Напишите уравнения реакции, ведущих к образованию в этих условиях циановодородной кислоты, и покажите тем самым, что такой способ растворения цианидов абсолютно недопустим. При подкислении до $\text{pH} \leq 9$ работать с растворами цианида натрия опасно; безопасно при $\text{pH} > 10$.

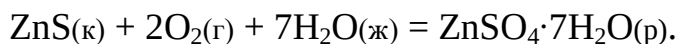
2. Раствор основания и раствор кислоты смешивают в эквивалент-

ных соотношениях. Для каких из перечисленных пар раствор будет иметь нейтральную реакцию:

- а) $\text{NH}_4\text{OH} + \text{HCl}$, б) $\text{NH}_4\text{OH} + \text{CH}_3\text{COOH}$, в) $\text{NaOH} + \text{HCl}$,
г) $\text{NaOH} + \text{CH}_3\text{COOH}$?

3. Сточные воды обогатительных фабрик, содержащие гидрокарбонат кальция, очищают от коллоидных примесей (удалить которые отстаиванием и фильтрованием невозможно) добавлением к ним сульфата алюминия. Образующийся хлопьевидный $\text{Al}(\text{OH})_3$ обволакивает коллоидные частицы примесей и вызывает их осаждение. Объясните образование $\text{Al}(\text{OH})_3$ и напишите уравнение реакции.

4. Определить, возможна ли реакция окисления сфалерита кислородом воздуха в стандартных условиях, если



ΔG_{298}^0 , кДж/моль	-201	-237	-2564
-------------------------------	------	------	-------

Сделайте вывод о кислотности рудничных вод, содержащих в качестве продукта выветривания сульфат цинка, записав уравнение реакции гидролиза в молекулярном и ионном виде.

5. При окислении пирита, преобладающего в колчеданных рудах, кислородом, растворенным в воде, выделяется сульфат железа (III). Поступая с нисходящим током растворов в нижние горизонты, он реагирует с породой. Сделайте вывод о составе породы, если наблюдается совместное образование гипса $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и лимонита $\text{Fe}(\text{OH})_3$. Напишите уравнение реакции взаимодействия сульфата железа (III) и породы.

6. Объясните, приведя молекулярно-ионное уравнение, почему при нагревании раствора NaHCO_3 реакция среды из слабощелочной переходит в сильнощелочную.

7. В водном растворе хлорида цинка при нагревании происходит растворение кусочка металлического цинка. Напишите уравнения реакции, объясняя причину выделения водорода.

8. В жесткой воде ионы железа обычно присутствуют в виде гидрокарбоната железа (II). При хранении такой воды в открытых сосудах, железо окисляется кислородом воздуха, вода мутнеет из-за выпадения в осадок $\text{Fe}(\text{OH})_3$. Напишите уравнение реакции, в результате которой образуется гидроксид железа (III).



**ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный
университет»**

И. А. Низова, Н. А. Зайцева

**ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ
ПО КУРСУ «ХИМИЯ»
ЧАСТЬ II**

Окислительно-восстановительные реакции

**Учебное пособие для студентов о
факультета Геологии и геофизики**

Екатеринбург

2020

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

И. А. Низова, Н. А. Зайцева

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие для студентов

ФАКУЛЬТЕТА ФГИГ

Издание УГГУ

Екатеринбург, 2020

Рецензент: Г. Л. Левит, кандидат химических наук, старший научный сотрудник Института органического синтеза УрО РАН

Низова И.А., Зайцева Н.А.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ», часть II. Окислительно-восстановительные процессы: учебное пособие / И.А. Низова, Н.А. Зайцева – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. – 30 с.

В учебном пособии изложены краткие сведения об окислительно-восстановительных процессах и основных приемах составления уравнений окислительно-восстановительных реакций. Пособие содержит 20 вариантов заданий для внеаудиторной самостоятельной работы по каждой теме.

Для студентов горно-технологического факультета.

© Низова И.А., Зайцева Н.А. ©

Уральский государственный
горный университет

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.....	6
2. Классификация окислительно-восстановительных реакций.....	8
3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса.....	10
4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).....	13
5. Направление протекания окислительно-восстановительных реакций.....	22
Список литературы.....	20

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только -1

Щелочные металлы (Na, K, Li, Rb, Cs) – только $+1$

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только $+2$

Алюминий – только $+3$.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления $+1$. Исключение составляют гидриды металлов (NaH , CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (-1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления -2 . Исключение составляют фторид кислорода OF_2 , (степень окисления кислорода $+1$) и пероксиды H_2O_2 , Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода -1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны

(сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2 , но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2 , озоном O_3 , хлором Cl_2 и бромом Br_2 . К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2 , углерод C и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4 ; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2 , и свинца (IV) PbO_2 ; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка»), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI ; сульфит натрия Na_2SO_3 ; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S ; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3 .

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO , H_2O_2 , MnO_2 , так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO ₂ , CH ₄ , Cl ₂ , KMnO ₄	11	HF, Zn, H ₃ PO ₄ , NH ₄ Cl
2	H ₂ O ₂ , H ₂ SO ₄ , I ₂ , K ₂ Cr ₂ O ₇	12	H ₂ SO ₃ , NaH ₂ SbO ₃ , Au, ZnCl ₂
3	NaH, F ₂ , K ₂ HPO ₄ , N ₂ H ₄	13	NH ₄ HS, P, C ₆ H ₆ , Ba(ClO ₄) ₂
4	OF ₂ , C ₂ H ₆ , O ₂ , K ₂ MnO ₄	14	NaNO ₂ , Ca(HS) ₂ , Ag, PH ₃
5	CaH ₂ , C ₂ H ₄ , Br ₂ , Fe ₂ (SO ₄) ₃	15	BaCO ₃ , AsH ₃ , Ca, Na ₃ SbO ₄
6	PbO ₂ , C ₂ H ₂ , O ₃ , MnOHNO ₃	16	HNO ₃ , Xe, KClO ₄ , NH ₄ OH
7	Na ₂ O ₂ , N ₂ , H ₂ O, K ₂ SiO ₃	17	Sn(OH) ₂ , CuCl ₂ , K ₂ S, Mn
8	H ₂ S, Mg, Na ₃ SbO ₃ , Cr(OH) ₃	18	Al ₂ S ₃ , Na ₂ SO ₃ , NaClO, Se
9	Na ₂ S, NH ₃ , H ₂ , KHCO ₃	19	NaClO ₂ , Al ₄ C ₃ , He, Bi(NO ₃) ₃ ,
10	AlP, CO, HCl, NH ₄ NO ₃	20	NaHSO ₃ , Si, Na ₃ AsO ₃ , Cr(OH) ₃

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: NaCl, NaClO, HCl, KClO₃, NaClO₄, Cl₂O₇, HClO₂ ?

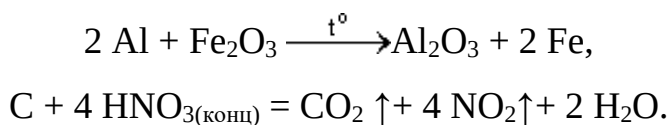
3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: NaNO₂, NO, N₂O₃, N₂H₄, N₂O, HNO₃, N₂O₅, NH₄NO₃, NH₃, NH₄Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H₂SO₄, Ca(HS)₂, H₂S, Na₂SO₃, Na₂S, SO₂, Na₂S₂O₃, SO₃, SO?

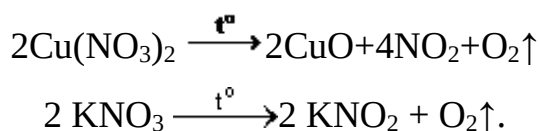
2. Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четвертый тип – реакции конпропорционирования.

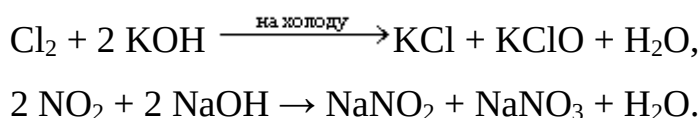
1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:



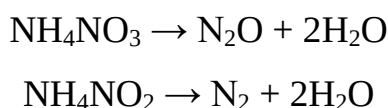
2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:



3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:



4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:



Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3 , HNO_2 , H_2SO_4 , NH_4NO_3 , Br_2 , H_2O_2 , CaH_2 ?

2. Приведите пример реакции межмолекулярного конпропорционирования.

3. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? Реакцией конпропорционирования?



3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

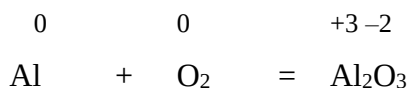
Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

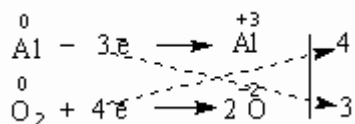
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты в реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $\text{Al} + \text{O}_2 \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3$

Определим степени окисления:

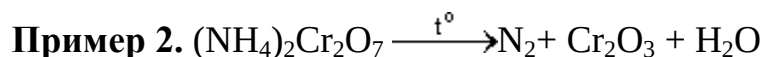
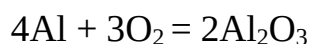


Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:

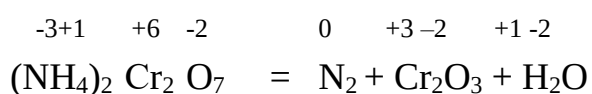


Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

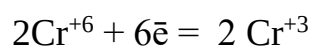
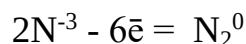
Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O₂) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al₂O₃ необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



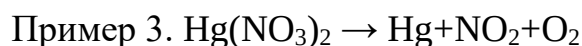
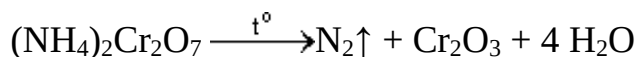
Определим степени окисления:



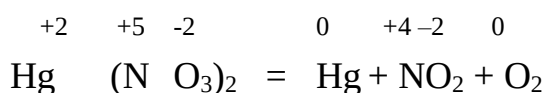
Азот отдаёт электроны, хром получает.



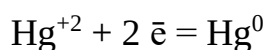
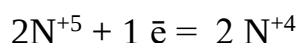
Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H₂O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



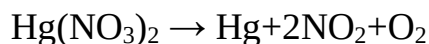
Определим степени окисления:



Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:



Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO₂ необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:



Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$\text{Mn}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{MnO}_2 + \text{NO}_2$	11	$\text{BaO}_2 \rightarrow \text{BaO} + \text{O}_2$
2	$\text{K}_2\text{MnO}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{MnO}_2 + \text{O}_2$	12	$\text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Ag} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$
3	$\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{ZnO} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	13	$\text{FeSO}_4 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SO}_2 + \text{SO}_3$
4	$\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 \rightarrow \text{O}_2 + \text{Cr}_2\text{O}_3 + \text{K}_2\text{CrO}_4$	14	$\text{KClO}_4 \rightarrow \text{KCl} + \text{O}_2$
5	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	15	$\text{CdSO}_3 \rightarrow \text{CdSO}_4 + \text{CdS}$
6	$\text{KMnO}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{MnO}_2 + \text{O}_2$	16	$\text{HNO}_3 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$
7	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	17	$\text{NaClO}_2 \rightarrow \text{NaClO}_3 + \text{NaCl}$
8	$\text{HNO}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	18	$\text{KClO}_3 \rightarrow \text{KCl} + \text{O}_2$
9	$\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{CoO} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	19	$\text{SnSO}_4 \rightarrow \text{SnO}_2 + \text{SO}_2$
10	$\text{LiNO}_3 \rightarrow \text{Li}_2\text{O} + \text{NO}_2 + \text{O}_2$	20	$\text{Ni}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Ni}(\text{NO}_2)_2 + \text{O}_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{C} \rightarrow \text{CO}_2 + \text{Fe}$	11	$\text{Zn} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Zn}(\text{NO}_3)_2 + \text{Ag}$
2	$\text{KBr} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{KCl} + \text{Br}_2$	12	$\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Mg} \rightarrow \text{MgO} + \text{Al}$
3	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{Fe}$	13	$\text{MnO}_2 + \text{Al} \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Mn}$
4	$\text{Al} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2$	14	$\text{H}_2\text{S} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{S} + \text{HBr}$
5	$\text{O}_2 + \text{HI} \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{I}_2$	15	$\text{CuCl}_2 + \text{Cr} \rightarrow \text{Cu} + \text{CrCl}_3$
6	$\text{Al} + \text{CuSO}_4 \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Cu}$	16	$\text{Mg} + \text{SiO}_2 \rightarrow \text{MgO} + \text{Si}$
7	$\text{Ca} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \text{Ca}(\text{OH})_2$	17	$\text{NaI} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{NaCl} + \text{I}_2$
8	$\text{TiO}_2 + \text{Mg} \rightarrow \text{MgO} + \text{Ti}$	18	$\text{Na} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \text{NaOH}$
9	$\text{Al} + \text{FeO} \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}$	19	$\text{KClO}_3 + \text{I}_2 \rightarrow \text{KIO}_3 + \text{Cl}_2$
10	$\text{KI} + \text{Br}_2 \rightarrow \text{KBr} + \text{I}_2$	20	$\text{Al} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Al}(\text{OH})_3 + \text{H}_2$

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присутствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^- .
Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+ .
Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+ , ни OH^- в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.
2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.
3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнивать число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O , ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$\text{O}^{2-} + 2\text{H}^+ = \text{H}_2\text{O}$	$\text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{OH}^-$	$\text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{OH}^-$
Восполнение недостатка кислорода	$\text{H}_2\text{O} = \text{O}^{2-} + 2\text{H}^+$	$\text{H}_2\text{O} = \text{O}^{2-} + 2\text{H}^+$	$2\text{OH}^- = \text{O}^{2-} + \text{H}_2\text{O}$

в) уравнивать суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

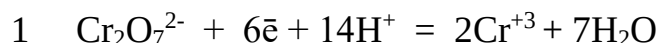
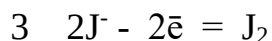
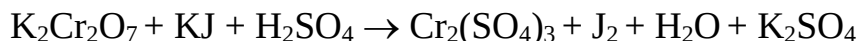
8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости “привести подобные” ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $\text{H}^+ + \text{OH}^- = \text{H}_2\text{O}$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

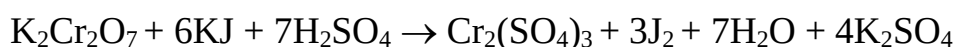
10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

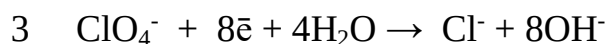
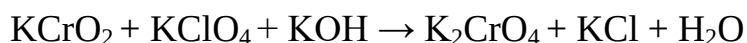
Пример 3. В кислой среде:



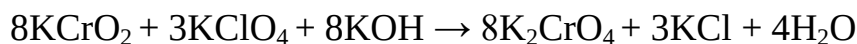
Суммарное молекулярное уравнение реакции:



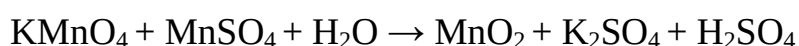
Пример 4. В щелочной среде:



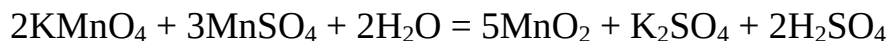
Суммарное молекулярное уравнение реакции



Пример 5. В нейтральной среде:



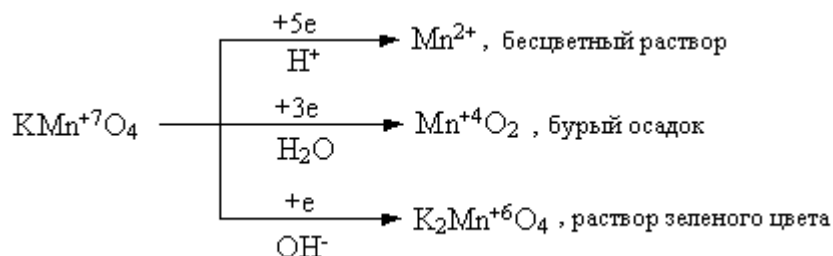
Суммарное молекулярное уравнение реакции:



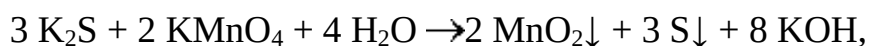
Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:

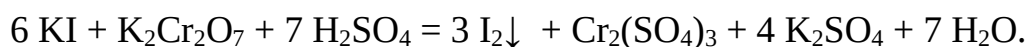
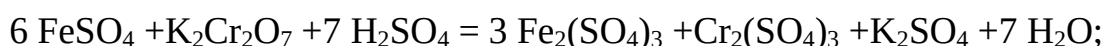


Ниже приведены реакции KMnO_4 с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах. В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы KOH не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.



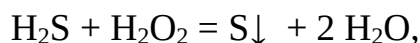
2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

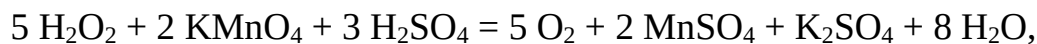


3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

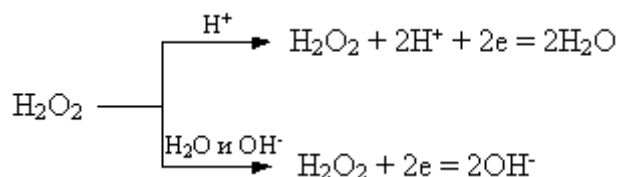
Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:



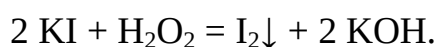
Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, KMnO_4), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановителей:



Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:



Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Br}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{KBr} + \text{KBrO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{O}_2\uparrow + \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_3\text{H}_6 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{C}_2\text{H}_6(\text{OH})_2 + \text{KOH}$

Вариант 2

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{S}\downarrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{S} + \text{KOH} \rightarrow \text{K}_2\text{S} + \text{K}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}.$
- 3) $\text{BaS} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{S}\downarrow + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3(\text{CO})\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2\uparrow$

Вариант 3

- 1) $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NO}_2 + \text{NaOH} \rightarrow \text{NaNO}_2 + \text{NaNO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{CrCl}_3 + \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{HCl}$
- 4) $\text{CH}_3\text{C}=\text{C}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3(\text{CO})\text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{CH}_3\text{COOH}$

Вариант 4

- 1) $\text{Al} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

- 2) $\text{AuCl}_3 + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{Au} + \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2\uparrow + \text{KCl}$
- 3) $\text{KMnO}_4 + \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{Fe}(\text{OH})_3\downarrow + \text{KOH}$
- 4) $\text{C}_5\text{H}_{10} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH} + \text{CH}_3\text{COOH}$

Вариант 5

- 1) $\text{Ag} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Ag}_2\text{SO}_4\downarrow + \text{SO}_2\uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_4\text{HS} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{S}\downarrow + 2\text{NO}_2\uparrow + \text{NH}_4\text{NO}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{MnSO}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{MnO}_2\downarrow + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_{12} + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$

Вариант 6

- 1) $\text{Bi} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Bi}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{CuS} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{NO}_2\uparrow + \text{CuSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{C} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} + \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_{7(\text{конц.})} \rightarrow \text{CO}_2\uparrow + \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{HCOH} + \text{NaOH} + \text{I}_2 \rightarrow \text{HCOONa} + \text{NaI} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 7

- 1) $\text{Ag} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{AgNO}_3 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Br}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{K}_2\text{CrO}_4 + \text{KBr} + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Br}_2 + \text{S} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HBr}$
- 4) $\text{CH}_3\text{C}\equiv\text{CCH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 8

- 1) $\text{Ba} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{N}_2\text{O}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{MnO}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{MnCl}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{Cl}_2\uparrow$
- 3) $\text{As}_2\text{O}_3 + \text{NaOH} + \text{NaNO}_3 \rightarrow \text{Na}_3\text{AsO}_4 + \text{NaNO}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{COOK} + \text{KOH} + \text{MnO}_2\downarrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант -9

- 1) $\text{Be} + \text{HNO}_{3(\text{разб., гор.})} \rightarrow \text{Be}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{P} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 + \text{NaClO} + \text{NaOH}_{(\text{конц.})} \rightarrow \text{NaBiO}_3\downarrow + \text{NaNO}_3 + \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-C}_2\text{H}_5 + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_5\text{COOK} + \text{K}_2\text{CO}_3 + \text{MnO}_2 + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 10

- 1) $\text{Cd} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Cd}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}_2\uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{AlBr}_{3(\text{тв.})} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{Al}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{Br}_2 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{AsH}_3 + \text{NaOH}_{(\text{разб.})} + \text{NaClO} \rightarrow \text{Na}_3\text{AsO}_4 + \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 11

- 1) $\text{Ca} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Ca}(\text{NO}_3)_2 + \text{N}_2\text{O}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_4\text{I}_{(\text{тв.})} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц.})} \rightarrow \text{I}_2\downarrow + \text{H}_2\text{S}\uparrow + \text{H}_2\text{O} + \text{NH}_4\text{HSO}_4$
- 3) $\text{Bi}(\text{OH})_3 + \text{KOH}_{(\text{конц.})} + \text{KMnO}_4 \rightarrow \text{KBiO}_3\downarrow + \text{K}_2\text{MnO}_4 + \text{H}_2\text{O}$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}(\text{CH}_3)_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2\uparrow$

Вариант 12

- 1) $\text{Ba} + \text{HNO}_{3(\text{оч. разб.})} \rightarrow \text{Ba}(\text{NO}_3)_2 + \text{NH}_4\text{NO}_3 + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{Au}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Au}\downarrow + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{HBrO}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{S} \rightarrow \text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4$
- 4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH}_3 + \text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{C}_6\text{H}_5\text{-COOH} + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 13

- 1) $\text{Bi} + \text{HNO}_{3(\text{разб.})} \rightarrow \text{Bi}(\text{NO}_3)_3 + \text{NO}\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{PbO}_2 + \text{HCl} \rightarrow \text{PbCl}_2 + \text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{AsH}_3 + \text{H}_2\text{O} + \text{AgNO}_3 \rightarrow \text{As}_2\text{O}_3\downarrow + \text{Ag}\downarrow + \text{HNO}_3$
- 4) $\text{CH}_3\equiv\text{CCH}_3 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CH}_3\text{COOH} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$

Вариант 14

- 1) $\text{Cd} + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{Cd}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{C}_2\text{N}_2 + \text{KOH} \rightarrow \text{KCN} + \text{KCNO} + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{H}_2\text{SO}_3 + \text{I}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HI}$
- 4) $\text{C}_4\text{H}_8 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O} + \text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$

Вариант 15

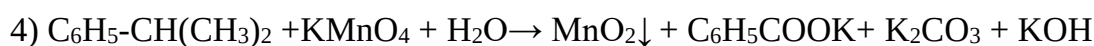
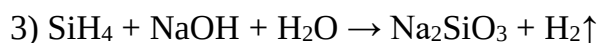
- 1) $\text{Cu} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{CuSO}_4 + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{AlP} + \text{HNO}_{3(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{Al}(\text{NO}_3)_3 + \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Br}_2 + \text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{HBr} + \text{H}_2\text{SO}_4$
- 4) $\text{C}_2\text{H}_4 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 16

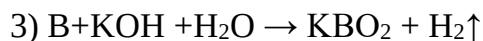
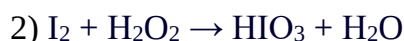
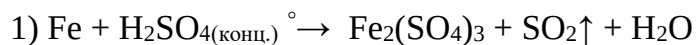
- 1) $\text{Cu} + \text{HNO}_3 \rightarrow \text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{H}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{CrO}_6 + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{Si} + \text{NaOH} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{H}_2\uparrow$
- 4) $\text{C}_2\text{H}_2 + \text{KMnO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + \text{CO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$

Вариант 17

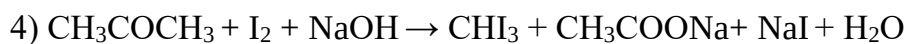
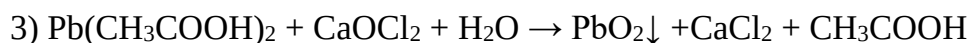
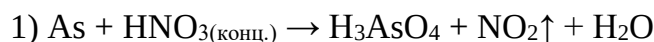
- 1) $\text{As} + \text{H}_2\text{SO}_{4(\text{конц., гор.})} \rightarrow \text{As}_2\text{O}_3\downarrow + \text{SO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{B}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_{3(\text{конц.})} \rightarrow \text{H}_3\text{BO}_3\downarrow + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}_2\uparrow + \text{H}_2\text{O}$



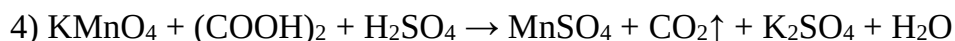
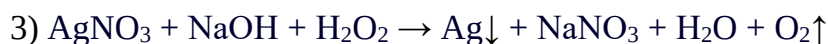
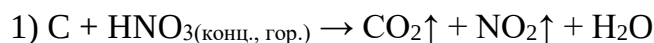
Вариант 18



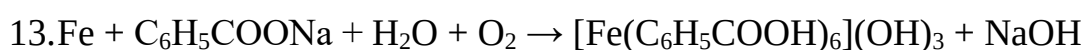
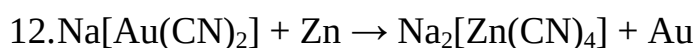
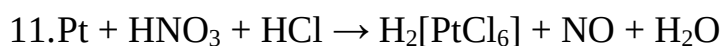
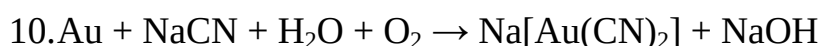
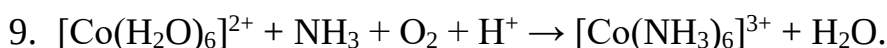
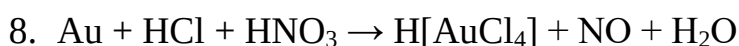
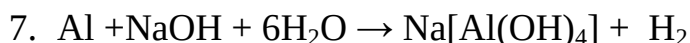
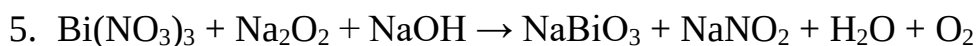
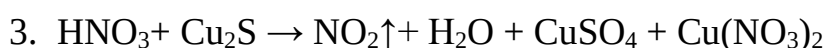
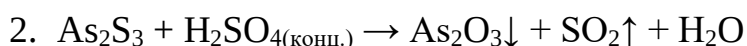
Вариант 19



Вариант 20

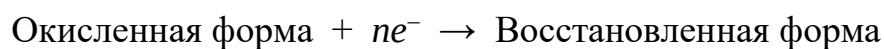


Дополнительные уравнения



Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

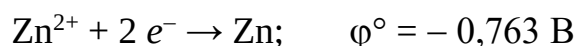
Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:



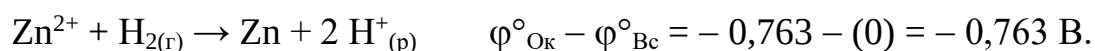
Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции $\Delta E > 0$.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

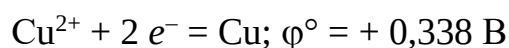


то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

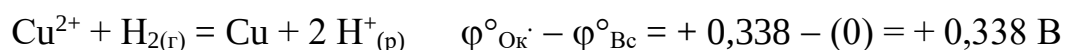


Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $\text{Zn} + 2\text{H}^+_{(\text{р})} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + \text{H}_{2(\text{г})}$ $\varphi^\circ_{\text{Ок}} - \varphi^\circ_{\text{Вс}} = 0 - (-0,763) = +0,763 \text{ В}$

Для положительных значений φ° , например пары $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}$

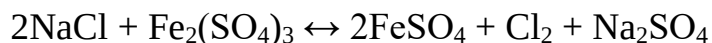


реакция



где $2\text{H}^+_{(\text{p})}$ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

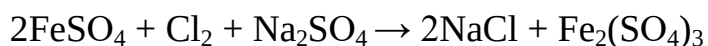
Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции



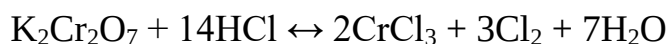
Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :



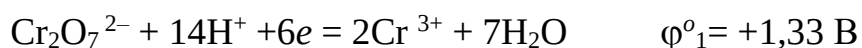
Поскольку $\varphi_1^\circ > \varphi_2^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – ион Fe^{2+} ; рассматриваемая реакция будет протекать так:



Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции



Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:



Поскольку $\varphi_2^\circ > \varphi_1^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::



В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ° при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые

значения φ^0 близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[Red]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, К;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалоопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея ($F = 96484.56$ Кл/моль);

$[Ox]$ – концентрация окисленной формы ионов;

$[Red]$ – концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0,059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[Red]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции



при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[\text{Ag}^+] = 10^{-4}$ моль/л, $[\text{Hg}_2^{2+}] = 10^{-1}$ моль/л;

б) $[\text{Ag}^+] = 10^{-1}$ моль/л, $[\text{Hg}_2^{2+}] = 10^{-4}$ моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:



По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

$$\text{а) } \varphi_1 = \varphi_1^0 + 0,059/2 \cdot \lg [\text{Hg}_2^{2+}] = 0,79 + 0,030 \lg 10^{-1} = 0,79 - 0,03 = 0,76 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + 0,059 \cdot \lg [\text{Ag}^+] = 0,80 + 0,059 \lg 10^{-4} = 0,80 - 0,24 = 0,56 \text{ В}.$$

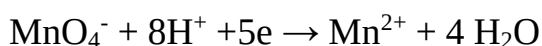
В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

$$\text{б) } \varphi_1 = 0,79 + 0,030 \cdot \lg 10^{-4} = 0,79 - 0,12 = 0,67 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = 0,80 + 0,059 \cdot \lg 10^{-1} = 0,80 - 0,06 = 0,74 \text{ В}.$$

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции



окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0,059}{5} \cdot \lg \frac{[\text{MnO}_4^-] \cdot [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1,507 + 0,012 \cdot \lg \frac{[\text{MnO}_4^-]}{[\text{Mn}^{2+}]} - 0,095 \text{pH}$$

Потенциалы процесса зависят от pH среды и будут тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала KMnO_4 от концентрации ионов водорода используются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Приложение

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E ⁰	Элемент	Реакция	E ⁰
Ag	$\alpha\text{-Ag}_2\text{S} + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{S}^{2-}$	-0,70	B	$\text{BF}_4^- + 3e = \text{B} + 4\text{F}^-$	-1,04
	$\text{Ag}(\text{CN})_2^- + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{CN}^-$	-0,29		$\text{H}_3\text{BO}_3 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{B} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,869
	$\text{AgI} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{I}^-$	-0,152		$\text{BO}_3^{3-} + 6\text{H}^+ + 3e = \text{B} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,165
	$\text{AgCN} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{CN}^-$	-0,04	Ba	$\text{Ba}^{2+} + 2e = \text{Ba}$	-2,905
	$\text{Ag}(\text{S}_2\text{O}_3)_2^{3-} + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,01	Be	$\text{Be}^{2+} + 2e = \text{Be}$	-1,847
	$\text{AgBr} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{Br}^-$	0,071		$\text{Be}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{Be} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,820
	$\text{AgCl} + \bar{e} = \text{Ag} + \text{Cl}^-$	0,222		$\text{BeO}_2^{2-} + 4\text{H}^+ + 2e = \text{Be} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,909
	$\text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + 2\text{OH}^-$	0,344	Bi	$\text{Bi}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O} + 6e = 2\text{Bi} + 6\text{OH}^-$	-0,46
	$\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+ + \bar{e} = \text{Ag} + 2\text{NH}_3$	0,373		$\text{BiOCl} + 2\text{H}^+ + 3e = \text{Bi} + \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,16
	$\text{Ag}_2\text{CrO}_4 + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{CrO}_4^{2-}$	0,446		$\text{Bi}^{3+} + 3e = \text{Bi}$	0,215
	$\text{Ag}_2\text{C}_2\text{O}_4 + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{C}_2\text{O}_4^{2-}$	0,472		$\text{BiO}^+ + 2\text{H}^+ + 3e = \text{Bi} + \text{H}_2\text{O}$	0,32
	$\text{AgBrO}_3 + \bar{e} = \text{Ag} + \text{BrO}_3^-$	0,55		$\text{Bi}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6e = 2\text{Bi} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,371
	$2\text{AgO} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e} = \text{Ag}_2\text{O} + 2\text{OH}^-$	0,60		$\text{NaBiO}_3(\text{т}) + 6\text{H}^+ + 2e = \text{Bi}^{3+} + \text{Na}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	1,6 - 1,808
	$\text{Ag}^+ + \bar{e} = \text{Ag}$	0,799	Br	$2\text{BrO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{Br}_2 + 4\text{OH}^-$	0,45
	$\text{Ag}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\bar{e} = 2\text{Ag} + \text{H}_2\text{O}$	1,173		$2\text{BrO}_3^- + 6\text{H}_2\text{O} + 10e = \text{Br}_2 + 12\text{OH}^-$	0,50
	$2\text{AgO} + 2\text{H}^+ + 2\bar{e} = \text{Ag}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$	1,398		$\text{BrO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4e = \text{BrO}^- + 4\text{OH}^-$	0,54
Al	$\text{AlO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\bar{e} = \text{Al} + 4\text{OH}^-$	-2,35		$\text{BrO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6e = \text{Br}^- + 6\text{OH}^-$	0,61
	$\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\bar{e} = \text{Al} + 3\text{OH}^-$	-2,31		$\text{BrO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2e = \text{Br}^- + 2\text{OH}^-$	0,76
	$\text{AlF}_6^{3-} + 3\bar{e} = \text{Al} + 6\text{F}^-$	-2,07		$\text{Br}_3^- + 2e = 3\text{Br}^-$	1,05
	$\text{Al}^{3+} + 3e = \text{Al}$	-1,663		$\text{Br}_2(\text{ж}) + 2e = 2\text{Br}^-$	1,065
	$\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{Al} + 3\text{H}_2\text{O}$	-1,471		$\text{BrO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6e = \text{Br}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,44
	$\text{AlO}_2^- + 4\text{H}^+ + 3e = \text{Al} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,262		$2\text{BrO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10e = \text{Br}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,52
As	$\text{As} + 3\text{H}^+ + 3e = \text{AsH}_3$	-0,60	C	$2\text{HBrO} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{Br}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,59
	$\text{HAsO}_2 + 3\text{H}^+ + 3e = \text{As} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,248		$\text{HCOO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{HCHO} + 3\text{OH}^-$	-1,07
	$\text{H}_3\text{AsO}_4 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HAsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,559		$2\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$	-0,49
	$\text{H}_3\text{AsO}_4 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{H}_3\text{AsO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	0,58		$\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HCOOH}$	-0,20
Au	$\text{Au}(\text{CN})_2 + e = \text{Au} + 2\text{CN}^-$	-0,61		$\text{C}(\text{графит}) + 4\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_4$	-0,132
	$\text{AuBr}_4^- + 2e = \text{AuBr}_2^- + 2\text{Br}^-$	0,802		$\text{CO}_2 + 2\text{H}^+ + 2e = \text{CO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,12
	$\text{AuCl}_4^- + 2e = \text{AuCl}_2^- + 2\text{Cl}^-$	0,926		$\text{HCOOH} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{HCHO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,01
	$\text{AuBr}_2^- + e = \text{Au} + 2\text{Br}^-$	0,959		$\text{HCOOH} + 4\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$	0,145
	$\text{AuCl}_2^- + 2e = \text{Au} + 2\text{Cl}^-$	1,15		$\text{HCOO}^- + 3\text{H}^+ + 2e = \text{HCHO} + \text{H}_2\text{O}$	0,167
	$\text{Au}^{3+} + 2e = \text{Au}^+$	1,401		$\text{CH}_3\text{CHO} + 2\text{H}^+ + 2e = \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	0,19
	$\text{Au}^{3+} + 3e = \text{Au}$	1,498		$\text{CO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4e = \text{HCHO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,197
	$\text{Au}^+ + 3e = \text{Au}$	1,692		$\text{HCOO}^- + 5\text{H}^+ + 4e = \text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$	0,199
Элемент	Реакция	E ⁰	Элемент	Реакция	E ⁰

C	$\text{CO}_3^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{CH}_3\text{OH} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,209	Co	$\text{Co}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Co} + 2\text{OH}^-$	-0,73
	$\text{CO}_3^{2-} + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HCOO}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,227		$\text{CoCO}_3 + 2\text{e} = \text{Co} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,64
	$\text{HCHO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{CH}_3\text{OH}$	0,232		$\text{Co}(\text{NH}_3)_6^{2+} + 2\text{e} = \text{Co} + 6\text{NH}_3$	-0,42
	$2\text{CO}_3^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{C}_2\text{O}_4^{2-} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,441		$\text{Co}^{2+} + 2\text{e} = \text{Co}$	-0,277
	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{C}_2\text{H}_6 + \text{H}_2\text{O}$	0,46		$\text{Co}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Co} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,095
	$\text{CO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{C}(\text{графит}) + 3\text{H}_2\text{O}$	0,475		$\text{Co}(\text{NH}_3)_6^{3+} + \text{e} = \text{Co}(\text{NH}_3)_6^{2+}$	0,1
	$\text{CO} + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$	0,497		$\text{CoO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Co} + \text{H}_2\text{O}$	0,166
	$\text{CH}_3\text{OH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$	0,59		$\text{Co}(\text{OH})_3 + \text{e} = \text{Co}(\text{OH})_2 + \text{OH}^-$	0,17
Ca	$\text{Ca}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ca}$	-2,866	Cr	$\text{Co}^{3+} + 3\text{e} = \text{Co}$	0,33
Cd	$\text{CdS} + 2\text{e} = \text{Cd} + \text{S}^{2-}$	-1,175		$\text{Co}^{3+} + \text{e} = \text{Co}^{2+}$	1,38 - 1,842
	$\text{Cd}(\text{CN})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Cd} + 4\text{CN}^-$	-1,09		$\text{Cr}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cr} + 2\text{OH}^-$	-1,4
	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cd} + 2\text{OH}^-$	-0,81		$\text{Cr}(\text{OH})_3 + 3\text{e} = \text{Cr} + 3\text{OH}^-$	-1,3
	$\text{Cd}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cd} + 4\text{NH}_3$	-0,61		$\text{CrO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Cr} + 4\text{OH}^-$	-1,2
	$\text{Cd}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cd}$	-0,403		$\text{Cr}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cr}$	-0,913
	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cd} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,005		$\text{Cr}^{3+} + 3\text{e} = \text{Cr}$	-0,744
	$\text{CdO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cd} + \text{H}_2\text{O}$	0,063		$\text{Cr}(\text{OH})_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Cr} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,654
Ce	$\text{Ce}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ce}$	-2,48		$\text{Cr}^{3+} + \text{e} = \text{Cr}^{2+}$	-0,407
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M H}_2\text{SO}_4)$	1,44	Cs	$\text{CrO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Cr}(\text{OH})_3 + 5\text{OH}^-$	-0,13
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M HNO}_3)$	1,61		$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 12\text{e} = 2\text{Cr} + 7\text{H}_2\text{O}$	0,294
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+} (1\text{M HClO}_4)$	1,70		$\text{CrO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cr} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,366
	$\text{Ce}^{4+} + \text{e} = \text{Ce}^{3+}$	1,77		$\text{CrO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{CrO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O}$	0,945
Cl	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{ClO}_3^- + 2\text{OH}^-$	0,36		$\text{CrO}_2^- + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{Cr}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,188
	$2\text{ClO}^- + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{OH}^-$	0,40	Cu	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	1,333
	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{Cl}^- + 8\text{OH}^-$	0,56		$\text{CrO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Cr}^{3+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,477
	$\text{ClO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{Cl}^- + 6\text{OH}^-$	0,63		$\text{Cs}^+ + \text{e} = \text{Cs}$	-2,923
	$\text{ClO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 5\text{e} = \text{Cl}^- + 4\text{OH}^-$	0,85		$\text{Cu}_2\text{S} + 2\text{e} = 2\text{Cu} + \text{S}^{2-}$	-0,89
	$\text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{OH}^-$	0,88		$\text{CuS} + 2\text{e} = \text{Cu} + \text{S}^{2-}$	-0,71
	$\text{ClO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{ClO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	1,15		$\text{Cu}(\text{CN})_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{CN}^-$	-0,43
	$\text{ClO}_4^- + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{ClO}_3^- + \text{H}_2\text{O}$	1,189		$\text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = 2\text{Cu} + 2\text{OH}^-$	-0,36
	$\text{ClO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{HCl} + \text{H}_2\text{O}$	1,351		$\text{Cu}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Cu} + 2\text{OH}^-$	-0,22
	$\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Cl}^-$	1,3595		$\text{CuI} + \text{e} = \text{Cu} + \text{I}^-$	-0,185
	$\text{ClO}_4^- + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Cl}^- + 4\text{H}_2\text{O}$	1,38		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{NH}_3$	-0,12
	$2\text{ClO}_4^- + 16\text{H}^+ + 14\text{e} = \text{Cl}_2 + 8\text{H}_2\text{O}$	1,39		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu} + 4\text{NH}_3$	-0,07
	$\text{ClO}_2 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{HCl} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,436		$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ + 2\text{NH}_3$	-0,01
	$\text{ClO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cl}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,451		$\text{CuI}_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{I}^-$	0,00
	$2\text{ClO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{Cl}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,47		$\text{CuBr} + \text{e} = \text{Cu} + \text{Br}^-$	0,03
	$\text{HClO} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$	1,494		$\text{CuCl} + \text{e} = \text{Cu} + \text{Cl}^-$	0,137
	$\text{ClO}_2 + 4\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{H}_2\text{O}$	1,51		$\text{Cu}^{2+} + \text{e} = \text{Cu}^+$	0,153
	$2\text{ClO}_2 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,549		$\text{CuCl}_2^- + \text{e} = \text{Cu} + 2\text{Cl}^-$	0,177
	$\text{HClO}_2 + 3\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Cl}^- + 2\text{H}_2\text{O}$	1,57		$2\text{Cu}^{2+} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Cu}_2\text{O} + 2\text{H}^+$	0,203
	$2\text{HClO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,63		$\text{Cu}^{2+} + 2\text{e} = \text{Cu}$	0,345
	$2\text{HClO}_2 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Cl}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,64		$\text{Cu}^{2+} + 2\text{Cl}^- + \text{e} = \text{CuCl}_2^-$	0,463
Co	$\beta\text{-CoS} + 2\text{e} = \text{Co} + \text{S}^{2-}$	-1,07		$\text{Cu}^+ + \text{e} = \text{Cu}$	0,520
	$\alpha\text{-CoS} + 2\text{e} = \text{Co} + \text{S}^{2-}$	-0,90	Hg	$\text{Cu}^{2+} + \text{Cl}^- + \text{e} = \text{CuCl}$	0,538
Cu	$\text{CuO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu} + \text{H}_2\text{O}$	0,570		$\text{HgBr}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{Br}^-$	0,21

	$\text{Cu(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,609		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{K}^+ + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{KCl (TB)}$	0,2415
	$\text{Cu}^{2+} + \text{Br}^- + \text{e} = \text{CuBr}$	0,640		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^-$	0,268
	$2\text{CuO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$	0,669		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^- \text{ (1M KCl)}$	0,28
	$\text{Cu}^{2+} + \text{I}^- + \text{e} = \text{CuI}$	0,86		$\text{Hg}_2\text{Cl}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Cl}^- \text{ (0,1M KCl)}$	0,334
	$\text{Cu}^{2+} + 2\text{CN}^- + \text{e} = \text{Cu(CN)}_2$	1,12		$\text{HgCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{Cl}^-$	0,48
Dy	$\text{Dy}^{3+} + 3\text{e} = \text{Dy}$	-2,353		$\text{Hg}_2\text{SO}_4 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + \text{SO}_4^{2-}$	0,6151
Eu	$\text{Eu}^{2+} + 2\text{e} = \text{Eu}$	-3,395		$\text{Hg}_2^{2+} + 2\text{e} = 2\text{Hg}$	0,788
	$\text{Eu}^{3+} + \text{e} = \text{Eu}^{2+}$	-0,429		$\text{Hg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Hg}$	0,850
F	$\text{F}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{F}^- + \text{H}_2\text{O}$	2,1		$2\text{Hg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Hg}_2^{2+}$	0,920
	$\text{F}_2 + 2\text{e} = 2\text{F}^-$	2,87		$\text{HgO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Hg} + \text{H}_2\text{O}$	0,926
Fe	$\text{FeS} + 2\text{e} = \text{Fe} + \text{S}^{2-}$	-0,95	Ho	$\text{Ho}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ho}$	-2,319
	$\text{Fe(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Fe} + 2\text{OH}^-$	-0,877	I	$\text{IO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{IO}^- + 4\text{OH}^-$	0,14
	$\text{FeCO}_3 + 2\text{e} = \text{Fe} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,756		$2\text{IO}_3^- + 6\text{H}_2\text{O} + 10\text{e} = \text{I}_2 + 12\text{OH}^-$	0,21
	$\text{Fe(OH)}_3 + \text{e} = \text{Fe(OH)}_2 + \text{OH}^-$	-0,56		$\text{IO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{I}^- + 6\text{OH}^-$	0,25
	$\text{Fe}^{2+} + 2\text{e} = \text{Fe}$	-0,440		$2\text{IO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{I}_2 + 4\text{OH}^-$	0,45
	$\text{Fe}_3\text{O}_4 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = 3\text{Fe} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,085		$\text{IO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{I}^- + 2\text{OH}^-$	0,49
	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{Fe(OH)}_2$	-0,057		$\text{I}_2 + 2\text{e} = 2\text{I}^-$	0,536
	$\text{Fe}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,051		$\text{I}_3^- + 2\text{e} = 3\text{I}^-$	0,545
	$\text{Fe(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Fe} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,047		$\text{IO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{IO}^- + 4\text{OH}^-$	0,56
	$\text{Fe}^{3+} + 3\text{e} = \text{Fe}$	-0,037		$\text{HIO} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{I}^- + \text{H}_2\text{O}$	0,99
	$\text{Fe(OH)}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,059		$2\text{ICl}_2^- + 2\text{e} = \text{I}_2 + 4\text{Cl}^-$	1,06
	$\text{Fe(OH)}_3 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{Fe(OH)}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,271		$\text{IO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{I}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,085
	$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e} = \text{Fe(CN)}_6^{4-}$	0,356		$\text{IO}_3^- + 5\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{HIO} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,14
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+} \text{ (1M H}_2\text{SO}_4\text{)}$	0,68		$2\text{IO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{I}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,19
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+} \text{ (1M HCl)}$	0,70		$2\text{HIO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{I}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,45
	$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e} = \text{Fe(CN)}_6^{4-} \text{ (1M HCl)}$	0,71		$\text{H}_5\text{IO}_6 + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{IO}_3^- + 3\text{H}_2\text{O}$	1,60
	$\text{Fe}^{3+} + \text{e} = \text{Fe}^{2+}$	0,771	Ir	$\text{IrO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ir} + \text{H}_2\text{O}$	0,93
	$\text{Fe}_3\text{O}_4 + 8\text{H}^+ + 2\text{e} = 3\text{Fe}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,980		$\text{Ir}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ir}$	1,15
Ga	$\text{Ga}^{3+} + 3\text{e} = \text{Ga}$	-0,53	K	$\text{K}^+ + \text{e} = \text{K}$	-2,924
Gd	$\text{Gd}^{3+} + 3\text{e} = \text{Gd}$	-2,397	La	$\text{La}^{3+} + 3\text{e} = \text{La}$	-2,522
Ge	$\text{H}_2\text{GeO}_3 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ge}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,363	Li	$\text{Li}^+ + \text{e} = \text{Li}$	-3,045
	$\text{GeO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ge} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,15	Mg	$\text{Mg(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Mg} + 2\text{OH}^-$	-2,69
	$\text{H}_2\text{GeO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ge} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,13		$\text{Mg}^{2+} + 2\text{e} = \text{Mg}$	-2,363
	$\text{Ge}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ge}$	0,000		$\text{Mg(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mg} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,862
H	$2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$	-0,828	Mn	$\text{MnCO}_3 + 2\text{e} = \text{Mn} + \text{CO}_3^{2-}$	-1,48
	$2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2$	0,0000		$\text{Mn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Mn}$	-1,18
	$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,776		$\text{Mn(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,727
Hf	$\text{Hf}^{4+} + 4\text{e} = \text{Hf}$	-1,70		$\text{MnO}_4^- + \text{e} = \text{MnO}_4^{2-}$	0,564
	$\text{HfO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Hf} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,57		$\text{MnO}_4^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{MnO}_2 + 4\text{OH}^-$	0,60
Hg	$\text{HgS} + 2\text{e} = \text{Hg} + \text{S}^{2-}$	-0,69		$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,228
	$\text{Hg(CN)}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{CN}^-$	-0,37		$\text{Mn}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{Mn}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,443
	$\text{Hg}_2\text{I}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{I}^-$	-0,041		$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,507
	$\text{HgI}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Hg} + 4\text{I}^-$	-0,04		$\text{Mn}^{3+} + \text{e} = \text{Mn}^{2+} \text{ (8M H}_2\text{SO}_4\text{)}$	1,509
	$\text{HgO(красная)} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Hg} + 2\text{OH}^-$	0,098		$\text{MnO}_4^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,692
	$\text{Hg}_2\text{Br}_2 + 2\text{e} = 2\text{Hg} + 2\text{Br}^-$	0,140		$\text{MnO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	2,257
Mo	$\text{H}_2\text{MoO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,091	Nd	$\text{Nd}^{3+} + 3\text{e} = \text{Nd}$	-2,431

	$\text{MoO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{Mo} + 8\text{OH}^-$	-1,05	Ni	$\gamma\text{-NiS} + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{S}^{2-}$	-1,04
	$\text{Mo}^{3+} + 3\text{e} = \text{Mo}$	-0,200		$\alpha\text{-NiS} + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{S}^{2-}$	-0,83
	$\text{MoO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Mo} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,072		$\text{Ni(OH)}_2 + 2\text{e} = \text{Ni} + 2\text{OH}^-$	-0,72
	$\text{MoO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{Mo} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,154		$\text{Ni(NH}_3)_6^{2+} + 2\text{e} = \text{Ni} + 6\text{NH}_3$	-0,49
	$\text{MoO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,320		$\text{NiCO}_3 + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,45
	$\text{MoO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{MoO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,606		$\text{Ni}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ni}$	-0,25
N	$3\text{N}_2 + 2\bar{\text{e}} = 2\text{N}_3^-$	-3,4	O	$\text{Ni(OH)}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,110
	$3\text{N}_2 + 2\text{H}^+ + 2\bar{\text{e}} = 2\text{HN}_3$	-3,1		$\text{NiO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni} + \text{H}_2\text{O}$	0,116
	$\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_2\text{OH} + 2\text{OH}^-$	-3,04		$\text{NiO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ni}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,68
	$\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 4\bar{\text{e}} = \text{N}_2\text{H}_4 + 4\text{OH}^-$	-1,16		$\text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = 4\text{OH}^-$	0,401
	$\text{N}_2 + 8\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4\text{OH} + 6\text{OH}^-$	-0,74		$\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{O}_2$	0,682
	$\text{NO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + \bar{\text{e}} = \text{NO} + 2\text{OH}^-$	-0,46		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{e} = 3\text{OH}^-$	0,88
	$\text{NO}_2^- + 6\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 7\text{OH}^-$	-0,15		$\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,229
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\bar{\text{e}} = \text{NO} + 4\text{OH}^-$	-0,14		$\text{O}_3 + \text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{O}_2 + 2\text{OH}^-$	1,24
	$\text{NO}_3^- + 7\text{H}_2\text{O} + 8\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 9\text{OH}^-$	-0,12		$\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 3\text{H}_2\text{O}$	1,511
	$\text{NO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = \text{NO}_2^- + 2\text{OH}^-$	0,01		$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_2\text{O}$	1,776
	$\text{N}_2 + 6\text{H}^+ + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_3$	0,057		$\text{O}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$	2,07
	$\text{N}_2\text{H}_4 + 4\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4\text{OH} + 2\text{OH}^-$	0,1	Os	$\text{OsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Os} + 4\text{OH}^-$	-0,15
	$\text{N}_2 + 8\text{H}^+ + 6\bar{\text{e}} = 2\text{NH}_4^+$	0,275		$\text{OsCl}_6^{3-} + \text{e} = \text{Os}^{2+} + 6\text{Cl}^-$	0,4
	$2\text{NO}_2^- + 4\text{H}_2\text{O} + 6\bar{\text{e}} = \text{N}_2 + 8\text{OH}^-$	0,41		$\text{OsO}_4 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{Os} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,85
	$\text{NH}_2\text{OH} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\bar{\text{e}} = \text{NH}_4\text{OH} + 2\text{OH}^-$	0,42		$\text{OsCl}_6^{2-} + \text{e} = \text{OsCl}_6^{3-}$	0,85
	$2\text{NO}_2 + 4\text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{N}_2 + 8\text{OH}^-$	0,53		$\text{Os}^{2+} + 2\text{e} = \text{Os}$	0,85
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,78		$\text{OsO}_4 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{OsO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,96
	$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	0,80	P	$\text{H}_2\text{PO}_2^- + \text{e} = \text{P} + 2\text{OH}^-$	-2,05
	$2\text{NO} + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{OH}^-$	0,85		$\text{HPO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{H}_2\text{PO}_2^- + 3\text{OH}^-$	-1,57
	$\text{HNO}_2 + 7\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{NH}_4^+ + 2\text{H}_2\text{O}$	0,864		$\text{PO}_4^{3-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{HPO}_3^{2-} + 3\text{OH}^-$	-1,12
	$\text{NO}_3^- + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{NH}_4^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	0,87		$2\text{H}_3\text{PO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_4\text{P}_2\text{O}_6 + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,94
	$2\text{NO}_2 + 2\text{e} = 2\text{NO}_2^-$	0,88		$\text{P} + 3\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{PH}_3 + 3\text{OH}^-$	-0,89
	$\text{N}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{N}_2 + 2\text{OH}^-$	0,94		$\text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{P} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,51
	$\text{NO}_3^- + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HNO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,94		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{P(бел)} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,502
	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,957		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,50
	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,96		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{P(кp)} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,454
	$\text{HNO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$	1,00		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{P(бел)} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,411
	$\text{NO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$	1,03		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,39
	$\text{NO}_2 + \text{H}^+ + \text{e} = \text{HNO}_2$	1,09		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 5\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{P(кp)} + 4\text{H}_2\text{O}$	-0,383
	$2\text{NO}_3^- + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{N}_2\text{O} + 5\text{H}_2\text{O}$	1,116		$\text{H}_3\text{PO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	-0,276
	$2\text{NO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e} = \text{N}_2 + 6\text{H}_2\text{O}$	1,246		$\text{H}_3\text{PO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_3\text{PO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,50
	$2\text{HNO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{N}_2\text{O} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,297		$\text{P} + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{PH}_3$	0,06
	$2\text{NO}_2 + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,36		$\text{H}_4\text{P}_2\text{O}_6 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{H}_3\text{PO}_3$	0,38
	$2\text{HNO}_2 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,45	Pb	$\text{PbS} + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{S}^{2-}$	-0,93
	$2\text{NO} + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,678		$\text{PbO} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{OH}^-$	-0,58
	$\text{N}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{N}_2 + \text{H}_2\text{O}$	1,766		$\text{PbCO}_3 + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{CO}_3^{2-}$	-0,506
				$\text{PbI}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{I}^-$	0,365
Na	$\text{Na}^+ + \text{e} = \text{Na}$	-2,714	S		
Pb	$\text{PbSO}_4 + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{SO}_4^{2-}$	-0,3563		$\text{S} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{S}$	0,141

	$\text{PbF}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{F}^-$	-0,350		$\text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	0,17
	$\text{PbBr}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{Br}^-$	-0,280		$\text{SO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{S}^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,231
	$\text{PbCl}_2 + 2\text{e} = \text{Pb} + 2\text{Cl}^-$	-0,268		$2\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 5\text{H}_2\text{O}$	0,29
	$\text{Pb}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pb}$	-0,126		$\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{H}_2\text{S} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,311
	$\text{PbO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{PbO}_2^{2-} + 2\text{OH}^-$	0,2		$\text{SO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{S} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,357
	$\text{PbO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{O}$	0,248		$2\text{H}_2\text{SO}_3 + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,40
	$\text{Pb}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb} + \text{H}_2\text{O}$	0,277		$\text{H}_2\text{SO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,449
	$\text{PbO}_2 + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{PbO} + 2\text{OH}^-$	0,28		$\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{S} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,5
	$\text{Pb}_3\text{O}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 3\text{PbO} + \text{H}_2\text{O}$	0,972		$2\text{SO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,705
	$\text{PbO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pb}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,449-1,455		$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2\text{e} = 2\text{SO}_4^{2-}$	2,01
	$\text{PbO}_2 + \text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,685	Sb	$\text{SbO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e} = \text{Sb} + 4\text{OH}^-$	-0,675
	$\text{Pb}^{4+} + 2\text{e} = \text{Pb}^{2+}$	1,694		$\text{Sb} + 3\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{SbH}_3$	-0,51
Pd	$\text{Pd}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Pd} + 2\text{OH}^-$	0,07		$\text{SbO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SbO}_2^- + 2\text{OH}^-$	-0,43
	$\text{PdI}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdI}_4^{2-} + 2\text{I}^-$	0,623		$\text{Sb}_2\text{O}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = 2\text{Sb} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,152
	$\text{PdCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pd} + 4\text{Cl}^-$	0,623		$\text{SbO}^+ + 2\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Sb} + \text{H}_2\text{O}$	0,212
	$\text{PdO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pd} + \text{H}_2\text{O}$	0,896		$\text{SbO}_3^- + 2\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{SbO}_2^- + \text{H}_2\text{O}$	0,353
	$\text{PdCl}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Pd} + 6\text{Cl}^-$	0,96		$\text{SbO}_2^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{Sb} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,446
	$\text{Pd}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pd}$	0,987		$\text{Sb}_2\text{O}_5 + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = 2\text{SbO}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	0,581
	$\text{PdBr}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdBr}_4^{2-} + 2\text{Br}^-$	0,993		$\text{Sb}_2\text{O}_5 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Sb}_2\text{O}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$	0,671
	$\text{PdO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{PdO} + \text{H}_2\text{O}$	1,283	Sc	$\text{Sc}^{3+} + 3\text{e} = \text{Sc}$	-2,077
	$\text{PdCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PdCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	1,288	Se	$\text{Se} + 2\text{e} = \text{Se}^{2-}$	-0,92
Pt	$\text{PtS} + 2\text{e} = \text{Pt} + \text{S}^{2-}$	-0,95		$\text{Se} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{Se}$	-0,40
	$\text{PtS}_2 + 2\text{e} = \text{PtS} + \text{S}^{2-}$	-0,64		$\text{SeO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Se} + 6\text{OH}^-$	-0,366
	$\text{Pt}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Pt} + 2\text{OH}^-$	0,15		$\text{SeO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SeO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	0,05
	$\text{PtI}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtI}_4^{2-} + 2\text{I}^-$	0,393		$\text{H}_2\text{SeO}_3 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Se} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,741
	$\text{PtBr}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pt} + 4\text{Br}^-$	0,58		$\text{SeO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{SeO}_3 + \text{H}_2\text{O}$	1,15
	$\text{PtBr}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtBr}_4^{2-} + 2\text{Br}^-$	0,59	Si	$\text{SiO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Si} + 6\text{OH}^-$	-1,7
	$\text{PtCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{PtCl}_4^{2-} + 2\text{Cl}^-$	0,720		$\text{SiF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Si} + 6\text{F}^-$	-1,2
	$\text{PtCl}_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Pt} + 4\text{Cl}^-$	0,73		$\text{SiO}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Si} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,455
	$\text{Pt}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pt} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,980		$\text{Si} + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{SiH}_4$	0,102
	$\text{PtO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Pt}(\text{OH})_2$	1,045	Sn	$\text{SnS} + 2\text{e} = \text{Sn} + \text{S}^{2-}$	-0,94
	$\text{Pt}^{2+} + 2\text{e} = \text{Pt}$	1,188		$\text{Sn}(\text{OH})_6^{2-} + 2\text{e} = \text{HSnO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 3\text{OH}^-$	-0,93
Ra	$\text{Ra}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ra}$	-2,925		$\text{HSnO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Sn} + 3\text{OH}^-$	-0,91
S	$\text{Rb}^+ + \text{e} = \text{Rb}$	-2,925		$\text{SnF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Sn} + 6\text{F}^-$	-0,25
	$\text{SO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{SO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	-0,93		$\text{Sn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Sn}$	-0,136
	$2\text{SO}_4^{2-} + 5\text{H}_2\text{O} + 8\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 10\text{OH}^-$	-0,76		$\text{SnO}_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{SnO} + \text{H}_2\text{O}$	-0,108
	$\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{S} + 6\text{OH}^-$	-0,66		$\text{SnO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Sn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,106
	$2\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{OH}^-$	-0,58		$\text{SnO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Sn} + \text{H}_2\text{O}$	-0,104
	$\text{S}_2^{2-} + 2\text{e} = 2\text{S}^{2-}$	-0,524		$\text{Sn}(\text{OH})_2 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Sn} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,091
	$\text{S} + 2\text{e} = \text{S}^{2-}$	-0,48		$\text{SnCl}_6^{2-} + 2\text{e} = \text{SnCl}_4^{2+} + 2\text{Cl}^-$	0,14
	$2\text{S} + 2\text{e} = \text{S}_2^{2-}$	-0,476		$\text{Sn}^{4+} + 2\text{e} = \text{Sn}^{2+}$	0,151
	$\text{S} + \text{H}^+ + 2\text{e} = \text{HS}^-$	-0,065	Sr	$\text{Sr}^{2+} + 2\text{e} = \text{Sr}$	-2,888
	$\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{H}^+ + 8\text{e} = 2\text{S}^{2-} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,006	Te	$\text{Te} + 2\text{e} = \text{Te}^{2-}$	-1,14
	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{e} = 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,08		$\text{Te} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{H}_2\text{Te}$	-0,72
	$\text{SO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 8\text{e} = \text{S}^{2-} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,149		$\text{TeO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{Te} + 6\text{OH}^-$	-0,57
	$\text{TeO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Te} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,529		$\text{V}^{2+} + 2\text{e} = \text{V}$	-1,175

	$\text{TeO}_4^{2-} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{TeO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O}$	0,892		$\text{V}^{3+} + \text{e} = \text{V}^{2+}$	-0,255
	$\text{H}_6\text{TeO}_6 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{TeO}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$	1,02		$\text{VO}_2^+ + 4\text{H}^+ + 5\text{e} = \text{V} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,25
Ti	$\text{Ti}^{2+} + 2\text{e} = \text{Ti}$	-1,63		$\text{VO}_2^{2+} + \text{e} = \text{VO}^+$	-0,044
	$\text{TiO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ti} + \text{H}_2\text{O}$	-1,306		$\text{VO}_2^+ + 4\text{H}^+ + 3\text{e} = \text{V}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,360
	$\text{TiF}_6^{2-} + 4\text{e} = \text{Ti} + 6\text{F}^-$	-1,19	V	$\text{V}_2\text{O}_5 + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{VO}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	0,958
	$\text{TiO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,86		$\text{VO}_2^+ + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{VO}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$	1,004
	$\text{TiO}_2(\text{рутил}) + \text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti}^{3+} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,666		$\text{VO}_4^{3-} + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{VO}^+ + 3\text{H}_2\text{O}$	1,256
	$\text{TiO}_2(\text{рутил}) + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Ti}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,502		$\text{H}_2\text{VO}_4^- + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{VO}^{2+} + 3\text{H}_2\text{O}$	1,314
	$\text{Ti}^{3+} + \text{e} = \text{Ti}^{2+}$	-0,368		$\text{WO}_4^{2-} + 4\text{H}_2\text{O} + 6\text{e} = \text{W} + 8\text{OH}^-$	-1,05
	$\text{Ti}^{4+} + \text{e} = \text{Ti}^{3+} (5\text{M H}_3\text{PO}_4)$	-0,15	W	$\text{WO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{W} + 2\text{H}_2\text{O}$	-0,119
	$\text{TiO}^{2+} + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Ti}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$	-0,135		$\text{WO}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{W} + 3\text{H}_2\text{O}$	-0,09
	$\text{TiO}^{2+} + 2\text{H}^+ + \text{e} = \text{Ti}^{3+} + \text{H}_2\text{O}$	0,10		$\text{W}_2\text{O}_5 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = 2\text{WO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	-0,031
Tl	$\text{Tl}_2\text{S} + 2\text{e} = 2\text{Tl} + \text{S}^{2-}$	-0,93		$2\text{WO}_3 + 2\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{W}_2\text{O}_5 + \text{H}_2\text{O}$	-0,029
	$\text{TlI} + \text{e} = \text{Tl} + \text{I}^-$	-0,753		$\text{WO}_4^{2-} + 8\text{H}^+ + 6\text{e} = \text{W} + 4\text{H}_2\text{O}$	0,049
	$\text{TlBr} + \text{e} = \text{Tl} + \text{Br}^-$	-0,658		$2\text{WO}_4^{2-} + 6\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{W}_2\text{O}_5 + 3\text{H}_2\text{O}$	0,801
	$\text{TlCl} + \text{e} = \text{Tl} + \text{Cl}^-$	-0,557		$\text{ZnS} + 2\text{e} = \text{Zn} + \text{S}^{2-}$	-1,405
	$\text{TlOH} + \text{e} = \text{Tl} + \text{OH}^-$	-0,344	Zn	$\text{Zn}(\text{CN})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{CN}^-$	-1,26
	$\text{Tl}^+ + \text{e} = \text{Tl}$	-0,3363		$\text{Zn}(\text{OH})_2 + 2\text{e} = \text{Zn} + 2\text{OH}^-$	-1,245
	$\text{Tl}(\text{OH})_3 + 2\text{e} = \text{TlOH} + 2\text{OH}^-$	-0,05		$\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{OH}^-$	-1,22
	$\text{Tl}_2\text{O}_3 + 3\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = 2\text{Tl}^+ + 6\text{OH}^-$	0,02		$\text{ZnO}_2^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{OH}^-$	-1,216
	$\text{TlOH} + \text{H}^+ + \text{e} = \text{Tl} + \text{H}_2\text{O}$	0,778		$\text{ZnCO}_3 + 2\text{e} = \text{Zn} + \text{CO}_3^{2-}$	-1,06
	$\text{Tl}^{3+} + 2\text{e} = \text{Tl}^+$	1,252		$\text{Zn}(\text{NH}_3)_4^{2+} + 2\text{e} = \text{Zn} + 4\text{NH}_3$	-1,04
U	$\text{UO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e} = \text{U} + 4\text{OH}^-$	-2,39		$\text{Zn}^{2+} + 2\text{e} = \text{Zn}$	-0,763
	$\text{U}^{3+} + 3\text{e} = \text{U}$	-1,798		$\text{ZnO}_2^{2-} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{Zn} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,441
	$\text{U}^{4+} + \text{e} = \text{U}^{3+}$	-0,607		$\text{ZrO}^{2+} + 2\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Zr} + \text{H}_2\text{O}$	-1,570
	$\text{UO}_2^{2+} = \text{UO}_2^+$	0,05	Zr	$\text{ZrO}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e} = \text{Zr} + 2\text{H}_2\text{O}$	-1,553
	$\text{UO}_2^{2+} + 4\text{H}^+ + 2\text{e} = \text{U}^{4+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,334		$\text{Zr}^{4+} + 4\text{e} = \text{Zr}$	-1,539
	$\text{UO}_2^+ + 4\text{H}^+ + \text{e} = \text{U}^{4+} + 2\text{H}_2\text{O}$	0,62			

Список литературы

Карпетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Учебное издание

Наталья Анатольевна Зайцева, Ирина Альбертовна Низова

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка Н.А.Зайцевой

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.

Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.

Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ

620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебно-методическому
комплексу С.А. Упоров
14.10.2020

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки

21.05.03 Технология геологической разведки

квалификация выпускника: **специалист**

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Екатеринбург
2020

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата студент может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учиться лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: **«реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;

- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата-обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Студент для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

Выбор темы реферата

Студенту предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом следует сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

Формулирование цели и составление плана реферата

Выбрав тему реферата и изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

Цель – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).

1.1. (полное название параграфа, пункта);

1.2. (полное название параграфа, пункта).

2. (полное наименование главы).

2.1. (полное название параграфа, пункта);

2.2. (полное название параграфа, пункта).

} Основная часть

Заключение (выводы).

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

Титульный лист оформляется в соответствии с Приложением.

Оглавление (план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

Введение. В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

Основная часть реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждый раздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

Заключение (выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

Библиография (список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания и электронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

Приложения могут включать графики, таблицы, расчеты.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и пометки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта Times New Roman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что...», «таблица позволяет заключить, что...» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещенного в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждой главы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире. Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для

различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например, «Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «...в табл. 2.2».

Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минус (–), умножения (x) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «...в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

Схема – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

Диаграмма – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

График – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводят с указанием их порядкового номера, например: «...на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подрисовочный текст).

Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «...в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

Статья одного, двух или трех авторов из журнала

Зотова Л. А., Еременко О. В. Инновации как объект государственного регулирования // Экономист. 2010. № 7. С. 17–19.

Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами

Валютный курс и экономический рост / С. Ф. Алексашенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами

Олейник А. Н. Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

Книга, написанная более чем тремя авторами

Экономическая теория: учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

Сборники

Актуальные проблемы экономики и управления: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

Статья из сборника

Данилов А. Г. Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

Статья из газеты

Крашаков А. С. Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

Библиографические ссылки

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

Пример оформления затекстовой ссылки

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С.* Институциональная Горное дело: учебник и практикум для специалитета и магистратуры / О. С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1. Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.

2. Ответы студента на вопросы преподавателя.

3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

• Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.

- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.

- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.

- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.

- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.

- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.

- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!

- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.

- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.

- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методо-ориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яндекс, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Критерии оценивания:

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

Правила оценивания:

Каждый показатель оценивается в 1 балл

Критерии оценки:

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;

7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;

5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

Руководитель:
Дружинин А.В.
Студент гр. Х-20
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2020