МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе _____ В. В. Зубов

Методические указания для выполнения и сдачи лабораторных работ

Б1.О.10 ФИЗИКА

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Безбородова С. А., к.п.н.

Одобрены на заседании кафедры

Физики
(название кафедры)

Зав. кафедрой _____
(подпись)

Зайцев Д.В..
(Фамилия И.О.)

от 26.09.2024 г.
(Дата)

Рассмотрены методической комиссией факультета

Горно-механического
(название факультета)

Председатель _____
(подпись)

Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 00899356C4B8E7194321D0149160B2398C
Владелец: Зубов Владимир Владимирович
Действителен: с 26.06.2024 до 19.09.2025

Екатеринбург

Содержание

Требования к оформлению отчета по лабораторным работам..……. ……4

Определение плотности твердого тела правильной геометрической формы…….5

Определение скорости полёта пули при помощи баллистического маятника…… . 10

Определение момента инерции системы тел……. 15

Динамическое определение массы с помощью инерционных весов…… 21

Определение модуля Юнга твердых тел динамическим методом …… 26

Определение модуля сдвига по крутильным колебаниям…… 32

Определение массы моля и плотности воздуха……..38

Определение отношения теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме……..42

Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости методом отрыва кольца……...48

Определение коэффициента динамической вязкости жидкости по методу Стокса…… 54

Литература…….61

Студенты должны приходить на лабораторные занятия, изучив руководство к лабораторной работе, с заготовкой отчета содержащей пункты 1 – 6 .Таблицы в заготовке отчета заполняются по мере выполнения работы. Полученные данные необходимо показать преподавателю для проверки.

Требования к оформлению отчета по лабораторным работам

Отчет по лабораторным занятиям должен содержать следующее :

1. фамилию и инициалы студента, индекс группы, дату выполнения работы;
2. наименование выполняемой работы;
3. цель работы, краткую теорию, основные расчетные формулы;
4. характеристики используемых приборов сводятся в таблицу «Используемые приборы»:

Таблица

Наименование прибора	Пределы измерения прибора	Цена наименьшего деления

5. эскиз или схема установки;
6. таблицу результатов измерений;
7. расчет искомой величины;
8. расчет погрешностей;
9. запись окончательного результата в виде:

$$a = < a > \pm < \Delta a >$$

10. анализ результатов и краткие выводы, содержащие сравнение полученных результатов с табличными значениями.

Лабораторная работа № 1

Определение плотности твердого тела правильной геометрической формы

Цель работы : определение плотности твердого тела правильной геометрической формы, ознакомление с устройством и правилами работы с измерительными инструментами.

Краткая теория

Плотность определяется отношением массы однородного тела к его объему :

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad (1.1)$$

т.е. плотность численно равна массе единицы объема тела.

В данной работе исследуемое тело имеет форму цилиндра, следовательно, объем его выразится формулой

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h, \qquad (1.2)$$

где d – диаметр,

h – высота цилиндра.

Подставляя это значение в уравнение (1.1.) , получим выражение для вычисления плотности :

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}, \qquad (1.3)$$

Из полученного соотношения (1.3) следует, что для определения ρ нужно измерить значения m, d, h .

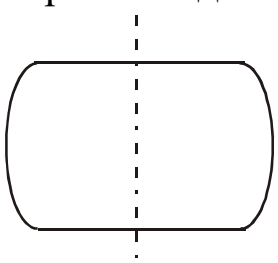
Выполнение работы.

Приборы и материалы: весы, штангенциркуль, микрометр, исследуемое тело (цилиндрической формы).

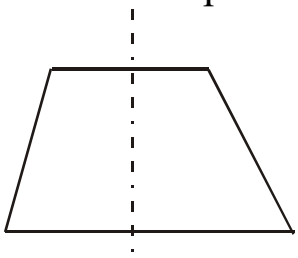
Порядок выполнения работы.

1. Взвешивают тело на весах . Правила взвешивания приложены к весам. Результат заносят в таблицу 1.1.

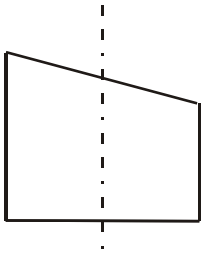
2. Известно , что исследуемое тело вращения (цилиндр) , невозможно изготовить идеальной формы. При механической обработке детали возникают погрешности формы , например :



Бочкообразность



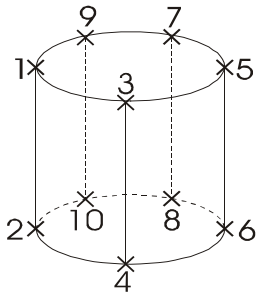
Конусность



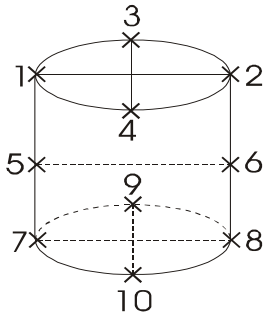
Не параллельность оснований

Поэтому для точного определения объема образца V , при планировании эксперимента важно правильно выбрать сечения для снятия размеров d и h .

Например : при определении h рекомендуется последовательно поворачивая образец проводить измерения длин образующих 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10 .



При определении диаметра d рекомендуется проводить измерения в следующем порядке 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10 :



При дальнейшей обработке результатов измерений, средняя арифметическая величина размеров h и d считается наиболее близкой к истинной .

Штангенциркуль

Штангенциркули позволяют производить отсчет линейных размеров с точностью до 0,05 мм. Штангенциркулем измеряют высоту тела. Для этого зажимают цилиндр между ножками штангенциркуля и по положению нуля нониуса отсчитывают по линейке – (масштабу) целое число миллиметров. Далее смотрят, какое деление нониуса совпадет с каким делением масштаба .

Пример : на рис.1.1 нуль нониуса перешел за 40 мм масштаба и 6 деление нониуса совпадает с одним из делений масштаба. Следовательно, высота цилиндра 40,30 мм.



Рис.1.1. Штангенциркуль

Микрометр

Прибор для измерения линейных размеров. На барабане микрометра нанесено 50 делений, следовательно для получения значения точности измерений указанной на приборе (0,01 мм) каждый миллиметр нижней шкалы поделен пополам рисками верхней шкалы : $\frac{0{,}5мм}{50дел.} = 0{,}01мм$.

При проведении измерений :

а) Если кромка барабана не перешла за риску верхней шкалы , то размер = число делений нижней шкалы + число делений шкалы барабана.

б) Если кромка барабана перешла за риску верхней шкалы ,то размер = число делений нижней шкалы + 0,5 мм + число делений шкалы барабана. Пример (рис.1.2). Микрометром измеряют диаметр тела. Измеряемое тело зажимают между опорной пятой и винтом (рис.1.2) . На головке винта находится трещетка, за которую и следует вращать винт. По линейной шкале отсчитывают деление, за которое перешла кромка барабана. На рис.1.2 это 11,50 мм.



Рис.1.2 Микрометр

Затем определяют деление барабана, которое совпало с продольным штрихом линейной шкалы (35 деление на рис.1.2)

Следовательно, так как каждое деление барабана равно 0,01 мм, диаметр цилиндра будет : 11,50 мм + 0,35 мм = 11,85 мм.

2. Высоту и диаметр цилиндра измеряют пять раз. Из пяти результатов измерений находят среднее значения величины и вычисляют погрешности. Результаты измерений и вычислений записываются в таблицу 1.1.

При подсчете средней величины погрешности, значения погрешностей берутся по модулю , т.к. согласно нормальному распределению Гаусса равновероятно получение положительной либо отрицательной погрешности. При последующем суммировании с учетом знака результат будет равен 0 , что не соответствует действительности.

При записи окончательного результата следует учитывать, что точность не может превышать точность результатов, полученных при измерениях.

Таблица 1.1
Результаты измерений

Измерения	h , *мм*	Δh, *мм*	d , *мм*	Δd, *мм*	m , *г*	Δm, *г*
1						
2						
3						
4						

5						
средние значения	$\overline{h}=$	$\overline{\Delta h}=$	$\overline{d}=$	$\overline{\Delta d}=$		

Плотность тела рассчитывается по формуле (1.3), в которой для величин диаметра и высоты берутся средние значения из таблицы 1.1.

Вычисление погрешностей и окончательный результат

Относительная погрешность определения плотности:

$$E_\rho = \frac{\overline{\Delta\rho}}{\overline{\rho}} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\overline{\Delta d}}{\overline{d}} + \frac{\overline{\Delta h}}{\overline{h}} \ . \qquad (1.4)$$

Абсолютная погрешность:

$$\overline{\Delta\rho} = E_\rho \overline{\rho} \, . \qquad (1.5)$$

Окончательный результат :

$$\rho = \overline{\rho} \pm \overline{\rho} \, . \qquad (1.6)$$

Сравнением полученного результата с табличными значениями плотности твердых тел определяют материал из которого изготовлен цилиндр.

Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется плотностью тела ?
2. Вывести расчетную формулу определения плотности цилиндра.
3. Пояснить порядок выполнения работы.
4. Какие измерения в данной работе относятся к прямым , какие к косвенным ?
5. Как вычисляются абсолютная и относительная погрешности при многократных и однократных измерениях ?
6. Вывести формулу для относительной погрешности при определении плотности тела в данной работе.
7. Сравните относительные погрешности прямых измерений в данной работе. Неточность измерений какой величины (*m, h* или *d*) дает наибольший вклад в погрешность определения плотности ?

Лабораторная работа № 2

Определение скорости полёта пули при помощи баллистического маятника

Цель работы : Определение скорости полёта пули при помощи баллистического маятника.

Краткая теория

Скорость полёта пули обычно достигает значительной величины: у духового ружья она составляет 150-200 м/с ,а у боевой винтовки 1000 м/с. Поэтому прямое измерение скорости т.е. определение времени, за которое пуля проходит известное расстояние, требует специальной аппаратуры. Много проще измерить скорость пули косвенными методами, среди которых широко распространены методы, основанные на неупругом соударении, т.е. соударении, в результате которого сталкивающиеся тела соединяются вместе и продолжают движение как целое.

Пусть летящая пуля испытывает неупругий удар со свободным неподвижным телом значительно большей массы. После удара тело и пуля начинают двигаться вместе, причём их скорость во столько раз меньше скорости пули, во сколько раз масса пули меньше массы тела (этот результат легко получить с помощью закона сохранения количества движения). Если теперь определить сравнительно небольшую скорость тела с пулей, то легко можно вычислить и скорость полёта пули.

Используемый в настоящей работе баллистический маятник представляет собой небольшую цилиндрическую коробку, заполненную вязким веществом (глиной с глицерином или пластилином) и укреплённую на стержне жёстко соединённом с осью вокруг которой маятник может совершать свободные колебания.

Со стороны пушки коробка маятника открыта и пуля проникания внутрь застревает в вязкой среде, теряя свою начальную скорость, сообщает маятнику импульс, под действием которого он отклоняется от исходного вертикального положения на угол α.

Выстрел пулей производится из небольшой пружинной пушки: нажимая на рычаг, освобождают сжатую пружину, которая выбрасывает пулю в направлении коробки маятника.

В данной работе для определения скорости полёта пули используются два физических закона: закон сохранения импульса для замкнутых систем (в замкнутой системе тел полный импульс системы не изменяется со временем) и закон сохранения энергии (полная энергия консервативной системы тел не изменяется со временем).

Для рассмотрения прямого центрального неупругого соударения двух тел запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V} + m_2\vec{V}, \qquad (2.1)$$

где m_1 - масса пули ;

m_2 - масса маятника ;

V_1 - скорость пули до соударения ;

V_2 - скорость маятника до соударения ;

V - скорость пули и маятника в первый момент после удара.

Так как до соударения маятник находился в покое ($V_2=0$), то слагаемое $m_2V_2=0$ и уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$m_1\vec{V}_1 = (m_1 + m_2)\vec{V}. \qquad (2.2)$$

С другой стороны к пуле застрявшей в маятнике и маятнику может быть применён закон сохранения и превращения энергии для данной системы имеем :

$$\frac{(m_1 + m_2)\cdot V^2}{2} = (m_1 + m_2)gh, \qquad (2.3)$$

где $g=9{,}81\ м/с^2$.

Левая часть этого уравнения даёт выражение для кинетической энергии системы в первый момент после удара, а правая для потенциальной энергии системы в момент достижения наибольшего отклонения маятника где g означает ускорение свободного падения, а h высоту подъёма центра тяжести маятника с пулей (рис.2.1)

Решая совместно уравнения (2.2) и (2.3) выразим скорость полета пули до соударения:

$$V_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\sqrt{2gh}. \qquad (2.4)$$

Между высотой h и углом отклонения, как видно из рис.1, существует простая связь:

$$h = a - a\cdot\cos\alpha = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2.5)$$

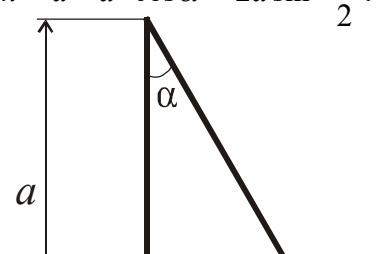


Рис. 2.1. Схема отклонения маятника

Если принять во внимание малость величины угла отклонения α , то можно с некоторым приближением считать имеющим место равенство:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{l}{2a}. \qquad (2.6)$$

И высоту *h* представить, подставив (2.6) в (2.5), как

$$h = \frac{l^2}{2a}. \qquad (2.7.)$$

Выражение для скорости пули (подставив (2.7) в (2.4)) примет вид:

$$V_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} l_0 \sqrt{\frac{g}{a}}, \qquad (2.8.)$$

где a – расстояние от оси вращения до центра тяжести маятника с пулей ; l_0 - длина дуги , стягивающей угол α .

В этой формуле не учитываются силы, которые делают колебания маятника затухающими, а именно сила трения в опорах маятника и сопротивление воздуха.

Для их учёта, сделав отсчёт максимальной амплитуды первого отклонения (l) при выстреле не останавливая маятник, дают ему сделать 10 полных колебаний ($n=10$) и отсчитывают амплитуду последнего (десятого) колебания

(l_1) .

Счёт полных колебаний производят с момента наибольшего отклонения, которое наблюдается вслед за выстрелом . Уменьшение амплитуды за *n* полных колебаний будет $(l - l_1)$, а поправка за четверть периода на трение будет:

$$k = \frac{l - l_1}{4n}. \qquad (2.9)$$

Отклонение маятника при выстреле с учётом поправки на трение будет равно:

$$l_0 = l + k\,. \qquad (2.10)$$

Подставляя (6.10) в (6.8) получим окончательную формулу для определения скорости полёта пули:

$$V_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}(l + k)\sqrt{\frac{g}{a}}\,. \qquad (2.11)$$

Выполнение работы

Приборы и материалы: баллистический маятник, пружинная пушка, металлическая пуля, технические весы с разновесами.

На весах определяют массу пули, массу коробки с вязким наполнителем. К массе коробки прибавляют массу стержня (указана на приборе). Выравнивают поверхность наполнителя, прикрепляют коробку к стержню. Устанавливают маятник указателем против нулевого деления шкалы.

Готовят пушку к выстрелу: сжимают пружину, вставляют пулю, прицеливаются и совершают выстрел.

Отсчёт отклонения маятника по шкале производят только в случае застревания в нём пули (если пуля отскочила или не попала в коробку, опыт следует повторить).

Когда пуля застряла в коробке, то один из наблюдателей должен записать значение максимального отклонения маятника. Далее представив возможность маятнику сделать десять полных колебаний записать величину отклонения десятого колебания. После этого извлечь пулю из коробки, выровнять поверхность наполнителя, повторить опыт, вытерев пулю.

Всего нужно произвести пять опытов (выстрелов) , а результаты измерений занести в таблицу.

Далее вычислить средние значения l , Δl , k , Δk и заполнить табл. 2.1.

Подставив средние значения величин l и k в формулу (2.11) и по средним значениям рассчитать среднее значение скорости полёта пули до соударения с препятствием.

Таблица 2.1

Результаты измерений

	Первоначальное отклонение маятника		Определение затуханий			
№	*l (см)*	*Δl (см)*	*l_1 (см)*	*n*	*k*	*Δk (см)*
1						
2						

3						
4						
5						
	$\bar{l}=$	$\overline{\Delta l}=$	$\overline{l_1}=$		$\bar{k}=$	$\overline{\Delta k}=$
$m_1=$; $\Delta m_1=$; $m_2=m_{коробки}+m_{стержня}=$; $a=$; $\Delta a=$; $\Delta m_2=\Delta m_{коробки}+\Delta m_{стержня}=$.						

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность :

$$E=\frac{\overline{\Delta V_1}}{\overline{V_1}}=\frac{\Delta m_1+\Delta m_2}{m_1+m_2}+\frac{\Delta m_1}{m_1}+\frac{\overline{\Delta l}+\overline{\Delta k}}{\bar{l}+\bar{k}}+\frac{\Delta a}{2a}. \qquad (2.12)$$

Абсолютная погрешность :

$$\overline{\Delta V_1}=E\cdot\overline{V_1}. \qquad (2.13)$$

Окончательный результат:

$$V_{пули}=\overline{V_1}\pm\overline{\Delta V_1}. \qquad (2.14)$$

Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Какая система тел называется замкнутой?
2. Формулировка закона сохранения импульса.
3. Какой удар называется упругим? неупругим? как выглядит запись закона сохранения импульса для каждого из них?
4. Формулировка закона сохранения и превращения энергии .
5. Как вычисляются погрешности измерений в данной работе.

Лабораторная работа № 3

Определение момента инерции системы тел

Цель работы : экспериментальное определение момента инерции системы тел и сравнение полученного результата с теоретически рассчитанным значением для этой же системы тел.

Краткая теория

При описании вращения твердых тел различной формы пользуются понятием – момент инерции (J). *Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется скалярная физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадрат расстояния до рассматриваемой оси.*

$$J=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ , \qquad (3.1)$$ где

m_i – масса i – ой частицы твердого тела,

r_i - радиус-вектор вращения i – ой частицы относительно оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу: $J=\int r^2 dm$, где интегрирование производится по всему объему тела, величина J в этом случае есть функция положения точки с координатами x , y , z .

Расчет моментов инерции для некоторых тел правильной геометрической формы дает следующие табличные выражения:

1. Сплошной цилиндр, диск: $J=\frac{1}{2}mr^2$
2. Шар : $J=\frac{2}{5}mr^2$
3. Полый, тонкостенный цилиндр: $J=mr^2$

Момент инерции *(J)* системы твердых тел – величина аддитивная, равная сумме моментов инерции отдельных тел
(J_1 ; J_2 ; .... ; J_n) этой системы :

$$J=J_1+J_2+\ldots+J_n=\sum_{i=1}^{n} J_n \ . \qquad (3.2)$$

Воспользовавшись формулой (2.2) , момент инерции для системы тел можно записать в виде :

$$J_{системы} = J_{диска}+J_{вала}+J_{прилива} \ , \qquad (3.3)$$

$J_{шкива}$ в виду малости вклада не учитывается.

Теоретически момент инерции можно рассчитать , если тела имеют правильную геометрическую форму, именно так можно поступить в нашем случае :

$$J_{системы} = \frac{1}{2} m_{диска} r_{диска}^2 + \frac{1}{2} m_{вала} r_{вала}^2 + \frac{1}{2} m_{прилива} r_{прилива}^2 \quad . \qquad (3.4)$$

Момент инерции можно определить и опытным путем , используя второй закон динамики для вращательного движения. В соответствии с этим законом угловое ускорение
(ε) , с которым тело вращается вокруг неподвижной оси, прямо пропорционально вращательному моменту сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела:

$$\varepsilon = \frac{M}{J} \quad , \qquad (3.5)$$

где ε - угловое ускорение,

J - момент инерции.

M - момент сил, действующей на систему тел.

При постоянном моменте сил *(M = const)* тело вращается равнопеременно *(ε = const)* . Измерив величину углового ускорения , можно определить момент инерции системы тел.

$$J = \frac{M}{\varepsilon}. \qquad (3.6)$$

Экспериментальная установка (рис.3.1) состоит из массивного металлического диска A , который крепится на валу B при помощи прилива C. На деревянный шкив K наматывается нить, с закрепленным на ней сменным грузом массой $m_{гр}$.

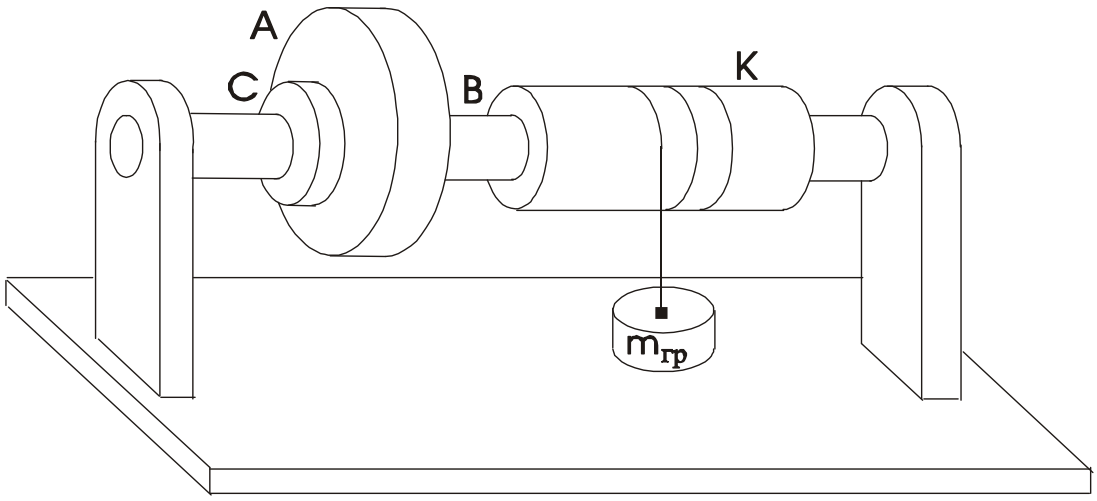


Рис.3.1 Общий вид установки

По третьему закону Ньютона, реакция нити N по модулю равна силе F, действующей на нить со стороны груза (рис.3.2). Под действием груза создается момент силы относительно оси вращения:

$$M=F\frac{D}{2} \quad , \qquad (3.7)$$

где F – модуль силы , приложенной посредством нити к шкиву,

D - диаметр деревянного шкива.

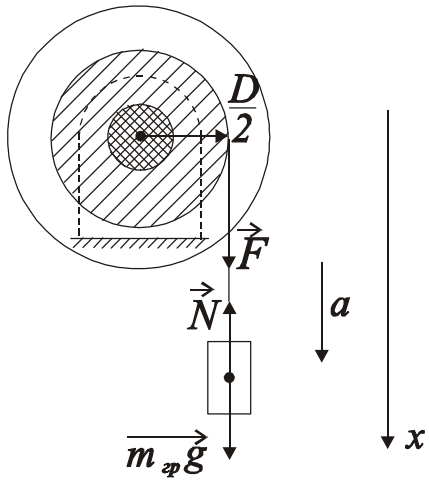


Рис.3.2
Схема приложения сил

Для нахождения величины силы F рассмотрим движение груза .

На груз действуют две силы: сила тяжести ($\overrightarrow{m_{гр}g}$) и сила реакции нити ($\vec{N}$).

Согласно второму закону динамики для поступательного движения, спроецировав вектора на ось x , можно записать для данного случая равенство:

$$m_{гр}a=m_{гр}g-N \quad , \qquad (3.8)$$

где a – линейное ускорение движения груза,

g – ускорение свободного падения ($g = 9{,}81$ м/с^2)

Отсюда выразим силу реакции нити :

$$N=m_{гр}(g-a) \quad . \qquad (3.9)$$

Перепишем выражение (3.7) для момента силы, подставив вместо F выражение для N :

$$M=m_{гр}(g-a)\frac{D}{2} \quad . \qquad (3.10)$$

Подставив выражение для M (3.10) в формулу (3.6) получим выражение для момента инерции :

$$J=\frac{D}{2\varepsilon}\, m_{гр}(g-a) \, . \qquad (3.11)$$

Угловое ускорение вращающейся системы , связано с линейным ускорением движения груза вниз , соотношением :

$$\varepsilon=\frac{2a}{D} \quad . \qquad (3.12)$$

Линейное ускорение груза , опускающегося с высоты h можно рассчитать из соотношения :

$$a=\frac{2h}{t^2} \quad . \qquad (3.13)$$

Подставив в формулу (3.11) для расчета момента инерции соотношение (3.12) и соотношение (3.13) получим искомую расчетную формулу для экспериментального определения момента инерции системы тел в окончательном виде :

$$J = \frac{D^2 t^2 \mathrm{m}_{\text{гр}}}{8h}(g - \frac{2h}{t^2}) \quad . \qquad (3.14)$$

Проведя расчеты и сравнив полученные значения момента инерции системы тел экспериментально и теоретически мы сможем написать вывод о проделанной работе.

Выполнение работы

Приборы и материалы: лабораторная установка (рис.3.1) , секундомер, штангенциркуль, линейка, набор грузов
(1, 2, 3 кг) .

Порядок выполнения работы :

1. Теоретически рассчитывают момент инерции системы тел. Для этого параметры диска, прилива и вала заносим в таблицу № 3.1 . По этим данным рассчитывают моменты инерции отдельных тел , их величины суммируют по формуле
(3.3) и заносят в таблицу № 3.1.

Таблица № 3.1

Данные для теоретического расчета момента инерции системы тел

тело	*масса (кг)*	*диаметр (м)*	*момент инерции (кг×м^2)*	
			отдельных тел	*системы тел*
Диск	*11,00 ± 0,01*	*0,243 ± 0,001*		
Прилив	*0,40 ± 0,01*			
Вал	*0,90 ± 0,01*			

2. Экспериментальное определение момента инерции этой же системы тел

Измеряют штангенциркулем диаметр деревянного шкива (Таблица № 3.2).

Прикрепляют конец нити к первому грузу m_1. Вращая диск наматывают нить на деревянный шкив, поднимая груз на высоту h = 1,25 м. Высоту подъема измеряют линейкой от пола до нижнего основания груза. Отпускают груз, предоставляя ему свободно опускаться на нити . Секундомером определяют время падения груза. Опыт повторяют три раза . В таблицу
№ 3.2 заносят три значения времени падения груза m_1 = 1 кг. Из трех значений рассчитывают среднее время , заносят его в таблицу. Опыт повторяют с грузами m_2 = 2 кг и m_3 = 3 кг, полученные данные заносят в таблицу № 3.2. Используя средние значения времени падения грузов, по формуле (3.14) рассчитывают три раза (соответственно трем значениям времени падения груза) момент инерции системы тел . Затем находят среднее значение момента инерции . Результаты заносят в таблицу № 3.2. Момент инерции деревянного шкива не учитывают в виду его малости.

Таблица № 3.2

Данные для экспериментального определения момента инерции системы тел

масса груза	*Время падения груза t (сек)*			*< t > (сек)*	*J (кг×м²)*	*ΔJ (кг×м²)*
m_1 = 1 кг						
m_2 = 2 кг						
m_3 = 3 кг						
Диаметр деревянного шкива D = (м)					*< J >=*	*<ΔJ>=*

Вычисление погрешностей и окончательный результат

Находят абсолютные погрешности ΔJ_1 , ΔJ_2 , ΔJ_3 моментов инерции , вычисленных для трех случаев , по ним определяют среднюю абсолютную погрешность $<\Delta J>$.

Относительная погрешность определения момента инерции :

$$E = \frac{\overline{\Delta J}}{\overline{J}} 100\% \quad . \qquad (3.15)$$

Окончательный результат :

$$J = \overline{J} \pm \overline{\Delta J} \quad . \qquad (3.16)$$

Проводят сравнение значений момента инерции системы тел определенных экспериментально и рассчитанных теоретически.

Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Опишите установку, применяемую в данной работе.
2. Какие силы, приводящие систему в движение, действуют на груз ?
3. Сформулируйте основной закон динамики поступательного движения.
4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и поясните физический смысл входящих в этот закон величин.
5. Сделайте вывод расчетной формулы для экспериментального определения момента инерции.
6. Как можно теоретически рассчитать момент инерции ?
7. Вывести формулу относительной погрешности определения момента инерции диска при определении ее по формуле :
8. Изменится ли момент инерции системы при изменении массы подвешиваемых грузов ?

Лабораторная работа № 4

Динамическое определение массы с помощью инерционных весов

Цель работы : определение массы тела динамическим методом.

Краткая теория

Понятие о массе было введено Ньютоном при установлении им закона всемирного тяготения и законов динамики.

В законе тяготения масса тел рассматривается как источник и объект тяготения (тяготеющая масса), а в законах динамики – как мера инертности тел (инертная масса).

Рассмотрим два метода определения массы: статический и динамический.

При статическом методе масса тела может быть определена путем взвешивания, сравнением с эталоном массы в поле силы тяжести.

Про тела, уравновешивающие друг друга на равно- плечных весах, говорят, что они имеют равные веса, а так как вес пропорционален массе, то, следовательно, и одинаковые массы (тяготеющие).

Массу тела можно определить и из динамического действия силы, зная величину силы и ускорение, приобретаемое при этом телом. По второму закону Ньютона :

$$m = \frac{F}{a} \quad , \qquad (4.1)$$

откуда следует, что при действии одной и той же силы на тела различной массы ускорение будет различным. Чем больше сопротивление тела изменению состояния, то есть, чем больше масса, тем меньше ускорение , приобретаемое телом.

Для определения массы динамическим методом служат инерционные весы. Инерционные весы (рис.4.1) состоят из массивного основания и платформы , закрепленной на двух плоских пружинах.

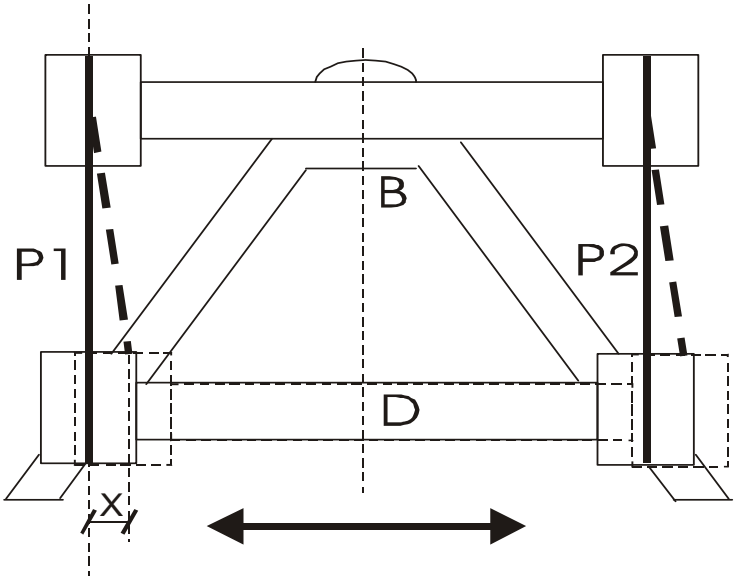


Рис.4.1 Инерционные весы (вид сверху)

Платформа может перемещаться в горизонтальной плоскости всегда стремясь занять положение равновесия за счет жесткости плоских пружин. Роль возвращающей силы F играет реакция упруго деформированных пружин подвеса платформы.

При изменении массы платформы жесткость пружин не изменяется, следовательно не изменяется величина возвращающей силы упругости F .

По закону Гука эта сила для упругих полос выражается уравнением :

$$F = -kx \quad , \tag{4.2}$$

где x - величина смещения платформы от положения равновесия ;

k - коэффициент упругости пружины , выражающий величину силы, которая вызывает смещение, равное единице.

Запишем уравнение гармонического колебательного движения для смещения в виде :

$$x = A\sin\omega \cdot t \quad , \tag{4.3}$$

где A - амплитуда колебаний;

ω - циклическая частота колебаний.

Скорость V и ускорение a при колебательном движении определяется по формулами :

$$V = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega \cdot t\,, \tag{4.4}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \sin\omega \cdot t\,. \tag{4.5}$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T - период колебаний, т.е. время одного полного колебания, получим :

$$a = -\omega^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2}x \ . \tag{4.6}$$

Знак минус означает, что ускорение a и упругая сила F в колебательном движении всегда направлены противоположно смещению x. Подставив F и a в выражение для второго закона Ньютона (4.1), получим :

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2} \ . \tag{4.7}$$

Зная период колебаний T и коэффициент упругости k, который для данных пластин есть величина постоянная, можно определить массу платформы с находящимся на ней грузом.

Если массу m рассматривать как сумму масс платформы m_0 и груза m_x, то можно написать :

$$m_x = \frac{kT^2}{4\pi^2} - m_0 \ . \tag{4.8}$$

В нашем случае величины k и m_0 не известны, поэтому определение массы данного нам груза проведем с помощью инерционных весов и тарировочного графика построенного опытным путем (рис.4.2).

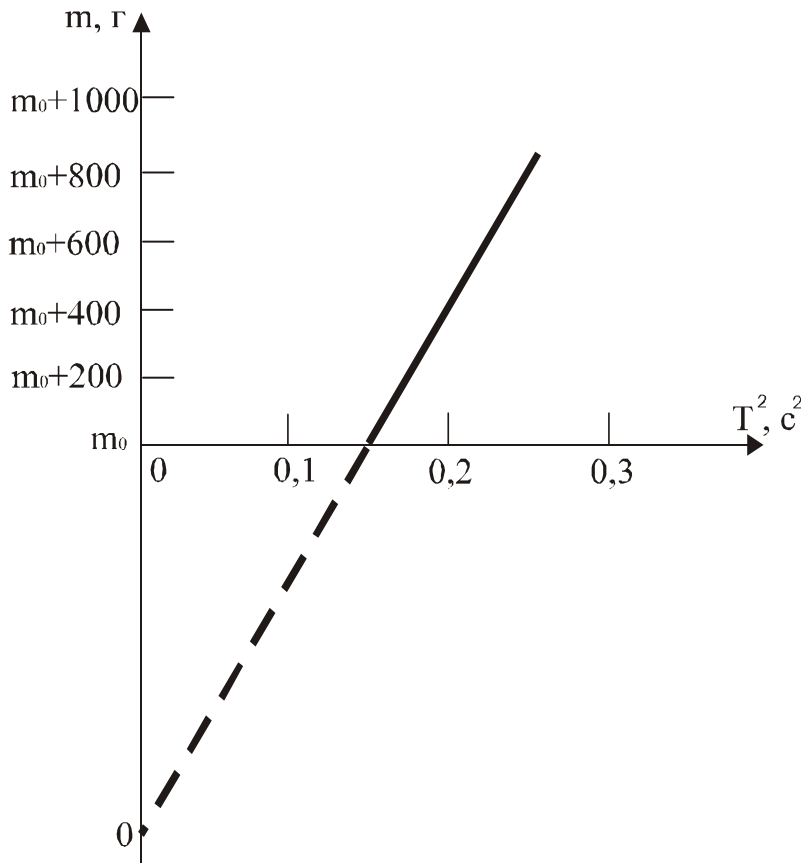


Рис.4.2 График зависимости между квадратом периода колебаний и массой платформы

Выполнение работы

Приборы и материалы: инерционные весы, пластина неизвестной массы, секундомер, набор грузов .

Порядок выполнения работы

Приводят в движение платформу весов с таким расчетом, чтобы амплитуда колебаний не превышала 1 см.

Наблюдая за колебаниями платформы, отсчитывают 50 колебаний . С последним отсчетом останавливая секундомер.

Опыт повторяют три раза, результаты записывают в таблицу 4.1. Находят среднее время 50 колебаний ($\bar{t}$) и период колебаний :

$$T = \frac{\bar{t}}{n} \quad , \qquad (4.9)$$

где n - число колебаний .

Нагружая платформу последовательно : грузами 200, 400, 600, 800, 1000 г тем же способом определяют соответственно периоды колебаний платформы.

Убрав тарировочные грузы нагружают платформу грузом неизвестной массы и снова определяют период колебаний.

Во всех случаях, наблюдения проводят не менее трех раз, из которых находят среднее время 50 колебаний и значение периода колебаний для каждого груза на платформе.

По данным таблицы вычерчивают тарировочный график, откладывая по оси ординат значения массы платформы с грузами m , а по оси абсцисс соответственно значения квадрата периода колебаний платформы с грузами (рис.4.2).

Массу неизвестного груза определяют по графику, используя найденное значение квадрата периода его колебаний вместе с платформой .

Таблица 4.1

Результаты измерений

Масса платформы с грузами m, *г*	*Время 50 колебаний* t, *с*			$\bar{t}$, *с*	T, *с*	T^2, c^2
	1	*2*	*3*			
пустая (без грузов)						
+ 200						
+ 400						
+ 600						
+ 800						
+ 1000						
+ m_x						

По графику можно определить и массу платформы m_0. Для этого прямую, выражающую график, проводят до пересечения с осью ординат, что дает начало отсчета по оси масс.

Измеряя отрезок от *0* до m_0 в масштабе, выбранном для массы, находят массу платформы.

Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение массы и веса тела.
2. Есть ли разница между тяготеющей и инертной массой ?
3. Сформулируйте второй закон Ньютона и закон Гука, поясните физический смысл коэффициента упругости.
4. Под действием какой силы получается колебательное движение платформы ?
5. Чем характеризуется простое гармоническое колебание?
6. Указать, в каких точках пути при колебании платформы ускорение и скорость наибольшие по величине.
7. Что называют периодом колебания и как он определяется в данной работе?
8. Запишите формулы для нахождения периодов математического, физического и пружинного маятников.
9. Как определяется масса тела с помощью инерционных весов ?

Лабораторная работа № 5

Определение модуля Юнга твердых тел динамическим методом

Цель работы: Определение модуля Юнга, ознакомление со способом определения модуля Юнга методом стоячих волн.

Краткая теория

Закон Гука. Деформации растяжения и сжатия. Модуль Юнга.

Выясним количественную связь между силами, приложенными к твёрдому телу, и возникающим в нём деформациями. Решение задач подобного рода в теории упругости основано на законе Гука.

Возьмём круглый стержень длиной L, диаметром d и площадью поперечного сечения S. Пусть один конец стержня закреплён, а к другому приложена растягивающая сила $\vec{F}$. Величина растягивающей силы $\vec{F}$, отнесённая к единице площади S, называется напряжением P

$$P = \frac{F}{S} \quad . \qquad (5.1)$$

Под действием силы $\vec{F}$ длина стержня станет L_1 , следовательно, $\Delta L = L_1 - L$.

Опытным путём установлено, что чем больше величина F, тем больше величина растяжения стержня.

Закон Гука - основной закон теории упругости, гласит: *при малых деформациях величина деформации пропорциональна напряжению.*

При больших деформациях закон Гука не выполняется. В образцах возникают остаточные деформации либо разрыв.

Таким образом, если справедлив закон Гука, то

$$\Delta L = kL\frac{F}{S}, \qquad (5.2)$$

где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала образца. Принято пользоваться обратной величиной $E=1/k$.

Тогда

$$\Delta L = \frac{1}{E}L\frac{F}{S}, \qquad (5.3)$$

откуда

$$E = \frac{L}{\Delta L}\cdot\frac{F}{S}. \qquad (5.4)$$

Величина E называется модулем Юнга, модулем продольной упругости. Если при испытаниях на прочность предел упругости не перейдён , то E представляет постоянную величину, определяющую упругие свойства данного материала.

В технике значение модуля Юнга выражают в Паскалях , Па=Н/м^2 , например:

$E_{стали}$= 220 ГПа; $E_{железа}$=207,9 ГПА ; $E_{меди}$=(80 - 125)ГПа ;
$E_{свинца}$=18 ГПА; $E_{дерева}$=11 ГПа.

Динамический метод определения модуля Юнга

Если один конец стержня заставить испытывать периодические сжатия (растяжения) в направлении его длины, в стержне возникнут стоячие продольные волны. Стержень при этом начинает «звучать» – возникает явление резонанса.

Так как в нашей установке стержень в середине жёстко закреплен, в этой точке смещения отсутствуют, и в ней всегда будет находиться узел скоростей $V_{прод}$.

Максимальные колебания стержня (основной резонанс) наблюдаются при выполнении условия :

$$L = \frac{\lambda}{2}, \qquad (5.5)$$

где L - длина стержня;

λ - длина продольной волны.

При этом на концах стержня будут пучности и смещения (рис.5.1)

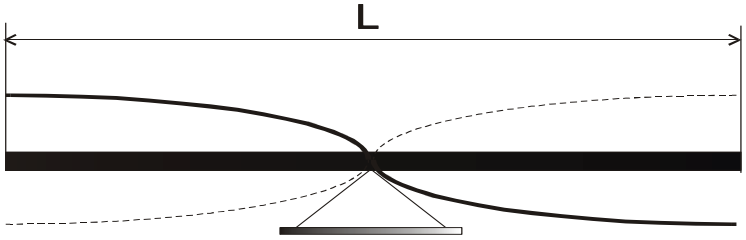


Рис. 5.1.Схема излучателя колебаний

так как

$$\lambda = \frac{V_{прод.}}{\nu}, \qquad (5.6)$$

где $V_{прод}$. – скорость продольной волны в стержне.

ν - частота ,

то

$$V_{прод.} = \lambda \cdot \nu = 2L \cdot \nu . \qquad (5.7)$$

Следовательно, для нашего случая необходимо измерить:

1. Длину стержня L.
2. Длину продольной стоячей волны λ.

Скорость $V_{прод}$ продольной волны в стержне, размер поперечного сечения которого значительно меньше длины волны, определяется формулой :

$$V_{прод.ст} = \sqrt{\frac{E}{\rho_{ст}}}, \qquad (5.8)$$

где ρ - плотность материала стержня.

Следовательно, можно записать

$$E = V^2_{прод.ст} \cdot \rho_{ст} . \qquad (5.9)$$

Следует отметить, что значения модуля Юнга найденные в статическом и динамическом режимах, могут различаться.

Выполнение работы

Приборы и материалы : лабораторная установка, масштабная линейка, кожанка с канифолью.

В нашей работе для определения модуля Юнга используется метод стоячих волн.

Схема установки для наблюдения стоячих продольных звуковых волн приведена на рис.5.2.

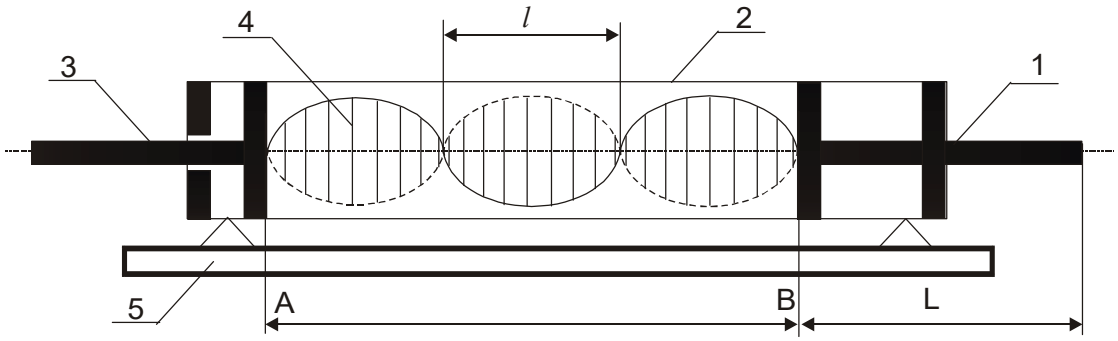


Рис.5.2. Схема установки :

1- медный стержень с поршнем (излучатель) ;
2- стеклянная трубка ;
3- стержень с подвижным поршнем ;
4- пробковые опилки ;
5- основание установки ;

L - длина исследуемого стержня ; l - расстояние между соседними узлами (пучностями)равное половине длины волны в воздухе

$$\lambda_в = 2l \quad . \qquad (5.10)$$

Стоячая волна образуется в промежутке AB, если на его длине укладывается целое число полуволн.

Продольные колебания получают в стержне , проводя по свободной стороне стержня кожанкой с канифолью. При этом поршень, на другом конце стержня, передаёт колебания столбу воздуха в трубке. При отражении от подвижного поршня волна идёт обратно. Если выполняется выше приведённое условие в промежутке АВ возникает стоячая волна, которую можно наблюдать визуально с помощью распределения в пространстве трубки пробковой крошки.

При возбуждении продольных волн в стержне можно записать

$$\lambda_{ст} = 2L \quad . \qquad (5.11)$$

Скорость звука в воздухе определяется по формуле

$$V_в = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} , \qquad (5.12)$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1{,}4$ - показатель адиабаты (для воздуха);

$R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ -универсальная газовая постоянная;

$\mu = 0{,}029$ *кг/моль* – молярная масса воздуха ;

T - абсолютная температура воздуха.

Известно, что при переходе звуковой волны из одной среды в другую, частота сохраняется постоянной

$$\nu = \frac{V}{\lambda} = const \, . \qquad (5.13)$$

Следовательно

$$\frac{\lambda_{ст}}{\lambda_{возд.}} = \frac{V_{прод.ст}}{V_{возд.}} \, . \qquad (5.14)$$

Преобразуем формулу

$$V_{прод.} = \frac{L}{l} \cdot \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \, , \qquad (5.15)$$

используя соотношение запишем

$$E = V^2{}_{прод.ст.} \cdot \rho_{ст.} = \frac{L^2}{l^2} \cdot \frac{\gamma RT}{\mu} \cdot \rho_{ст.} , \qquad (5.16)$$

где $\rho_{ст.} = \rho_{меди} = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$.

Порядок выполнения работы

Встряхиванием распределяют равномерным слоем пробковые опилки по длине промежутка *AB*. Для получения колебаний плавно проводят по свободному концу стержня (от середины к концу) кожанкой с канифолью. При правильном выполнении слышен чистый, высокий звук.

В момент «звучания» стержня перемещают подвижный поршень до образования устойчивых фигур из пробковой крошки.

Далее проводят все необходимые измерения параметров *L, l, T*.

Измерения проводят не менее трёх раз занося результаты в табл. 5.1 .

Таблица 5.1

Результаты измерений

l, м	*l, м*	*L, м*	*L, м*	*T, K*	ΔT *, K*

$\bar{l} =$	$\overline{\Delta l} =$	$\bar{L} =$	$\overline{\Delta L} =$		

Используя средние значения измеренных величин и справочные данные по формуле (5.16) , находят значение модуля Юнга для меди и сравнивают с табличным значением.

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность:

$$\frac{\overline{\Delta E}}{\bar{E}} = 2\frac{\overline{\Delta L}}{\bar{L}} + \frac{\overline{\Delta T}}{T} + 2\frac{\overline{\Delta l}}{\bar{l}}. \qquad (5.17)$$

Абсолютная погрешность:

$$\overline{\Delta E} = \frac{\overline{\Delta E}}{\bar{E}} \cdot \bar{E}. \qquad (5.18)$$

Окончательный результат:

$$E = \bar{E} + \overline{\Delta E}. \qquad (5.19)$$

Сравнивают полученный результат с табличным значением.
Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется напряжением?
2. Сформулируйте закон Гука.
3. Опишите ход работы на лабораторной установке.
4. Что называется длиной волны?
5. Объясните расчётную формулу для определения значения модуля Юнга.
6. Выразите скорость звука в твёрдых телах через модуль Юнга.
7. Объясните формулу относительной погрешности .

Лабораторная работа № 6

Определение модуля сдвига по крутильным колебаниям

Целью работы является изучение деформации сдвига и кручения, определение модуля сдвига металлического стержня.

Краткая теория

Модуль упругости E (модуль Юнга), G (модуль сдвига), K (модуль объемной упругости) определяют жесткость материалов, то есть интенсивность увеличения напряжения по мере увеличения упругой деформации.

Механизм упругой деформации металлов состоит в обратимых смещениях атомов из положения равновесия в кристаллической решетке. Величина упругих деформаций в металлах не может быть большой, так как атомы в узлах решетки способны смещаться на небольшую долю межатомных расстояний.

Физический смысл модуля упругости состоит в том, что он характеризует сопротивляемость металлов упругой деформации, то есть смещению атомов из положения равновесия.

В отсутствии деформации атомы колеблются в узлах решетки у положений равновесия.

Если деформация не совпадает по направлению с напряжением (например при одноосном растяжении возникает трехосная деформация) , элементарный закон Гука заменяется обобщенным. Он устанавливает линейную связь между деформацией и напряжением в любых направлениях, то есть между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций.

В работе использован один из распространенных методов экспериментального определения модуля сдвига цилиндрического стержня. Этот метод основан на связи, существующей между модулем сдвига, линейными размерами цилиндрического стержня и модулем кручения:

$$f = G\frac{\pi d^4}{32L}, \qquad (6.1)$$

где f – модуль кручения;

G – модуль сдвига;

d – диаметр стержня;

L – длина стержня .

Рассмотрим кратко механизм деформаций сдвига и кручения.

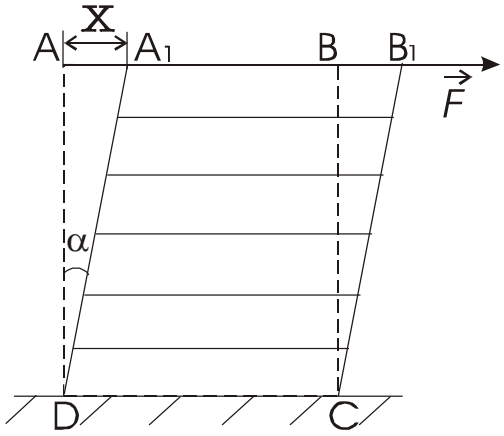


Рис. 6.1. Схема деформации сдвига

Если к верхнему основанию параллелепипеда *DABC* (рис.6.1), с закрепленным нижним основанием *DC* , приложить силу $\vec{F}$, к верхнему основанию и направленную по касательной к плоскости *AB*, то произойдет деформация параллелепипеда, называемая сдвигом.

При сдвиге отдельные горизонтальные тонкие слои, на которые мысленно разбивается параллелепипед, смещаются (сдвигаются) относительно друг друга в направлении действия силы. Отрезок AA_1 , обозначенный через *x*, называют абсолютным сдвигом. Отношение $\frac{x}{h}$ называют относительным сдвигом (где *h* – высота параллелепипеда). Из (рис.6.1) видно, что $\frac{x}{h} = tg\alpha$; ввиду малости величины относительного сдвига $tg\alpha$ заменяют на величину угла α, который называется углом сдвига. Тогда величина относительного сдвига запишется таким образом: $\frac{x}{h} = \alpha$.

Согласно опыту величина относительного сдвига прямо пропорциональна силе $\vec{F}$ и обратно пропорциональна площади основания *S*, то есть

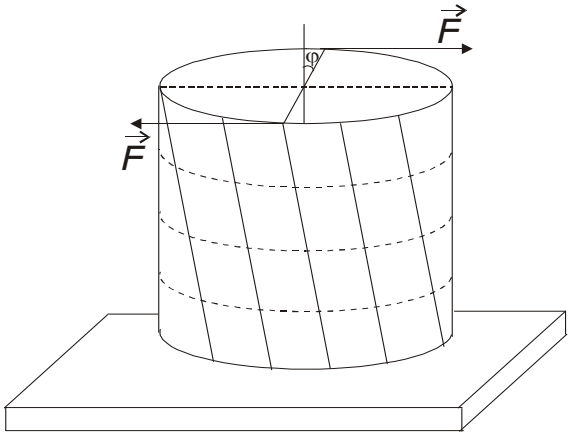
$$\alpha = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{S}. \qquad (6.2)$$

Величина *G* называется модулем сдвига. Экспериментально модуль сдвига *G* можно найти, определив модуль кручения *f* для исследуемого материала.

Деформация кручения стержня (цилиндра) сводится к сдвигам относительно друг друга бесконечно тонких сечений, на которые

можно мысленно разбить закручиваемый стержень (рис.5.2). Если один конец стержня жестко закрепить , то для закручивания другого конца на угол φ необходимо приложить к нему пару сил $\vec{F}$ - $\vec{F}$ с моментом $\vec{M}$. По закону Гука можно записать:

$$M = f \cdot \varphi, \qquad (6.3)$$



где f -модуль кручения, численно равный моменту пары сил, закручивающему стержень, деленному на единицу угла.

Рис.6.2. Схема деформации кручения

Если известен модуль кручения данного материального тела, то используя уравнение (6.1), можно рассчитать модуль сдвига.

Практически модуль кручения определяется по крутильным колебаниям исследуемого стержня, верхний конец которого жестко закреплен, а нижний соединен с диском, способным совершать крутильные колебания (рис.6.3).

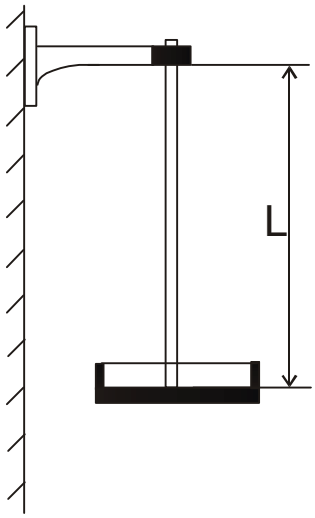


Рис.6.3. Схема установки

Диск поворачивается на некоторый угол φ и отпускается. Освобожденный диск совершает крутильные колебания, период которых, согласно теории, рассчитывается по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{f}}, \qquad (6.4)$$

где J - момент инерции диска и стержня.

В данном случае момент инерции вычислить довольно трудно, но можно определить его изменение при нагружении диска дополнительным грузом-кольцом. Для этого: обозначим через J_1- момент инерции стержня с диском без нагрузки (крутильный маятник), а через $J_2 = (J_1 + mR^2)$ - момент инерции с грузом в виде кольца. Тогда разность $J_2 - J_1 = mR^2$ будет выражать момент инерции кольца (где R - средний радиус кольца, m - масса кольца).

Соответственно периоды колебаний маятника без кольца и с кольцом можно записать в виде:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{f}}, \qquad (6.5)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{f}} \quad , \qquad (6.6)$$

Возведя в квадрат оба эти выражения и взяв их разность выразим модуль кручения f:

$$f = \frac{4\pi^2 mR^2}{T_2^2 - T_1^2}. \qquad (6.7)$$

Подставив это выражение в (6.1) получим для модуля сдвига:

$$G = \frac{8\pi \cdot L}{r^4} \cdot \frac{mR^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad , \qquad (6.8)$$

где $r = \frac{d}{2}$ - радиус стержня.

Выполнение работы

Приборы и материалы: крутильный маятник, секундомер, микрометр и миллиметровая линейка.

Измерения: миллиметровой линейкой измеряют длину стержня (L) три раза; микрометром измеряют диаметр стержня ($2r$) в трех различных точках; измеряют три раза средний диаметр кольца ($2R$).

Не нагружая маятник кольцом, приводят его в крутильные колебания, избегая качаний в стороны. Наблюдая за колебаниями маятника, запускают секундомер с отчетом «ноль», при

прохождении метки на диске против стойки К. при каждом новом прохождении метки перед стойкой в одну и ту же сторону делают отсчет – один, два, три…до 20. С последним отчетом останавливают секундомер. Определяют период колебаний, деля время всех полных колебаний t_1 на их количество n_1:

$$T_1 = \frac{t_1}{n_1} \ . \qquad (6.9)$$

Далее нагружают диск кольцом и тем же способом определяют T_2 .

В обоих случаях наблюдения проводят не менее трех раз и рассчитывают средние значения для T_1 и T_2.

Результаты измерений заносят в таблицу 6.1.

Таблица 6.1
Результаты измерений

№	L	ΔL	r	Δr	R	ΔR	t_1	Δt_1	t_2	Δt_2	T_1	ΔT_1	T_2	ΔT_2
	см	*см*	*мм*	*мм*	*см*	*см*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*
1														
2														
3														
Сред. знач.														
m=				*Δm=±*										

По полученным данным с использованием формулы (6.8) рассчитывают величину модуля сдвига.

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность :

$$E = \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{\overline{L}} + \frac{\Delta m}{\overline{m}} + 2\frac{\Delta \overline{R}}{\overline{R}} + 4\frac{\Delta \overline{r}}{\overline{r}} + 2\frac{\overline{T_2} \cdot \Delta \overline{T_2} + \overline{T_1} \cdot \Delta \overline{T_1}}{\overline{T_2^2} - \overline{T_1^2}} \ , \qquad (6.10)$$

где $\Delta \overline{T_1} = \frac{\Delta \overline{t_1}}{n}$, а $\Delta \overline{T_2} = \frac{\Delta \overline{t_2}}{n}$.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta \overline{G} = E \cdot \overline{G} \ . \qquad (6.11)$$

Окончательный результат:

$$G = \overline{G} \pm \Delta \overline{G} \ . \qquad (6.12)$$

Сравнивают полученный результат с табличными значениями (табл. 6.2).

Записывают выводы.

Таблица 6.2

Константы упругости некоторых чистых металлов при комнатной температуре

металл	E, ГПа	G, ГПа	K, ГПа	ν
железо	217	89	172	0,28
никель	205	78	187	0,31
медь	125	46	142	0,34
алюминий	72	27	75	0,34
титан	108	41	127	0,34
кобальт	204	76	187	0,31
молибден	847	122	280	0,30

ν - коэффициент Пуассона, тогда

$E = 2G(1+\nu)$;

$E = 3K(1-2\nu)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией тела? Виды деформации.
2. Сформулируйте закон Гука?
3. Что такое модуль сдвига?
4. Какой физический смысл модуля кручения?
5. Когда справедлив закон Гука ?

Лабораторная работа № 7

Определение массы моля и плотности воздуха

Цель работы : экспериментальное определение массы моля и плотности воздуха при нормальных условиях.

Краткая теория.

В системе СИ моль является единицей измерения количества вещества, находящегося в любом состоянии
(твердом, жидком, газообразном). В моле вещества содержится столько структурных единиц (атомов, молекул) , сколько имеется атомов в 0,012 кг изотопа углерода $_6C^{12}$. Это число атомов установленное опытным путем, называется числом Авогадро и равно $6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Для однородных газов масса в килограммах численно равна молярному весу газа.
Для воздуха, как смеси газов , главным образом азота и кислорода, масса моля будет определяться массой , выраженной в килограммах, заключенной в объеме 22,4 м^3 при нормальных условиях (P_0 = 1атм.= $1{,}013 \cdot 10^5$ Па и T_0 = 273,16
К). Определение массы моля производится с использованием уравнения Менделеева-Клайперона :

$$PV = \frac{M}{\mu} RT \quad , \qquad (7.1)$$

где P – давление , при котором находится газ (Па),
V – объем, занимаемый газом (м^3),
M – масса газа в данном объеме (кг),
R – универсальная газовая постоянная ($R=8{,}31$ *Дж×моль/К*),
T – абсолютная температура (К),
при этом производится измерение физических величин , определяющих данное состояние, т.е. давления, температуры, объема и массы воздуха в этом объеме.

Определение массы воздуха в колбе (M) возможно только при полной откачке его из сосуда, что практически сложно осуществить .

Рассмотрим воздух в двух состояниях : при давлении P_1 (атмосферное) до откачки части воздуха и при давлении P_2 после откачки части воздуха из сосуда колбы с помощью форвакуумного насоса.

Уравнения для этих состояний запишем в виде:

$$P_1V = \frac{M'}{\mu} RT \quad , \qquad (7.2)$$

$$P_2V = \frac{M''}{\mu} RT \quad , \qquad (7.3)$$

где M' и M''- массы газа в сосуде до и после откачки воздуха, т.е. соответственно при давлениях P_1 и P_2. Объем колбы и температура среды в обоих случаях остаются постоянными.

Вычитая из первого уравнения второе получим :

$$(P_1 - P_2)V = (M' - M'')\frac{RT}{\mu} \quad . \qquad (7.4)$$

Очевидно, что изменение массы газа ($M' - M''$) равно разности ($M_1 - M_2$), где M_1 и M_2 массы колбы с газом до и после откачки воздуха. Исходя из этого уравнение (7.4) можно переписать :

$$(P_1 - P_2)V = (M_1 - M_2)\frac{RT}{\mu} \quad , \qquad (7.5)$$

откуда

$$\mu = \frac{(M_1 - M_2)RT}{(P_1 - P_2)V} = \frac{(M_1 - M_2)RT}{P_м V} \quad , \qquad (7.6)$$

где за $(P_1 - P_2)$ принимают показание манометра в конце цикла откачки воздуха из колбы.

Выполнение работы

Приборы и материалы : технические весы, набор разновесов, колба с краном, форвакуумный насос, манометр, термометр.

Порядок выполнения работы :

1. Определив точность технических весов, взвешиванием находят массу колбы M_1 при открытом кране (заносим в таблицу 7.1).
2. Откачивают воздух из колбы до минимально возможного давления P_2 , записывают показание манометра в таблицу ($P_м$) и одновременно закрывают кран колбы.
3. Колбу с откаченным воздухом взвешивают и таким образом определяют M_2 (заносят в таблицу 7.1).
4. По комнатному термометру (со шкалой Цельсия) отсчитывают температуру. При проведении вычислений температура переводится в градусы Кельвина.
5. Объем V и относительная ошибка $\Delta V/V$ указаны на чехле колб.

Полученные значения заносят в таблицу 7.1:

Таблица 7.1
Результаты измерений

M_1(кг)	M_2(кг)	$\Delta M_1 = \Delta M_2$	$P_м$(Па)	$\Delta P_м$(Па)	V(м^3)	$\Delta V/V$	$t(^0C)$	$\Delta t(^0C)$

Расчет искомых величин

По полученным данным вычисляют массу моля воздуха по формуле (7.6).

Определив массу моля , вычисляют плотность воздуха ρ применяя формулу :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{P\mu}{RT} \quad . \qquad (7.7)$$

Подставляя вместо P и T величины соответствующие нормальным условиям , т.е. P_0 = 1 атм.=1,013·10^5 Па и T_0 = 273,16 К находят плотность воздуха при нормальных условиях:

$$\rho_0 = \frac{P_0\mu}{RT_0} \quad . \qquad (7.8)$$

Вычисление погрешностей

Относительную погрешность при определении массы моля вычисляют по формуле :

$$E_\mu = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2}{M_1 - M_2} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta P}{P_м} + \frac{\Delta V}{V} \quad . \qquad (7.9)$$

Погрешности ΔM_1 и ΔM_2 , получающиеся при взвешивании берутся равными половине цены наименьшего деления (точности) весов, а погрешности ΔT и ΔP принимаются равными половине цены наименьшего деления термометра и манометра.

Абсолютная погрешность определения массы моля :

$$\Delta\mu = E_\mu\mu \quad . \qquad (7.10)$$

Относительную погрешность при определении плотности воздуха :

$$E_\rho = \frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta P_0}{P_0} + \frac{\Delta\mu}{\mu} + \frac{\Delta T_0}{T_0} \quad . \qquad (7.11)$$

Ввиду того, что P_0 и T_0 не измеряются, а заданы, то $\Delta P_0 = 0$ и $\Delta T_0 = 0$. Поэтому получаем

$$E_\rho = \frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = E_\mu \quad , \qquad (7.12)$$

отсюда

$$\Delta\rho_0 = \rho_0 E_\rho \quad . \qquad (7.13)$$

Окончательный результат :

$$\mu_{воздуха} = \mu \pm \Delta\mu \quad , \tag{7.14}$$

$$\rho_{воздуха} = \rho_0 \pm \Delta\rho_0 \quad . \tag{7.15}$$

Сравнивают полученные результаты с табличными значениями. Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется молем вещества ?
2. Что называется плотностью ? В каких единицах она измеряется ?
3. Записать уравнение состояния идеального газа в форме закона Менделеева-Клайперона .
4. Вывести расчетную формулу для определения массы моля воздуха в данной работе.
5. Как вычислить плотность воздуха при нормальных условиях, зная массу моля ?
6. Что называется давлением ?
7. Вывести формулу для относительных погрешностей определения массы моля воздуха и плотности воздуха при нормальных условиях.

Лабораторная работа № 8

Определение отношения теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме.

Цель работы: Определение опытным путем величины показателя адиабаты для воздуха.

Краткая теория

Удельная теплоемкость- это количество теплоты необходимое для нагревания единицы массы вещества (1 кг) на 1 кельвин.

$$C = \frac{\delta Q}{mdT}\left(\frac{Дж}{кг \cdot К}\right) \quad . \tag{8.1}$$

Удельная теплоемкость газов может принимать различные значения в зависимости от того в каких условиях нагревается газ.

Обычно различают две теплоемкости газов:

C_v – теплоемкость газа при постоянном объеме :

$$C_v = \frac{dU_m}{dT} \quad (8.2)\ ; \quad dU_m = \frac{i}{2} RdT \quad (8.3)\ ; \quad C_v = \frac{i}{2} R \quad (8.4)\ ,$$ где

i – число степеней свободы молекул газа ,

R – универсальная газовая постоянная ,

dU_m – изменение внутренней энергии одного моля газа при повышении его температуры на 1 К.

C_p – теплоемкость газа при постоянном давлении :

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV}{dT} \quad (8.5)\ ; \qquad C_p = \frac{i+2}{2} R \quad (8.6); \qquad C_p = C_v + R \quad (8.7)$$

Уравнение Майера (8.7) показывает , что C_p всегда больше C_v на величину газовой постоянной.

Так как газ при постоянном давлении расширяется от нагревания и совершает некоторую работу против внешних сил, то, следовательно C_p больше C_v и $\frac{C_p}{C_v} > 1$. Это соотношение имеет большое значение при анализе адиабатных процессов, когда отсутствует теплообмен между газом и окружающей средой. При адиабатных процессах для идеального газа справедлив закон Пуассона :

$$PV^{\gamma} = const \ , \qquad (8.8)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \quad . \qquad (8.9)$$

Выполнение работы

Приборы и материалы : стеклянный сосуд с трехходовым краном и водяным манометром (рис 8.1.).

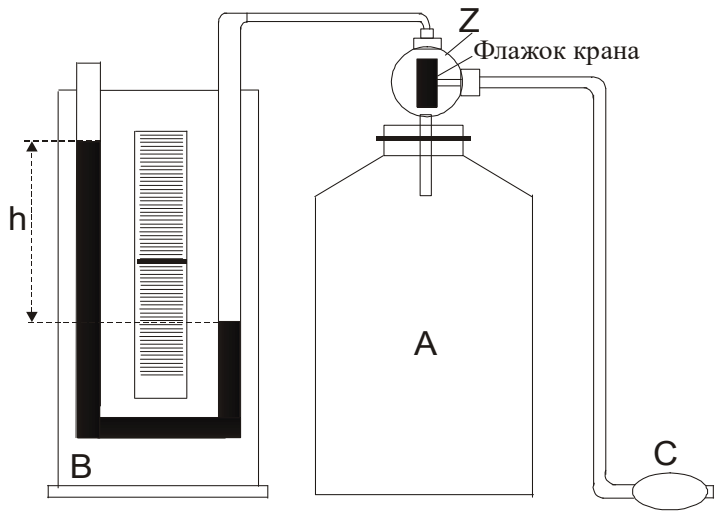


Рис. 8.1. Общий вид установки

Работа с экспериментальной установкой :

Большой стеклянный сосуд А (рис.8.1) соединен трубкой с дифференциальным водяным манометром В для измерения разности давлений (атмосферного и внутри сосуда). Трехходовой кран Z служит для соединения сосуда с нагнетателем (резиновой грушей С), манометром и атмосферой. В последнем случае приходится вынимать втулку крана.

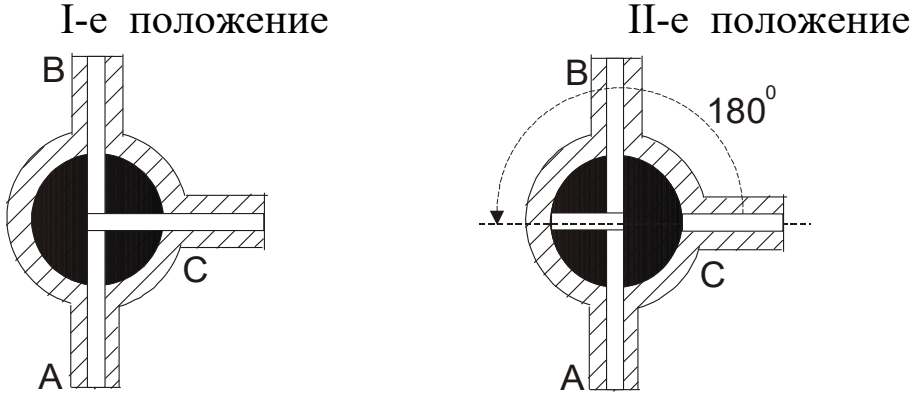


Рис.8.2 Два положения трехходового крана

Флажок крана Z устанавливают в **I - е положение** (рис.8.2) (смотреть с торца крана) и резиновой грушей нагнетают воздух в сосуд пока разность уровней менисков жидкости в трубках манометра не достигнет 15-20 см по шкале.

Затем, поворачивают флажок крана Z на **180^0 градусов (II–е положение** рис.8.2**),** для предотвращения утечек воздуха через клапан нагнетателя .

При нагнетании воздух в сосуде сжимается и его температура повышается. Чтобы температура воздуха внутри сосуда сравнялась с температурой окружающей среды $\mathbf{t_1}$ следует сделать выдержку перед снятием показаний водяного манометра (3-5 минут). При этом устанавливается постоянная разность уровней (h_1) в плечах манометра. Давление газа в сосуде для этого случая равно $H+h_1$, где

H – атмосферное давление. Полученный результат заносят в таблицу 8.2.

Вынув вращающуюся часть крана (втулку) , выпускают воздух до прекращения шипения, после чего немедленно вставляют втулку в прежнее положение (**II-е положение** рис.8.2) .

Во время отсутствия втулки крана давление воздуха в сосуде падает до атмосферного , а его температура понижается до $\mathbf{t_2}$. Понижение температуры объясняется тем, что при адиабатическом расширении воздух совершает работу против атмосферного давления за счет внутренней энергии.

Через 3-5 минут после закрытия крана воздух в сосуде нагреется до температуры окружающей среды $\mathbf{t_1}$, его давление увеличивается , и по шкале манометра можно снять отсчет разности уровней h_2 . Полученный результат заносят в таблицу 8.2.

Рассмотрим состояния находящегося в сосуде воздуха:

1. Перед началом опыта массу находящегося в сосуде воздуха можно представить как m , занимающую объем V_2 (объем сосуда).
2. При нагнетании дополнительного количества воздуха Δm получим $m_{общ.}=m+\Delta m$, тогда на долю m придется только часть (объем V_1) от общего объема сосуда V_2 .
3. При сбросе «дополнительного» воздуха масса m снова займет объем V_2 равный объему сосуда.

Таким образом для массы находящегося в сосуде воздуха имеем три состояния , указанные в таблице 8.1.

Таблица 8.1

Состояния газа во время опыта

Состояния воздуха	Объем	Давление	Температура
До открытия крана	V_1	$H+h_1$	t_1
В момент открытия крана	V_2	H	t_2
После закрытия крана	V_2	$H+h_2$	t_1

Первое и третье состояния воздуха характеризуются одинаковой температурой, и к ним можно применить закон Бойля-Мариотта:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{H+h_2}{H+h_1} \quad . \qquad (8.10)$$

Переход из первого состояния во второе происходит адиабатически, поэтому здесь следует применить закон Пуассона :

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{H}{H+h_1} \quad , \qquad (8.11)$$

где γ - искомое отношение теплоемкостей $\frac{C_p}{C_V}$.

Возведя обе части равенства (8.10) в степень γ, имеем :

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{H+h_2}{H+h_1}\right)^{\gamma} \quad . \qquad (8.12)$$

Сопоставляя равенства (8.11) и (8.12) , можно написать :

$$\frac{H}{H+h_1} = \left(\frac{H+h_2}{H+h_1}\right)^{\gamma} \quad . \qquad (8.13)$$

Отсюда после логарифмирования находим :

$$\gamma = \frac{\ln(H+h_1) - \ln H}{\ln(H+h_1) - \ln(H+h_2)} \quad . \qquad (8.14)$$

Так как

$$\ln(H+h_1) = \ln H + \ln(1+\frac{h_1}{H}) \quad , \qquad (8.15)$$

$$\ln(H+h_2) = \ln H + \ln(1+\frac{h_2}{H}) \quad . \qquad (8.16)$$

а $\frac{h_1}{H} << 1$ и $\frac{h_2}{H} << 1$, то разлогая логарифмы в ряд по $\frac{h_1}{H}$ и $\frac{h_2}{H}$, получим расчетную формулу

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad . \qquad (8.17)$$

Таким образом работа сводится к измерению h_1 и h_2 . При этом необходимо следить, чтобы не было утечки воздуха из сосуда.

Опыт проводят не менее пяти раз, результаты изменений и расчетов записывают в таблицу 8.2.

Таблица 8.2.
Результаты измерений

	h_1 , *см*	h_2 , *см*	γ	$\Delta\gamma$
1. *2.* *3.* *4.* *5.*				
Средние значения			$\bar{\gamma} =$	$\overline{\Delta\gamma} =$

Вычисление погрешностей

Абсолютная погрешность $\overline{\Delta\gamma}$ определяют так, как это делается при многократном измерении величин. Затем определяют среднюю относительную погрешность результата.

Относительная погрешность :

$$E_\gamma = \frac{\overline{\Delta\gamma}}{\overline{\gamma}} \quad . \qquad (8.18)$$

Окончательный результат :

$$\gamma = \overline{\gamma} \pm \overline{\Delta\gamma} \quad . \qquad (8.19)$$

Полученный результат сравнивают с табличным значением.

Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое молярная теплоемкость газа, в каких единицах она измеряется ?
2. Написать соотношение между удельной и молярной теплоемкостями.
3. Какая из теплоемкостей C_p или C_v больше и почему ?
4. Написать соотношение между C_p , C_v и R .
5. Чем характерны изотермический и адиабатический процессы ?
6. Указать , в какие моменты работы происходит адиабатический и изохорический процессы.
7. Рассказать порядок выполнения работы.
8. Вывести расчетную формулу для вычисления γ.
9. На каком основании при получении расчетной формулы (8.17) для γ логарифмы чисел заменяются самими числами ?
10. Как вычисляется относительная погрешность искомой величины в данной работе ?

Лабораторная работа № 9

Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости методом отрыва кольца.

Цель работы : опытным путем определить значение коэффициента поверхностного натяжения воды.

Краткая теория

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы взаимного притяжения, быстро убывающие с расстоянием. Силы притяжения между молекулами имеют электрическое происхождение и действуют на очень малых расстояниях (порядка 10^{-9} м) , это расстояние называется радиусом молекулярного действия (r) , а сфера радиусом r – сферой молекулярного действия .

Выделим внутри жидкости какую-либо молекулу A и проведем вокруг нее сферу радиуса r (рис.9.1). Если сфера молекулярного действия молекулы A целиком находится внутри жидкости, то силы с которыми действуют все молекулы , находящиеся внутри жидкости на молекулу A направлены в разные стороны и скомпенсированы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул , равна нулю.

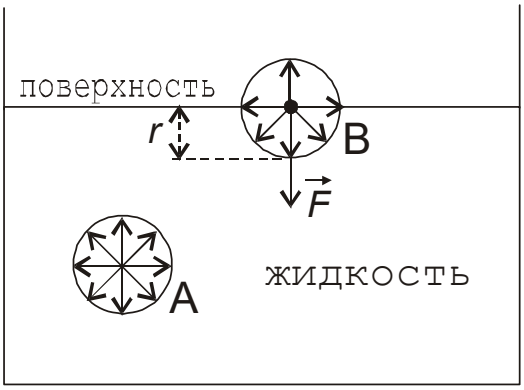


Рис.9.1 Силы , действующие на молекулу жидкости

Иначе происходит, если молекула B расположена на поверхности жидкости. В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично располагается внутри жидкости. Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сила, приложенная к каждой молекуле поверхностного слоя , не равна

нулю и направлена внутрь жидкости. Таким образом , результирующие силы притяжения всех молекул поверхностного слоя толщиной r (радиус молекулярного действия) оказывают на жидкость давление, называемое молекулярным (или внутренним). Взаимное притяжение молекул, расположенных в поверхностном слое, создает силу, направленную по касательной к поверхности жидкости, которая стремится максимально уменьшить площадь поверхностного слоя. Эту силу называют силой поверхностного натяжения.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил под действием силы поверхностного натяжения будет принимать такую форму , чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, то есть форму шара (сферы). Наблюдая мельчайшие капельки, взвешенные в воздухе, можно видеть что они действительно имеют форму шариков, но несколько искаженную из-за действия силы земного тяготения. В условиях невесомости капля любой жидкости имеет сферическую форму.

Поверхностное натяжение характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения (α), который численно равен силе, действующей на единицу длинны линии, произвольно проведенной по поверхности жидкости и перпендикулярной этой линии. Из определения следует, что единицей измерения коэффициента поверхностного натяжения будет $\frac{Ньютон}{метр}$ ($\frac{Н}{м}$).

В данной работе коэффициент поверхностного натяжения находится путем измерения силы (F) , необходимой для отрыва кольца от поверхности воды. Сила F равна силе поверхностного натяжения , действующей по линии разрыва поверхностной пленки при отрыве кольца. Разрыв поверхностной пленки воды происходит по двум окружностям кольца – внешней и внутренней. Общая длина линии разрыва при этом равна $(2\pi R_1 + 2\pi R_2) = \pi(D_1 + D_2)$, где D_1- внешний, D_2- внутренний диаметры кольца. Коэффициент поверхностного натяжения в данном случае рассчитывается по формуле :

$$\alpha = \frac{F}{\pi(D_1 + D_2)} \quad . \qquad (9.1)$$

Коэффициент поверхностного натяжения для дистиллированной воды при нормальных условиях равен 0,073 Н/м . С повышением температуры поверхностное натяжение уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости. Из-за увеличения их скоростей движения при $T=T_{кипения}$ величина коэффициента поверхностного натяжения равна 0. Величина поверхностного натяжение сильно зависит от примесей, присутствующих в жидкостях. Примеси (вещества), ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются поверхностно-активными. Наиболее известными поверхностно-активными веществами для воды являются мыло, спирты, эфиры и др.

Существует и другая группа веществ – повышающих поверхностное натяжение жидкости – это сахар, различные соли. Силы взаимодействия молекул этих веществ с молекулами воды больше, чем между собственно молекулами воды. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренном производстве этот процесс называется «высаливанием » мыла.

Выполнение работы

Приборы и материалы : экспериментальная установка, набор разновесов, штангенциркуль, фильтровальная бумага.

Работа выполняется на установке, схематически изображенной на рис.9.2, которая состоит из штатива с сообщающимися сосудами , соединенных трубкой с зажимом

(*З*), динамометра (пружины) (*П*); за пружиной укреплена зеркальная шкала. К пружине крепится оптическое устройство (указатель) - тонкий диск (*Д*), выполняющий роль стрелки – указателя растяжения пружины. К пружине подвешивается кольцо (*К*), которое имеет сверху площадку для нагружения разновесами.

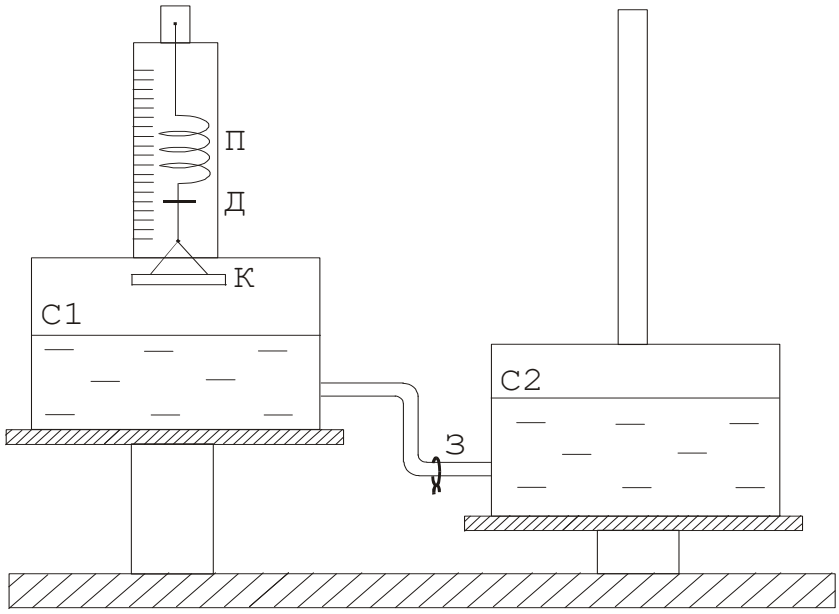


Рис.9.2 Схема установки

Порядок выполнение работы:

1. Подвешивают кольцо за дужку к пружине так, чтобы нижняя плоскость кольца была параллельна поверхности воды в сосуде, но не касалась воды. По указателю Д берут отсчет на зеркальной шкале (n_0) (начало отсчета при дальнейших измерениях). Указание : при отсчете на диск надо смотреть с торца, чтобы на зеркальной шкале его изображение было в виде линии (для снижения погрешности измерений).
2. При закрытом зажиме сосуд C_2 поднимают по штативу выше сосуда C_1. Открывают зажим. В момент, когда поверхность жидкости в сосуде C_1 коснется кольца, зажимом пережимают трубку.
3. Опускают сосуд C_2 немного ниже сосуда C_1 , так чтобы вода могла переливаться в сосуд C_2. Открывают зажим. Вытекающая вода, увлекая за собой кольцо, растянет пружину динамометра.
4. В момент **полного** отрыва кольца от поверхности воды берут отсчет n (число делений) по шкале. Вычисляют величину растяжения пружины как $(n – n_0)$.

5. Результаты измерений n , n_0 , $(n – n_0)$ заносят в таблицу 9.1. Этот опыт повторяют еще 4 раза и заносят полученные данные в таблицу, по ним рассчитывают среднее значение измеряемой величины $<(n – n_0)>$ и среднее значение абсолютной погрешности измерений $<\Delta(n – n_0)>$.

Примечание : в начале каждого опыта кольцо осушать фильтровальной бумагой для устранения влияния капелек воды на вес кольца.

6. Определяют величину силы растяжения пружины в момент отрыва кольца от поверхности воды. Для этого «растягивают» пружину динамометра на величину среднего значения $<(n – n_0)>$, путем нагружения разновесами кольца
(выкладыванием разновесов на площадку кольца). Общий вес разновесов будет равен силе поверхностного натяжения, которую рассчитывают по формуле :

$$F=mg \ , \qquad (9.2)$$

где m – масса гирек (кг)

g - ускорение свободного падения ($g = 9{,}81$ м/с^2)

7. Измеряют штангенциркулем , поворачивая кольцо, 5 раз внешний (D_1) и внутренний (D_2) диаметры кольца. Результаты измерений заносят в таблицу 9.1. Рассчитывают средние значения и погрешности.

8. Коэффициент поверхностного натяжения (α) рассчитывают по формуле (9.1).

Таблица 9.1
Результаты измерений

Растяжение пружины , мм				*Диаметры кольца , мм*			
n	n_0	$n – n_0$	$\Delta(n – n_0)$	D_1	ΔD_1	D_2	ΔD_2
Средние значения		$\overline{n-n_0}=$	$\Delta\,\overline{n-n_0}=$	$\overline{D_1}=$	$\Delta\,\overline{D_1}=$	$\overline{D_2}=$	$\Delta\,\overline{D_2}=$
$F = P$; *Общий вес разновесок* $P = mg=$							

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность измерения коэффициента поверхностного натяжения :

$$E_\alpha = \frac{\overline{\Delta\alpha}}{\overline{\alpha}} = \frac{\overline{\Delta(n-n_0)}}{\overline{n-n_0}} + \frac{\overline{\Delta D_1} + \overline{\Delta D_2}}{\overline{D_1} + \overline{D_2}} \quad . \qquad (9.3)$$

Средняя абсолютная погрешность :

$$\overline{\Delta\alpha} = E_\alpha \times \overline{\alpha} \quad . \qquad (9.4)$$

Окончательный результат :

$$\alpha = \overline{\alpha} \pm \overline{\Delta\alpha} \quad . \qquad (9.5)$$

Сравнивают значение полученного коэффициента поверхностного натяжения с табличным значением (коэффициент поверхностного натяжения для дистиллированной воды при нормальных условиях равен 0,073 Н/м) , анализируют причины отклонений, если таковые имеются.

Записывают выводы.

Контрольные вопросы.

1. Что называется коэффициентом поверхностного натяжения ? В каких единицах он измеряется ?
2. Как возникает и как направлена сила поверхностного натяжения ?
3. Объяснить метод определения коэффициента поверхностного натяжения используемый в данной работе.
4. Какие силы действуют на кольцо при его отрыве от поверхности жидкости? В какой момент кольцо отрывается от жидкости ?
5. Вывести формулу для относительной погрешности измерения E_α .

Лабораторная работа № 10

Определение коэффициента динамической вязкости жидкости по методу Стокса

Цель работы: изучение явления внутреннего трения в жидкостях , определения динамической вязкости жидкости.

Краткая теория

Отличительной особенностью газов и жидкостей является их текучесть, которая обусловлена малыми силами трения при относительном движении соприкасающихся слоев .

Внутренним трением (вязкостью) называется явление возникновения сил, препятствующих относительному перемещению слоев жидкости либо газа. Силы внутреннего трения направлены вдоль соприкасающихся слоев. Их величина зависит от относительных скоростей слоев.

Причиной возникновения внутреннего трения в жидкостях (газах) является перенос молекулами жидкости импульсов между соприкасающимися слоями. Когда соседние слои жидкости двигаются с различными скоростями переход молекул из одного слоя в другой приводит к замедлению слоя движущегося быстрее и увеличению скорости слоя , двигающегося медленнее (рис.10.1).

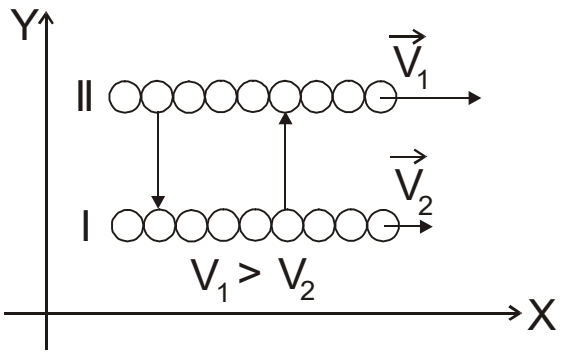


Рис.10.1. Схема движения слоев жидкости

Очевидно, что сила трения для верхнего слоя будет направлена влево (против $\vec{V}_1$) , а для нижнего слоя вправо (по $\vec{V}_2$).

Аналогично объясняется механизм внутреннего трения в газах.

Для поддержания течения вязкой жидкости работа сил давления должна превышать работу сил внутреннего трения.

Рассмотрим механизм возникновения вязкости на примере.

Представим две плоскости, поверхности которых смачиваются жидкостью, причем 1-ая поверхность – подвижная , 2-ая – неподвижная (рис.10.2)

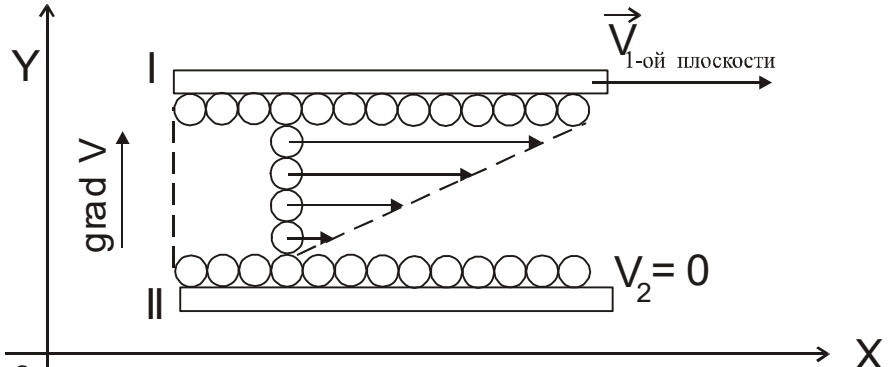


Рис.10.2. Диаграмма скоростей слоев жидкости

Молекулы, соприкасающиеся с подвижной плоскостью будут иметь $\vec{V} = \vec{V}_{1пл.}$, а соприкасающиеся с неподвижной плоскостью $\vec{V} = \vec{V}_2 = 0$. Следовательно поле скоростей слоев можно представить в виде (рис.10.2) .

Градиент скорости будет направлен перпендикулярно 1-ой плоскости в сторону возрастания функции.

Очевидно, что сила внутреннего трения тем больше, чем больше площади рассматриваемых поверхностей S .

Величина $gradV$ показывает изменение скорости , которое приходится на единицу расстояния , отсчитываемого перпендикулярно скорости (того как быстро изменяется величина скорости $\vec{V}$ от слоя к слою) :

$$gradV = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x \quad . \qquad (10.1)$$

Опытным путем Стокс установил , что при ламинарном течении жидкости модуль силы внутреннего трения (вязкости):

$$F = \eta \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \cdot S \quad , \qquad (10.2)$$

где η - динамическая вязкость (коэффициент зависящий от природы жидкости)

$\frac{\partial V}{\partial y}$ - градиент скорости слоев.

При ламинарном режиме и градиенте скорости с модулем 1 м/сек на 1 м. , возникает сила внутреннего трения 1Н на 1 м^2 поверхности касания слоев , следовательно размерность величины η определяется как : $\left[\frac{Н \cdot сек}{м^2}\right] = [Па \cdot сек]$.

Величина вязкости зависит от температуры. Для жидкостей с увеличением температуры вязкость уменьшается (в технике это приводит к ухудшению качества смазки трущихся поверхностей). Для газов с повышением температуры вязкость увеличивается.

В данной работе для определения вязкости используется метод Стокса. Этот метод основан на измерении скорости движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

Пусть небольшой шарик радиусом *r* падает в жидкости. На шарик , падающий в жидкости действуют три силы :

1. Сила тяжести : $F_m = mg = \rho_ш \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g$, где

$\rho_ш$ - плотность шарика;

$g = 9{,}81 \frac{м}{с^2}$ - ускорение свободного падения .

2. Сила Архимеда : $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж g$, где

$\rho_ж$ - плотность жидкости ;

3. Сила сопротивления , эмпирически установленная Стоксом : $F_C = 6\pi\eta r V$, где V – скорость шарика .

На участке равномерного движения шарика : $\vec{F}_m + \vec{F}_A + \vec{F}_C = 0$, $F_m = F_A + F_C$ или $F_m - F_A = F_C$ т.е.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_ш - \rho_ж) g = 6\pi\eta r V , \qquad (10.3)$$

находим коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho_ш - \rho_ж)}{V} \cdot r^2 g . \qquad (10.4)$$

Если заменить в формуле (10.4) значение скорости V через $\frac{L}{t}$ (путь деленный на время падения) , а радиус шарика *r* через половину его диаметра $\frac{d}{2}$, то формула примет вид:

$$\eta = \frac{d^2 (\rho_ш - \rho_ж)}{18L} gt , \qquad (10.5)$$

где d – диаметр шарика ;

L – длина участка равномерного падения шарика ;

t – время прохождения шариком мерного участка .

Очевидно, что для определения коэффициента вязкости жидкости необходимо на опыте определить значения величин, входящих в формулу (10.5) .

Выполнение работы

Приборы и материалы: цилиндрический сосуд с вязкой жидкостью, шарики, весы с разновесами, микрометр, секундомер, ареометр, термометр, линейка.

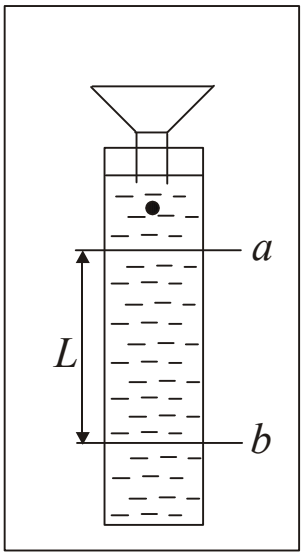


Рис.10.3. Схема установки

Цилиндрический сосуд с исследуемой жидкостью (касторовое масло, глицерин) прикреплен к деревянному штативу (рис.10.3). Сосуд закрыт крышкой, в которую вставлена воронка, служащая для направления движения шарика по оси цилиндра. На штативе нанесены метки «*a*» и «*b*» на расстоянии *L* друг от друга.

Порядок выполнения работы

1. Взять 5 стальных шариков. Измерить микрометром диаметр каждого шарика. Общую массу шариков определяют путём взвешивания. Вычисляют их плотность по формуле:

$$\rho_{ш} = \frac{\sum m}{\frac{1}{6}\left(\pi \sum d^3\right)}, \qquad (10.6)$$

где $\sum d^3 = 5 \cdot \left(\overline{d}\right)^3$

$\overline{d}$ - средний диаметр шариков;

Σm - масса пяти шариков, определяемая на весах.

2. Определяют ареометром плотность $\rho_{ж}$ исследуемой жидкости, находящейся в мензурке, которая наполнена той же жидкостью , что и сосуд Стокса. При этом следят, чтобы ареометр находился на оси сосуда, а не вблизи его стенок .

3. Длину пройденного шариком пути L между метками «a» и «b» измеряют линейкой.
4. Измеряют время падения шариков на пути L. Для этого опускают в цилиндр с жидкостью, через воронку, шарик и в момент прохождения его через метку «a» включают секундомер. В момент прохождения шарика метки «b» секундомер останавливают. Показания секундомера соответствуют времени t движения шарика по пути L. Скорость шарика значительна, поэтому подготовиться к наблюдениям необходимо тщательно, чтобы не упустить момент прохождения шарика через метки.
5. Температуру окружающей среды определяют по термометру. Данные всех измерений записывают в таблицу 10.1.

Таблица 10.1
Результаты измерений

$\sum m$	$\Delta\left(\sum m\right)$	$\rho_ш$	$\Delta\rho_ш$	$\rho_ж$	$\Delta\rho_ж$	L	ΔL	d	Δd	t	Δt
кг		*кг/м³*				*м*				*с*	
Температура жидкости								$\bar{d}=$	$\Delta\bar{d}=$	$\bar{t}=$	$\Delta\bar{t}=$

6. Коэффициент вязкости вычисляют по формуле (10.5), подстановкой средних значений измеренных величин.

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность измерений плотности шариков:

$$E_{\rho_ш}=\frac{\overline{\Delta\rho_ш}}{\overline{\rho_ш}}=\frac{\Delta\sum m}{\sum m}+3\cdot\frac{\overline{\Delta d}}{\bar{d}}. \qquad (10.7)$$

Абсолютная погрешность измерений плотности шариков :

$$\overline{\Delta\rho_ш}=E_{\rho_ш}\cdot\overline{\rho_ш}. \qquad (10.8)$$

Относительная погрешность при расчете коэффициента вязкости:

$$E_\eta = \frac{\overline{\Delta\eta}}{\bar{\eta}} = 2\frac{\overline{\Delta d}}{\bar{d}} + \frac{\overline{\Delta\rho_ш} + \overline{\Delta\rho_ж}}{\overline{\rho_ш} - \overline{\rho_ж}} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\overline{\Delta t}}{\bar{t}} \quad . \qquad (10.9)$$

Абсолютная погрешность вычисления коэффициента вязкости :

$$\overline{\Delta\eta} = E_\eta \cdot \bar{\eta} \ . \qquad (10.10)$$

Окончательный результат

$$\eta = \bar{\eta} \pm \overline{\Delta\eta} \ . \qquad (10.11)$$

Результат сравнивают с табличным значением.
Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется вязкостью?
2. Как возникает сила внутреннего трения в жидкости?
3. Дайте определение коэффициенту вязкости, в каких единицах он измеряется.
4. В чём сущность метода Стокса ?
5. Какие силы действуют на шарик, падающий в жидкости?
6. Как изменяется с температурой коэффициент вязкости?
7. Как определяется плотность шариков и плотность жидкости?
8. Вывести расчётную формулу для вычисления вязкости.
9. Выведите формулу для определения относительной погрешности измерения коэффициента вязкости.

Литература

1.Трофимова Т.И., курс физики. – 22-е изд., стер. –Издательский центр «Академия»: , 2016.-568 с.: ИЛ.

2. Никеров В.А., Физика. Современный курс, изд.Дашков и К°, 2016.-452 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.01
ИЗУЧЕНИЕ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Цель работы

Целью данной работы является ознакомление с принципами действия и правилами эксплуатации электронных контрольно-измерительных приборов, используемых в лабораторных работах по разделам курса физики “Электричество и магнетизм”, “Колебания и волны”.

1. Цифровой универсальный измерительный прибор В7-16А

(вольтметр универсальный).

1.1. **Назначение**. Вольтметр универсальный В7-16А предназначен для измерения напряжений постоянного и переменного токов и активного сопротивления цепи.

1.2. **Расположение органов управления и их назначение**. Все основные органы управления и присоединения расположены на передней панели и обозначены графическими символами. Общий вид прибора приведен на рис.1. Показания прибора высвечиваются на табло (1).

Переключатель “**РОД РАБОТЫ**” (2) осуществляет взаимное соединение функциональных узлов прибора, обеспечивая измерение либо напряжений, либо сопротивлений.

Переключателем “**ПРЕДЕЛ ИЗМЕРЕНИЯ**” (3) производится выбор предела измерения напряжения постоянного, переменного токов и активного сопротивления.

Гнездо “ ⊐ ≃ **100 VR** ” (6) используется при измерении напряжения до 100 В и активного сопротивления.

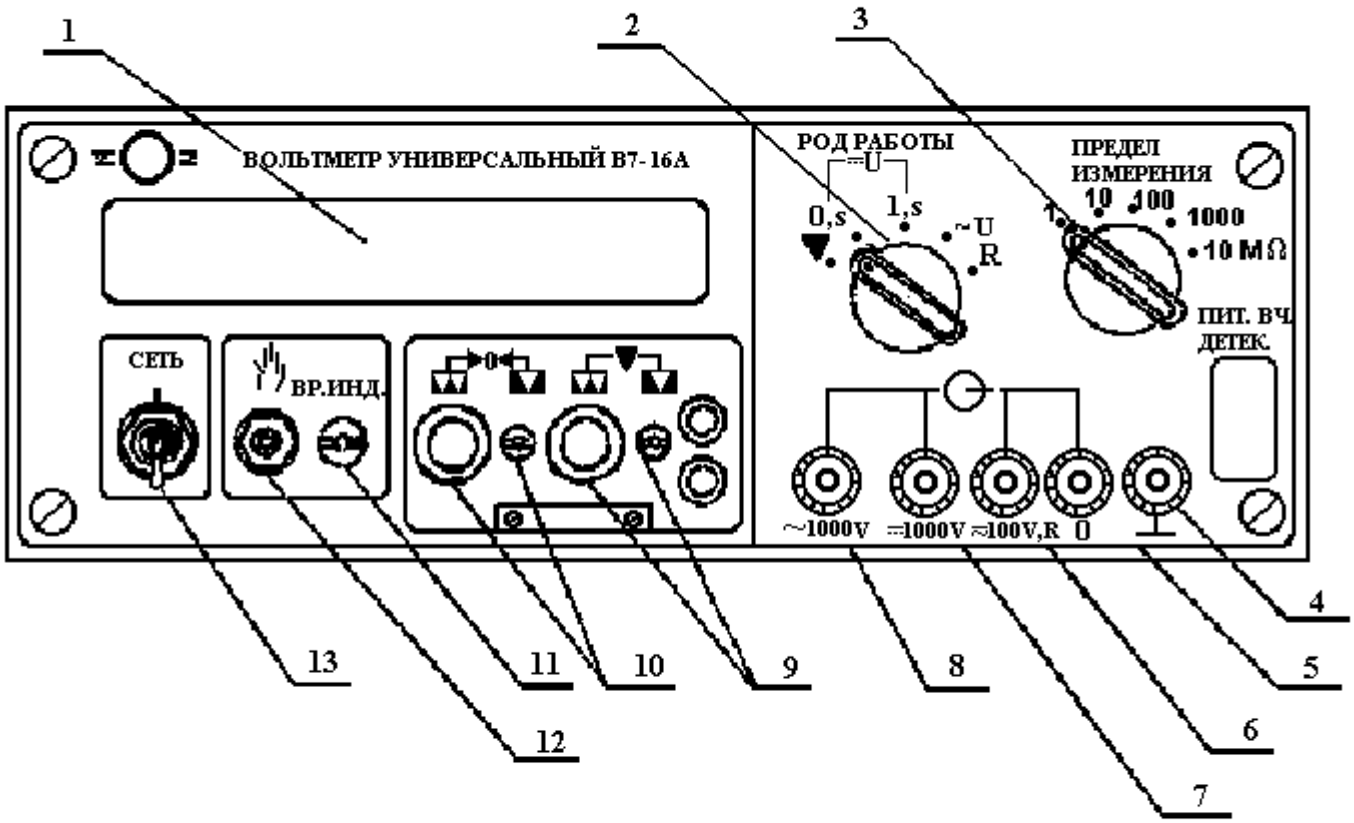

1
2
3
ВОЛЬТМЕТР УНИВЕРСАЛЬНЫЙ В7-16А
РОД РАБОТЫ
=U
0,s
1,s
~U
R
ПРЕДЕЛ
ИЗМЕРЕНИЯ
10
100
1000
10 МΩ
ПИТ. ВЧ
ДЕТЕК.
СЕТЬ
ВР.ИНД.
0
~1000V
=1000V
≈100V,R
0
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Рис. 1

Гнезда “ ⇥ =1000 V” (7), “ ⇥ ~1000 V” (8) используются при измерении напряжений постоянного и переменного тока от 100 до 1000 В соответственно.

Регулировочные элементы: потенциометры “ ▼ ” (калибровка) (9) и “ →0← ” (установка нуля) (10) служат для калибровки и установки нуля вольтметра.
Гнездо “**0**” (5) – общий вход при измерениях.

Гнездо “ ⏚ ” (4), соединенное с корпусом вольтметра, используется для заземления прибора.

Кнопка (ручной пуск) (12) служит для ручного запуска вольтметра.
1.3. **Подготовка вольтметра к работе**. Включите прибор в сеть переменного тока напряжением 220 В, установив тумблер “**Сеть**” (13) в верхнее положение. При этом должно индицироваться табло.
Прогрейте вольтметр не менее 5 минут.
Установите потенциометр “**ВР.ИНД**” (11) в положение, обеспечивающее удобное время индикации.
Установите переключатель “**РОД РАБОТЫ**” в положение “**U-0S**”, а переключатель “**ПРЕДЕЛ ИЗМЕРЕНИЯ**” – в положение 1. Закоротите гнезда “**0**” и вход “

≃ 100 VR ” и регулятором “ →0← ” установите на индикаторном табло показания **0000** с равновесным изменением знака полярности.
1.4. **Порядок работы с прибором**
1.4.1. **Измерение напряжения постоянного тока**. Для измерения напряжения постоянного тока необходимо установить переключатель “**ПРЕДЕЛ ИЗМЕРЕНИЯ**” в положение, соответствующее величине измеряемого напряжения. Если его величина неизвестна, то переключатель устанавливается на максимальный предел измерения.
Переключатель “**РОД РАБОТЫ**” нужно перевести в положение “**U-1S**”.
С помощью соединительных кабелей измеряемое напряжение подается в зависимости от его величины на соответствующее гнездо.
1.4.2. **Измерение напряжения переменного тока**. Порядок работы такой же, как и при измерении напряжения постоянного тока, за исключением того, что переключатель “**РОД РАБОТЫ**” необходимо установить в положение “**~U**”, соответствующее частоте измеряемого напряжения 20 Гц – 100 кГц.
1.4.3. **Измерение активного сопротивления**. Для измерения активного сопротивления переключатель “**РОД РАБОТЫ**” необходимо установить в положение “**R**”, а переключатель “**ПРЕДЕЛ ИЗМЕРЕНИЯ**” – в положение, соответствующее величине измеряемого сопротивления с минимальной погрешностью.
Измеряемое сопротивление с помощью соединительных кабелей подключается к гнездам “**0**” и ⇥ ≃ 100 VR ”. Производится отсчет показаний, погрешность измерения равна единице в последнем разряде на табло прибора. Отсчет производите не менее, чем через 10 с от момента подсоединения сопротивления.

2. Генератор сигналов типа Л 31

2.1. **Назначение прибора**. Генератор Л31 формирует (генерирует) сигналы напряжения прямоугольной, треугольной и синусоидальной формы.
2.2. **Основные органы управления и их назначение**.
“**СЕТЬ**” – служит для включения и выключения генератора.
“**УРОВЕНЬ**” – для плавной регулировки уровня выходного напряжения.
“**ЧАСТОТА**” – для установки частоты выходного сигнала.
Кнопки **1**, **10**, **100**, **100**, **0.5**, объединенные надписью “**ДЕЛИТЕЛЬ**”, служат для ослабления выходного сигнала.

Кнопки  , объединенные надписью “**РОД РАБОТ**”, служат для выбора формы выходного сигнала.
Кнопки **0.01**, **0.1**, **1**, **10**, **100**, “**МГц**”, объединенные надписью “**МНОЖИТЕЛЬ**”, служат для выбора поддиапазона частоты выходного сигнала.
На выходе генератора (гнездо “**10V500Ω**”) формируются сигналы треугольной формы с плавной регулировкой уровня от нуля до 10 В, прямоугольной – до 7,5 В, синусоидальной – до 4,5 В. Выходное сопротивление генератора 500 Ом.
2.3. **Порядок работы с генератором – источником периодических колебаний**.
Прибор включают в сеть и прогревают в течение 2 – 3 минуты.
Выбор формы выходного сигнала производится нажатием соответствующей кнопки переключателя “**РОД РАБОТ**”; установку частоты производится с помощью переключателя “**МНОЖИТЕЛЬ**” и регулятора “**ЧАСТОТА**”; установка величины выходного сигнала осуществляется с помощью переключателя “**ДЕЛИТЕЛЬ**” и регулятора “**УРОВЕНЬ**”.

3. Осциллограф универсальный С1-83

3.1. **Назначение**. Осциллограф универсальный С1-83 предназначен для визуального наблюдения и исследования электрических сигналов. С помощью осциллографа можно измерять параметры сигналов. На экране прибора можно наблюдать: *а*) изображения одного или одновременно двух сигналов как функций времени (режим работы с внутренней разверткой); *б*) результат сложения двух взаимно перпендикулярных сигналов (в режиме **X**–**Y**, являющемся режимом изображения функциональной зависимости между сигналами). Осциллограф позволяет определять параметры сигналов: амплитуду, частоту, период.
3.2. **Основные органы управления и их назначение**. Общий вид передней панели прибора приведен на рис. 2.
К органам управления ЭЛТ (электроннолучевой трубки) относятся регуляторы, изменяющие яркость изображения () (1), четкость или фокус изображения () (2) и астигматизм луча (3).
Исследуемый сигнал подается на одно из () высокочастотных гнезд “**1M 35 pF**” (8,9) или одновременно на оба гнезда.
К органам управления тракта вертикального отклонения относятся:
а) переключатели “**V/дел**” (4,5), устанавливающие калиброванные коэффициенты отклонения (усиления) каналов I и II;
б) потенциометры (ручки) (6,7), регулирующие положение лучей обоих каналов по вертикали;
в) переключатели изменения усиления сигналов в 10 раз. Эти переключатели совмещены с ручками (6,7). Отжатое состояние (**×1**) этих ручек соответствует коэффициенту усиления равному 1. При этом цена большого деления шкалы на экране осциллографа определяется положением переключателей (4,5) соответствующего канала. В нажатом положении (**×10**) цена деления шкалы на экране осциллографа получается умножением на 10 соответствующего показания переключателей (4,5);
г) переключатели режима работы входов усилителя (10,11) могут находиться в трех положениях:

 – на вход усилителя исследуемый сигнал поступает через разделительный конденсатор (закрытый вход),

 – исследуемый сигнал поступает с постоянной составляющей

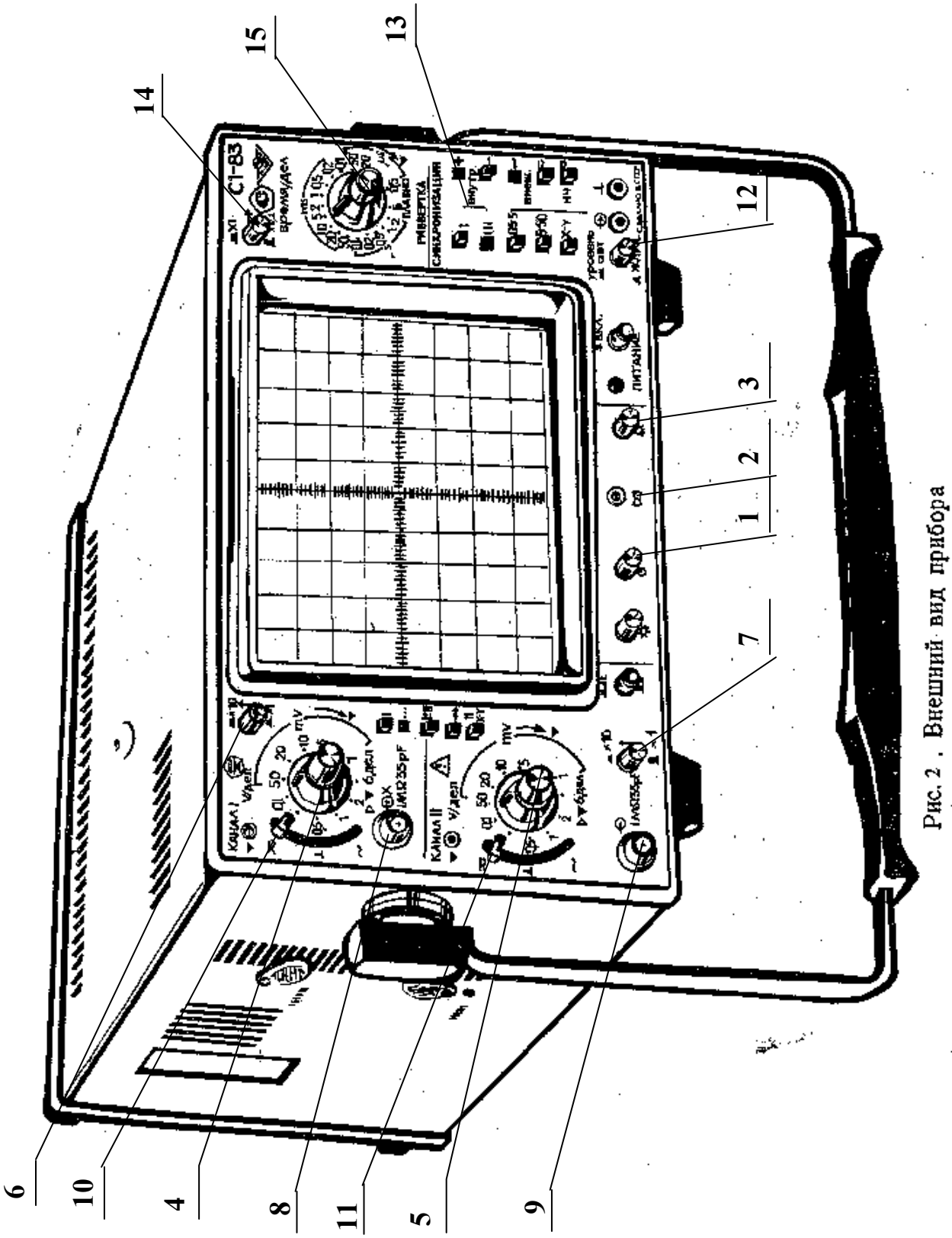


Рис. 2 . Внешний вид прибора

(открытый вход),

⊥ – вход усилителя подключен к корпусу. При этом сигнал, подаваемый на соответствующий канал, на экране не наблюдается.

д) переключатели режима работы усилителей (кнопки **I**, **II**, **I+II**, **→→, . . .**, **X–Y**). При нажатой кнопке **I** или **II** на экране будет наблюдаться сигнал соответственно **I** или **II** каналов. При нажатой кнопке **I+II** на экране наблюдается алгебраическая сумма сигналов **I** и **II** каналов, причем развертка обоих каналов происходит по горизонтальной оси. В режимах **→→,** и **. . .** возможно одновременное наблюдение сигналов обоих каналов. Развертка обоих каналов происходит по горизонтальной оси. В режиме **X-Y** можно наблюдать изображение функциональных зависимостей между сигналами. При этом развертка сигнала **I** канала осуществляется по оси **X**, а развертка сигнала **II** канала – по оси **Y**.

К органам управления синхронизацией относятся: потенциометр "**УРОВЕНЬ**" (12), с помощью которого задается уровень, при котором происходит запуск развертки; кнопок "**ВНУТР**" **I** (развертка синхронизируется сигналом только I канала) и "**ВНУТР**" **I,II** (13) (развертка синхронизируется сигналов обоих каналов или одного канала).

К органам управления разверткой относятся:

– потенциометр (ручка) ↔ (15), обеспечивающий перемещение луча ЭЛТ по горизонтали;

– переключатели "**ВРЕМЯ/ДЕЛ**" (14), осуществляющие ступенчатое изменение скорости развертки и ручки плавного регулирования. При этом цена большого деления по горизонтальной оси соответствует положению переключателя скорости развертки. Ручка плавного регулирования должна быть при этом установлена в крайнее правое положение.

3.3. **Порядок работы (проведение измерений) с осциллографом**. Для проведения измерений параметров сигнала нужно выполнить следующие операции:

– подать с помощью соединительного кабеля сигнал на гнездо " ⊐ **1M 35 pF"**, желательно, первого канала;

– установить переключатель режима работы коммутатора на требуемый канал (нажать кнопку **I** при подаче сигнала на вход первого канала или **II** для второго канала);

– ручки плавной регулировки усиления и скорости развертки должны быть установлены в крайнее правое положение;

– поставить переключатели "**V/дел**", и "**×1"** и "**×10"** в такое положение, чтобы амплитуда изображенного сигнала составила больше половины шкалы (переключатель входов должен быть в положении ⎓ или ∼);

– ручкой "**УРОВЕНЬ**" добиться устойчивого изображения в режиме внутренней синхронизации;

– поставить переключатель "**ВРЕМЯ/ДЕЛ**" в положение, при котором наблюдается несколько периодов исследуемого сигнала;

Для удобства измерения параметров исследуемого сигнала рекомендуется установить ручку "↕" вертикального смещения так, чтобы минимальный уровень сигнала совпадал с одной из нижних линий, а максимальный находился в пределах экрана. Ручкой "↔" горизонтального перемещения нужно сместить изображение таким образом, чтобы один из верхних пиков находился на вертикальной средней линии шкалы.

После выполнения вышеуказанных процедур можно оценить полный размах сигнала и его временные параметры, в частности период. Для этого необходимо умножить расстояние, измеренное в больших делениях шкалы на ЭЛТ, на соответствующие показания переключателей аттенюатора "**V/ДЕЛ**" и "**×1**" и "**×10**" или развертки "**ВРЕМЯ/ДЕЛ**".

Для изображения функциональных зависимостей между двумя сигналами (кривой намагничивания, фигур Лиссажу) необходимо установить переключатели режима работы

усилителей и канала синхронизации в положение “**X-Y**”. В таком режиме работы осциллографа цена деления шкалы ЭЛТ по оси **X** определяется положением переключателя аттенюатора “**V/дел**” I-го канала, а по оси **Y** – второго канала.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Расскажите о назначении универсального измерительного прибора В7-16А.
2. Укажите органы управления прибором В7-16А и расскажите о их назначении.
3. Расскажите о назначении генератора сигналов Л 31.
4. Укажите органы управления генератора сигналов Л 31 и расскажите о их назначении.
5. Расскажите о назначении осциллографа универсального С1-83.
6. Опишите функциональную схему осциллографа С1-83.
7. Укажите органы управления осциллографа С1-83 и расскажите о их назначении.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.02

НАБЛЮДЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ И ИЗМЕРЕНИЕ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

1. Измерение параметров периодического колебания

1.1. Цель работы

Целью работы является изучение способа измерения амплитуды $\boldsymbol{U_0}$, периода $\boldsymbol{T}$, частоты $\boldsymbol{f}$ и величины эффективного напряжения $U_{эфф}$ электрического гармонического колебания источника сигналов (генератора) Л 31 с помощью электронного осциллографа С1-83 и универсального вольтметра В7-16А, а также оценки максимального размаха пилообразного, прямоугольного и синусоидального напряжений, снимаемых с генератора Л 31 в зависимости от частоты.

1.2. Выполнение работы

Необходимые приборы и их совместное подключение. В работе используются описанные ранее контрольно-измерительные приборы типов Л 31, С1-83, В7-16А и лабораторный стенд. Соединение приборов для оценки параметров электрических сигналов осуществляется по схеме, показанной на рис. 1, путем подключения их выходных и входных кабелей к клеммам лабораторного стенда в его правой нижней части наборного поля (рис. 2).

Порядок выполнения работы. Согласно инструкциям по эксплуатации приборов, изложенным в работе 2.01, проведите пять измерений параметров гармонических сигналов с фиксированной частотой, выбранной произвольно в пределах от 2 до 100 кГц, но с разными амплитудами. Результаты измерений запишите в табл. I.1, в которой в скобках указаны типы приборов, используемых в данных измерениях. В таблицу 2.2 запишите возможные изменения максимального уровня сигналов (полного размаха) пилообразной, прямоугольной и синусоидальной формы при изменении частоты от 2 до 100 кГц. Измерения проводите с помощью осциллографа С1-83.

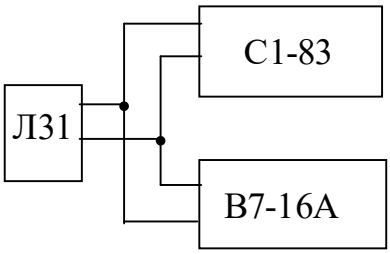


Рис. 1. Схема соединения приборов

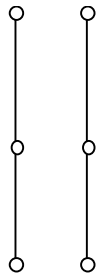


Рис.2. Наборное поле стенда

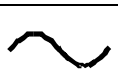
Таблица 1.1.

Результаты измерений параметров гармонических сигналов

Номер опыта	f_1, Гц (Л 31)	T, с (С1-83)	$f_2=\frac{1}{T}$, Гц	U_0,В (С1-83)	$U_{эфф}=\frac{U_{эфф}}{\sqrt{2}}$, В	$U_{эфф}$, В (В7–16А)
1						
2						
3						
4						
5						

Таблица 1.2

Результаты измерений уровня сигналов

Номер опыта	f_1, Гц (Л 31)	T, с (С1-83)			$2U_0$, В (С1-83)		
							
1 2 3 4 5							

2. Измерение активного сопротивления электрической цепи

2.1. Цель работы

Изучение способа измерения активного сопротивления отдельных участков электрической цепи при помощи контрольно-измерительного прибора В7-16А, используемого в качестве омметра.

2.2. Выполнение работы

1. **Необходимые приборы**: В работе используются универсальный вольтметр В7-16А и лабораторный стенд.

2. **Порядок выполнения работы**. Согласно инструкции по эксплуатации вольтметра В7-16А, включенного в режиме омметра, нужно измерить известные сопротивления в лабораторных работах № 2.05 и № 2.08 и сравнить их с данными в таблице II.1.

Таблица II.1.

Результаты измерения сопротивлений

Данные	Сопротивления в работе № 2.05			Сопротивления в работе № 2.08			
	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	R_4,Ом
справочные	470	680	820	100	100	100	1000
опытные							

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Опишите порядок измерения амплитуды периодического сигнала с помощью электронного осциллографа С1-83.

2. Опишите порядок измерения периода и частоты периодического сигнала с помощью осциллографа С1-83.

3. Опишите способ измерения эффективных значений напряжения гармонических сигналов с помощью прибора В7-16А.

4. Опишите способ измерения уровня периодических сигналов различной формы с помощью генератора сигналов и осциллографа С1-83.

5. 5. Опишите порядок измерения активных сопротивлений с помощью прибора В7-16А.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.03

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА

1. Цель работы

Целью данной работы является изучение законов электростатики и одного из методов измерения емкости конденсатора.

2. Краткая теория

Конденсатором называется система из двух проводников, разделенных слоем диэлектрика, в которой обеспечивается сильная электрическая связь между накопленными на этих проводниках зарядами. Проводники, образующие конденсатор, называются обкладками. В зависимости от формы обкладок, конденсаторы бывают сферические, цилиндрические, плоские. За заряд конденсатора принимается заряд одной обкладки, взятый по абсолютной величине.

Емкостью конденсатора называется скалярная физическая величина, характеризующая способность конденсатора накапливать электрический заряд и численно равная заряду, который должен быть перенесен с одной обкладки конденсатора на другую, чтобы разность потенциалов между ними изменилась на единицу

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}. \qquad (2.03.1)$$

Емкость конденсатора зависит от формы и размеров его обкладок и диэлектрической проницаемости диэлектрика и не зависит от свойств проводников, из которых изготовлены обкладки. Единицей измерения электрической емкости в системе СИ является фарад (Ф = Кл/В).

Емкость конденсатора может быть измерена различными методами. В данной работе использован метод, основанный на измерении накопленного конденсатором заряда. При этом емкость рассчитывается в соответствии с определением.

Для определения емкости неизвестного конденсатора C_x собирают цепь по рис. 1.

C_x – конденсатор неизвестной емкости,

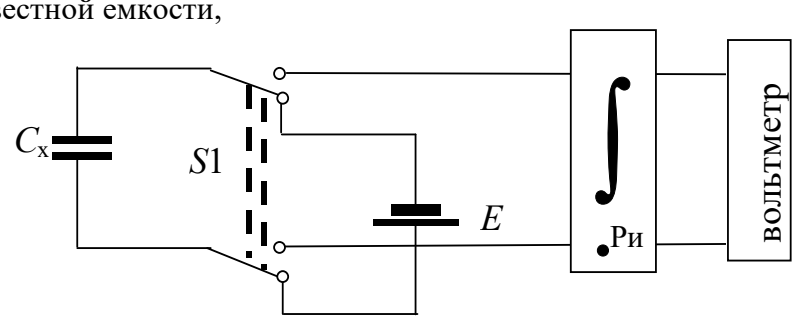


Рис.1. Схема электрической цепи для определения емкости конденсатора

E – источник питания, служащий для зарядки конденсатора до разности потенциалов, равной ЭДС источника ($\Delta\varphi = E$),

$\int$ – интегратор тока,

Ри – кнопка разряда интегратора,

$S1$ – переключатель, позволяющий подключать конденсатор к источнику питания E при зарядке и к интегратору при разрядке.

При подключении к источнику питания конденсатор заряжается. Заряд, накапливаемый на обкладках конденсатора, при неизменном значении разности потенциалов $\Delta\varphi$ пропорционален его емкости. В стационарном состоянии разность потенциалов равна ЭДС источника E.

$$Q = C_x \cdot E. \qquad (2.03.2)$$

При разрядке конденсатора в цепи протекает убывающий во времени электрический ток. По определению, сила тока

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.03.3)$$

Нас интересует заряд Q, то есть необходимо вычислить $Q = \int_0^\infty I\ \mathrm{d}t$. Для этого служит электронное устройство, называемое интегратором.

При подключении заряженного конденсатора к интегратору, который в свою очередь подключен к вольтметру, в цепи интегратора протекает ток. Напряжение на выходе интегратора пропорционально интегралу от силы тока на его входе, т.е. заряду:

$$U_{\text{x}} = b\int I(t)\,\mathrm{d}t = b\int \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}t = b\int \mathrm{d}Q = bQ\,, \qquad (2.03.4)$$

где b – постоянная интегратора (она неизвестна).

Напряжение U_{x} измеряется цифровым вольтметром. Сопоставляя формулы (2.03.2) и (2.03.4), получаем:

$$\frac{U_{\text{x}}}{b} = C_{\text{x}}\cdot E\,. \qquad (2.03.5)$$

В полученном выражении постоянная интегратора b и разность потенциалов на конденсаторе E являются неизвестными. Поэтому только на основании (2.03.5) определить C_{x} оказывается невозможным. Для того, чтобы избежать определения величин b и E, в данной работе применяется хорошо известный метод калибровки. Включим вместо конденсатора C_{x} конденсатор с известной емкостью C_1 и проведем аналогичные измерения. При этом на выходе интегратора получим отсчет U_1 и по аналогии с (2.03.5) запишем:

$$\frac{U_1}{b} = C_1\cdot E \qquad (2.03.6)$$

Разделив друг на друга равенства (2.03.5) и (203.6), получим

$$C_{\text{x}} = \frac{U_{\text{x}}}{U_1}\cdot C_1\,, \qquad (2.03.7)$$

где U_{x} и U_1 – показания вольтметра при разряде неизвестного и известного конденсаторов соответственно (максимальные значения показаний на индикаторном табло вольтметра), C_1 емкость известного конденсатора.

Конденсаторы широко используются в различных областях техники: в электронике, электротехнике, энергетике. В горном деле энергия заряженный конденсаторов используется при взрывных работах для воспламенения детонаторов. На импульсном выделении энергии при разряде конденсаторов основан метод электрогидравлической очистки скважин. В обогащении полезных ископаемых конденсаторы находят применение при электросепарации слабомагнитных руд. В состав электронных геофизических приборов конденсаторы входят в качестве одной из составных частей. Разрабатываются специальные конструкции конденсаторов для работы во взрыво- и пожароопасных условиях.

3. Выполнение работы

Необходимые приборы: конденсатор с известной емкостью ($\boldsymbol{C}_1 = 4700$ пФ $\pm 10\%$); конденсатор с неизвестной емкостью C_{x}, которая определяется в данной работе; источник постоянного тока с эдс E; переключатель; интегратор; цифровой вольтметр. Все элементы схемы, кроме вольтметра, смонтированы внутри лабораторного стенда.

Схема экспериментальной установки для определения емкости конденсатора показана на рис. 2 и на панели лабораторного стенда.

Порядок выполнения работы: Подготовьте цифровой вольтметр к работе согласно инструкции. Подготовьте схему для измерения емкости неизвестного конденсатора C_{x}, для чего гибкими перемычками соедините клеммы 1 и 3, 5 и 7, 6 и 8, а

выходные клеммы интегратора 9 и 10 соедините с входом вольтметра (см. рис. 2).
Включите лабораторный стенд тумблером, расположенным в левой части передней стенки.
Переключателем S_1 конденсатор C_x подключается к источнику E и заряжается (время

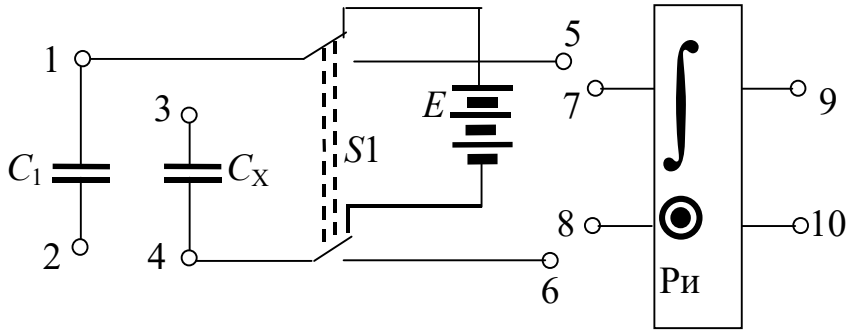


Рис.2. Схема экспериментальной установки

полной зарядки конденсатора ~10 с).

Интегратор разряжается нажатием кнопки Ри. Кнопка Ри на интеграторе предназначена для его принудительного разряда и подготовки прибора к новому измерению.
Затем переключателем S_1 неизвестный конденсатор подключается к интегратору. Поскольку используемый в данной работе интегратор не является идеальным, происходит его самопроизвольный разряд по окончании процесса интегрирования. Поэтому в качестве U_x следует принимать максимальное значение показаний на табло вольтметра. Показание U_x на табло вольтметра записывается в таблицу 1. Измерения показаний вольтметра при разрядке неизвестного конденсатора проводят 5 раз.
После этого клеммы 1 и 3 размыкаются, а клеммы 2 и 4 замыкаются (см. рис. 2). При этом вместо неизвестного конденсатора в цепь включается конденсатор с известной емкостью C_1. С ним проводят пять измерений, согласно вышеописанному порядку. Результаты также записываются в таблицу.
Конденсаторы C_X и C_1 соединяются параллельно путем добавления перемычки между клеммами 1 и 3. Проводится пять измерений для цепи из двух параллельно соединенных конденсаторов.

Конденсаторы C_X и C_1 соединяются последовательно, для чего удаляют перемычки 1-3, 2-4 и устанавливают перемычку между клеммами 2 и 3. Проводятся пять измерений для цепи из двух последовательно соединенных конденсаторов. Все результаты также записываются в таблицу.

Таблица

Результаты измерений

Номер опыта	Неизвестная емкость $\boldsymbol{C_x}$		Известная емкость $\boldsymbol{C_1}$		Параллельное соединение		Последовательное соединение	
	U_x, В	ΔU_x, В	U_1, В	ΔU_1, В	$U_{пар}$, В	$\Delta U_{пар}$, В	$U_{пос}$, В	$\Delta U_{пос}$, В

Средние значения	$\overline{U}_x =$	$\Delta\overline{U}_x =$	$\overline{U}_1 =$	$\Delta\overline{U}_1 =$	$\overline{U}_{\text{пар}} =$	$\Delta\overline{U}_{\text{пар}} =$	$\overline{U}_{\text{пос}} =$	$\Delta\overline{U}_{\text{пос}} =$

Определяются средние значения показаний вольтметра $U_{\text{х}}$, U_1, $U_{\text{пар}}$, $U_{\text{пос}}$. По этим средним значениям вычисляются опытные значения величин емкостей.

$$C_{\text{х}} = \frac{\overline{U}_{\text{х}}}{\overline{U}_1} \cdot C_1 \qquad (2.03.8)$$

$$C_{\text{пар}} = \frac{\overline{U}_{\text{пар}}}{\overline{U}_1} \cdot C_1 \qquad (2.03.9)$$

$$C_{\text{пос}} = \frac{\overline{U}_{\text{пос}}}{\overline{U}_1} \cdot C_1 \qquad (2.03.10)$$

Теоретическое значение емкости параллельного соединения конденсаторов вычисляются следующим образом:

$$C_{\text{пар}} = C_{\text{х}} + C_1 . \qquad (2.03.11)$$

Емкость последовательного соединения конденсаторов рассчитывается по следующей формуле:

$$\frac{1}{C_{\text{пос}}} = \frac{1}{C_{\text{х}}} + \frac{1}{C_1}, \qquad (2.03.12)$$

из которой следует расчетная формула для вычисления емкости последовательного соединения конденсаторов:

$$C_{\text{пос}} = \frac{C_{\text{х}} \cdot C_1}{C_{\text{х}} + C_1}. \qquad (2.03.13)$$

Используя значение $\overline{\boldsymbol{C}}_{\text{х}}$, рассчитанное по формуле (2.03.8), вычислите по формулам (2.03.12) и (2.03.13) значения емкостей параллельного и последовательного соединений конденсаторов. Результат расчетов сравните с экспериментальными значениями, определенными по формулам (2.03.9) и (2.03.10).

3. Вычисление погрешностей

Средние относительные погрешности емкостей вычисляются по формулам:

$$E_{C_{\text{х}}} = \frac{\Delta\overline{C}_{\text{х}}}{\overline{C}_{\text{х}}} = \frac{\Delta\overline{U}_{\text{х}}}{\overline{U}_{\text{х}}} + \frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1} + \frac{\Delta C_1}{C_1}; \qquad (2.03.14)$$

$$E_{C_{\text{ПАР}}} = \frac{\Delta\overline{C}_{\text{пар}}}{\overline{C}_{\text{пар}}} = \frac{\Delta\overline{U}_{\text{пар}}}{\overline{U}_{\text{пар}}} + \frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1} + \frac{\Delta C_1}{C_1}; \qquad (2.03.15)$$

$$E_{C\text{пос}} = \frac{\Delta\overline{C}_{\text{пос}}}{\overline{C}_{\text{пос}}} = \frac{\Delta\overline{U}_{\text{пос}}}{\overline{U}_{\text{пос}}} + \frac{\Delta\overline{U}_1}{\overline{U}_1} + \frac{\Delta C_1}{C_1} \qquad (2.03.16)$$

Средние абсолютные погрешности емкостей:

$$\Delta\overline{C}_{\text{x}} = E_{C_{\text{x}}} \cdot \overline{C}_{\text{x}}; \qquad (2.03.17)$$

$$\Delta\overline{C}_{\text{пар}} = E_{C_{\text{пар}}} \cdot \overline{C}_{\text{пар}}; \qquad (2.03.18)$$

$$\Delta\overline{C}_{\text{пос}} = E_{C\text{пос}} \cdot \overline{C}_{\text{пос}}. \qquad (2.03.19)$$

Окончательные результаты измерения емкостей конденсаторов записывается в виде:

$$C_{\text{x}} = \overline{C}_{\text{x}} \pm \Delta\overline{C}_{\text{x}}; \qquad (2.03.20)$$

$$C_{\text{пар}} = \overline{C}_{\text{пар}} \pm \Delta\overline{C}_{\text{пар}}; \qquad (2.03.21)$$

$$C_{\text{пос}} = \overline{C}_{\text{пос}} \pm \Delta\overline{C}_{\text{пос}}. \qquad (2.03.22)$$

Сравните значения емкостей параллельного и последовательного соединений конденсаторов, полученные опытным путем, и рассчитанные по теоретическим формулам (2.03.11) и (2.03.13). Если разница между теоретическими и опытными значениями емкостей параллельного и последовательного соединения конденсаторов не превышает соответствующей абсолютной погрешности, можно считать, что данный метод удовлетворительно обеспечивает проведение измерений емкостей. Данный анализ результатов работы производится в выводе к лабораторной работе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение емкости конденсатора.
2. Объясните по схеме цепи назначение используемых приборов.
3. Подробно объясните принцип определения емкости в данной работе.
4. Выведите расчетные формулы для определения емкостей C_{x}, $C_{\text{пар}}$, $C_{\text{пос}}$.
5. Каковы единицы измерения емкости?
6. Изобразите схемы параллельного и последовательного соединений конденсаторов. Запишите формулы для результирующих емкостей.
7. Выведите формулы для расчета погрешностей ΔC_{x}, $\Delta C_{\text{пар}}$, $\Delta C_{\text{пос}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. М.: Наука, 1982. с.87–89.
2. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1970.с.77–91.

3. Физический практикум. Электричество и оптика / Под ред. В.И. Ивероновой. М.: Наука, 1968. 815 с.

4. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. М.: Высшая школа, 1983. с. 51–54.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.04
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ ИСТОЧНИКА ТОКА МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ

1. Цель работы

Целью работы является изучение законов постоянного электрического тока и ознакомление с компенсационным методом измерения электродвижущей силы источника тока.

2. Краткая теория

Электродвижущей силой (ЭДС) источника тока называется скалярная физическая величина, измеряемая работой сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда по участку цепи или замкнутой цепи, содержащей этот источник тока. ЭДС источника тока равна разности потенциалов между его полюсами при разомкнутой внешней цепи.

Измерение ЭДС при помощи обычного вольтметра является приближенным, так как при этом через вольтметр и источник протекает ток и показания вольтметра, равные падению напряжения на внутреннем сопротивлении прибора, отличаются от величины ЭДС на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении источника. При этом на внутреннем сопротивлении источника происходит выделение тепла по закону Джоуля–Ленца. Наиболее точным является компенсационный метод. Этот метод состоит в том, что неизвестная ЭДС компенсируется известной разностью потенциалов. При этом ток через источник отсутствует и неизвестная ЭДС равна компенсирующей разности потенциалов. Принципиальная схема электрической цепи, предназначенной для измерения ЭДС источника методом компенсации, приведена на рис. 1.

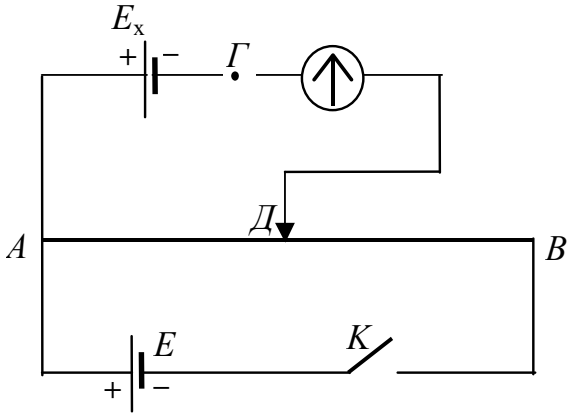


Рис. 1. Принципиальная схема электрической цепи компенсационного метода измерения ЭДС источника тока

К реохорду *AB*, имеющему движок *Д*, присоединена батарея аккумуляторов *E*. Ток батареи, протекая по проволоке реохорда, создает на ней разность потенциалов. На участке *АД* также создается разность потенциалов, равная падению напряжения на этом участке $U = I \cdot R_{\text{AB}}$. Величину этой разности потенциалов можно изменять, передвигая движок от нуля (точка *A*) до максимума (точка *B*).

Такой способ измерения разности потенциалов называется потенциометрическим, а сам реохорд, включенный таким образом, называется потенциометром.

К точкам *A* и *Д* присоединяются полюса источника тока с неизвестной ЭДС E_x через гальванометр или измеритель разности потенциалов. В данной работе в качестве измерителя разности потенциалов используется цифровой вольтметр. При этом к точке *A* подключаются одноименные полюса источников *E* и E_x. При замкнутом ключе *K* можно найти такое положение движка на реохорде, при котором стрелка гальванометра не отклоняется и ток на участке $AE_xД$ отсутствует. В этом случае разность потенциалов

между точками *Д* и *Г* равна нулю, и ЭДС источника E_x компенсируется падением напряжения на участке *АД* реохорда.
По закону Ома можно записать:

$$E_x = U_{1АД} = I \cdot R_{1АД}, \quad (2.04.1)$$

где *I* – сила тока в цепи батареи *E*, $R_{1АД}$ – сопротивление участка *АД* реохорда, при котором компенсируется ЭДС E_x.
Измерение силы тока *I* можно не проводить, так как при этом вносятся дополнительные погрешности, а использовать калибровочный опыт и элемент с известной ЭДС. Для этого вместо источника E_x нужно включить элемент с известной ЭДС E_0 и найти новое положение движка *Д*, при котором ток в цепи гальванометра отсутствует.
При этом условии аналогично выражению (2.04.1) можно записать

$$E_0 = U_{2АД} = I \cdot R_{2АД},, \quad (2.04.2)$$

где $R_{2АД}$ сопротивления участка *АД*, при котором компенсируется ЭДС E_0.
Если ток через гальванометр отсутствует, ток в цепи источника *E* будет одинаковым, независимо от положения движка реохорда. Тогда, разделив друг на друга выражения (2.04.1) и (2.04.2), получаем:

$$\frac{E_x}{E_0} = \frac{R_{1АД}}{R_{2АД}}. \quad (2.04.3)$$

Сопротивления $R_{1АД}$ и $R_{2АД}$ пропорциональны длинам соответствующих участков реохорда ℓ_1 и ℓ_2 от его общего конца *А* до подвижного контакта *Д*, поэтому

$$\frac{E_x}{E_0} = \frac{\ell_1}{\ell_2}. \quad (2.04.4)$$

Отсюда окончательно имеем:

$$E_x = E_0 \frac{\ell_1}{\ell_2}. \quad (2.04.5)$$

При проведении опыта нужно иметь в виду, что *E* должна быть постоянной и больше по величине, чем E_0 и E_x, так как только в этом случае возможно найти на реохорде такое положение движка *Д*, при котором можно осуществить компенсацию. Цепь следует замыкать на короткое время, чтобы обнаружить наличие или отсутствие тока через гальванометр, иначе может происходить нагревание проводников, изменяющее их сопротивление, а также при длительном протекании тока через элемент происходит изменение его ЭДС за счет поляризационных явлений.
В данной работе известную ЭДС следует измерять с помощью цифрового вольтметра.

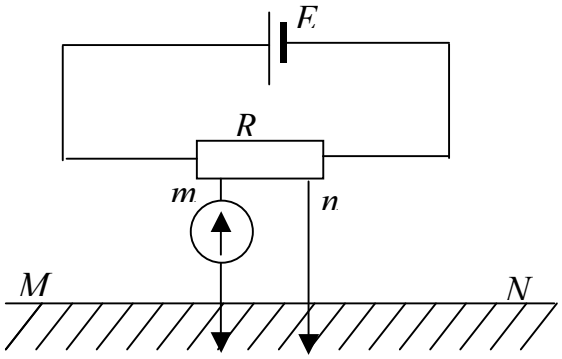


Рис.2. Схема цепи полевого электроразведочного потенциометра

Компенсационный метод измерения разности потенциалов применяется в полевом электроразведочном потенциометре, электрическая схема которого приведена на рис. 2. Если разность потенциалов на участке эталонного сопротивления *R* (потенциометра) между точками *m* и *n* полностью компенсирует разность потенциалов между заземленными электродами *M* и *N*, ток через гальванометр будет равен нулю. Потенциометр снабжен шкалой, по которой непосредственно отсчитывается значение измеряемого напряжения.
В геофизике применяется прибор, называемый электроразведочный автокомпенсатор, в котором компенсирующая разность потенциалов создается автоматически при помощи электронной схемы. Он позволяет легко и быстро производить измерения силы тока в питающей цепи и разности потенциалов между приемными электродами.

3 Выполнение работы

3.1**. Необходимые приборы:** круговой реохорд, цифровой вольтметр, переключатель S_1, набор сопротивлений R_1, R_2, R_3, предназначенных для изменения силы тока через реохорд, источник E постоянного напряжения, источник E_x с неизвестной ЭДС, источник E_0 с известной ЭДС, Все элементы схемы, кроме цифрового вольтметра, собраны внутри лабораторного стенда.
Рабочая схема опыта показана на рис.3 и на панели стенда.

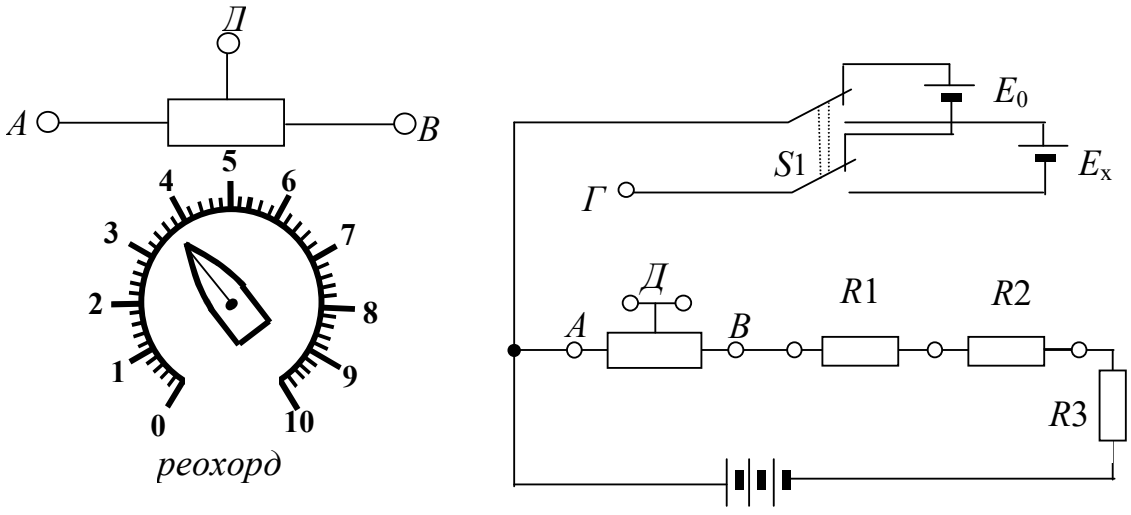


Рис.3. Рабочая схема опыта

3.2. **Порядок выполнения работы**. Подготовьте к работе цифровой вольтметр в соответствии с инструкцией по эксплуатации, находящейся на лабораторном столе. Подключите вольтметр к клеммам *Г* и *Д*, реохорд включите в цепь с помощью перемычек (соедините попарно клеммы *АА*, *ДД* и *ВВ* на реохорде и в измерительной цепи).

Включите лабораторный стенд тумблером, расположенным в левой части передней стенки. С помощью переключателя S_1 включите источник с неизвестной ЭДС E_x, перемычкой закоротите сопротивления R_1 и R_2, оставив включенным сопротивление R_3. Вращением ручки кругового реохорда добейтесь нулевого показания вольтметра. Отсчитайте по шкале реохорда от нуля длину ℓ_1 плеча *АД* и запишите ее в табл. 1.
С помощью переключателя S_1 включите источник с известной ЭДС E_0, добейтесь нулевого показания вольтметра и определите длину ℓ_2 плеча *АД* кругового реохорда.
Опыт повторите еще два раза для каждого из элементов E_x и E_0 при сопротивлениях цепи (R_3+R_2), для чего перемычкой закоротите только сопротивление R_1, и (R_1+R_2+R_3), для чего перемычка убирается совсем. Результаты запишите в таблицу 1.

Таблица 1

Результаты измерений

$R_н$	ℓ_1, дел. шкалы	ℓ_2 дел. шкалы	E_x, В	ΔE_x, В
R_3 R_3+R_2 R_1+R_2+R_3				
Средние значения			$\overline{E}_x$	$\Delta\overline{E}_x$

Измерьте цифровым вольтметром ЭДС известного источника. Для этого переключателем S_1 включите источник с известной ЭДС E_0 и подключите вольтметр к клеммам *А* и *Г*.
Аналогично измерьте вольтметром ЭДС неизвестного источника.
Во всех трех случаях вычислите ЭДС неизвестного элемента E_x по формуле (2.04.5).
Определите среднее значение E_x, средние абсолютную и относительную погрешности.
Окончательный результат запишите в виде:

$$E_x = \overline{E}_x \pm \Delta\overline{E}_x \qquad (2.04.6)$$

Сравните значение ЭДС неизвестного источника, измеренное методом компенсации со значением, полученным с помощью цифрового вольтметра.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется электродвижущей силой источника тока?
2. Что такое сторонние силы?
3. Назовите способы измерения ЭДС.
4. Какова природа ошибки, допускаемой при измерении ЭДС источника тока с помощью вольтметра?
5. В чем заключается метод компенсации и каковы его достоинства?
6. Приведите принципиальную схему электрической цепи для измерения ЭДС методом компенсации. Поясните порядок проведения измерений.
7. Выведите расчетную формулу для определения E_x.
8. Какому условию должна удовлетворять в этой установке величина ЭДС источника тока, служащего для питания цепи?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

9. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. Т.2 – М.: Наука, 1974. – 336 с.
10. Физический практикум. Электричество и оптика. / Под ред. В. И. Ивероновой. – М.: Наука, 1968. 815 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.05

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРОВОДНИКОВ С ПОМОЩЬЮ МОСТА УИТСТОНА

1. Цель работы

Целью работы является изучение законов постоянного тока на примере классического метода измерения сопротивления проводников с помощью мостовой схемы и определение удельного сопротивления материала проводника.

2. Краткая теория

Электросопротивление проводника – это скалярная физическая величина, характеризующая его электропроводящие свойства. Сопротивление проводника зависит от его формы, размеров и электроповодящих свойств материала, из которого изготовлен проводник. В простейшем случае однородного проводника с постоянным поперечным сечением, сопротивление проводника определяется следующим образом:

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \qquad (2.05.1)$$

где ρ – удельное сопротивление материала проводника, ℓ – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения.

Из формулы (2.05.1) можно выразить удельное сопротивление:

$$\rho = \frac{R \cdot S}{\ell}, \qquad (2.05.2)$$

откуда видно, что удельное сопротивление численно равно сопротивлению проводника единичной длины, имеющего площадь поперечного сечения, равную единице площади. В системе СИ удельное сопротивление измеряют в омметрах (Ом·м).

Одним из методов измерения сопротивления является метод моста Уитстона.

Мост Уитстона состоит из четырех сопротивлений – плеч $R_{\text{х}}$, $R_{\text{н}}$, $R_{\text{АД}}$, $R_{\text{ДВ}}$, которые соединены между собой так, что образуют замкнутый четырехугольник. К двум противоположным его углам *А* и *В* подключают полюса источника постоянного тока *Е*, а к двум другим *С* и *Д* подсоединяют чувствительный гальванометр или измеритель разности потенциалов. Принципиальная схема моста Уитстона изображена на рис. 1.

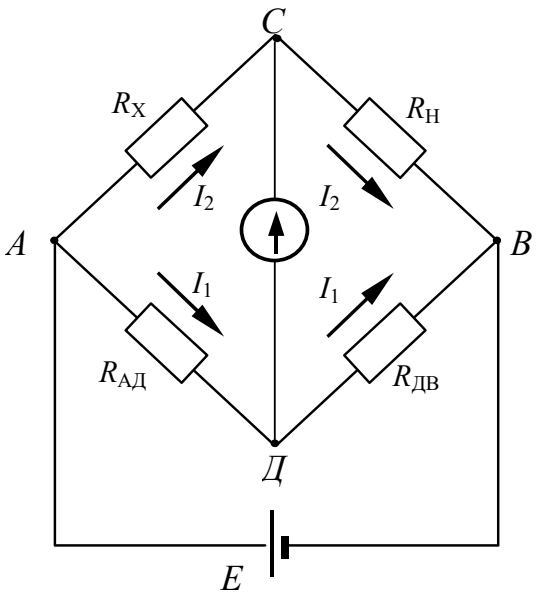


Рис.1. Принципиальная схема моста Уитстона

Если мост подключен к источнику *E*, по участку моста *СД* вследствие неравенства потенциалов точек *С* и *Д* может протекать электрический ток и стрелка гальванометра отклонится. Для того, чтобы на участке *СД* ток отсутствовал, необходимо равенство потенциалов точек *С* и *Д* (условие равновесия моста). Изменять разность потенциалов между точками *С* и *Д* можно таким способом: в качестве участка *АДВ* включается калиброванная проволока (реохорд) со скользящим контактом *Д*. Реохорд снабжен шкалой. Перемещая движок реохорда, можно добиться отсутствия тока на участке *СД*, что будет зарегистрировано гальванометром. Обозначим силу тока, текущего на участке *АДВ* через I_1, а на участке *АСВ* через I_2. Для каждого из четырех плеч реохорда запишем уравнения по закону Ома:

$$\varphi_А - \varphi_С = R_х \cdot I_2, \qquad \varphi_С - \varphi_В = R_Н \cdot I_2,$$
$$\varphi_А - \varphi_Д = R_{АД} \cdot I_1, \qquad \varphi_Д - \varphi_В = R_{ДВ} \cdot I_1, \qquad (2.05.3)$$

где $\varphi_А$, $\varphi_С$, $\varphi_В$, $\varphi_Д$ – потенциалы точек *А*, *С*, *В*, *Д* соответственно. При отсутствии тока через гальванометр $\varphi_С = \varphi_Д$. Следовательно, можно записать:

$$R_x \cdot I_2 = R_{АД} I_1, \qquad R_н \cdot I_2 = R_{ДВ} I_1, \qquad (2.05.4)$$

откуда

$$\frac{R_х}{R_Н} = \frac{R_{АД}}{R_{ДВ}} \qquad (2.05.5)$$

Таким образом, условие равновесия моста определяется только соотношением плеч реохорда и не зависит от электродвижущей силы источника, питающего цепь.

Так как проволока, из которой изготовлен реохорд *АДВ*, однородна и имеет по всей длине одинаковое сечение, то сопротивления $R_{АД}$ и $R_{ДВ}$ пропорциональны соответствующим длинам плеч ℓ_1 ℓ_2 реохорда. Поэтому (2.05.5) можно переписать в виде:

$$\frac{R_х}{R_Н} = \frac{\ell_1}{\ell_2}, \qquad (2.05.6)$$

откуда неизвестное сопротивление:

$$R_{\text{х}} = R_{\text{Н}} \frac{\ell_1}{\ell_2}. \qquad (2.05.7)$$

С другой стороны, сопротивление проводника можно выразить, зная его форму, размер и материал, из которого изготовлен проводник.

$$R_x = \rho \frac{\ell}{S} = \rho \frac{4\ell}{\pi d^2}, \qquad (2.05.8)$$

где d – диаметр проводника.

Отсюда, удельное сопротивление исследуемого проводника:

$$\rho = \frac{\pi d^2 R_{\text{х}}}{4\ell}. \qquad (2.05.9)$$

В таблице 1 приведены значения удельного сопротивления некоторых проводников при комнатной температуре.

Таблица 1

Удельное сопротивление проводников

Материал проводника	ρ, 10^{-6} Ом · м
Серебро	0,016
Медь	0,017
Алюминий	0,028
Вольфрам	0,055
Цинк	0,060
Латунь	0,071
Свинец	0,120
Никелин	0,420
Манганин	0,459
Константан	0,500
Ртуть	0,958
Нихром	1,100

Удельное сопротивление горных пород изменяется в широких пределах. Наиболее низкое удельное сопротивление имеют самородные металлы: золото, платина, серебро, медь. Наиболее распространенные минералы (кварц, полевой шпат, слюда, каменная соль) имеют удельное сопротивление $10^{10} \div 10^{14}$ Ом·м. Они являются хорошими изоляторами. Горные породы в условиях естественного залегания содержат в порах и трещинах токопроводящие минерализованные или пресные воды, иногда нефть и газы. Поэтому удельное сопротивление пород зависит не только от удельного

сопротивления минералов, их слагающих, но и от степени трещиноватости, а также от удельного сопротивления жидкостей и газов, заполняющих поры. Это обстоятельство позволяет по данным измерений удельного сопротивления выделять в разрезах скважин коллекторы, содержащие воду, газ и нефть, определять пористость пород и нефтегазонасыщенность. Данные этого метода широко используются при подсчетах запасов нефти и газа. Весьма низкие значения удельного сопротивления многих рудных минералов и очень высокие природных солей позволяют выделять наличие этих ископаемых в разрезах скважин.

3. Выполнение работы

Необходимые приборы: круговой реохорд, цифровой вольтметр, источник постоянного тока напряжением 4В, проводник с известным сопротивлением R_x (длина проводника $\ell = (20{,}00 \pm 0{,}01)$ м, диаметр проводника $d = (0{,}10 \pm 0{,}01)$ мм), набор известных сопротивлений ($R_1 = 470$ Ом, $R_2 = 680$ Ом, $R_3 = 820$ Ом). Все элементы схемы, кроме цифрового вольтметра, смонтированы внутри лабораторного стенда. Рабочая схема опыта показана на рис.2 и на панели лабораторного стенда.

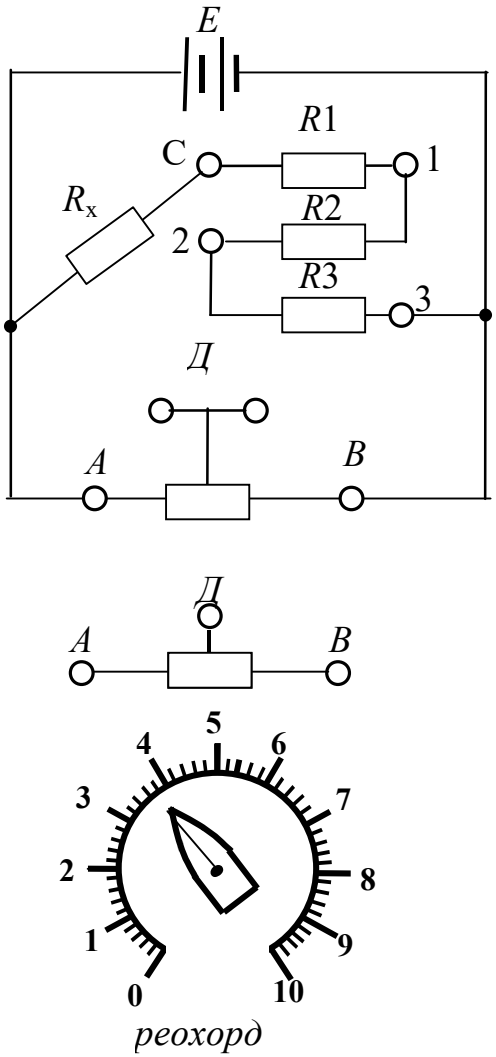


Рис.2. Рабочая схема опыта

Порядок выполнения работы. Подготовьте к работе цифровой вольтметр в соответствии с инструкцией по эксплуатации, находящейся на лабораторном столе.

Подключите цифровой вольтметр к клеммам *С* и *Д*, включите реохорд с помощью перемычек (соедините попарно клеммы *А–А*, *Д–Д*, *В–В* на реохорде и в измерительной цепи). Включите лабораторный стенд тумблером, расположенным в левой части передней стенки.

С помощью перемычки закоротите сопротивления R_2 и R_3, включенным останется сопротивление R_1.

Вращением ручки кругового реохорда добейтесь нулевого показания вольтметра и по шкале реохорда отсчитайте длину левого плеча ℓ_1 и правого ℓ_2. Результаты запишите в таблицу 2.

Опыт повторите еще два раза при двух сопротивлениях: $R_1 + R_2$, для чего закоротите только сопротивление R_3, и $R_1 + R_2 + R_3$, для чего перемычка убирается совсем.

По результатам измерений по формуле (2.05.7) три раза вычислите сопротивление исследуемого

проводника, затем его среднее значение $\overline{R}_x$, среднюю абсолютную и среднюю относительную погрешности.

Таблица 2

Результаты измерений

$R_н$, Ом	ℓ_1	ℓ_2	$R_х$, Ом	$\Delta R_х$, Ом
	деления шкалы			
$R_1 =$ $R_1 + R_2 =$ $R_1 + R_2 + R_3 =$				
			$\overline{R}_x =$	$\Delta\overline{R}_x =$

Вычислите среднее значение удельного сопротивления материала проводника по формуле (2.05.9). Сравнив результат с табличными значениями (см. табл. 1), определите материал, из которого изготовлен проводник.

Вычислите относительную и абсолютную погрешности удельного сопротивления по формулам:

$$E_\rho = \frac{\Delta\overline{\rho}}{\overline{\rho}} = 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta\overline{R}_х}{\overline{R}_х} + \frac{\Delta\ell}{\ell}. \qquad (2.05.10)$$

$$\Delta\rho = E_\rho \cdot \overline{\rho}. \qquad (2.05.11)$$

Окончательный результат запишите в виде:

$$R_х = \overline{R}_х \pm \Delta\overline{R}_х; \qquad (2.05.12)$$

$$\rho = \overline{\rho} \pm \Delta\overline{\rho}. \qquad (2.05.13)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое электросопротивление проводника? Отчего оно зависит?
2. Что такое удельное сопротивление проводника, в каких единицах оно измеряется?
3. От чего зависит удельное сопротивление проводника?
4. Начертите схему моста Уитстона и опишите способ измерения сопротивления с его помощью.
5. Выведите расчетную формулу для определения сопротивления неизвестного проводника.
6. Как вычисляются относительная и абсолютная погрешности измерения сопротивления $R_х$ и удельного сопротивления ρ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

7. 1.Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.2. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
8. Физический практикум. Электричество и оптика / Под ред. В.И. Ивероновой. – М.: Наука, 1968. – 815 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.07
СНЯТИЕ КРИВОЙ НАМАГНИЧИВАНИЯ И ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА С ПОМОЩЬЮ ОСЦИЛЛОГРАФА

1. Цель работы

Целью данной работы является изучение законов электромагнетизма, методов исследования характеристик магнитного поля в веществе, свойств ферромагнетиков и ознакомление со способом опытного изучения магнитных свойств ферромагнетика с помощью осциллографа.

2. Краткая теория

Характеристиками магнитного поля являются индукция $\vec{\mathbf{B}}$ и напряженность $\vec{\mathbf{H}}$. Индукция является силовой характеристикой магнитного поля, численно равной величине силы, с которой магнитное поле действует на единичный элемент тока, помещенный в данную точку поля нормально линиям индукции. В веществе индукция магнитного поля определяется как макроскопическими, так и микроскопическими токами. Напряженность является вспомогательной физической величиной, характеризующей намагничивающее поле.

При внесении в магнитное поле все вещества намагничиваются, то есть магнитное поле в веществе отличается от внешнего магнитного поля. Магнитное поле в веществе можно представить в виде:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}' \qquad (2.07.1)$$

где $\vec{\mathbf{B}}$ – магнитное поле в веществе, $\vec{\mathbf{B}}_0$ – внешнее магнитное поле, $\vec{\mathbf{B}}'$ – внутреннее магнитное поле, возникающее за счет ориентации магнитных моментов структурных элементов вещества.

Характеристикой магнитного состояния вещества является намагниченность, численно равная суммарному магнитному моменту единицы объема вещества.

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\Delta V}\Sigma\vec{\mathbf{p}}_i, \qquad (2.07.2)$$

где ΔV – физически малый объем вещества, $\vec{\mathbf{p}}_i$ – магнитный момент *i*-го атома.

Суммирование осуществляется по всем атомам, находящимся в физически малом объеме ΔV.

Опыт показывает, что для большинства веществ намагниченность пропорциональна напряженности намагничивающего поля.

$$\vec{\mathbf{J}} = \chi\vec{\mathbf{H}}, \qquad (2.07.3)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

В веществе

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{H}} + \mu_0\vec{\mathbf{J}} \qquad (2.07.4)$$

Учитывая (2.07.3), получаем:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{H}} + \mu_0\chi\vec{\mathbf{H}} = \mu_0(1+\chi)\vec{\mathbf{H}} = \mu_0\mu\vec{\mathbf{H}}, \qquad (2.07.5)$$

где $\mu = \chi + 1$ – относительная магнитная проницаемость вещества, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля в веществе отличается от магнитной индукции в вакууме.

По своим магнитным свойствам и по характеру магнитных структур все вещества делятся на две основные группы: вещества, намагничивающиеся в направлении, противоположном направлению внешнего магнитного поля, и вещества, намагничивающиеся в направлении внешнего магнитного поля.

Диамагнетики – вещества, намагничивающиеся в направлении, противоположном направлению намагничивающего поля. Для диамагнетиков $\chi < 0,$ следовательно $\mu < 1$.
Диамагнитными свойствами обладают вещества, собственные магнитные моменты структурных элементов которых равны нулю в отсутствие внешнего поля. Во внешнем магнитном поле в атомах индуцируются магнитные моменты, ориентированные противоположно намагничивающему полю.
Структурные элементы веществ, намагничивающихся в направлении внешнего магнитного поля, обладают собственными магнитными моментами. Эти вещества, в свою очередь, можно разбить на две группы: вещества, не обладающие самопроизвольной ориентацей магнитных моментов структурных элементов, и вещества, у которых магнитные моменты структурных элементов упорядочены в отсутствие внешнего магнитного поля.
К первым относятся парамагнетики. У парамагнетиков $\chi > 0,$ и соответственно $\mu > 1$.
Магнитные моменты атомов парамагнетиков в отсутствие внешнего магнитного поля разупорядочены вследствие теплового движения. Во внешнем магнитном поле возникает преимущественная ориентация магнитных моментов атомов парамагнетика. Магнитная восприимчивость парамагнетиков невелика и не зависит от величины напряженности намагничивающего поля. Некоторые парамагнетики при достаточно низких температурах могут переходить в ферромагнитное или антиферромагнитное состояние.
Ко второй группе относятся ферромагнетики, антиферромагнетики и ферримагнетики (ферриты).
Наибольший практический интерес представляют ферромагнетики – вещества, обладающие намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Магнитная проницаемость ферромагнетиков имеет большую величину $\mu >> 1$ и зависит от напряженности внешнего магнитного поля и предшествующего магнитного состояния вещества.
Для каждого ферромагнетика существует характерная температура, выше которой вещество теряет ферромагнитные свойства и становится парамагнетиком. Эта температура называется точкой Кюри T_C.

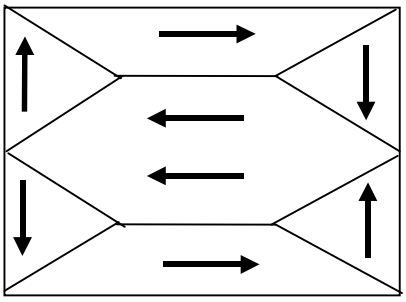


Рис. 1. Доменная структура ферромагнетика

Ферромагнитными свойствами обладают железо, кобальт, никель, их сплавы, некоторые редкоземельные элементы, а также некоторые химические соединения.
Особые свойства ферромагнетиков связаны с наличием в них малых самопроизвольно намагниченных областей – магнитных доменов. Размеры доменов составляют несколько микрометров. В пределах одного домена магнитные моменты атомов ориентированы в одном направлении. В ненамагниченном состоянии домены ориентированы хаотически и результирующая намагниченность равна нулю. Однако они имеют стремление располагаться так, чтобы образовались замкнутые магнитные цепи, так что магнитная энергия имеет наименьшую величину. Это схематически изображено на рис. 1, где стрелками показано направление магнитных моментов отдельных доменов.
Если поместить ферромагнетик во внешнее магнитное поле, он намагничивается. При малых значениях напряженности внешнего поля происходит увеличение размеров тех доменов, ориентация магнитного момента которых близка к направлению внешнего магнитного поля. Этот процесс соответствует участку *OA* зависимости намагниченности ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля (рис. 2). Если поле

увеличивать (участок *AB* на рис. 2), то процесс смещения границ доменов сменяется процессом вращения. Магнитные моменты целых доменов начинают поворачиваться одновременно. Данный процесс протекает не плавно, а ступенчато, что видно из кривой намагничивания $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{H}})$, если ее строить в увеличенном масштабе (см. рис.2). При дальнейшем увеличении намагничивающего поля происходит магнитное насыщение. При этом магнитные моменты всех доменов ориентированы по полю (участок *BC* на рис. 2). Намагниченность незначительно увеличивается при увеличении поля за счет тех магнитных моментов, которые разориентированы тепловым движением. В процессе намагничивания магнитная проницаемость сначала растет, затем уменьшается и при насыщении становится близка к единице. Зависимость индукции магнитного поля (кривая намагничивания) и магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля показаны на рис. 2 и 3.

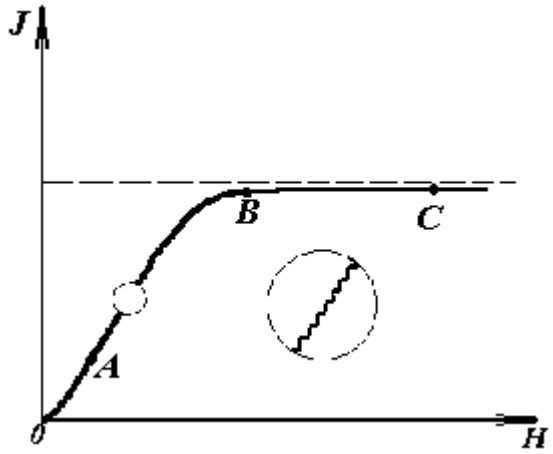


Рис.2. Зависимость намагниченности ферромагнетика от напряженности магнитного поля

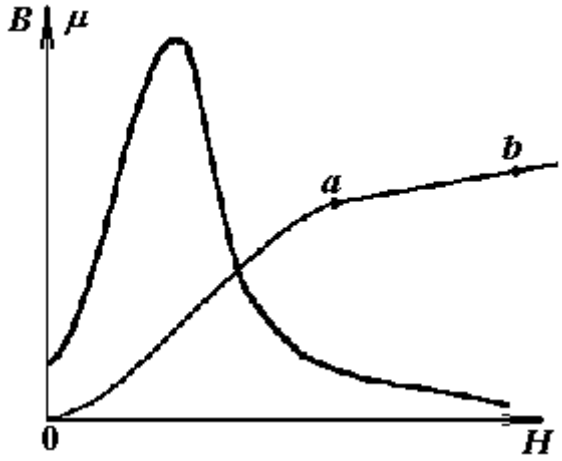


Рис.3. Зависимость индукции магнитного поля в ферромагнетике и магнитной проницаемости ферромагнетика от напряженности магнитного поля

Если ферромагнетик сначала намагнитить полем напряженности H_0 до индукции B_0, а затем уменьшать намагничивающее поле H до нуля, то индукция будет уменьшаться с некоторым отставанием (рис. 4). Когда напряженность станет равной нулю, индукция будет равна некоторому значению $B_{ост}$, характеризующему остаточное намагничение. Наличие остаточного намагничения объясняется тем фактом, что некоторые домены остаются ориентированными по полю и обеспечивают намагниченность ферромагнетика при нулевом намагничивающем поле.

Явление отставания изменения индукции магнитного поля B в ферромагнетике от изменения напряженности H в процессе перемагничивания называется гистерезисом. Если увеличивать напряженность поля H в обратном направлении от нуля до некоторого значения H_C, называемого коэрцитивной силой, индукция поля уменьшается до нуля. При дальнейшем увеличении напряженности до $(-H_0)$ ферромагнетик перемагничивается до индукции $(-B_0)$. При изменении напряженности поля от $(-H_0)$ до нуля, вновь возникает

остаточное намагничение. Изменяя напряженность поля в первоначальном направлении

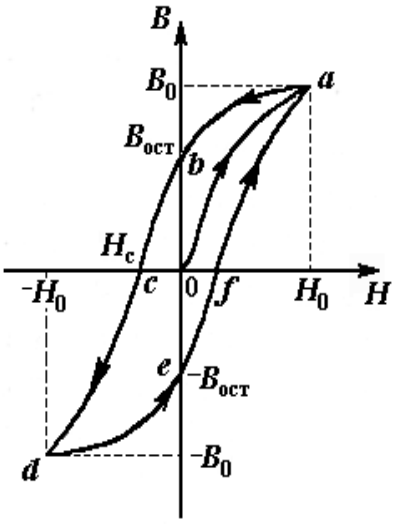


Рис.4. Петля гистерезиса ферромагнетика

до значения H_0, снова получим значение индукции B_0. Таким образом, при изменении напряженности от ($+H_0$) до ($–H_0$) и обратно, ферромагнетик пройдет полный цикл перемагничивания, кривая зависимости B от H будет иметь вид замкнутой петли, называемой петля гистерезиса (см. рис. 4). Площадь петли гистерезиса пропорциональна энергии, расходуемой на перемагничивание.

Чтобы размагнитить ферромагнетик его можно поместить в переменное магнитное поле и провести несколько циклов перемагничивния, постепенно уменьшая амплитудные значения напряженности поля.

Петлю гистерезиса можно получить на экране электронно-лучевой трубки осциллографа. Исследуемым ферромагнитным веществом является трансформаторная сталь, из которой изготовлен прямоугольный сердечник трансформатора. На сердечник намотаны две катушки: первичная – намагничивающая с числом витков N_1 и вторичная - измерительная с числом витков N_2. Первичная катушка N_1 через эталонный резистор R_8 и потенциометр R_1 подключена к генератору переменного тока $Г$. Для измерения амплитудного значения силы тока I_1 в первичной цепи используется электронный осциллограф ЭО, вход X которого подключается к эталонному резистору R_8.

Принципиальная схема опыта по исследованию кривой намагничивания и петли гистерезиса ферромагнетика показана на рис. 5.

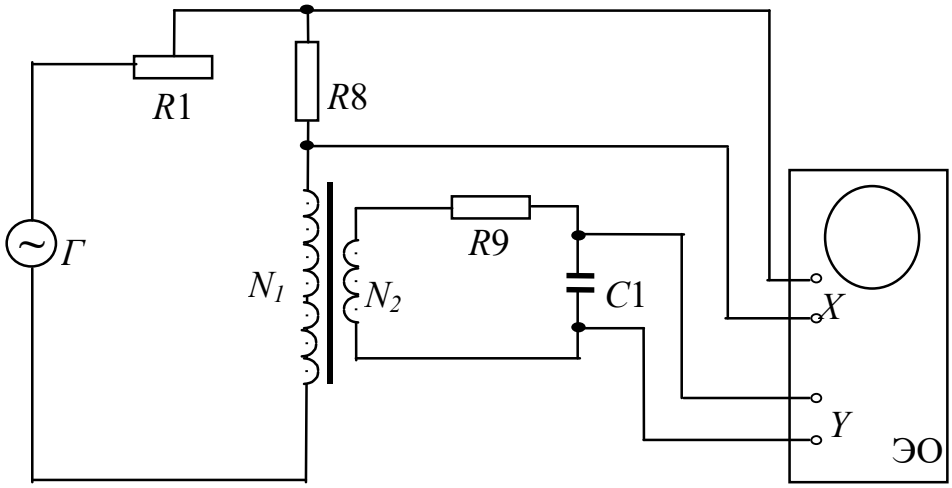


Рис. 5. Принципиальная схема цепи для исследования магнитных свойств ферромагнетика с помощью осциллографа

Ток I_1 создает в сердечнике намагничивающее поле напряженностью H. Напряженность магнитного поля в длинной катушке, согласно теореме о циркуляции:

$$H = \frac{I_1 N_1}{l}. \tag{2.07.6}$$

где l – длина ферромагнитного сердечника.
Формула (2.07.6) справедлива для мгновенных значений напряженности поля и тока, а также, в частности, для амплитудных значений. Напряжение на резисторе R_8 пропорционально силе тока I_1, а, значит, и напряженности H магнитного поля.

$$U_x = I_1 \cdot R_8 = \frac{R_8 \cdot l}{N_1} \cdot H. \tag{2.07.7}$$

Таким образом, на вход ***X*** подается напряжение, пропорциональное напряженности магнитного поля H.
В соответствии с законом Фарадея ЭДС индукции в измерительной катушке

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \cdot N_2, \tag{2.07.8}$$

где Ф – поток магнитной индукции, сцепленный с каждым витком катушек N_1 и N_2.
По определению

$$\Phi = B \cdot S, \tag{2.07.9}$$

где ***S*** – площадь одного витка.
Тогда

$$\varepsilon = -SN_2 \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{2.07.10}$$

Так как ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения магнитной индукции, то для определения величины B во вторичную цепь включено интегрирующее устройство. Функцию последнего выполняет интегрирующая цепочка, состоящая из резистора R_9 и конденсатора C_1. Можно показать, что напряжение на конденсаторе пропорционально интегралу от силы тока во вторичной катушке I_2.

$$U_C = \frac{1}{C_1}\int_0^{t_1} I_2 \mathrm{d}t, \qquad (2.07.11)$$

где t_1 – время интегрирования, соизмеримое с периодом колебания тока промышленной сети.

Для интегрирущего звена омическое сопротивление обычно выбирается значительно большим емкостного сопротивления $X_C = 1/\omega C$ (ω – круговая частота). В этом случае сила тока I_2 практически полностью определяется величиной R_9 и равна по закону Ома

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_9}. \qquad (2.07.12)$$

Из (2.07.11) с учетом (2.07.12) и (2.07.10) получаем, что напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{C_1}\cdot\int_0^{t_1}\frac{\varepsilon}{R_9}\mathrm{d}t = -\frac{SN_2}{C_1R_9}\int_0^{t_1}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{SN_2}{C_1R_9}\cdot B, \qquad (2.07.13)$$

и, следовательно, магнитная индукция

$$B = \frac{C_1R_9}{SN_2}\cdot U_C. \qquad (2.07.14)$$

Таким образом, напряжение, снимаемое с конденсатора и подаваемое на вертикально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки (вход *Y*), пропорционально индукции магнитного поля в сердечнике. Формула (2.07.14) справедлива, в частности, для амплитудных значений напряжения на конденсаторе U_C и индукции B.

Если увеличивать силу тока в первичной катушке, площадь петли гистерезиса будет сначала увеличиваться. Таким образом будут наблюдаться частные петли гистерезиса. При некотором значении силы тока, дальнейшего увеличения площади петли происходить не будет. Наибольшая по площади петля гистерезиса будет являться предельной.

По известным значениям B и H можно вычислить магнитную проницаемость трансформаторной стали

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}. \qquad (2.07.15)$$

В эксперименте предлагается оценить также мощность, затраченную на перемагничивание материала. При перемагничивании образца энергия расходуется на переориентацию доменов и выделяется в виде тепла. Величина этой энергии W, приходящейся на единицу объема образца, численно равна площади S_1 петли гистерезиса. Если частота переменного тока ν, то количество тепла, выделяемое за единицу времени, будет равно мощности, затрачиваемой на перемагничивание единицы объема.

$$P = W\cdot\nu = S_1\nu. \qquad (2.07.16)$$

Площадь петли гистерезиса определяем по числу клеток, занимаемых ею на экране осциллографа. Если цена деления по оси H равна Z_H, а по оси B равна Z_B, тогда величина площади петли будет равна $N\cdot Z_\mathrm{H}\cdot Z_\mathrm{B}$ где N – площадь петли в малых делениях шкалы осциллографа.. Потери на перемагничивание, следовательно, будут равны:

$$P = N\cdot Z_\mathrm{H}\cdot Z_\mathrm{B}\cdot\nu. \qquad (2.07.17)$$

В данной работе частота переменного тока равна частоте в промышленных сетях $\nu = 50\,\mathrm{Гц}$.

3. Выполнение работы

Необходимые приборы и материалы: ферромагнитный сердечник с катушками N_1 и N_2 (N_1 = 2000, N_2 = 1000 витков, l = 0,1 м, $S = 1 \cdot 10^{-4}$ м^2); резистор R_8; генератор переменного тока $Г$; электронный осциллограф ЭО; интегрирующая цепь R_9, C_1 (R_9 = 160 кОм, C_1 = 3,9 мкФ). Все элементы схемы, кроме осциллографа, смонтированы внутри лабораторного стенда. Рабочая схема опыта для исследования кривой намагничивания петли гистерезиса ферромагнетика показана на рис. 6 и на панели стенда.

Порядок выполнения работы. Подготовьте электронный осциллограф к измерениям согласно инструкции, расположенной на лабораторном столе.

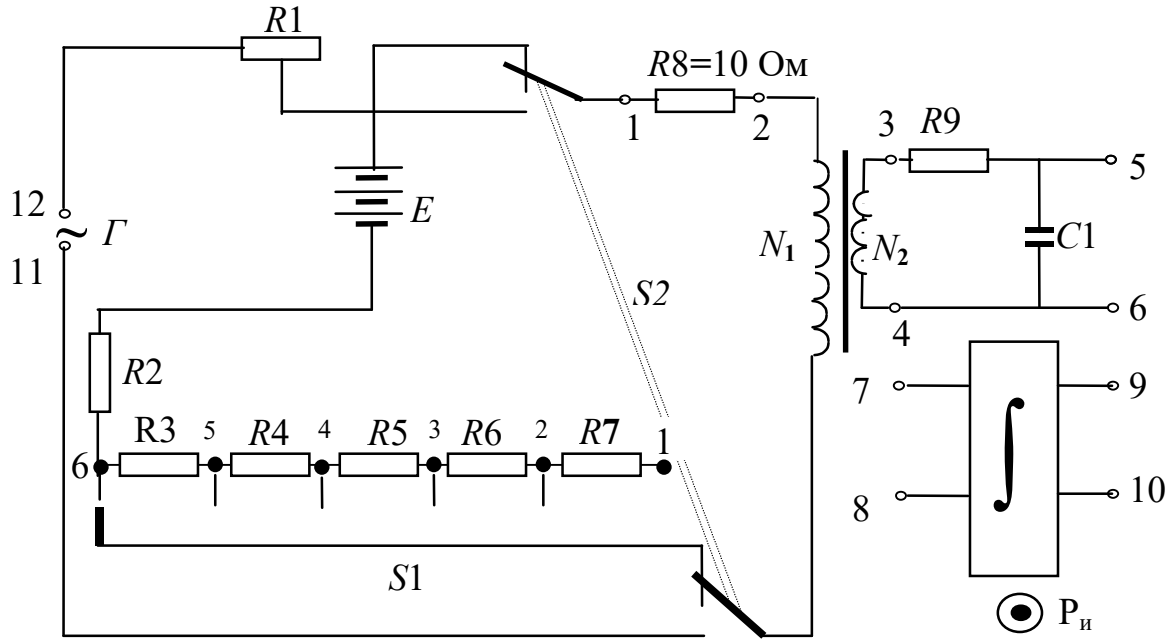


Рис. 6. Рабочая схема опыта

Соберите схему согласно рис.6, подключив вход *OX* осциллографа к резистору R_8=10 Ом (клеммы 1–2), а вход *OY* к конденсатору C_1 (клеммы 5–6). Переключатель S_2, если он есть на стенде, должен быть в нижнем положении. Ручка потенциометра R_1 повернута до упора влево. Включите лабораторный стенд тумблером, расположенным на передней стенке стенда.

Включите электронный осциллограф (кнопку “питание” следует отжать). Кнопки “X–Y” слева и справа от экрана должны быть нажаты, а остальные отжаты. Вращением ручек “ ◄► ” и “ ▲▼ ” выведите изображение точки в центр экрана. Поверните ручку потенциометра R_1 до упора вправо. Ручками регулировки коэффициентов усиления I-го и II–го каналов добейтесь, чтобы величина максимальной петли была в пределах экрана. Вращая ручку потенциометра R_1, можно изменять силу тока в первичной цепи. Для каждого значения тока на экране осциллографа возникает петля гистерезиса соответствующего размера. Начиная с некоторого значения силы тока, площадь петли практически перестает возрастать, то есть наблюдается предельная петля гистерезиса. Перед началом измерений убедитесь в этом, просматривая на экране осциллографа петли гистерезиса при различных значениях силы тока I_1.

Определите цену большого деления шкалы по осям *OX* и *OY* по метке, расположенной на одном из выступов ручки большего диаметра первого и второго каналов (ручки 4,5 на

рис.2, стр.10). Это значение необходимо умножить на 10, так как при данных измерениях установлен десятикратный делитель шкалы.
Для определения напряженности (H) и индукции (B) магнитного поля по формулам (2.07.6) и (2.07.14) необходимо измерить силу тока в первичной цепи I_1 и напряжение на конденсаторе U_c. Начинать измерения удобно с предельной петли гистерезиса.
Установите на экране осциллографа предельную петлю гистерезиса.
Измерьте напряжение на конденсаторе U_c и силу тока в первичной цепи I_1.
1. Для определения напряжения на конденсаторе U_c необходимо опустить перпендикуляр из вершины петли на ось OY и полученное число больших делений умножить на цену одного деления II канала и умножить на 10 (или число маленьких делений умножить на цену деления). Результат записывается в таблицу.
2. Для определения силы тока в первичной катушке необходимо:
   а) опустить перпендикуляр из вершины петли на ось OX;
   б) полученное число больших делений умножить на цену одного деления I канала и умножить на 10 (или число маленьких делений умножить на цену деления), получив, тем самым напряжение на резисторе R_8;
   в) полученное значение напряжения на резисторе R_8 в соответствии с законом Ома делим на величину сопротивления (R_8=10 Ом):

$$I_1 = U_{R8}/R_8 = U_{R8}/10.$$

Найденное таким образом значение силы тока I_1 записываем в таблицу.

Таблица

Результаты измерений

Номер опыта	Амплитудные значения		H, А/м	B, Тл	μ
	силы тока I_1, мА	напряжения U_C, мВ			
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Ручкой потенциометра R_1 уменьшаем величину силы тока таким образом, чтобы получить еще 9 петель гистерезиса и определяем для каждой петли значения напряжения U_c и силы тока I_1 (повторить п.п. 1 и 2).
Рекомендуется для удобства измерений уменьшать величину силы тока по оси OX через 5 маленьких делений (0,5 большого деления).
Вычислите B, H и μ по формулам (2.07.6), (2.07.14) и (2.07.15). Постройте графики зависимостей индукции магнитного поля B и магнитной проницаемости μ от напряженности H.
Снова получите на экране осциллографа предельную петлю. Определите площадь предельной петли. Для этого подсчитайте количество больших клеток, охватываемых

верхней половиной петли, удвойте его и умножьте на 100. Полученное число соответствует площади петли, выраженной в маленьких делениях.
Определите координаты вершин предельной петли гистерезиса X_{max}, Y_{max} по экрану осциллографа в маленьких делениях. Определите цену деления $\boldsymbol{Z_B}$ и Z_H, разделив максимальные значения B и H на соответствующие координаты вершины предельной петли.

$$Z_B = \frac{B_{max}}{Y_{max}}$$

$$Z_H = \frac{H_{max}}{X_{max}}.$$

Вычислите потери на перемагничивание по формуле (2.07.17) в Вт/м$^{-3}$.
По результатам лабораторной работы сделайте выводы о характере установленных зависимостей индукции магнитного поля и магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля для исследованного ферромагнетика.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите характеристики магнитного поля и дайте их определения.
2. Назовите величины, характеризующие магнитные свойства вещества.
3. Что такое намагниченность? Что характеризует эта величина? От чего она зависит?
4. На какие группы подразделяются вещества по магнитным свойствам?
5. Назовите отличительные свойства ферромагнитных веществ.
6. Что представляет собой кривая намагничивания?
7. В чем заключается явление магнитного гистерезиса?
8. Что такое остаточная индукция и коэрцитивная сила?
9. Что представляют собой магнитные домены?
10. Опишите процесс изменения доменной структуры при намагничивании ферромагнетика.
11. Что такое магнитное насыщение?
12. Нарисуйте схему установки, поясните назначение всех элементов схемы, расскажите порядок выполнения работы.
13. Выведите расчетные формулы для определения $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$.
14. На что расходуется энергия при перемагничивании ферромагнетика?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

15. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2 – М.: Наука, 1982 – С. 176 – 180.
16. Калашников С. Г. Электричество. – М.: Наука, 1970. – С. 257 – 266.
17. Трофимова Т. И. Курс общей физики. - М.: Высшая школа, 1985. 432 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.08

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУКТИВНОСТИ КАТУШКИ

1 Цель работы

Целью данной работы является изучение явления электромагнитной индукции и его законов, измерение индуктивности катушки, исследование зависимости индуктивности катушки от силы тока, протекающего по ее обмотке, а также индуктивности катушки, ее полного и индуктивного сопротивлений от частоты переменного тока.

2 Краткая теория.

Всякий контур, по которому течет ток, пронизывается магнитным полем, созданным этим током. Если сила тока в контуре меняется, то изменяется и сцепленный с контуром магнитный поток, поэтому вследствие явления электромагнитной индукции в контуре возникает эдс. Возникновение эдс в контуре при изменении силы тока в нем называется самоиндукцией. В соответствии с законом Фарадея величина эдс индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур, то есть,

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.08.1)$$

Магнитный поток, создаваемый током, протекающим в контуре, называется потоком самоиндукции Φ_s. Поток самоиндукции пропорционален индукции магнитного поля, создаваемого этим током, которая, в свою очередь, пропорциональна величине силы тока в контуре. Поэтому магнитный поток самоиндукции пропорционален величине силы тока

$$\Phi_s = L \cdot I \ , \qquad (2.08.2)$$

где L – индуктивность контура.

Индуктивность контура – это скалярная физическая величина, характеризующая способность контура создавать поток самоиндукции и зависящая от его формы, размеров и магнитной проницаемости среды. Из (2.08.2) следует, что индуктивность контура измеряется величиной магнитного потока, сцепленного с контуром, при силе тока в нем равной 1 А. За единицу измерения индуктивности в системе СИ принимается 1 Гн – это индуктивность такого контура, с которым сцеплен магнитный поток в 1 Вб при силе тока в контуре равной 1 А.

При неизменной индуктивности закон Фарадея для самоиндукции выглядит следующим образом:

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad (2.08.3)$$

т.е. эдс самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока в контуре. В соответствии с законом Фарадея можно дать другое определение индуктивности. Индуктивность определяется величиной эдс, возникающей в контуре, при изменении в нем силы тока на 1 А за 1 с. Тогда, согласно (2.08.3), 1 Гн – это индуктивность такого контура, в котором индуцируется эдс, равная 1 В при изменении в нем силы тока на 1 А за 1 с. Знак минус в формуле (2.08.3) отражает правило Ленца, согласно которому самоиндукция противодействует всякому изменению силы тока в контуре и представляет собой аналогию с инерцией в механике.

В электрической цепи наличие индуктивности приводит к возникновению добавочного индуктивного сопротивления катушки переменному току

$$X_L = 2\pi\nu L \qquad (2.08.4)$$

где ν – частота переменного тока.

Модуль полного сопротивления Z катушки переменному току определяется по закону Ома

$$Z = \frac{U}{I}. \qquad (2.08.5$$

где U и I – эффективные значения напряжения и силы тока в катушке.

Полное сопротивление катушки Z складывается из сопротивления катушки в цепи постоянного тока R (омического или активного сопротивления) и индуктивного сопротивления X_L в соответствии с формулой:

$$Z = \sqrt{R^2 + {X_L}^2}\ . \qquad (2.08.6)$$

или, подставив X_L,

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}\,, \qquad (2.08.7)$$

из которого можно выразить индуктивность катушки L

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi\nu} = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2}. \qquad (2.08.8)$$

Соотношение (2.08.8) лежит в основе опыта по определению индуктивности. Для того, чтобы определить индуктивность, необходимо измерить частоту переменного тока, действующее значение силы переменного тока, протекающего через катушку, действующее значения напряжения на катушке и омическое сопротивление катушки.

Индуктивность длинного соленоида с сердечником может быть рассчитана по формуле

$$L_C = \mu\mu_0 n^2 V \qquad (2.08.9)$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная,

n – число витков, приходящихся на единицу длины катушки,

V – объем катушки.

Измеряя индуктивность катушки, можно определять магнитную проницаемость материала, из которого изготовлен сердечник. В частности, таким способом можно определять магнитную проницаемость горных пород. Определив индуктивность катушки с сердечником из исследуемой породы L_C и без сердечника L_0, по отношению этих индуктивностей L_C/L_0 определяют μ. Определение магнитной проницаемости горных пород и минералов необходимо для изучения вопросов, связанных с установлением качества железных руд и железистых пород, магнитным обогащением полезных ископаемых, с разведкой рудных тел, исследованием трещиноватости массива горных пород.

3 Выполнение работы

Необходимые приборы: лабораторный стенд, внутри которого смонтированы все элементы схемы; генератор периодических сигналов; цифровой вольтметр. Рабочая схема опыта показана на рис. 1 и на панели стенда.

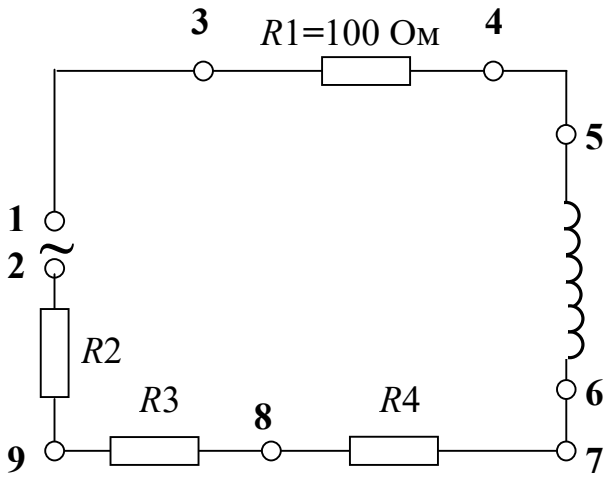


Рис. 1 Рабочая схема опыта

Порядок выполнения работы. Для того, чтобы определить индуктивность катушки по формуле (2.08.8), необходимо знать четыре параметра: R (омическое сопротивление катушки), ν (частоту переменного тока), U (напряжение на катушке) и I (силу тока в катушке).

Подготовьте к работе универсальный вольтметр и генератор периодических сигналов **Л-31** в соответствии с инструкциями по эксплуатации, находящимися на лабораторном столе. Переключатель рода работы генератора установите в положение ~ (создание гармонических колебаний). Определите омическое сопротивление обмотки катушки R. Для этого подключите универсальный вольтметр к клеммам 5–6. Переключатель "***РОД РАБОТЫ***" нужно установить в положение "R". Переключатель пределов измерения должен находиться в положении **1**. Запишите в таблицу 1 значение омического сопротивления катушки, снятое с табло вольтметра.

Не отключая цифровой вольтметр от катушки, переведите его в режим измерения эффективных значений переменных напряжений (переключатель "***РОД РАБОТЫ***" установите в положение $\widetilde{U}$).

1. Подключите к клеммам 1–2 генератор сигналов. Регулятор уровня сигнала установите в крайнее правое положение. Установите вращением ручки "***ЧАСТОТА***" частоту генерируемого сигнала 10 кГц. Запишите ее в таблицу 1.

2. Для измерения напряжения на катушке подключаем вольтметр к клеммам 5–6, при этом переключатель пределов измерений установить в положение **10**.

3. Для определения силы тока в катушке измеряем напряжение на резисторе R_1**,** включенном последовательно с катушкой. Для этого подключаем вольтметр к клеммам 3–4, а переключатель «***ПРЕДЕЛ ИЗМЕРЕНИЙ***» переводим в положение 1. Поскольку сопротивление R_1 равно 100 Ом, по закону Ома величина силы тока в цепи будет равна величине напряжения, деленной на 100.

Измерив напряжение на резисторе R_1**,** рассчитываем силу тока в цепи:

$$I = U_{R_1} / R = U_{R_1} / 100 .$$

4. Полученные значения напряжения на катушке и силы тока записываем в таблицу 1.

5. Повторите измерения еще два раза при различных значениях силы тока в цепи. Для этого сначала исключаем из цепи сопротивления R_2 и R_3, для чего можно подключить генератор к клеммам 2–8. Затем исключаем все три сопротивления R_2, R_3 и R_4**,** подключая генератор к клемма 2–7. Каждый раз измеряем напряжение на катушке и силу тока, повторяя п.п. 2–4.

По данным измерений рассчитайте три значения индуктивности катушки по формуле (2.08.8), подставляя значение частоты генератора 10 кГц.

Таблица 1

Результаты измерений индуктивности в зависимости от силы тока

Номер опыта	U**,** В	I, мА	L, Гн
1			
2			
3			
Частота переменного тока		ν =	
Омическое сопротивление катушки		R =	

По данным измерений рассчитайте три значения индуктивности катушки по формуле (2.08.8), подставляя значение частоты генератора 10 кГц.

В работе также исследуется зависимость индуктивности катушки, ее индуктивного и модуля полного сопротивлений от частоты генератора при неизменной величине силы тока. Для этого подключите вольтметр к сопротивлению R_1. Первый опыт проведите, установив частоту генератора 20 кГц. Регулятор уровня сигнала установите в крайнее правое положение. Определите силу тока в цепи согласно п.3. Затем, подключив вольтметр к катушке, измерьте напряжение на ней согласно п.2. Результаты запишите в таблицу 2. Опыт повторите при других значениях частоты ν, приведенных в таблице, каждый раз устанавливая с помощью регулятора уровня первоначальное значение силы

тока. Рассчитайте в каждом случае величину индуктивности, индуктивного и полного сопротивлений катушки. По результатам измерений постройте графики зависимости полного и индуктивного сопротивлений от частоты.

Таблица 2

Результаты измерений индуктивности при различных значениях частоты генератора

Номер опыта	ν, кГц	*I*, мА	*U*, *B*	*L*, Гн	*Z*, Ом	X_L, Ом
1	20					
2	10					
3	5					
4	2					
5	1					

Вычислите среднее значение индуктивности и среднюю абсолютную погрешность. Результат запишите в виде:

$$\overline{L} = \overline{L} \pm \Delta\overline{L} \qquad (2.08.9)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается явление самоиндукции?
2. Что называется индуктивностью и в каких единицах она измеряется?
3. От чего зависит индуктивность катушки?
4. Запишите формулы для индуктивного и модуля полного сопротивлений катушки.
5. Выведите расчетную формулу для определения индуктивности катушки.
6. Как зависит модуль полного сопротивления катушки от частоты изменения тока в ней?
7. Какое влияние оказывает наличие сердечника в катушке на величину силы тока в ней при переменном и постоянном токах?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
2. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1977. – 376 с.



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО

«Уральский государственный горный университет»

О. В. Садырева, И. Г. Коршунов

Ф И З И К А

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Екатеринбург

2020

Методические указания составлены в соответствии с программами по курсу физики для студентов всех направлений подготовки в УГГУ. Они содержат условия задач для самостоятельной работы, при выполнении контрольных работ студентами по следующим темам курса физики: механика; молекулярная физика и термодинамика; электричество и магнетизм; механические и электромагнитные колебания и волны; волновая и квантовая оптика; квантовая физика и физика атома; элементы ядерной физики. Также в них содержатся методические указания к решению задач, их оформлению, список рекомендуемой литературы и справочные данные, необходимые для решения задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются преподавателем в начале соответствующего семестра.
2. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы.
3. Условия задач в контрольной работе необходимо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради нужно оставлять поля.
4. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, при решении которых допущены ошибки.
5. При решении задач необходимо пользоваться следующей схемой:

- Внимательно прочитать условие задачи.
- Выписать столбиком все величины, входящие в условие, и выразить их в одних единицах (преимущественно в Международной системе единиц СИ).
- Если это возможно, представить условие задачи в виде четкого рисунка. Правильно сделанный рисунок – это наполовину решенная задача.
- Уяснить физическую сущность задачи, установить основные законы и формулы, на которых базируется условие задачи.
- Если при решении задачи применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
- Если равенства векторные, то их необходимо спроектировать но оси координат и записать в скалярной форме.
- Решить задачу сначала в общем виде, то есть, в буквенных обозначениях, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.
- После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин их размерности, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.
- Подставить в конечную формулу числовые значения, выраженные в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

- При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.
- Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.
- Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями и комментариями.

1. МЕХАНИКА

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

2. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с2 , останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

3. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

4. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема.

5. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

6. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровоза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровоза выражается формулой $S = 800 + 8t - 0{,}5\,t^2$, м.

7. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

8. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

9. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

10. На горизонтальной платформе шахтной клети находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/^{2} , при спуске с ускорением 9,8 м/с^2.

11. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

12. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3.

13. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. =736 Вт). Определить коэффициент трения.

14. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением 0,5 м/^{2}, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30°.

15. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5°.

16. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин$^{-1}$.Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

17. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

18. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5.

19. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика.

20. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой $8с^{-1}$.Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик?

21. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел.

22. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1м.
23. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

24. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергия поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии?

25. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения.

2.МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

26. Какой объем занимает 1 кг водорода при давлении 106 Па и температуре 20°С? Молярная масса водорода $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

27. Для автогенной сварки привезли баллон кислорода вместимостью 100 л. Найти массу кислорода, если его давление 12 МПа и темпера-тура 16°С. Молярная масса кислорода $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

28. Определить среднюю плотность сжатого воздуха в рудничной воздухопроводной сети, если давление воздуха в компрессоре составляет $7 \cdot 10^5$ Па, а давление у воздухоприемников $6 \cdot 10^5$ Па. Температура воздуха в начале и конце сети равна 27°С и 7°С. Молярная масса воздуха равна 0,029 кг/моль.

29. Стальной баллон емкостью 25 л наполнен ацетиленом $C_2 H_2$ при температуре 27° С до давления 20 МПа. Часть ацетилена использовали для автогенной сварки подкрановых путей в шахте. Какая масса ацетилена из-расходована, если давление в баллоне при температуре 23°С стало равным 14 МПа ? Молярная масса ацетилена 0,026 кг/моль.

30. Сжатый воздух в баллоне имеет температуру 15°С. Во время пожара температура воздуха в баллоне поднялась до 450° С. Взорвется ли баллон, если известно, что при этой температуре он может выдержать давление не более 9,8 МПа? Начальное давление в баллоне 4,8 МПа.

31. Температура взрыва гремучей смеси, то есть температура, до которой нагреты в первый момент газообразные продукты взрыва, достигает в среднем 2600° С, если взрыв происходит внутри замкнутого пространства. Во сколько раз давление при взрыве гремучего газа превосходит давление смеси до взрыва, если последнее равно 10^5 Па, а начальная температура 17° С?

32. Компрессор, обеспечивающий работу отбойных молотков в забое, засасывает из атмосферы 100 л воздуха в секунду при давлении 1 атм. Сколько отбойных молотков может работать от этого компрессора, если для каждого молотка необходимо 100 $см^3$ воздуха в секунду при давлении 50 атм ?

33. В двигателе Дизеля сжимается адиабатически воздух, в результате чего его температура поднимается, достигая температуры воспламенения нефти 800° С. До какого давления сжимается при этом воздух и во сколько раз уменьшается его объем, если начальное давление 1 атм, начальная температура 80°С, γ=1,4?

34. Современные вакуумные насосы позволяют понижать давление до 10^{-15} мм рт. ст. Сколько молекул газа содержится в объеме 1 $см^3$ при указанном давлении и температуре 27° С ?

35. Определить средние квадратичные скорости молекул метана CH_4 до взрыва и после него, если температура до взрыва равна 20° С, а после него 2600° С. Молярная масса 0,016 кг/моль.

36. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре 350 К, а также кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 4 г кислорода.

37. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении окиси углерода CO, принимая этот газ за идеальный.

38. На сжатие азота при постоянном давлении была затрачена работа 12 кДж. Найти изменение внутренней энергии и затраченное количество теплоты.

39. Какое количество теплоты для нагревания от 50°C до 100° C надо сообщить азоту массой 28 г, который находится в цилиндре с подвижным поршнем? Чему равна при этом процессе работа расширения?

40. При адиабатическом процессе расширения внутренняя энергия кислорода уменьшилась на 8,38 кДж. Вычислить массу кислорода, если начальная температура его 47° C, а объем увеличился в 10 раз.

41. В двигателе внутреннего сгорания температура газообразных продуктов сгорания поднимается от 600° C до 2000° C. Найти количество теплоты, подведенное к 1 кг газа при постоянном давлении, изменение его внутренней энергии и совершенную работу, если удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно равны 1,25 кДж/(кг·К) и 0,96 кДж/(кг·К).

42. Определить мощность на валу компрессора производительностью 25 $м^3$ в минуту, работающего на подземную воздушную сеть, если первоначальное давление 1 атм, а давление, развиваемое компрессором в конце изотермического сжатия, составляет 7 атм.

43. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227° C. Определить термический коэффициент полезного действия цикла и температуру охладителя, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

44. От идеальной теплосиловой установки, работающей по циклу Карно, отводится ежечасно 270 МДж теплоты с помощью холодильника при 9° C. Определить полезную мощность установки, если количество подводимой в час теплоты равно 900 МДж. При какой температуре подводится теплота?

45. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в три раза выше, чем температура холодильника. Нагреватель передал газу 42 кДж теплоты. Какую работу совершил газ?

46. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу, равную 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Найти количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

47. Вследствие трения о шкив ремень заряжается, причем каждый квадратный метр ремня содержит 0,02Кл заряда. Ширина ремня 0,3м, скорость его движения 20 м/с. Какой заряд проходит ежесекундно через любую неподвижную плоскость, перпендикулярную ремню?

48. Определить заряд, емкость и потенциал Земли, считая ее шаром радиусом $6 \cdot 10^3$ км и зная, что напряженность поля около поверхности равна 100 В/м.

49. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора 6 кВ, заряд каждой пластины 10 нКл. Найти энергию конденсатора и силу взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними 2 см.

50. Какое количество теплоты выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами 15 кВ, расстояние 1 мм, диэлектрик слюда ($\varepsilon = 6$), площадь каждой пластины 300 $см^2$?

51. Какую работу надо совершить , чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от 0,03 м до 0,1 м? Площадь пластин 100 $см^2$. Конденсатор подключен к источнику напряжения 220 В.

52. Камнедробилка должна работать под напряжением 100 В, потребляя ток в 40 А. Напряжение на электростанции 120 В, а расстояние до нее 1 км. Определить сечение медных соединительных проводов ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом м).

53. Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 1,5 мм для изготовления спирали вулканизатора , применяемого при сращивании кабелей, если сопротивление спирали 5,5 Ом, а удельное сопротивление нихрома $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом м?

54. Цена деления прибора $1,5 \cdot 10^{-5}$ А /дел. Шкала прибора имеет 200 делений, его внутреннее сопротивление 100 Ом. Какие сопротивления нужно подключить к этому прибору и каким образом, чтобы можно было измерять напряжение до 200 В или ток до 4 А?

55. Определить сопротивление медных магистральных проводов при температуре 30^0 С. Расстояние от места расположения проводов до взрывной станции 400 м. Площадь сечения проводов 0,8 $мм^2$, $\rho = 0{,}017$(Ом· $мм^2$ /м), $\alpha = 0{,}0044$ град-1.

56. ЭДС батареи 12 В, ток короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешней цепи?

57. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если при токе 5 А она дает во внешнюю цепь мощность 9,5 Вт, а при токе 8 А мощность 14,4 Вт.

58. Ток в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно нарастает от 0 до 10 А в течение 30 с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

59. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной на расстояние 5 см от проводника.

60. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи 50 А и 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удаленной на 25 см от первого и на 40 см от второго провода.

61. Найти число витков в катушке диаметром 10 см, если магнитная стрелка, помещенная в ее центре, отклонилась от плоскости магнитного меридиана на 38° при токе 0,2 А. Горизонтальная составляющая земного магнитного поля 12,8 А /м . Плоскость катушки совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

62. Определить горизонтальную составляющую напряженности магнитного поля Земли,
если обмотка тангенс–буссоли имеет 10 витков радиусом 25 см. При токе 0,64 А стрелка отклоняется на угол 45°.

63. Плоский контур площадью 20 см ² находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл. Найти магнитный поток, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол 60° с линиями индукции.

64. Электромагнит изготовлен в виде тороида со средним диаметром 51 см и вакуумным зазором 2 мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в зазоре, если при неизменном токе в обмотке зазор увеличить в три раза? Магнитная проницаемость сердечника тороида 800.

65. Найти напряженность магнитного поля между полюсами электромагнита , если проводник массой 10 г и длиной 1м при токе в нем 19,6 А висит в поле , не падая.

66. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл движется проводник длиной 10 см со скоростью 15 м /с, направленной перпендикулярно к магнитному полю. Найти ЭДС, индуцированную в проводнике.

67. Обмотка электромагнита содержит 800 витков. Площадь сечения сердечника 15 $см^2$, Индукция магнитного поля в сердечнике 1,4 Тл. Вычислить величину средней ЭДС , возникающей в обмотке при размыкании тока, если ток уменьшается до нуля в течение 0,001с.

68. На железное кольцо намотано в один слой 200 витков провода. Чему равна энергия Магнитного поля, если при токе 2,5 А магнитный поток в железе 0,5 мВб?

69. Замкнутый соленоид намотан на немагнитный каркас и содержит 20 витков на каждый сантиметр длины. Найти объемную плотность энергии поля при токе 1 А.

70. С какой скоростью должен нарастать ток в катушке с числом витков 800, площадью поперечного сечения 10 $см^2$, длиной 30 см, чтобы величина ЭДС самоиндукции, возникшей в ней, была равна 25 мВ?

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

71. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника
0,56м.

72. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 $мин^{-1}$. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

73. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 $мин^{-1}$. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм.

74. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

75. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 $мин^{-1.}$ Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

76. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 $с^{-1}$.

77. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0{,}5\sin t$, $y = 2\cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения.

78. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний.

79. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза.

80. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

81. Источник незатухающих гармонических колебаний подчиняется закону $x = 5\sin 3140t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с.

82. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0{,}1\sin 0{,}5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него.

83. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха.

84. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2{,}3\cdot 10^3$ кг/м^3.

85. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6}\sin 10^4\pi t$ (м). Найти скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5\cdot 10^3$ м/с.

86. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 2 мГн и конденсатора емкостью 888 пФ. На какую длину волны настроен контур?

87. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Площадь каждой пластины конденсатора 30 см^2 и расстояние между ними 0,1 см. Число витков катушки 1000, длина ее 30 см, сечение 1 см^2.

88. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 0,025 мкФ. Заряд на конденсаторе равен $2{,}5\cdot^{10\text{-}6}$ Кл. Какова зависимость разности потенциалов на конденсаторе от времени?

89. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух

пластин площадью 75 см^2 каждая, рас-стояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

90. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 1,02 Гн и конденсатора емкостью 25 нФ. На обкладках конденсатора сосредоточен заряд 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения тока в цепи в зависимости от времени.

91. Разность потенциалов на конденсаторе в контуре за 1 мс уменьшается в три раза. Найти коэффициент затухания.

92. Электромагнитные волны распространяются в некоторой однородной среде со скоростью $2{,}5\cdot10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания в данной среде, если частота колебаний 1 МГц?

93. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 м^2 и расстоянием между ними 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны 750 м.

94. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 80 пФ и катушки индуктивностью 0,5 мГн. Найти максимальный ток в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора 300 В. На какую длину волны резонирует данный контур?

95. Закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре задан уравнением $U = 50\cos10^4\pi t$(В). Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность, длину волны. Написать закон изменения тока в контуре.

96. Колебательный контур состоит из конденсатора переменной емкости от 12 пФ до 80пФ и катушки с индуктивностью 1,2 мГн. Найти диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре.

97. Индуктивность колебательного контура 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость контура, чтобы он резонировал на длину волны 300 м?

98. Катушка (без сердечника) длиной 50 см и площадью поперечного сечения 3 см^2 имеет 1000 витков и соединена параллельно с конденсатором. Он состоит из двух пластин площадью 75 см^2 каждая, расстояние между пластинами 5 мм, диэлектрик - воздух. Найти период колебаний контура и длину волны, на которую он настроен.

99. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 2 мкФ получить частоту 1000 Гц?

100. Индуктивность катушки в колебательном контуре 20 мкГн. Требуется настроить этот контур на частоту 5 МГц. Какую емкость следует выбрать?

101. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами по 100 $см^2$ каждая и катушки с индуктивностью 1 мкГн резонирует на волну длиной 10м. Найти расстояние между пластинами конденсатора.

5. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

102. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга I мм, расстояние от щелей до экрана 3м, расстояние между соседними интерференционными максимумами на экране 1,5 мм. Найти длину волны источника монохроматического света.

103. Оранжевые лучи с длиной волны 650 нм от двух когерентных источников, расстояние между которыми 120 мкм, падают на экран. Расстояние от источников до экрана 3,6 м. Найти расстояние между центрами соседних темных полос на экране.

104. Какую наименьшую толщину должна иметь пластинка, сделанная из материала с показателем преломления 1,54, чтобы при освещении ее лучами с длиной волны 750 нм, перпендикулярными к пластинке, она в отраженном свете казалась красной?

105. Между двумя плоскопараллельными пластинками лежит проволочка, отчего образовался воздушный клин. Пластинки освещаются светом с длиной волны 500 нм. Угол падения лучей 0°, длина пластинки 10 см. Расстояние между интерференционными полосами в отраженном свете 1,8 мм. Найти толщину проволочки.

106. Плосковыпуклая линза (n=1,5) с оптической силой 0,5 диоптрий выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Найти радиус пятого темного кольца Ньютона в проходящем свете (λ =600 нм).

107. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 4 м. Чему равна длина волны падающего света, если радиус 5-го светлого кольца Нью-она в отраженном свете равен 3,6 мм?

108. На щель шириной 0,2 мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны 640 нм. Определить угол отклонения лучей, соответствующих первой светлой дифракционной полосе.

109. На пластинку со щелью падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному минимуму, равен 1°. Сколько длин волн падающего света составляет ширина щели?

110. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Найти угол между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

111. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия с длиной волны 670 нм спектра второго порядка?

112. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядка накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (400 нм) спектра третьего порядка?

113. На дифракционную решетку, имеющую 800 штрихов на I мм, падает параллельный пучок белого света. Какова разность углов отклонения конца первого и начала второго спектров? Принять длину волны красного света 760 нм, фиолетового 400 нм.

114. На дифракционную решетку, содержащую 50 штрихов на миллиметр, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проектируется на экран с помощью линзы, помещенной вблизи решетки. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м. Границы видимого спектра 400 нм и 760 нм.

115. Угол преломления луча света в жидкости равен 35°. Определить показатель преломления этой жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.
116. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были бы наиболее полно поляризованы.

117. Предельный угол полного внутреннего отражения луча на границе жидкости с воздухом равен 43°. Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

118. Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения света в этом кристалле.

119. Угол между плоскостями поляризации двух призм Николя равен 45°. Во сколько раз
уменьшится интенсивность света, прошедшего через николи, если этот угол увеличить до 60°?

120. Температура «голубой» звезды $3 \cdot 10^4$К. Определить интегральную интенсивность излучения и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

121. Приняв температуру поверхности Солнца равной 6000 К, определить энергию, излучаемую с одного квадратного метра за секунду и длину волны, соответствующую максимуму излучательной способности.

122. Поток энергии, излучаемой из смотрового окошка печи за секунду, равен 34 Вт. Найти температуру печи, если площадь отверстия 6 $см^2$.

123. Средняя величина энергии, теряемой вследствие излучения с одного квадратного сантиметра поверхности Земли за минуту, равна 0,55 Дж. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, излучающее такое же количество энергии?

124. Печь при температуре 1100 К посылает на измерительный прибор некоторое тепловое излучение. Какова должна быть температура печи, чтобы получаемое прибором излучение увеличилось в два, четыре и шестнадцать раз?

125. Максимальная лучеиспускательная способность абсолютность черного тела приходится на длину волны 800 нм. Какая мощность должна быть подведена к этому телу, поверхность которого 100 $см^2$, чтобы поддерживать его при постоянной температуре.

126. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела, максимум испускательной способности сместился с 500 нм на 750 нм. Во сколько раз уменьшилась суммарная мощность излучения?

127. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта равна 307 нм и кинетическая энергия фотоэлектрона I эВ?

128. Калий (работа выхода 2 эВ) освещается монохроматическим светом с длиной волны 509 нм. Определить максимально возможную кинетическую энергию фотоэлектронов.

129. Определить работу выхода электрона из цезия и серебра, если красная граница фотоэффекта у этих металлов составляет соответственно 660 нм и 260 нм.

130. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует видимой части спектра с длиной волны 500 нм.

131. Определить давление света на стенки электрической стоваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы

отражают 10 % падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

132. На поверхность площадью 100 $см^2$ ежеминутно падает 63 Дж световой энергии. Найти величину светового давления, если поверхность полностью отражает все лучи и если полностью поглощает все лучи.

133. Давление света с длиной волны 600 нм на черную поверхность равно 2,2·10-7Н/$м^2$. Сколько фотонов падает на I $см^2$за одну секунду?

6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА И ФИЗИКА АТОМА

134. Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода. Выделить эту спектральную линию на схеме энергетических уровней атома водорода. Постоянная Ридберга равна 1,097·107$м^{-1}$.

135. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена). Начертить схему энергетических уровней атома водорода.

136. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны 121,5 нм. Определить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода.

137. Вычислить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.

138. Определить длины волн де Бройля для электрона и протона, движущихся со скоростью 1000 км/с. Масса электрона 9,1·10^{-31}кг, масса протона 1,67·$10^{-27кг}$.

139. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,10 нм ?

140. Определить длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

141. Электрон, движущийся со скоростью 6·10^6м/с, попадает в продольное ускоряющее однородное электрическое поле напряженностью 5 В/см. Какое расстояние должен пройти электрон в таком поле, чтобы его длина волны стала равной 0,10 нм?

142. Рассчитать дебройлевскую длину волны для протона с кинетической энергией, равной энергии покоя электрона 0,51МэВ.

143. Найти коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на 23 кВ увеличивает искомую длину волны в два раза.

144. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, составляет 0,85 скорости света.

145. Для определения постоянной Планка к рентгеновской трубке приложили напряжение 16 кВ и определили минимальную длину волны сплошного рентгеновского излучения (λмин =77,6 пм). Вычислить по этим данным постоянную Планка.

146. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в возбужденном состоянии (n=2).
Вычислить вероятность нахождения частицы в крайней четверти ямы.
46. Частица в потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить частицу в крайней трети ямы?
147. В одномерной потенциальной яме шириной *l* находится электрон. Найти вероятность нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

148. Вычислить величину момента импульса L орбитального движения электрона, находящегося в атоме водорода в s-состоянии и в p-состоянии.

149. Частица в потенциальной яме шириной *l* находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале *l*/4, равноудаленном от стенок ямы.

150. Определить возможные значения проекции момента импульса L_Z орбитального движения электрона в атоме водорода на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d-состоянии.

151. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной *l*
с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии (n=3).

7. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

152. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за секунду. Во сколько раз уменьшится активность препарата стронция $_{38}Sr^{90}$ через 100 лет? Период полураспада равен 28 лет.

153. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1 мкг изотопа $_{11}Na^{24}$, период полураспада которого составляет 15 часов?

154. Препарат $_{92}U^{238}$ массой 1 г излучает $1{,}24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа урана и активность препарата.

155. Найти число распадов за одну секунду в 1 г радия, период полураспада которого 1590 лет. Молярная масса радия 0,226 кг/моль.

156. Активность препарата пропорциональна числу ядер, распадающихся за одну секунду. Во сколько раз уменьшится активность иода $_{53}J^{124}$ спустя 12 суток? Период полураспада равен четырем суткам.

157. Сколько β-частиц испускается в течение суток при распаде изотопа фосфора $_{15}P^{32}$ массой 1 мкг? Период полураспада 14,3 суток.
158. Активность препарата уменьшилась в 256 раз. Сколько периодов полураспада составляет промежуток времени, за который произошло такое уменьшение активности?

159. За один год начальное количество радиоактивного вещества уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?
60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется нераспавшейся через промежуток времени, равный двум периодам полураспада?

160. Дефект массы ядра $_7N^{15}$ равен 0,12396 а.е.м. Определить массу атома. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

161. Найти удельную энергию связи ядра $_6C^{12}$, если известно, что m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0$n1 = 1,00867 а.е.м.; m $_{12}C^6$ = 12,00000 а.е.м.

162. Рассчитать массу нейтрального атома, если ядро его состоит из трех протонов и двух нейтронов, а энергия связи ядра равна 26,3 Мэв. (m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.).

163. Определить энергию связи ядра изотопа кислорода $_8O^{16}$, если m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.;
m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 1 5,99491 а.е.м.

164. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон ядра атома $_{11}Na^{23}$, если m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

165. Найти дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $_3Li^7$, если известно, что m $_3Li^7$ =7,01601 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

166. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода $_1H^1$ равна 13,6 эВ. Определить, насколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

167. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $_5B^{11}$,если известны следующие массы: m $_5B^{11}$ = 11,00931 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.

168. Найти энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра $_{11}Na^{23}$, если известны следующие массы: m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_{11}Na^{23}$ = 22,98977 а.е.м.; m $_{11}Na^{22}$ = 21,99444 а.е.м.

169. Найти энергию отрыва нейтрона от ядра $_2He^4$,если известны массы: m $_0n^1$ = 1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.

170. Найти энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра $_8O^{16}$ ($_8O^{16} \rightarrow {}_7N^{15} + {}_1H^1$). m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; m $_8O^{16}$ = 15,99491 а.е.м.; m $_7N^{15}$ = 15,00011 а.е.м.

171. Найти изменение массы при следующей ядерной реакции:
$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{15}P^{30} + {}_0n^1$, если m $_{13}Al^{27}$ =2 6,98154 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_{15}P^{30}$= 29,97263 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.

172.Вычислить энергетический эффект ядерной реакции: $1H^2 + {}_1H3 \rightarrow {}_2He^4 + {}_0n^1$, если m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_1H^3$ =3,01605 а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.

173. В термоядерном реакторе с дейтериевым горючим может происходить вторичная термоядерная реакция $_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$. Вычислить энергию этой реакции. (m $_2He^3$ = 3,01603 а.е.м.; m $_1H^2$ = 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; m $_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.).

174. Вычислить энергию ядерной реакции $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$. (m $_7N^1$ ^{4}= 14,00307а.е.м.; m $_0n^1$ =1,00867 а.е.м ; m $_6C^{14}$= 14,00324 а.е.м.; m $_1H^1$= 1,00783 а.е.м.).

175. Определить энергию ядерной реакции $_3Li6 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4$. (m $_3Li^6$ = 6,01513 а.е.м.; m $_1H^2$= 2,01410 а.е.м.; m $_2He^4$ =4 ,00260 а.е.м.).

176. Какую минимальную энергию должен иметь квант для вырывания нейтрона из ядра $_6C^{14}$? Известны массы: m $_6C^{14}$ = 14,00324 а.е.м.; m $_0n^1$= 1,00867 а.е.м.; m $_6C^{13}6$ = 13,00335а.е.м.

177. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы разделить $_6C^{12}$ на три равные части.(m $_6C^{12}$= 12,00000 а.е.м.; m $_2He^4$= 4,00260 а.е.м.).

178. Определить энергию ядерной реакции $_{20}Ca^{14} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{19}K^{41} + 2He^4$. ($m\ {}_{20}Ca^{4\,4}$= 43,95549 а.е.м.; $m\ {}_1H^1$ = 1,00783 а.е.м.; $m\ {}_2He^4$ = 4,00260 а.е.м.; $m\ {}_{19}K^{41}$= 40,96184 а.е.м.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

8.1 Основная литература

.

1.	И.Г. Коршунов. Физика. – Екатеринбург: Ид-во УГГУ, 2014. – 341 с.
2.	В.И. Горбатов, В.Ф. Полев. Физика. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ (Ч.1, 2012.-105 с.; Ч.2, 2013.-115 с.; Ч.3.- 2014.-147 с.)
3.	Михайлов В.К. Физика: учебное пособие/ Михайлов В.К.— Электрон. текстовые данные.- М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.-120 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23753.html - ЭБС «IPRbooks».
4.	Михайлов В.К. Волны. Оптика. Атомная физика. Молекулярная физика: учебное пособие/ Михайлов В.К., Панфилова М.И.-Электрон. текстовые данные.-М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.-144 с.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/62614.html -ЭБС «IPRbooks».
5.	Трофимова Т.М. Курс физики. Академия, 2010.- 560 с.

Дополнительная литература

1. И..Г. Коршунов. Основы физики.- Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2010. - 312 с.
2. Ветрова В.Т. Физика. Сборник задач: учебное пособие/ Ветрова В.Т.- Электрон. текстовые данные.- Минск: Вышэйшая школа, 2015.-446 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/48021.html -ЭБС «IPRbooks».
3. Чакак А.А. Физика. Краткий курс: учебное пособие для студентов очно-заочной формы обучения вузов, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий/ Чакак А.А., Летута С.Н. Электрон. текстовые данные. Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2011.-541 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/30092.html - ЭБС «IPRbooks».
4. Сарина М.П. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Часть 1. Механика: учебное пособие/ Сарина М.П.- Электрон. текстовые данные.- Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2014.- 187 с.- Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45392.html - ЭБС «IPRbooks».

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Скорость света в вакууме	c	$3.00 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Число Авогадро	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8.31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	*1а.е.м.*	$1.660 \cdot 10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж/с $1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж/с

Приложение 2

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка			Множитель	Приставка			Множитель
Наименование	Обозначение			Наименование	Обозначение		
	русское	международное			русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}	деци	д	d	10^{-1}
пэта	П	P	10^{15}	санти	с	c	10^{-2}
тера	Т	T	10^{12}	милли	м	m	10^{-3}
гига	Г	G	10^{9}	микро	мк	μ	10^{-6}
мега	М	M	10^{6}	нано	н	n	10^{-9}
кило	к	k	10^{3}	пико	п	p	10^{-12}
Гекто	г	h	10^{2}	фемто	ф	f	10^{-15}
Дека	да	da	10^{1}	атто	а	a	10^{-18}
П р и м е ч а н и е: Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.)							

Приложение 3

Единицы физических величин, имеющие собственные наименования

Величина	Единица	
	Наименование	Обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср
Сила, вес	ньютон	Н
Давление	паскаль	Па
Напряжение (механическое)	паскаль	Па
Модуль упругости	паскаль	Па
Работа, энергия	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт
Частота колебаний	герц	Гц
Термодинамическая температура	кельвин	К
Разность температур	кельвин	К
Теплота, количество теплоты	джоуль	Дж
Количество вещества	моль	моль
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарад	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн
Сила света	кандела	кд
Световой поток	люмен	лм
Освещенность	люкс	лк
Поток излучения	ватт	Вт
Поглощенная доза излучения (доза излучения)	грэй	Гр
Активность изотопа	беккерель	Бк

Приложение 4

Внесистемные единицы

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна атомная единица массы	т а.е.м.	10^3 кг $1.66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута час сутки	мин ч сут	60 с 3600 с 86400 с
Плоский угол	градус минута секунда град	…• …′ …″ град	$1.74 \cdot 10^{-2}$ рад $2.91 \cdot 10^{-4}$ рад $4.85 \cdot 10^{-6}$ рад $(\pi/200)$ рад
Объем, вместимость	литр	Л	10^{-3} м^3
Длина	астрономическая единица световой год парсек	а.е. св. год пк	$1.50 \cdot 10^{11}$ м $9.46 \cdot 10^{15}$ м $3.08 \cdot 10^{16}$ м
Оптическая сила	диоптрия	Дптр	1 м$^{-1}$
Площадь	гектар	Га	10^4 м^2
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Полная мощность	вольт-ампер	В·А	
П р и м е ч а н и е: Единицы времени (минуту, час, сутки), плоского угла (градус, минуту, секунду), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.			

Приложение 5

Плотность некоторых твердых тел

Твердое тело	Плотность, г/см^3	Твердое тело	Плотность, г/см^3
Алюминий	2.70	Цезий	1.90
Барий	3.50	Каменная соль	2,2
Ванадий	6.02	Латунь	8,55
Висмут	9.80	Марганец	7,40
Железо (чугун, сталь)	7.88	Платина	21,4
Литий	0.53	Золото	19,3
Медь	8.93	Висмут	9,8
Никель	8.90	Уран	18,7
Свинец	11.3	Цинк	7.15
Серебро	10.5	Вольфрам	19,3

Приложение 6

Плотность некоторых жидкостей и газов

Жидкость (при 15° С)	Плотность, г·/см^3	Газ (при нормальных условиях	Плотность, кг/м^3
Вода (дистиллированная при 4°С)	1.00	Водород	0.09
Глицерин	1.26	Воздух	1.29
Керосин	0.8	Гелий	0.18
Ртуть	13.6	Аргон	1,78
Масло (оливковое, смазочное)	0.9	Азот	1,25
Масло касторовое	0.96	Кислород	1.43
Сероуглерод	1.26		
Эфир	0.7		
Спирт	0.80		

Приложение 7

Удельное сопротивление ρ некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, Ом·м	Материал	Удельное сопротивление, Ом·м
Алюминий	$2{,}53\cdot10^{-8}$	Ртуть	$9{,}6\cdot10^{-7}$
Алюминий провод	$2{,}87\cdot10^{-8}$	Свинец	$2{,}08\cdot10^{-7}$
Бумага	10^{15}	Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$
Вода дистиллированная	10^{4}	Сталь литая	$1{,}3\cdot10^{-7}$
Вода морская	0,3	Сталь чистая	$1{,}01\cdot10^{-7}$
Вольфрам	$5{,}5\cdot10^{-8}$	Стекло	10^{11}
Графит	$3{,}9\cdot10^{-6}$	Стекло кварцевое	10^{16}
Железо чистое	$9{,}8\cdot10^{-8}$	Угольные щётки	$4\cdot10^{-5}$
Железо	$8{,}7\cdot10^{-8}$	Цинк	$5{,}9\cdot10^{-8}$
Золото	$2{,}2\cdot10^{-8}$	Чугун серый	$1\cdot10^{-6}$
Константан	$5\cdot10^{-7}$	Никель	$8{,}7\cdot10^{-8}$
Масло парафиновое	10^{14}	Нихром	$1{,}12\cdot10^{-6}$
Магний	$4{,}4\cdot10^{-8}$	Олово	$1{,}2\cdot10^{-7}$
Манганин	$4{,}3\cdot10^{-7}$	Платина	$1{,}07\cdot10^{-7}$
Медь	$1{,}72\cdot10^{-8}$	Медь провод	$1{,}78\cdot10^{-8}$

Приложение 8

Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Ацетон	21,4	Парафин	2,0
Вакуум	1,0	Парафинированная бумага	2,0
Воздух	1,000594	Полиэтилен	2,2
Вода	81	Слюда	7,0
Вода дистиллированная	31	Спирт этиловый	25,1
Воск	7,8	Спирт метиловый	33,5
Керосин	2,0	Стекло	7,0
Масло	5,0	Фарфор	5,0
Масло трансформаторное	2,2	Эбонит	2,6

Приложение 9

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
A, α	Альфа	N, ν	ню
B, β	Бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	Гамма	O, o	омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	пи
E, ε	Эпсилон	P, ρ	ро
Z, ς	Дзета	Σ, σ	сигма
H, η	Эта	T, τ	тау
Θ, θ	Тэта	Y, υ	ипсилон
J, i	Иота	Φ, φ	фи
K, κ	Каппа	X, χ	хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	Ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания к решению задач и выполнению домашних контрольных работ	3
1. Механика	4
2. Молекулярная физика и термодинамика	7
3. Электричество и магнетизм	10
4. Механические и электромагнитные колебания и волны	12
5. Волновая и квантовая оптика	15
6. Квантовая физика и физика атома	18
7. Элементы ядерной физики	19
Список литературы	23
Приложения	24

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____ В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Б1.О.11 ХИМИЯ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Зайцева Н.А., к.х.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры
Химии
(название кафедры)
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*
Амдур А.М.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 12.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета
Горно-механического
(название факультета)
Председатель _____ *(подпись)*
Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

Задание 1. Какой подуровень заполняется в атоме электронами после заполнения подуровня 4p?

Решение. Подуровню 4p отвечает сумме n+l, равная 4+1=5. Такой же суммой n+l характеризуют подуровни 3d(3+2=5) и 5s(5+0=5) . Однако состоянию 3d отвечает меньшее значение n(n=3), чем состоянию 4p, поэтому подуровень 3s будет заполняться раньше, чем подуровень 4p. Следовательно, в соответствии с правилом Клечковского после заполнения подуровня 4p будет заполняться подуровень 5d, которому отвечает на единицу большее значение n(n=5) .

Задание 2. Напишите электронные формулы атомов и ионов, укажите положение их в периодической системе Д. И. Менделеева (номер периода, группа, подгруппа): Na^+; Cl^-

Решение. Электронная формула химического элемента натрия следующая: 1s2 2s2 2p6 3s1. Он расположен в третьем периоде, первой группе, главной подгруппе периодической системы Д. И. Менделеева.

Электронная формула иона Cl^-: 1s2 2s2 2p6 3s2 3p6. Хлор расположен в третьем периоде, седьмой группе, главной подгруппе периодической системы Д. И. Менделеева.

Каждое задание содержит 2 вопроса (а, б)

Задания к разделу 2

Номер задания	а) Укажите численные значения главного и орбитального квантовых чисел данных подуровней, рассчитайте последовательность их заполнения	б) Напишите электронные формулы предложенных атомов и ионов, укажите их положение в системе (номер периода, группа, подгруппа)
1	3p; 4s; 2p	Fe; Na^{+}
2	3d; 4p; 3p	Co; Br^{-}
3	5d; 4p 4d	Ni; Ba^{2+}
4	3d; 4f; 5s	Zn; Ca^{2+}
5	4d; 4s; 5s	Sn; S^{2-}
6	6s; 4p; 4f	W; Bi^{3-}
7	3d; 5s; 7p	S; La^{3}
8	4d; 6s; 5d	F; Tl^{3+}
9	4p; 5p; 4f	Br; Zr^{4+}
10	3d; 3p; 2s	Al; Hg^{2+}
11	5d; 3s; 6s	Pb; Au^{3+}
12	6d; 4f; 5p	Ge; Ag^{1}
13	5d; 3p; 4d	Ga; Sb^{3+}
14	7s; 6p; 4d	Ni; Bi^{3+}
15	5d; 4p; 3d	Cl; Pb^{2+}
16	5s; 6s; 4p	Y; Hf^{4+}
17	6p; 5f; 6d	Zr; At^{-}
18	5d; 5s; 4f	Ta; Ga^{3+}
19	3s; 4d; 3p	Mo; Cu^{2+}
20	5f; 4d; 4s	Cr; Se^{2-}

3. Химическая кинетика и равновесие

3.1 Скорость химических процессов

В зависимости от характера реакции скорость определяется следующим образом. Для гомогенных систем (однородным по составу и свойствам) скорость измеряется:

$$V = \frac{\Delta \cdot C}{\Delta \cdot \tau}$$

где V – скорость химической реакции, моль/л·сек.

ΔС – изменение концентрации вещества за время $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$

τ_1 – исходный момент времени, с,

τ_2 – текущий момент времени, с ($\tau_2 > \tau_1$)

В гетерогенных системах (состоящих из 2х или более однородных частей, находящихся в разном фазовом состоянии) при определении скорости концентрации твердых веществ не учитываются. Скорость реакции зависит от природы реагирующих веществ, концентрации, температуры, давления и присутствия катализаторов.

Скорость химической реакции прямо пропорциональна произведению молярных концентраций реагирующих веществ.

Пример 1. $H_2 + Cl_2 = 2HCl$

$V^{\rightarrow} = k \cdot C_{H2} \cdot C_{Cl2}$

где k – константа скорости прямой реакции

C_{H2}- концентрация водорода, моль/л

C_{Cl2}- концентрация хлора, моль/л

Концентрация веществ может обозначаться квадратными скобками, заключенными вокруг формулы вещества. Например, для этой реакции скорость прямой реакции можно записать так:

$V^{\rightarrow} = k \cdot [H_2] \cdot [Cl_2]$

Зависимость скорости реакции от температуры определяется правилом Вант-Гоффа: при повышении температуры на каждые 10^0 скорость большинства реакций увеличивается в 2-4 раза

$$v_2 = v_1 \cdot \gamma^{\frac{t_2 - t_1}{10}}$$

где γ – температурный коэффициент скорости реакции, значения которого для большинства реакций лежит в интервале от 2 до 4.

v_2 - скорость реакции при температуре t_2, °С

v_1 - скорость реакции при температуре t_1, °С

Пример 2. Температурный коэффициент скорости реакции равен 2,8. Во сколько раз возрастёт скорость реакции при повышении температуры от 20^0 до $75\ ^0$С ?

Решение. $t_2 - t_1 = 75 - 20 = 55$ °С. Обозначив скорость реакции при 20° и 75° соответственно v_1 и v_2 получаем: $v_2 / v_1 = 2{,}8^{55/10} = 2{,}8^{5{,}5} = 287$.

Скорость реакции увеличится в 287 раз.

2.2 Химическое равновесие

Состояние системы, при котором скорости прямой и обратной реакции равны, называют химическим равновесием. Состояние равновесия характеризуется константой равновесия K_c.

Гомогенная система:

$2CO_{(г)} + O_2 = 2CO_{2\ (г)}$

$$K_c = \frac{C^2_{CO_2}}{C^2_{CO} C_{O_2}}$$

где C_{co}; C_{O2}; C_{CO2} – равновесные концентрации веществ, моль/л.

Гетерогенная система:

Fe_2O_3 (т) + $3H_2$ (г) = 3Fe (т)+$3H_2O$ (г)

$$K_c = \frac{C^3_{H2O}}{C^3_{H_2}}$$

В выражении константы равновесия концентрация твердой фазы не входит, так как она является практически постоянной величиной.

На состояние равновесия системы влияют давление, концентрация реагирующих веществ и температура. Система может находиться в состоянии равновесия бесконечно долго. Если изменить условия его

существования, равновесие будет нарушено. Переход из одного равновесного состояния в другое называют смещением равновесия. Определить направление смещения равновесия позволяет принцип Ле Шателье: если находящаяся в равновесии система подвергается внешнему воздействию, равновесие смещается в направлении, которое способствует ослаблению этого воздействия.

Пример. 1 Для реакции $N_2(г) + 3H_2(г) = 2NH_3(г)$ в какую сторону смещается равновесие если увеличить концентрацию аммиака и давление?

Решение: С увеличением концентрации аммиака равновесие смещается влево. С увеличением давления в этой системе равновесие смещается вправо.

Пример 2. В системе A(г)+2B(г)=C(г) равновесные концентрации равны C^p_a =0,06 моль/л, $C^p_в$ =0,12 моль/л , C^p_c =0,216 моль/л . Найти константу равновесия реакции и исходные концентрации веществ А и В.

Решение: Константа равновесия выражается уравнением:

$$K_c = \frac{C^p_c}{C^p_a C^2_в} = \frac{0,216}{0,06 \cdot (0,12)^2} = 250$$

Для нахождения исходных концентраций веществ А и В следует учесть, что согласно уравнению реакции, из 1 моль А и 2 моль В образуется 1 моль С. Поскольку по условию задачи в каждом литре системы образовалось 0, 216 моль вещества С, то при этом было израсходовано 0,216 моль вещества А и 0,216*2 = 0,432 моль вещества В. Таким образом, искомые исходные концентрации равны:

C^o_a = 0,06+0,216=0,276 моль/л,

$C^o_в$ = 0,12+0,432=0,552 моль/л.

Задания к разделу 2.

21. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$Si + 2H_2O \leftrightarrow SiO_2 + 2H_2$

22. Рассчитайте исходную концентрацию CO для реакции, если равновесные концентрации [CO]=0,01, [COS] = 0,03 моль/л.

$Sb_2S_3 + 3CO = 2Sb + 3COS$

23. Температурный коэффициент скорости реакции равен 2,5. Во сколько раз увеличится скорость, если температуру повысить на 40°?

24. В какую сторону сдвинется равновесие системы $C + 2N_2O \leftrightarrow CO_2 + 2N_2$ если увеличить объём системы?

25. Как повлияет на равновесие реакции $CaCO_3 \leftrightarrow CaO + CO_2$ -179 кДж, понижение температуры?

26. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$Fe_2O_3 + 3CO \leftrightarrow 2Fe + 3CO_2$

27. Чему равна начальная концентрация NO_2, если в момент равновесия концентрация NO была 0,3 моль/л , O_2 – 0,15 моль/л, NO_2 - 0,2 моль/л.

28. Во сколько раз изменится скорость химической реакции, если температуру понизили с 25° до -15° при температурном коэффициенте скорости 2?

29. Куда сдвинется равновесие реакции $H_2 + J_2 \leftrightarrow 2HJ$ при уменьшении объёма системы в 3 раза?

30. Куда сдвинете я равновесие реакции $N_2O_4 \leftrightarrow 2NO_2$ -Q, если повысить температуру в системе?

31. Напишите выражение для константы равновесия реакции:

$2N_2O \leftrightarrow 2N_2 + O_2$

32. Чему равна скорость реакции $CuO + 2HNO_3 = Cu(NO_3)_2 + H_2O$ при концентрации 3 моль/л и константе скорости реакции K = 0,4 ?

33. Во сколько раз уменьшится скорость химической реакции при снижении температуры с 50 до 20 C°, если температурный коэффициент равен 3 ?

34. В какую сторону сдвинется равновесие реакции $CO + H_2O \leftrightarrow CO_2 + H_2$ при увеличении давления?

35. В какую сторону сдвинется равновесие реакции $2C + O_2 \leftrightarrow 2CO$; $\Delta H^0 = -105$ кДж при понижении температуры ?

36. Написать выражение для константы равновесия реакции:

$2C_2H_4$ (г) + $5O_2 \leftrightarrow 4CO_2 + 2H_2O$ (пар)

37. Рассчитать начальную концентрацию кислорода для реакции, если равновесные концентрации кислорода равна 0,34 моль/л, а диоксида азота равна 0,72 моль/л.

$2NO + O_2 \leftrightarrow 2NO_2$

38. Температурный коэффициент скорости реакции равен 5. Во сколько раз увеличится скорость реакции, если температуру повысить с 80^0 до 110^0С.

39. В какую сторону сдвинется равновесие реакции при уменьшении объёма системы: $2CO + O_2 \leftrightarrow 2CO_2$

40. В системе: $N_2 + O_2 \leftrightarrow 2NO$ ΔH^0=180 кДж. Произошло повышение температуры. В какую сторону сдвинулось равновесие?

Задания 41-60 . Напишите математическое выражение Кс (константы химического равновесия) для обратимых реакций и укажите направление смещения равновесия при изменении условий:

А) уменьшении парциального давления одного из исходных газообразных веществ;

Б) понижении давления;

В) повышении температуры.

Номер задания	Уравнение реакции	ΔH^o, кДж/моль
41	$2N_2O_{(г)} + O_{2(г)} = 4NO_{(г)}$	196
42	$4NH_{3(г)} + 5O_{2(г)} - 4NO_{(г)} + 6H_2O_{(г)}$	908
43	$2H_2S_{(г)} + 3O_{2(г)} = 2SO_{2(г)} + 2H_2O_{(г)}$	1038
44	$CO_{2(г)} + H_{2(г)} = CO_{(г)} + H_2O_{(г)}$	41
45	$2H_{2(г)} + O_{2(г)} = 2H_2O_{(г)}$	-484
46	$2SO2_{(г)} + O2_{(г)} = 2SO3_{(г)}$	-196

47	$2NO_{(г)} + O2_{(г)} = 2NO2_{(г)}$	-112
48	$Fe3O4 + H2_{(г)} = 3FeO + H2O_{(г)}$	62
49	$FeO + H2_{(г)} = Fe + H2O_{(г)}$	-272
50	$C + H2O_{(г)} = CO_{(г)} + H2_{(г)}$	131
51	$CO_{(г)} + H2O_{(г)} = CO2_{(г)} + H2_{(г)}$	-41
52	$SO3_{(г)} + H2_{(г)} = SO2_{(г)} + H2O_{(г)}$	-144
53	$H2_{(г)} + Cl2_{(г)} = 2HCl_{(г)}$	-184
54	$FeO + CO_{(г)} = Fe + CO2_{(г)}$	-11
55	$2ZnS + 3O2_{(г)} = 2ZnO + 2SO2_{(г)}$	-878
56	$N2_{(г)} + 3H2_{(г)} = 2NH3_{(г)}$	-92
57	$CaCO3 = CaO + CO2_{(г)}$	175
58	$2MgCl_2 + 2O_{2(г)} = 2MgO + 2Cl_{2(г)}$	82
59	$Ca(OH)_{2(т)} = CaO_{(т)} + H_2O_{(г)}$	48
60	$H_2O_{(г)} + CO_{(г)} = CO_{2(г)} + H_{2(г)}$	-41

4 Растворы электролитов

4.1 Концентрация растворов

Содержание растворенного вещества в растворе может быть выражено либо безразмерными единицами долями, либо величинами размерными – концентрациями. Наиболее часто употребляют следующие методы выражения концентрации растворов.

Массовая доля растворенного вещества (ω) – отношение массы растворенного вещества ($m_в$) к общей массе раствора ($m_р$):

$$\omega = \frac{m_в}{m_р}$$

Если отношение $m_в/m_р$: умножить на 100%, то концентрация раствора будет выражена в %.

Молярная концентрация ($C_м$ или М) или молярность – число молей растворенного вещества (ν) в одном литре раствора:

$$C_м = \frac{\nu}{M} = \frac{m_в}{M \cdot V} \text{ (моль/л)}$$

где $m_в$ – масса растворенного вещества, М - молярная масса растворенного вещества, г/моль,

V - объём раствора, л.

Эквивалентная концентрация ($C_э$) – отношение массы растворенного вещества к произведению эквивалента данного вещества на объём раствора:

$$C_э = \frac{m_в}{Э \cdot V} \text{ (моль/л)}$$

Пример 1. Вычислить массу хлорида натрия и воды, необходимых для приготовления 500 г раствора, в котором содержание хлорида натрия в массовых долях равно 0,05 (или 5 %)

Решение:

По определению массовой доли, выраженной в %.

$$\omega = \frac{m_в}{m_{р-ра}} \cdot 100\ \%$$

Отсюда находим $m_в = \frac{\omega \cdot m_{р-ра}}{100} = \frac{5 \cdot 500}{100} = 25$ г.

Учитывая, что масса раствора равна 500 г, масса воды будет равна: 500-25=475 г.

Пример 2. Определить молярную концентрацию 15 % раствора карбоната натрия с плотностью 1,18 г/мл.

Решение:

Воспользуемся формулой, связывающей процентную и молярную концентрацию:

$$C_м = \frac{\omega \cdot \rho \cdot 10}{M},$$

где ρ – плотность раствора, г/мл

ω - массовая доля, %

М - молярная масса растворенного вещества, г/моль

В нашем случае: М =106

$$C_м = \frac{15 \cdot 1{,}18 \cdot 10}{106} = 1{,}66 \text{ моль/л}$$

Задания к подразделу 4.1

Каждое задание содержит по 2 задачи (а, б)

61 а) К 500 мл раствора соляной кислоты (р = 1.10 г/мл) прибавили 2.5 л воды, после чего раствор стал 4% - ным. Определите процентное содержание растворенного вещества в исходном растворе. б) Определите молярную концентрацию 10% - ного раствора азотной кислоты (р=1,06 г/мл).

62 а) Определите молярную концентрацию раствора сульфата калия, в 200 мл которого содержится 1,74 г растворенного вещества. б) Определите процентное содержание растворенного вещества 1М раствора нитрата никеля (11), плотность которого 1,08 г/мл.

63 а) Определите молярную концентрацию 10%-ного раствора серной кислоты (р=1,07 г/мл). б) Сколько мл воды следует добавить к 100 мл 20%-го раствора серной кислоты (р=1,14 г/мл) для получения 5%-го раствора?

64 а) В каком объеме воды следует растворить 32,2 г, чтобы получить 5%-ный раствор сульфата натрия? б) Определите процентное содержание растворенного вещества 0,9М раствора (р=1,05 г/мл).

65 а) Сколько граммов медного купороса $CuSO4 \cdot 5H2O$ и воды требуется для приготовления 150 г 8%-ного раствора в расчете на безводную соль? б) Определите молярную концентрацию 27%-ного раствора соляной кислоты (р=1,14 г/мл).

66 а) До какого объёма следует разбавить 1,5 л 20%-ного раствора хлорида аммония (р=1,06 г/мл), чтобы получить 10%-ный раствор (р=1,03 г/мл).

б) Сколько миллилитров 70%-ного раствора нитрата калия (р=1,16 г/мл) требуется для приготовления 0.5 л 0,2М раствора?

67 а) Сколько граммов кристаллической соды $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ надо взять для приготовления 2 л 0,2 М раствора Na_2CO_3? б) Сколько миллилитров 36% - ного раствора соляной кислоты (р = 1,18 г/мл) требуется для приготовления 4 л 0,5 М раствора?

68 а) К 1 л 20% - ного раствора гидроксида натрия (р = 1,22 г/мл) прибавили 10 л воды. Определите процентное содержание растворенного вещества в полученном растворе, б) Определите молярную концентрацию 8% - ного раствора сульфата натрия (р = 1,08 г/мл),

69 а) Сколько миллилитров 10%-ного раствора Na_2CO_3 (р ~ 1,10 г/мл), следует прибавить к 1 л 2% -ного раствора (р = 1,02 г/мл), чтобы получить 3% - ный раствор этой соли? б) Определите процентное содержание растворенного вещества в 2 М растворе гидроксида натрия (р = 1,08 г/мл).

70 а) Сколько миллилитров воды следует прибавить к 25 мл 40% - ного раствора КОН (р=1,40 г/мл), чтобы получить 2 % - ный раствор? б) Сколько миллилитров 96 % -ного раствора серной кислоты (р = 1,84 г/мл) требуется для приготовления 300 мл 0,5 М раствора?

71 а) Сколько граммов медного купороса $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ следует добавить к 150 мл воды, чтобы получить 5% -ный раствор $CuSO_4$? б) Сколько миллилитров 30% - ного раствора азотной кислоты (р~ 1,84 г/мл) требуется для приготовления 250 мл 0,5 М раствора?

72 а) Определите процентное содержание растворенного вещества в 0.25 М растворе гидрокскда натрия (р = 1,01 г/мл), б) Сколько миллилитров 0,1 М раствора HC1 можно приготовить из 20 мл 0,5 М раствора этой кислоты?

73 а) Определите молярную концентрацию 10% - ного раствора соляной кислоты (р = 1,05 г/мл), б) Сколько миллилитров 30% -ной азотной кислоты (р = 1.18 г/мл) требуется для приготовления 250 мл 11% - ного раствора (р = 1,07 г/мл)?

74 а) Сколько миллилитров 30% раствора КОН (р=1,29 г/мл) требуется для приготовления 300 мл 0.1 М раствора? б) К 760 мл 20% - ного раствора NaOH (р= 1,22 г/мл) прибавили 140 мл 10% - ного раствора NaOH (р=1,11 г/мл). Определите процентное содержание растворенного вещества.

75 а) К 50 мл 96% раствора серной кислоты (р=1,84 г/мл) прибавили 50 мл воды. Определите процентное содержание растворенного вещества в полученном растворе. б) Определите молярную концентрацию 72% раствора азотной кислоты (р = 1,43 г/мл).

76 а) Определите молярную концентрацию 6%-ного раствора фосфорной кислоты (р = 1,03 г/мл), б) Определите процентное содержание растворенного вещества раствора, полученного смешением 10 мл 96% -ного раствора азотной кислоты р=1,5 г/мл и 20 мл 48%-го раствора азотной кислоты р =1,3 г/мл.

77 а) До какого объема следует разбавить 500 мл 20% - кого раствора хлорида натрия (р ~ 1,15 г/мл), чтобы получить 4,5% - ный раствор (р ~ 1,03 г/мл)? б) Определите молярную концентрацию 50% раствора азотной кислоты (р =1,31 г/мл).

78 а) Определите молярную концентрацию 60%-ного раствора серной кислоты (р =1,5 г/мл). б) Сколько миллилитров 32% - ного раствора азотной кислоты (р ~1,39 г/мл) необходимо для приготовления 300 мл 0,75М раствора?

79 а) Сколько миллилитров 0,2 М раствора азотной кислоты необходимо для нейтрализации 80 мл 0,6 М раствора NaOH? б) Определите процентное содержание растворенного вещества в 1,5 М растворе КОН (р = 1,07 г/мл).

80 а) Определите молярную концентрацию 10 % раствора карбоната натрия (р=1,10 г/мл). б) Сколько миллилитров 30% раствора (р=0,9 г/мл) требуется для получения 400 мл 2М его раствора?

4.2. Электролитическая диссоциация.

Ионно-молекулярные уравнения.

Электролитами называют вещества, растворы и расплавы которых проводят электрический ток. К электролитам относятся неорганические кислоты, основания, амфотерные гидроксиды и соли. Они распадаются в водных растворах и расплавах на катионы и анионы.

Процесс распада молекул электролитов на ионы в среде растворителя получил название электролитической диссоциации. Количественно диссоциация определяется степенью и константой диссоциации. Степень диссоциации – это число, показывающее какая часть молекул от общего их количества в растворе распадается на ионы:

$$\alpha = \frac{\textit{число распавшихся молекул } (n)}{\textit{общее число растворенных молекул } (N)}$$

По степени диссоциации электролиты условно разделяют на сильные ($\alpha \approx 1$) и слабые($\alpha < 1$).

Сильные электролиты

К ним относятся минеральные кислоты: HNO_3, H_2SO_4, HCl, HBr, HJ, $HClO_4$; гидроксиды щелочных и щелочно-земельных металлов: LiOH, NaOH, KOH, $Ba(OH)_2$ и др. ; соли – средние, кислые, основные – $Fe_2(SO_4)_3$; $NaHCO_3$; $Al(OH)Cl_2$ и тп.

Сильные электролиты диссоциируют практически нацело:

$Fe_2(SO_4)_3 = 2Fe^{3+} + 3SO_4^{2-}$

$HNO_3 = H^{1} + NO^{3-}$

$NaHCO_3 = Na^{-} + HCO^{3-}$

$Ba(OH)_2 = Ba^{2+} + 2OH^{-}$

Слабые электролиты

К ним относятся кислоты: HNO_2, H_2CO_3, H_2S и др. а также все органические кислоты, в том числе уксусная CH_3COOH; гидроксиды металлов основного характера $Fe(OH)_3$, $Cu(OH)_2$ и др. (кроме щелочных и щелочноземельных) и гидроксид аммония NH4OH, а также амфотерные гидроксиды $Al(OH)_3$; $Cr(OH)_3$; $Zn(OH)_2$; $Sn(OH)_2$ и др.

Для слабых электролитов диссоциация обратимый процесс, для которого справедливы общие законы равновесия. Например, для уксусной кислоты константа равновесия, называемая константой диссоциации имеет вид: $CH_3COOH \leftrightarrow CH_3COO^- + H^+$

$$К_д = \frac{C_{CH_3COO^-} \cdot C_{H^+}}{C_{CH_3COOH}}$$

Многоосновные кислоты и многокислотные основания диссоциируют ступенчато, и каждую ступень равновесного состояния характеризует своя константа диссоциации (причем $К_{С1}$ всегда больше $К_{С2}$ и т.д.), например, при диссоциации H_2S: 1-я ступень $H_2S \leftrightarrow H^- + HS^-$ $\quad К_{С1} = \frac{[H^+]\cdot[HS^-]}{[H_2S]} = 6\cdot10^{-8}$

2- я ступень $HS^- \leftrightarrow H^+ + S^{2-}$ $\quad К_{С2} = \frac{[H^+]\cdot[S^{2-}]}{[HS^-]} = 1\cdot10^{-14}$,

где [ ] - равновесные концентрации ионов и молекул.

Диссоциация $Cu(OH)_2$:

1-я ступень $Cu(OH)_2 \leftrightarrow Cu(OH)^+ + OH^-$

2-я ступень $Cu(OH)^+ \leftrightarrow Cu^{2+} + OH^-$

Амфотерные гидроксиды, например $Pb(OH)_2$ диссоциируют по основному типу: $Pb(OH)_2 \leftrightarrow PbOH^+ + OH^-$

$PbOH^+ \leftrightarrow Pb^{2+} + OH^-$

и кислотному:

$H_2PbO_2 \leftrightarrow H^+ + HPbO_2^-$

$HPbO_2^- \leftrightarrow H^- + PbO_2^{2-}$

В растворах электролитов реакции протекают между ионами. Для записи ионных реакций применяют ионные уравнения. При составлении ионных уравнений реакций все слабые электролиты, газы и труднорастворимые электролиты записывают в молекулярной форме, все сильные электролиты (кроме труднорастворимых солей) в ионной форме. Примеры составления ионных уравнений реакций:

а) **образование труднорастворимых соединений**:

$Cu(NO_3)_2 + 2NaOH = Cu(OH)_2\downarrow + 2NaNO_3$

$Cu^{2+} + 2NO^{3-} + 2Na^+ + 2OH^- = Cu(OH)_2\downarrow + 2Na^+ + 2NO^{3-}$

$Cu^{2-} + 2OH^- = Cu(OH)_2\downarrow$

б) **образование газообразных веществ**:

$Na_2CO_3 + 2HCl = 2NaCl + H_2O + CO_2$

$2Na^- + CO_3^{2-} + 2H^+ + 2Cl^- = 2Na^+ + 2Cl^- + H_2O + CO_2$

$CO_3^{2-} + 2H^+ = H_2O + CO_2$

в) **образование слабых электролитов:**

$CH_3COONa + HNO_3 = CH_3COOH + NaNO_3$

$CH_3COO^- + Na^- + H^+ + NO_3^- = CH_3COOH + Na^+ + NO_3^-$

$CH3COO^- + H^+ = CH_3COOH$

Пример 1. Написать реакции для следующих превращений: $KOH \xrightarrow{A} KHSO_3 \xrightarrow{B} K_2SO_3$

Решение:

$$A.\ KOH + H_2SO_3 = KHSO_3 + H_2O$$

$$K^+ + OH^- + H_2SO_3 = K^- + HSO_3^- + H_2O$$

$$OH^- + H_2SO_3 = HSO_3^- + H_2O$$

$$B.\ KHSO_3 + KOH = K_2SO_3 + H_2O$$

$$K^+ + HSO_3^- + K^+ + OH^- = 2K^+ + SO_3^{2-} + H_2O$$

$$HSO_3^- + OH^- = SO_3^{2-} + H_2O$$

Задания к разделу 4.2.

Задания 81-100. напишите для предложенных соединений уравнения диссоциации, а также в молекулярной и ионной формах уравнения возможных реакций взаимодействия их H_2SO_4 с и NaOH.

81. HCl; $Cr(OH)_3$	91. $Ca(OH)_2$; H_3PO_4
82. $Cd(OH)_2$; H_2S	92. HNO_3; $Be(OH)_2$
83. $Cu(OH)_2$; HBr	93. $H_2Cr_2O_7$; KOH
84. H_2SO_3; $Sn(OH)_2$	94. HCN; $Ga(OH)_3$
85. H_2SiO_3; $Pb(OH)_2$	95. KOH; H_2CO_3
86. CH_3COOH; $Fe(OH)_3$	96. HF; $Be(OH)_2$
87. H_2Se; $Zn(OH)_2$	97. NH_4OH; $HClO_4$
88. $Fe(OH)_2$; H_3AsO_3	98. $Pb(OH)_2$; HNO_2
89. LiOH; HJ	99. $Mg(OH)_2$; HClO
90. H_2Te; $Al(OH)_3$	100. $Ba(OH)_2$; $HMnO_4$

Задания 101-120. Напишите в молекулярной и ионной формах уравнения реакций для следующих превращений:

101. $Ni(OH)_2 \rightarrow (NiOH)_2SO_4 \rightarrow NiSO_4 \rightarrow Ni(OH)_2$

102. $CuSO_4 \rightarrow (CuOH)_2SO_4 \rightarrow Cu(OH)_2 \rightarrow Cu(OH)NO_3$

103. $Bi(NO_3)_3 \rightarrow Bi(OH)(NO_3)_2 \rightarrow Bi(OH)_3 \rightarrow Bi_2O_3$

104. $Co(OH)_2 \rightarrow Co(OH)Cl \rightarrow CoCl_2 \rightarrow Co(NO_3)_2$;

105. $Pb(NO_3)_2 \rightarrow Pb(OH)NO_3 \rightarrow Pb(OH)_2 \rightarrow K_2PbO_2$

106. $NiCl_2 \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow Ni(OH)Cl \rightarrow NiCl_2$

107. $Cr(OH)Cl_2 \rightarrow CrCl_3 \rightarrow Cr(OH)_3 \rightarrow Cr(OH)SO_4$

108. $(SnOH)_2SO_4 \rightarrow SnSO_4 \rightarrow Sn(OH)_2 \rightarrow Na_2SnO_2$;

109. $NiBr_2 \rightarrow Ni(OH)Br \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow NiSO_4$

110. $CoSO_4 \rightarrow Co(OH)_2 \rightarrow (CoOH)_2SO_4 \rightarrow Co(NO_3)_2$

111. $Cr_2(SO_4)_3 \rightarrow Cr(OH)SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 \rightarrow CrCl_3$;

112. $NiSO_4 \rightarrow (NiOH)_2SO_4 \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow NiBr_2$;

113. $Fe(OH)SO_4 \rightarrow Fe_2(SO_4)_3 \rightarrow Fe(OH)_3 \rightarrow FeCl_3$

114. $Sn(OH)_2 \rightarrow Sn(OH)Cl \rightarrow K_2SnO_2 \rightarrow Sn(OH)_2$

115. $NiBr_2 \rightarrow (NiOH)_2 SO_4 \rightarrow Ni(OH)_2 \rightarrow NiBr_2$

116. $Al(OH)_3 \rightarrow Al(OH)_2Cl \rightarrow AlCl_3 \rightarrow Al(NO_3)_3$;

117. $CoCl_2 \rightarrow Co(OH)_2 \rightarrow (CoOH)_2SO_4 \rightarrow CoSO_4$,

118. $Bi(OH)_3 \rightarrow Bi(OH)_2NO_3 \rightarrow Bi(OH)_3 \rightarrow Bi_2O_3$

119. $Cu(OH)_2 \rightarrow Cu(OH)Cl \rightarrow CuCl_2 \rightarrow Cu(NO_3)_2$

120. $CoSO_4 \rightarrow (CoOH)_2SO_4 \rightarrow Co(OH)_2 \rightarrow Co(NO_3)_2$

4.3. Гидролиз солей

Гидролиз солей – это процесс взаимодействия ионов соли с молекулами воды, приводящий к смещению ионного равновесия воды и изменению pH среды.

В зависимости от силы электролита, образовавшего соль, различают три случая гидролиза.

Гидролиз по катиону

Гидролиз по катиону протекает, если соль образована слабым основанием и сильной кислотой. В растворах таких солей возникает кислая реакция среды (pH<7). Например: для $CuCl_2$ ионное уравнение гидролиза следующее:

$Cu^{2-} + HOH = CuOH^+ + H^-$, pH<7

молекулярное уравнение гидролиза: $CuCl_2 + HOH = CuOHCl + HCl$.

Гидролиз по аниону

Гидролиз по аниону протекает, если соль образована слабой кислотой и сильным основанием. Растворы таких солей имеют щелочную реакцию среды (pH>7). Например, для Na_2CO_3 ионное уравнение гидролиза:

$CO_3^{2-} + HOH == HCO_3^- + OH^-$ pH>7

Молекулярное уравнение: $Na_2CO_3 + HOH = NaHCO_3 + NaOH$

Гидролиз по катиону и аниону

Гидролиз по катиону и аниону протекает, если соль образована и слабым основанием, и слабой кислотой. Реакция среды в растворе при этом остается близкой к нейтральной и определяется сравнительной силой слабых оснований и кислоты, образующих соль.

В случае гидролиза по катиону и аниону возможны два варианта протекания реакции.

1. Если соль растворима в воде, то гидролиз протекает при обычных условиях по первой ступени, т.е. одна молекула соли взаимодействует с одной молекулой воды. Ионное уравнение гидролиза:

$NH_4^+ + CO_3^{2-} + HOH = NH_4OH + HCO_3^-$ pH~7.

Молекулярное уравнение гидролиза:

$(NH_4)_2CO_3 + HOH = NH_4OH + NH_4HCO_3$.

2. Если соль не существует в растворе (в таблице растворимости против такой соли стоит прочерк), то при соединении с водой такая соль полностью разлагается водой с образованием слабого труднорастворимого гидроксида, выпадающего в осадок, и слабой, часто летучей кислоты. Например: Al_2S_3

Ионное уравнение гидролиза:

$2Al^{3+} 3S^{2-} + 6HOH = 2Al(OH)_3 + 3H_2O$

Молекулярное уравнение гидролиза:

$Al_2S_3 + 6HOH^- 2Al(OH)_3 + 3H_2S$.

Задания к подразделу 4.3

Задания 121-140. Напишите в молекулярной и ионной формах уравнения реакций гидролиза солей, укажите значения pH растворов этих солей (больше или меньше семи).

121. $NaNO_2$, $Cu(NO_3)_2$	131. Na_2HPO_4, $Mg(NO_3)_2$
122. $AlCl_3$, $NaHCO_3$	132. $Al_2(SO_4)_3$, Na_2SeO_3
123. Na_3PO_4, $ZnCl_2$	133. $CuSO_4$, K_3PO_4
124. $FeCl_2$, K_2S	134. Na_2SO_3, $Fe_2(SO_4)_3$
125. K_2SO_3, $ZnSO_4$	135. NaCN, $FeSO_4$
126. NH_4Cl, KClO	136. $Ba(CH_3COO)_2$, $CoSO_4$
127. Na_2Se, $MnCl_2$	137. $NiSO_4$, NaF
128. $ZnSO_4$, BaS	138. $Pb(NO_3)_2$, $Ba(NO_3)_2$
129. $Ni(NO_3)_2$, KNO_2	139. $Cr_2(SO_4)_3$, $NaCH_3COO$
130. NH_4Br, Na_2S	140. KHS, $MgSO_4$

Задания 141-160. Напишите в молекулярной и ионной формах уравнения реакций совместного гидролиза предложенных солей.

141. $Fe_2(SO_4)_3 + Na_2CO_3$	151. $CrCl_3 + K_2S$
142. $Na_2S + Al_2(SO_4)_3$	152. $Na_2CO_3 + Cr(NO_3)_3$
143. $NH_4Cl + Na_2SiO_3$	153. $K_2SiO_3 + Bi(NO_3)_3$
144. $Cr_2(SO_4)_3 + K_2S$	154. $Na_2SO_3 + CrCl_3$
145. $K_2CO_3 + Bi(NO_3)_3$	155. $NH_4NO_3 + Na_2SiO_3$
146. $Na_2S + AlCl_3$	156. $AlCl_3 + Na_2SO_3$
147. $BeSO_4 + K_2S$	157. $K_2SO_3 + CrCl_3$
148. $Cr_2(SO_4)_3 + Na_2SO_3$	158. $Na_2S + Al_2(SO_4)_3$
149. $K_2SO_3 + AlBr_3$	159. $Fe(NO_3)_3 + K_2CO_3$
150. $Bi(NO_3)_3 + Na_2CO_3$	160. $Al(NO_3)_3 + Na_2CO_3$

5. Окислительно-восстановительные процессы.

5.1 Окислительно-восстановительные реакции

Окислительно-восстановительными реакциями называют реакции, протекающие с изменением степени окисления (СО) элементов. Степень окисления – это тот условный заряд атома элемента, который вычисляют, исходя из предположения, что молекула состоит только из ионов (как правило, обозначают арабской цифрой, заряд ставят перед цифрой). СО рассчитывается на основании положения, что сумма СО всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов , составляющих ион – заряду иона.

Ряд элементов имеют постоянную СО. Например:

Водород Н (за исключением гидридов, где, СО Н = - 1) +1

Щелочные металлы (Na, K, Li и др.) +1

Металлы 2 группы периодической системы (Ca, Zn и т. д.) +2

Металлы 3 группы периодической системы (A1) +3

Кислород О -2

(За исключением OF_2, где СО кислорода +1; перекисей H_2O_2, Na_2O_2 и т.д., где СО кислорода – 1).

Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций.

Прежде всего необходимо рассчитать степени окисления всех элементов реакции в левой и правой частях уравнения. Для нахождения коэффициентов при составлении окислительно-восстановительных реакций необходимо:

- соблюдение принципа электронного баланса (число электронов, отданных восстановителем (Red) , должно быть равно числу электронов, принятых окислителем (Ox), например:

$Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

Red Ox

4 $Al - 3\bar{e} = Al^{3+}$()

3 $O_2 + 4\bar{e} = 2O^{2-}$

$$4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$$

В реакциях, протекающих в водных растворах, следует использовать среду (кислую, щелочную, нейтральную). Например, в кислой среде:

$$K_2Cr_2O_7 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + J_2 + H_2O + K_2SO_4$$

$$3 \quad 2J^- - 2\bar{e} = J_2$$
$$1 \quad Cr_2O_7^{2-} + 6\bar{e} + 14H^+ = 2Cr^{+3} + 7H_2O$$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$$K_2Cr_2O_7 + 6KJ + 7H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 3J_2 + 7H_2O + 4K_2SO_4$$

В щелочной среде:

$$KCrO_2 + KClO_4 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KCl + H_2O$$

$$8 \quad CrO_2^- - 3\bar{e} + 4OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 2H_2O$$
$$3 \quad ClO_4^- + 8\bar{e} + 4H_2O \rightarrow Cl^- + 8OH^-$$

Суммарное молекулярное уравнение реакции

$$8KCrO_2 + 3KClO_4 + 8KOH \rightarrow 8K_2CrO_4 + 3KCl + 4H_2O$$

Среда нейтральная:

$$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$$

$$3 \quad Mn - 2\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4H^+$$
$$2 \quad MnO_4^- + 3\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4OH^-$$
$$6H_2O + 4H_2O \rightarrow 12H^+ + OH^-$$
$$2H_2O \rightarrow 4H^+$$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$$2KMnO_4 + 3MnSO_4 + 2H_2O = 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$$

Задания 161-180. Составьте электронно-ионные схемы и молекулярные уравнения реакций. Укажите окислитель и восстановитель. Для каждого задания по две реакции (а, б):

161. а) $Na_2SeO_3 + KBrO + H_2O \rightarrow Br_2; SeO_4^{2-}$

б) $HCl + HNO_3 \rightarrow Cl_2; NO$

162. а) $Cr_2(SO_4)_3 + Cl_2 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $NaNO_2 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow NO; J_2$

163. а) $NaCrO_2 + NaClO + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $H_2S + SO_2 \rightarrow S; H_2O$

164. а) $HNO_3 + Ni^0 \rightarrow N_2O; Ni^{2+}$

б) $SO_2 + Br_2 + H_2O \rightarrow HBr; H_2SO_4$

165. а) $K_2Cr_2O_7 + Na_3AsO_3 + H_2SO_4 \rightarrow AsO_4^{3-}; Cr^{3+}$

б) $KCrO_2 + Cl_2 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

166. а) $SO_2 + NaClO_3 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-}; Cl^-$

б) $K_2Cr_2O_7 + HCl \rightarrow Cr^{3+}; Cl_2$

167. а) $KMnO_4 + H_2S + H_2SO_4 \rightarrow Mn^{2+}; SO_4^{2-}$

б) $J_2 + Cl_2 + H_2O \rightarrow JO_3^-; Cl^-$

168. $SnCl_2 + KBrO_3 + HCl \rightarrow Sn^{4+}; Br^-$

б) $KClO_3 + KCrO_2 + NaOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

169. $Ni(OH)_2 + NaClO + H_2O \rightarrow Ni(OH)_3; Cl^-$

б) $KMnO_4 + Na_2SO_3 + H_2O \rightarrow MnO_2; SO_4^{2-}$

170. а) $MnSO_4 + PbO_2 + H_2SO_4 \rightarrow Pb^{2+}; MnO_4^-$

б) $FeCl_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow Fe^{+3}; Mn^{+2}$

171. а) $H_3PO_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow Mn^{+2}; H_3PO_4$

б) $MnO_2 + KClO_2 + KOH \rightarrow MnO_4^{2-}; Cl^-$

172. а) $KMnO_4 + NaNO_2 + H_2O \rightarrow NO_3^-; MnO_2$

б) $S + HNO_3 \rightarrow SO_2; NO$

173. а)$H_2S + K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 \rightarrow S; Cr^{+3}$

б) $KNO_3 + Zn + KOH \rightarrow ZnO_2^{2-}; NH_3$

174. а) $Cr_2O_3 + KClO_3 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $FeCl_2 + HNO_3 + HCl \rightarrow Fe^{+3}; N_2O$

175. а) $KClO_3 + MnO_2 + KOH \rightarrow MnO_4^{2-}; Cl^-$

б) $Na_3AsO_3 + J_2 + H_2O \rightarrow AsO_4^{3-}; J^-$

176. а) $H_2S + HNO_3 \rightarrow SO_4^{2-}; Cl^-$

б) $J_2 + Na_2SO_3 + H_2O \rightarrow J^-; SO_4^{2-}$

177. а) $C + HNO_3 \rightarrow CO_2; NO_2$

б) $H_2S + Cl_2 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-}; Cl^-$

178. а) $SnCl_2 + Na_3AsO_3 + HCl \rightarrow As; Sn^{+4}$

б) $KNO_3 + Zn + NaOH \rightarrow ZnO_2^{2-}; NH_3$

179. а) $Cr_2O_3 + KClO_3 + KOH \rightarrow CrO_4^{2-}; Cl^-$

б) $KMnO_4 + Na_2SO_3 + H_2SO_4 \rightarrow Mn^{+2}; SO_4^{2-}$

180. а) $Mn(NO_3)_2 + NaBiO_3 + HNO_3 \rightarrow Bi^{+3}; MnO_4^-$

б) $H_2S + Br_2 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-}; Br^-$

5.2 Гальванические элементы

Гальваническими элементами называют устройства, в которых энергия окислительно-восстановительных реакций преобразуется в электрическую энергию. В медно-цинковом гальваническом элементе электродвижущая сила (ЭДС) возникает за счёт разности потенциалов меди и цинка, опущенных в растворы своих солей: соответственно $CuSO_4$ и $ZnSO_4$. Если концентрации растворов составляют 1 моль/л, то расчет эдс производят следующим образом. Составляют схему гальванического элемента:

Zn | ZnSO4 | | CuSO4 | Cu

Затем выписывают из таблицы стандартных электродных потенциалов значения потенциалов меди и цинка, соответственно

$E^0Zn^{2+}/Zn = -0,76$ В ()

$E^0Cu^{2+}/Cu = +0,34$ В ()

ЭДС можно рассчитать как разность потенциалов медного и цинкового электродов: ЭДС = E_{ox} - E_{red}. Определяют окислитель и восстановитель, сравнивая значения потенциалов. Потенциал у цинка отрицательнее, следовательно, цинковый электрод будет играть роль восстановителя:

(-) $Zn^0 - 2\bar{e} \rightarrow Zn^{2+}$ процесс окисления

и цинк будет отрицательным полюсом (анодом) в данном гальваническом элементе. Потенциал меди положительнее, поэтому медный электрод будет положительным полюсом (катодом), а процесс будет таким:

(+) $Cu^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Cu^0$ процесс восстановления.

Направление движения электронов будет от цинка к меди (показано мостиком со стрелкой на электрохимической схеме гальванического элемента. ЭДС = +0,34 – (-0,78) = 1,1 В

Концентрационный гальванический элемент.

В таком элементе оба электрода из одного металла, но растворы солей, в которые погружены электроды, различной концентрации. Поэтому необходимо рассчитать потенциалы по уравнению Нернста:

$$E^p_{оф/вф} = E^0_{оф/вф} + \frac{0.059}{n} \lg \frac{C_{оф}}{C_{вф}}$$ где

оф – окисленная форма элемента в потенциалопределяющей реакции,

вф – восстановленная форма элемента в этой реакции,

С – молярные концентрации соответствующих веществ,

n – количество электронов, перешедших от восстановителя к окислителю.

Пример 1. Рассчитать эдс гальванического элемента, состоящего из никелевых электродов, опущенных в растворы сульфата никеля с концентрацией 10^{-4} моль/л и 1 моль/л соответственно.

Решение:

Схема гальваничсского элемента:

Ni | $NiSO_4$, 0,0001 М || $NiSO_4$ 1 М | Ni

$E^\circ_{2I^-/I_2}$ = -0,25 В

Определяем потенциал никеля по уравнению Нернста:

$E_{Ni2^+/Ni} = E^\circ_{Ni2^+/Ni} + 0,059/2 \lg C_{Ni2+} = - 0,25 + 0,059/2\lg10^{-4} = - 0,309$ В

Направление движения электронов во внешней цепи от электрода с Е = -0,25 В к электроду с Е = -0,309В.

(-) Ni | $NiSO_4$, 0,0001 M | | $NiSO_4$,1 M | Ni (+)

Уравнения электродных процессов:

(-) $Ni^0 - 2\bar{e} \rightarrow Ni^{2+}$ (процесс окисления)

(+) $Ni^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Ni^0$ (процесс восстановления)

Значение эдс составляет:

эдс = $E_{ox} - E_{red}$ = -0,25 – (-0,309) = 0,059 В.

Задания к подразделу 5.2

Для предложенных гальванических элементов рассчитайте электродные потенциалы и ЭДС. Если концентрация раствора не указана, потенциал считается стандартным из таблицы 1. Напишите уравнения анодного и катодного процессов, молекулярное уравнение токообразующей реакции, составьте схему и укажите направления движения электронов и ионов.

181	Al | $Al_2(SO_4)_3$, 0,005 M | | $NiSO_4$, 0,01 M | Ni
182	Ni | $NiSO_4$, 0,1 M | | H_2SO_4 | H_2(Pt)
183	Sn | $SnSO_4$ | | $Cr_2(SO_4)_3$, 0,05 M | Cr
184	(Pt) H_2 | H_2SO_4 | | $Al_2(SO_4)_3$, 0,005 M | Al
185	Cu | $CuSO_4$, 0,1 M | | H_2SO_4 | H_2(Pt)
186	Ag | $AgNO_3$, 0,01 M | | H_2SO_4 | H_2(Pt)
187	Co | $CoSO_4$, 0,01 M | | $CoSO_4$ | Co
188	Zn | $ZnSO_4$, 0,1 M | | $FeSO_4$, 0,01 M | Fe
189	Ag | $AgNO_3$, 0,01 M | | $Zn(NO_3)_2$ | Zn
190	(Pt) H_2 | H_2SO_4 | | $ZnSO_4$, 0,01 M | Zn
191	Cd | $Cd(NO_3)_2$, 0,1 M | | $Cd(NO_3)_2$, 0,001 M | Cd
192	Ni | $NiSO_4$, 0,001 M | | $NiSO_4$ | Ni
193	Fe | $FeSO_4$ | | $FeSO_4$, 0,01 M | Fe
194	Cr | $Cr_2(SO_4)_3$, 0,005 M | | $ZnSO_4$ | Zn
195	Zn | $Zn(NO_3)_2$, 0,001 M | | $Zn(NO_3)_2$ | Zn

196	Ag | $AgNO_3$ | | $Cr(NO_3)_3$, 0,005 M | Cr
197	Cd | $CdCl_2$, 0,1 M | | $CuCl_2$, 0,1 M | Cu
198	Ti | $Ti_2(SO_4)_3$, 0,5 M | | $CuSO_4$ | Cu
199	Sn | $SnSO_4$, 0,01 M | | $Fe_2(SO_4)_3$ | Fe
200	Ag | $AgNO_3$, 0,0001 M | | $Pb(NO_3)_2$, 0,1 M | Pb

5.3 Электрохимическая коррозия металлов

Коррозией металлов называют самопроизвольное разрушение металлов под действием различных окислителей из окружающей среды.

Механизм электрохимической коррозии аналогичен механизму процессов в короткозамкнутых гальванических элементах, в которых на участках с более отрицательным потенциалом идёт процесс окисления (разрушения металла), а на участках с более положительным потенциалом процесс восстановления окислителя (коррозионной среды).

Наиболее часто встречаются окислители:

- ионы водорода (коррозия с водородной деполяризацией)

$2H^+ + 2\bar{e} \rightarrow H_2$ (кислой среде)

$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$ (в нейтральной и щелочной среде)

- молекулы кислорода

$O_2 + 4\bar{e} + 4H^+ \rightarrow 2H_2O$ (в кислой среде)

$O_2 + 4\bar{e} + 2H_2O \rightarrow 4OH^-$ (в нейтральной и щелочной среде)

Пример 1. Гальванопара алюминий – железо в воде (среда нейтральная). Учитываем, что в воде есть растворенный кислород.

Схема гальванопары:

Al \| H_2O, O_2 \| Fe

Выписываем потенциалы алюминия и железа из таблицы потенциалов:

$E^o_{Al^{3+}/Al} = -1,88$ В $E^o_{Fe(OH)_2/Fe} = -0,46$ В

восстановитель - Al; окислитель – O_2

4 (-) $Al^0 - 3\bar{e} \rightarrow Al^{3+}$ - процесс окисления

3 (+) $O_2 + 4\bar{e} + 2H_2O \rightarrow 4OH^-$ - процесс восстановления

$4Al + 3O_2 + 6H_2O = 4Al(OH)_3$

Направление движения электронов от участка с меньшим потенциалом к участку с большим потенциалом. Подвергаться коррозии будет в первую очередь алюминий.

Пример 2. Определить процессы, протекающие при коррозии луженого железа в кислой среде.

Решение:

Схема гальванопары:

Fe | H^+ | Sn

Потенциалы: $E^oFe^{2+}/Fe = -0,44$ В, $E^oSn^{2-}/Fe = -0,136$ В, $E^o2H^+/H_2 = 0$ В

Восстановитель – Fe; окислитель - H^-

Fe (-) $Fe^0 - 2\bar{e} \rightarrow Fe^2$ - процесс окисления

Sn (+) $2H^1 + 2\bar{e} \rightarrow H_2$ - процесс восстановления

$Fe + 2H^+ \rightarrow Fe^{2-} + H_2$

Электроны движутся от участка с меньшим потенциалом к участку с большим потенциалом, т.е. от Fe к Sn.

Задания к подразделу 5.3

Рассмотрите коррозию гальванопары, используя потенциалы из таблицы 1, укажите анод и катод соответствующей гальванопары в различной коррозионной среде, напишите уравнения электродных процессов, молекулярное уравнение реакции коррозии, укажите направление перемещения электронов в системе.

Номер задания	Коррозионная среда		
	а) $H_2O + O_2$	б) $NaOH + H_2O$	в) $H_2O + H^-$
201	Fe | Zn	Zn | Al	Pb | Zn
202	Fe | Ni	Fe | Zn	Al | Cu
203	Pb | Fe	Cd | Cr	Al | Ni

204	Cu | Zn	Al | Cu	Sn | Cu
205	Zn | Fe	Fe | Cr	Co | Al
206	Zn | Al	Pb | Zn	Cr | Ni
207	Cr | Cu	Pb | Cr	Bi | Ni
208	Cu | Al	Cr | Zn	Fe | Mg
209	Zn | Sn	Mg | Cd	Cr | Bi
210	Co | Mg	Zn | Fe	Pb | Al
211	Pb | Zn	Bi | Ni	Cd | Al
212	Bi | Ni	Cu | Zn	Fe | Ni
213	Fe | Mg	Co | Sn	Ni | Mn
214	Sn | Fe	Pb | Zn	Cr | Fe
215	Cr | Fe	Fe | Mg	Co | Cu
216	Fe | Cr	Ce | Cu	Fe | Cu
217	Cr | Cu	Cd | Zn	Zn | Cu
218	Cd | Zn	Ce | Ni	Cr | Cd
219	Mg | Cu	Cr | Cd	Zn | Al
220	Sn | Cu	Bi | Ni	Pb | Cr

5.4 Электролиз растворов

Электролизом называется процесс, протекающий на электродах при пропускании через раствор или расплав электролита постоянного электрического тока. Электрод, на котором происходит восстановление, называется катодом. Он соединен с отрицательным полюсом источника постоянного тока. Электрод, на котором происходит окисление, называется анодом. Он соединен с положительным полюсом источника постоянного тока.

При электролизе водных растворов протекают процессы, связанные с электролизом воды.

Катодные процессы

На катоде возможно восстановление

- катионов металла $Me^{n+} + n\bar{e} \rightarrow Me^0$

- катиона водорода (свободного или в составе молекул воды)

$2H^+ + 2\bar{e} \rightarrow H_2$ (в кислой среде)

$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$ (в нейтральной и щелочной среде)

Для выбора приоритетного процесса необходимо сравнить стандартные электродные потенциалы металла и водорода. Потенциал восстановления водорода следует использовать с учётом его перенапряжения $E^0_{2H_2O/H_2}$=1,0 В.

Все металлы при электролизе водных растворов можно разделить на 3 группы:

1. активные металлы (Li - Al) на катоде не осаждаются, вместо них идёт восстановление ионов водорода:

$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$

2. металлы средней активности (Mn; Zn; Fe; Sn) могут осаждаться на катоде с одновременным выделением водорода.

3. неактивные металлы (Ag; Cu; Au) из-за высокой окислительной способности их катионов осаждаются на катоде без выделения водорода:

$$Ag^+ + 1\bar{e} \rightarrow Ag^0$$

Анодные процессы

На аноде возможны процессы окисления:

- материала анода: $Me^0 - n\bar{e} \rightarrow Me^{n+}$

- анионов солей: $2Cl^- - 2\bar{e} \rightarrow Cl_2$

- молекул воды: $2H_2O - 4\bar{e} \rightarrow O_2 + 4H^+$

Анионы кислородсодержащих кислот, имеющие в своём составе атом элемента в высшей степени окисления (SO_4^{2-}; NO_3^-; PO_4^{3-} и др.) при электролизе на аноде не разряжаются.

С учетом перенапряжения величину потенциала кислорода нужно считать равной +1,8 В.

Пример 1. Электролиз водного раствора сульфата натрия с инертными электродами: $Na_2SO_4 = 2Na^+ + SO_4^{2-}$

(-) катод Na^+; H_2O	(+) анод SO_4^{2-}; H_2O
$E^oNa^+/Na = -2,71$ В	$E^oO_2/2H_2O = 1,8$ В
$E^o2H_2O/H_2 = -1,0$ В	
Так как $E^oNa^+/Na < E^o2H_2O/H_2$, то происходит восстановление воды	$2H_2O - 4\bar{e} \rightarrow O_2 + 4H^+$
$2H_2O + 2\bar{e} \rightarrow H_2 + 2OH^-$	
$Na^+ + OH^- = NaOH$	$2H^+ + SO_4^{2-} = H_2SO_4$
Среда щелочная	Среда кислая

Пример 2. Электролиз водного раствора хлорида олова с инертными электродами

(-) катод Sn; H_2O	(+) анод Cl^-; H_2O
$E^oSn^{2+}/Sn = -0,136$ В	$E^oCl_2/2Cl^- = 1,36$ В
$E^o2H_2O/H_2 = -1,0$ В	$E^oO_2/2H_2O = 1,8$ В
Так как $E^oSn^{2+}/Sn > E^o2H_2O/H_2$ идет процесс восстановления катионов олова	Так как $E^oCl_2/2Cl^- < E^oO_2/2H_2O$, идёт процесс окисления ионов хлора
$Sn^{2+} + 2\bar{e} \rightarrow Sn^0$	$2Cl^- - 2\bar{e} \rightarrow Cl_2$

Электролиз с растворимым анодом если анод изготовлен из металла, способного растворяться в данном электролите, то происходит окисление металла и анод называют растворимым.

Пример 3. Электролиз водного раствора сульфата меди с медным анодам.

(-) катод Cu; H_2O	(+) анод Cu; SO_4^{2-}; H_2O

$E^0Cu^{2+}/Cu = +0,34$ В	$E^0Cu^{2+}/Cu = +0,34$ В
$E^02H_2O/H_2 = -1,0$ В	$E^0O_2/2H_2O = +1,8$ В
Так как $E^0Cu^{2+}/Cu > E^02H_2O/H_2$ идет восстановление катионов меди:	Сульфат–ионы не разряжаются, так как $E^0Cu^{2+}/Cu < E^0O_2/2H_2O$
$Cu^{2-} + 2\bar{e} \rightarrow Cu^0$	Анод растворяется $Cu^0 - 2\bar{e} \rightarrow Cu^{2+}$

Массу вещества, получаемого электролизом, определяют позаконам, открытым М. Фарадеем в 1834 г. Обобщенный закон Фарадея связывает массу вещества, образовавшегося при электролизе, со временем электролиза и силой тока:

$$M = \frac{Мэкв \cdot J \cdot \tau}{F} (г)$$

где m – масса образовавшегося вещества, г;

J – сила тока, А;

τ – время электролиза, с;

F – константа Фарадея (96500 кул/моль)

$M_{экв}$ – молярная масса электрохимических эквивалентов вещества. Рассчитывается как частное от деления молярной массы вещества на число электронов, перемещаемых при окислении или восстановлении.

Пример 1. Ток силой 2, 5А, проходя через раствор электролита, за 30 мин выделяет из раствора 2,77 г металла. Найти молярную массу эквивалентов металла.

Решение:

Из закона Фарадея:

$$M_{экв} = \frac{m \cdot F}{J \cdot t} = \frac{2,77 \cdot 96500}{2,5 \cdot 1800} = 59,4 \text{ г/моль.}$$

Задания к подразделу 5.4

Рассмотрите катодные и анодные процессы при электролизе водных растворов указанных веществ. Процессы на электродах обоснуйте значениями потенциалов (таблица 1). Составьте схемы электролиза с инертными электродами водных растворов предложенных соединений (отдельно два раствора). С инертными электродами, или растворимым анодом. Рассчитайте массу или объём (при н.у. для газов) продуктов, выделяющихся на электродах при пропускании через раствор в течении 1 часа тока силой 1А.

221	$LiBr$; $CoSO_4$	231	$NaCl$; $Al_2(SO_4)_3$
222	K_3PO_4; $Pb(NO_3)_2$	232	$Co(NO_3)_2$; KJ
223	$Ba(NO_3)_2$; $Sn(NO_3)_2$	233	$NiSO_4$; $NaNO_2$
224	$Cr(NO_3)_3$; $CuCl_2$ (Cu -)	234	$FeBr_2$; $NaOH$
225	$Ca(NO_3)_2$; $NiSO_4$	235	$ZnCl_2$; $CoBr_2$
226	K_2CO_3; $NiBr_2$ (Ni -)	236	$NiSO_4$; $MgCl_2$
227	$CoCl_2$; HNO_3	237	$MgCl_2$; $AgNO_3$ (Ag -)
228	$AgNO_3$; $Al_2(SO_4)_3$	238	$Ba(NO_3)_2$; Na_2CO_3
229	$BaCl_2$; H_2SO_4	239	$NaNO_3$; $NiCl_2$
230	$Pb(NO_3)_2$; H_2SO_4	240	KOH; $ZnSO_4$

6. Варианты заданий

Номер варианта – последние две цифры зачётной книжки

Номер варианта	Номера заданий
01	1, 21, 41, 61, 81, 101, 121, 141, 161, 181, 201, 221

02	2, 22, 42, 62, 82, 102, 122, 142, 162, 182, 202, 222
03	3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, 183, 203, 223
04	4, 24, 44, 64, 84, 104, 124, 144, 164, 184, 204, 224
05	5, 25, 45, 65, 85, 105, 125, 145, 165, 185, 205, 225
06	6, 26, 46, 66, 86, 106, 126, 146, 166, 186, 206, 226
07	7, 27, 47, 67, 87, 107, 127, 147, 167, 187, 207, 227
08	8, 28, 48, 68, 88, 108, 128, 148, 168, 188, 208, 228
09	9, 29, 49, 69, 89, 109, 129, 149, 169, 189, 209, 229
10	10, 30, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190, 210, 230
11	11, 31, 51, 71, 91, 111, 131, 151, 171, 191, 211, 231
12	12, 32, 52, 72, 92, 112, 132, 152, 172, 192, 212, 232
13	13, 33, 53, 73, 93, 113, 133, 153, 173, 193, 213, 233
14	14, 34, 54, 74, 94, 114, 134, 154, 174, 194, 214, 234
15	15, 35, 55, 75, 95, 115, 135, 155, 175, 195, 215, 235
16	16, 36, 56, 76, 96, 116, 136, 156, 176, 196, 216, 236
17	17, 37, 57, 77, 97, 117, 137, 157, 177, 197, 217, 237
18	18, 38, 58, 78, 98, 118, 138, 158, 178, 198, 218, 238
19	19, 39, 59, 79, 99, 119, 139, 159, 179, 199, 219, 239
20	20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240
21	1, 25, 44, 63, 85, 107, 132, 151, 172, 193, 211, 231
22	2, 22, 46, 61, 82, 105, 134, 152, 173, 194, 208, 222
23	3, 21, 41, 67, 84, 108, 127, 148, 169, 185, 207, 234
24	4, 27, 42, 63, 83, 103, 131, 146, 165, 192, 205, 231
25	5, 26, 47, 65, 87, 106, 129, 141, 172, 189, 212, 238
26	6, 21, 43, 64, 89, 107, 122, 151, 169, 191, 209, 227
27	7, 25, 49, 65, 86, 103, 125, 145, 162, 189, 212, 235
28	8, 23, 47, 62, 83, 106, 124, 141, 162, 187, 207, 224
29	9, 21, 42, 67, 85, 108, 125, 142, 163, 186, 208, 229
30	10, 22, 47, 61, 79, 111, 126, 143, 171, 193, 209, 238

31	11, 27, 41, 68, 81, 107, 125, 152, 175, 198, 209, 238
32	12, 24, 55, 73, 82, 112, 131, 147, 168, 191, 213, 235
33	13, 34, 56, 765, 91, 102, 126, 148, 170, 189, 204, 227
34	14, 25, 44, 67, 87, 105, 134, 151, 169, 192, 207, 228
35	15, 31, 47, 75, 95, 117, 137, 150, 173, 189, 212, 234
36	16, 29, 41, 74, 93, 112, 134, 152, 171, 188, 211, 233
37	17, 32, 43, 78,, 91, 101, 135, 153,172, 193, 210, 240
38	18, 21, 42, 67, 85, 102, 126, 142, 164, 187, 208, 231
39	19, 39, 45, 68, 84, 111, 127, 141, 163, 192, 207, 230
40	20, 38, 44, 67, 88, 110, 131, 142, 161, 189, 211, 226
41	11, 29, 40, 61, 90, 105, 128, 154, 168, 190, 209, 222
42	12, 22, 45, 62, 92, 107, 130, 153, 167, 191, 210, 223
43	13, 27, 46, 63, 93, 108, 131, 154, 162, 190, 205, 229
44	14, 30, 43, 62, 94, 109, 132, 149, 170, 187, 212, 235
45	15, 31, 47, 69, 87, 103, 133, 148, 169, 191, 211, 226
46	16, 22, 48, 68, 86, 102, 132, 147, 168, 190, 204, 231
47	17, 23, 42, 67,85, 115, 135, 151,161, 191, 205, 228
48	18, 32, 55, 71, 91, 107, 134, 150, 167, 192, 206, 229
49	19, 31, 54, 72, 92, 108, 129, 149, 172, 189, 210, 227
50	10, 23, 47, 62, 93, 112, 136, 153, 171, 187, 208, 221
51	11, 24, 48, 61, 87, 113, 131, 152, 167, 191, 212, 234
52	12, 25, 41, 62, 88, 110, 130, 156, 168, 192, 206, 231
53	13, 26, 42, 63, 89, 111, 131, 149, 161, 190, 209, 238
54	14, 32, 49, 71, 87, 109, 132, 148, 170, 183, 205, 229
55	15, 33, 43, 70, 35, 108, 133, 151, 163, 184, 204, 240
56	16, 31, 48, 69, 84, 107, 135, 149, 161, 187, 202, 224
57	17, 28, 42, 61, 35, 104, 129, 148,164, 189, 209, 222
58	18, 21, 42, 67, 85, 102, 126, 142, 164, 187, 208, 231
59	19, 29, 44, 62, 84, 105, 128, 147, 163, 185, 210, 223

60	20, 32, 47, 68, 83, 109, 130, 152, 164, 187, 206, 225
61	1, 31, 56, 78, 97, 117, 136, 156, 176, 195, 210, 234
62	2, 29, 54, 76, 96, 112, 135, 154, 174, 198, 209, 233
63	3,28, 53, 75, 94, 111, 134, 153, 173, 194, 208, 231
64	4, 26, 51, 74, 93, 115, 132, 151, 172, 193, 207, 230
65	5, 24, 55, 71, 92, 114, 134, 152, 171, 189, 204, 222
66	6, 27, 51, 72, 91, 109, 140, 155, 165, 191, 205, 235
67	7, 23, 44, 63, 85, 106, 139, 150,171, 192, 201, 226
68	8, 34, 47, 62, 87, 104, 136, 156, 164, 189, 219, 227
69	9, 29, 41, 61, 89, 108, 136, 156, 161, 187, 218, 231
70	10, 21, 49, 67, 86, 105, 128, 147, 162, 188, 217, 236
71	11, 22, 48, 69, 88, 110, 129, 148, 169, 185, 212, 235
72	12, 32, 52, 64, 84, 112, 127, 151, 168, 186, 211, 232
73	13, 29, 53, 75, 95, 116, 135, 154, 175, 193, 210, 234
74	14, 28, 54, 77, 99, 115, 136, 153, 176, 194, 209, 233
75	15, 37, 51, 76, 98, 114, 134, 151, 168, 191, 208, 231
76	16, 36, 52, 71, 91, 112, 133, 152, 167, 192, 207, 229
77	17, 31, 48, 70,, 92, 110, 130, 156,174, 199, 206, 228
78	18, 30, 47, 72, 93, 112, 131, 155, 175, 198, 205, 230
79	19, 32, 46, 75, 95, 110, 128, 154, 176, 197, 204, 223
80	20, 33, 44, 78, 91, 111, 125, 153, 171, 196, 205, 224
81	11, 34, 41, 79, 90, 117, 126, 149, 170, 190, 206, 225
82	12, 29, 51, 78, 94, 106, 130, 147, 173, 189, 204, 226
83	13, 26, 49, 77, 95, 108, 131, 146, 174, 191, 212, 230
84	14, 28, 47, 74, 93, 107, 129, 145, 175, 195, 215, 235
85	15, 27, 52, 69, 86, 104, 136, 154, 161, 188, 207, 236
86	16, 30, 51, 68, 85, 105, 134, 156, 174, 189, 208, 237
87	17, 29, 44, 61,, 89, 106, 135, 147,176, 191, 210, 223
88	18, 31, 47, 62, 91, 110, 132, 152, 175, 192, 209, 224

89	19, 32, 48, 63, 90, 109, 128, 156, 168, 194, 211, 240
90	20, 34, 49, 67, 91, 112, 129, 153, 169, 199, 210, 239
91	11, 35, 47, 71, 88, 107, 127, 156, 171, 189, 207, 225
92	11, 36, 48, 72, 87, 106, 126, 155, 172, 188, 206, 226
93	13, 29, 47, 73, 89, 108, 129, 158, 176, 187, 212, 227
94	14, 33, 44, 78, 90, 105, 128, 157, 173, 186, 211, 226
95	15, 31, 43, 77, 89, 104, 127, 156, 173, 194, 211, 222
96	16, 30, 51, 76, 88, 105, 123, 155, 174, 195, 210, 232
97	17, 28, 48, 72, 86, 103, 128, 151, 175, 187, 211, 235
98	18, 27, 47, 73, 85, 102, 127, 149, 172, 186, 210, 228
99	19, 26, 42, 71, 81, 109, 125, 152, 171, 189, 209, 235
00	20, 24, 41, 75, 82, 110, 121, 148, 169, 190, 208, 227

Список литературы

1. Глинка Н.Л. Общая химия.:Учебник/под.рел. В.А.Попкова, А.В.Бабкова.-18-е изд., перераб. и доп.-М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011,886с

2. Коровин Н.В. Общая химия Учебник/ 13-е изд., перераб. и доп.-М.: Издательский центр "Академия" 2011 .-496с
3, Глинка Н.Л. Задачи и упражнения по общей химии. Учебное пособие/ Изд.стер.- М.: КНОРУС. 2011. 240с.
4. Попова М.Н., Ишметова Р.И. Общая химия. Учебное пособие по самостоятельной работе для студентов заочного обучения всех специальностей. Издание УГГУ, Екатеринбург, 2010.-43 с.
5. Кузьменко Н.Е., Еремин В.В., Попков В.В. Начала химии: учебник – М.: Экзамен, 2004.-720 с.

8. Приложения

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E^0
Ag	α -$Ag_2S + 2\bar{e} = 2Ag + S^{2-}$	-0,70
	$Ag(CN)_2^- + \bar{e} = Ag + 2CN^-$	-0,29
	$AgI + \bar{e} = Ag + I^-$	-0,152
	$AgCN + \bar{e} = Ag + CN^-$	-0,04
	$Ag(S_2O_3)_2^{3-} + \bar{e} = Ag + 2S_2O_3^{2-}$	0,01
	$AgBr + \bar{e} = Ag + Br^-$	0,071
	$AgCl + \bar{e} = Ag + Cl^-$	0,222
	$Ag_2O + H_2O + 2\bar{e} = 2Ag + 2OH^-$	0,344
	$Ag(NH_3)_2^+ + \bar{e} = Ag + 2NH_3$	0,373
	$Ag_2CrO_4 + 2\bar{e} = 2Ag + CrO_4^{2-}$	0,446
	$Ag_2C_2O_4 + 2\bar{e} = 2Ag + C_2O_4^{2-}$	0,472
	$AgBrO_3 + \bar{e} = Ag + BrO_3^-$	0,55
	$2AgO + H_2O + 2\bar{e} = Ag_2O + 2OH^-$	0,60
	$Ag^- + \bar{e} = Ag$	0,799
	$Ag_2O + 2H^+ + 2\bar{e} = 2Ag + H_2O$	1,173
	$2AgO + 2H^+ + 2\bar{e} = Ag_2O + H_2O$	1,398
Al	$AlO_2^- + 2H_2O + 3\bar{e} = Al + 4OH^-$	-2,35
	$Al(OH)_3 + 3\bar{e} = Al + 3OH^-$	-2,31
	$AlF_6^{3-} + 3\bar{e} = Al + 6F^-$	-2,07
	$Al^{3+} + 3e = Al$	-1,663
	$Al(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Al + 3H_2O$	-1,471
	$AlO_2^- + 4H^+ + 3e = Al + 2H_2O$	-1,262
As	$As + 3H^+ + 3e = AsH_3$	-0,60
	$HAsO_2 + 3H^- + 3e = As + 2H_2O$	0,248
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = HAsO_2 + 2H_2O$	0,559
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = H_3AsO_3 + H_2O$	0,58
Au	$Au(CN)_2 + e = Au + 2CN^-$	-0,61
	$AuBr_4^- + 2e = AuBr_2^- + 2Br^-$	0,802
	$AuCl_4^- + 2e = AuCl_2^- + 2Cl^-$	0,926
	$AuBr_2^- + e = Au + 2Br^-$	0,959
	$AuCl_2^- + 2e = Au + 2Cl^-$	1,15
	$Au^{3+} + 2e = Au^-$	1,401
	$Au^{3+} + 3e = Au$	1,498
	$Au^+ + 3e = Au$	1,692
B	$BF_4^- + 3e = B + 4F^-$	-1,04

	$H_3BO_3 + 3H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,869
	$BO_3^{3-} + 6H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,165
Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	-2,905
Be	$Be^{2+} + 2e = Be$	-1,847
	$Be(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-1,820
	$BeO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-0,909
Bi	$Bi_2O_3 + 3H_2O + 6e = 2Bi + 6OH^-$	-0,46
	$BiOCl + 2H^+ + 3e = Bi + Cl^- + H_2O$	0,16
	$Bi^{3+} + 3e = Bi$	0,215
	$BiO^+ + 2H^+ + 3e = Bi + H_2O$	0,32
	$Bi_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Bi + 3H_2O$	0,371
	$NaBiO_3(т) + 6H^+ + 2e = Bi^{3+} + Na^+ + 3H_2O$	1,6 - 1,808
Br	$2BrO^- + 2H_2O + 2e = Br_2 + 4OH^-$	0,45
	$2BrO_3^- + 6H_2O + 10e = Br_2 + 12OH^-$	0,50
	$BrO_3^- + 2H_2O + 4e = BrO^- + 4OH^-$	0,54
	$BrO_3^- + 3H_2O + 6e = Br^- + 6OH^-$	0,61
	$BrO^- + H_2O + 2e = Br^- + 2OH^-$	0,76
	$Br_3^- + 2e = 3Br^-$	1,05
	$Br_2(ж) + 2e = 2Br^-$	1,065
	$BrO_3^- + 6H^+ + 6e = Br^- + 3H_2O$	1,44
	$2BrO_3^- + 12H^+ + 10e = Br_2 + 6H_2O$	1,52
	$2HBrO + 2H^+ + 2e = Br_2 + 2H_2O$	1,59
C	$HCOO^- + 2H_2O + 2e = HCHO + 3OH^-$	-1,07
	$2CO_2 + 2H^+ + 2e = H_2C_2O_4$	-0,49
	$CO_2 + 2H^+ + 2e = HCOOH$	-0,20
	$C(графит) + 4H^+ + 4e = CH_4$	-0,132
	$CO_2 + 2H^+ + 2e = CO + H_2O$	-0,12
	$HCOOH + 2H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	-0,01
	$HCOOH + 4H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,145
	$HCOO^- + 3H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	0,167
	$CH_3CHO + 2H^+ + 2e = C_2H_5OH$	0,19
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = HCHO + 2H_2O$	0,197
	$HCOO^- + 5H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,199
	$CO_3^{2-} + 8H^+ + 6e = CH_3OH + 2H_2O$	0,209
	$CO_3^{2-} + 3H^+ + 2e = HCOO^- + H_2O$	0,227
	$HCHO + 2H^+ + 2e = CH_3OH$	0,232
	$2CO_3^{2-} + 4H^+ + 2e = C_2O_4^{2-} + 2H_2O$	0,441
	$C_2H_5OH + 2H^+ + 2e = C_2H_6 + H_2O$	0,46
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = C(графит) + 3H_2O$	0,475

	$CO + 6H^{+} + 6e = CH_4 + H_2O$	0,497
	$CH_3OH + 2H^{-} + 2e = CH_4 + H_2O$	0,59
Ca	$Ca^{2-} + 2e = Ca$	-2,866
Cd	$CdS + 2e = Cd + S^{2-}$	-1,175
	$Cd(CN)_4^{2-} + 2e = Cd + 4CN^{-}$	-1,09
	$Cd(OH)_2 + 2e = Cd + 2OH^{-}$	-0,81
	$Cd(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cd + 4NH_3$	-0,61
	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	-0,403
	$Cd(OH)_2 + 2H^{+} + 2e = Cd + 2H_2O$	0,005
	$CdO + 2H^{-} + 2e = Cd + H_2O$	0,063
Ce	$Ce^{3+} + 3e = Ce$	-2,48
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M H_2SO_4)	1,44
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M HNO_3)	1,61
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M $HClO_4$)	1,70
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$	1,77
Cl	$ClO_4^{-} + H_2O + 2e = ClO_3^{-} + 2OH^{-}$	0,36
	$2ClO^{-} + 2H_2O + 2e = Cl_2 + 4OH^{-}$	0,40
	$ClO_4^{-} + H_2O + 8e = Cl^{-} + 8OH^{-}$	0,56
	$ClO_3^{-} + 3H_2O + 6e = Cl^{-} + 6OH^{-}$	0,63
	$ClO_2 + 2H_2O + 5e = Cl^{-} + 4OH^{-}$	0,85
	$ClO^{-} + H_2O + 2e = Cl^{-} + 2OH^{-}$	0,88
	$ClO_3^{-} + 2H^{+} + e = ClO_2 + H_2O$	1,15
	$ClO_4^{-} + 2H^{+} + 2e = ClO_3^{-} + H_2O$	1,189
	$ClO_2 + 4H^{+} + 4e = 2HCl + H_2O$	1,351
	$Cl_2 + 2e = 2Cl^{-}$	1,3595
	$ClO_4^{-} + 8H^{+} + 8e = Cl^{-} + 4H_2O$	1,38
	$2ClO_4^{-} + 16H^{+} + 14e = Cl_2 + 8H_2O$	1,39
	$ClO_2 + 5H^{+} + 5e = HCl + 2H_2O$	1,436
	$ClO_3^{-} + 6H^{+} + 6e = Cl^{-} + 3H_2O$	1,451
	$2ClO_3^{-} + 12H^{+} + 10e = Cl_2 + 6H_2O$	1,47
	$HClO + H^{+} + 2e = Cl^{-} + H_2O$	1,494
	$ClO_2 + 4H^{+} + 5e = Cl^{-} + 2H_2O$	1,51
	$2ClO_2 + 8H^{+} + 8e = Cl_2 + 4H_2O$	1,549
	$HClO_2 + 3H^{+} + 4e = Cl^{-} + 2H_2O$	1,57
	$2HClO + 2H^{+} + 2e = Cl_2 + 2H_2O$	1,63
	$2HClO_2 + 6H^{+} + 6e = Cl_2 + 4H_2O$	1,64
Co	β -$CoS + 2e = Co + S^{2-}$	-1,07
	α -$CoS + 2e = Co + S^{2-}$	-0,90
	$Co(CN)_6^{3-} + e = Co(CN)_6^{4-}$	-0,84

	$Co(OH)_2 + 2e = Co + 2OH^-$	-0,73
	$CoCO_3 + 2e = Co + CO_3^{2-}$	-0,64
	$Co(NH_3)_6^{2+} + 2e = Co + 6NH_3$	-0,42
	$Co^{2+} + 2e = Co$	-0,277
	$Co(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Co + 2H_2O$	0,095
	$Co(NH_3)_6^{3+} + e = Co(NH_3)_6^{2+}$	0,1
	$CoO + 2H^+ + 2e = Co + H_2O$	0,166
	$Co(OH)_3 + e = Co(OH)_2 + OH^-$	0,17
	$Co^{3+} + 3e = Co$	0,33
	$Co^{3+} + e = Co^{2+}$	1,38 - 1,842
Cr	$Cr(OH)_2 + 2e = Cr + 2OH^-$	-1,4
	$Cr(OH)_3 + 3e = Cr + 3OH^-$	-1,3
	$CrO_2^- + 2H_2O + 3e = Cr + 4OH^-$	-1,2
	$Cr^{2+} + 2e = Cr$	-0,913
	$Cr^{3+} + 3e = Cr$	-0,744
	$Cr(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Cr + 3H_2O$	-0,654
	$Cr^{3+} + e = Cr^{2+}$	-0,407
	$CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e = Cr(OH)_3 + 5OH^-$	-0,13
	$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 12e = 2Cr + 7H_2O$	0,294
	$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Cr + 4H_2O$	0,366
	$CrO_4^{2-} + 4H^+ + 3e = CrO_2^- + 2H_2O$	0,945
	$CrO_2^- + 4H^+ + e = Cr^{2+} + 2H_2O$	1,188
	$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$	1,333
	$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 3e = Cr^{3+} + 4H_2O$	1,477
Cs	$Cs^+ + e = Cs$	-2,923
Cu	$Cu_2S + 2e = 2Cu + S^{2-}$	-0,89
	$CuS + 2e = Cu + S^{2-}$	-0,71
	$Cu(CN)_2^- + e = Cu + 2CN^-$	-0,43
	$Cu_2O + H_2O + 2e = 2Cu + 2OH^-$	-0,36
	$Cu(OH)_2 + 2e = Cu + 2OH^-$	-0,22
	$CuI + e = Cu + I^-$	-0,185
	$Cu(NH_3)_2^+ + e = Cu + 2NH_3$	-0,12
	$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu + 4NH_3$	-0,07
	$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu(NH_3)_2^+ + 2NH_3$	-0,01
	$CuI_2^- + e = Cu + 2I^-$	0,00
	$CuBr + e = Cu + Br^-$	0,03
	$CuCl + e = Cu + Cl^-$	0,137
	$Cu^{2+} + e = Cu^+$	0,153
	$CuCl_2^- + e = Cu + 2Cl^-$	0,177

	$2Cu^{2-} + H_2O + 2e = Cu_2O + 2H^+$	0,203
	$Cu^{2+} + 2e = Cu$	0,345
	$Cu^{2+} + 2Cl^- + e = CuCl_2^-$	0,463
	$Cu^- + e = Cu$	0,520
	$Cu^{2+} + Cl^- + e = CuCl$	0,538
	$CuO + 2H^- + 2e = Cu + H_2O$	0,570
	$Cu(OH)_2 + 2H^- + 2e = Cu + 2H_2O$	0,609
	$Cu^{2+} + Br^- + e = CuBr$	0,640
	$2CuO + 2H^+ + 2e = Cu_2O + H_2O$	0,669
	$Cu^{2+} + I^- + e = CuI$	0,86
	$Cu^{2+} + 2CN^- + e = Cu(CN)_2$	1,12
Dy	$Dy^{3+} + 3e = Dy$	-2,353
Eu	$Eu^{2-} + 2e = Eu$	-3,395
	$Eu^{3-} + e = Eu^{2+}$	-0,429
F	$F_2O + 2H^- + 4e = 2F^- + H_2O$	2,1
	$F_2 + 2e = 2F^-$	2,87
Fe	$FeS + 2e = Fe + S^{2-}$	-0,95
	$Fe(OH)_2 + 2e = Fe + 2OH^-$	-0,877
	$FeCO_3 + 2e = Fe + CO_3^{2-}$	-0,756
	$Fe(OH)_3 + e = Fe(OH)_2 + OH^-$	-0,56
	$Fe^{2-} + 2e = Fe$	-0,440
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 8e = 3Fe + 4H_2O$	-0,085
	$Fe_2O_3 + H_2O + 2H^+ + 2e - 2Fe(OH)_2$	-0,057
	$Fe_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Fe + 3H_2O$	-0,051
	$Fe(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$	-0,047
	$Fe^{3-} + 3e = Fe$	-0,037
	$Fe(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Fe + 3H_2O$	0,059
	$Fe(OH)_3 + H^- + e = Fe(OH)_2 + H_2O$	0,271
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$	0,356
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M H_2SO_4)	0,68
	$Fe^{3-} + e = Fe^{2-}$ (1M HCl)	0,70
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$ (1M HCl)	0,71
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$	0,771
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 2e = 3Fe^{2+} + 4H_2O$	0,980
Ga	$Ga^{3+} + 3e = Ga$	-0,53
Gd	$Gd^{3+} + 3e = Gd$	-2,397
Ge	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 2e = Ge^{2+} + 3H_2O$	-0,363
	$GeO_2 + 4H^- + 4e = Ge + 2H_2O$	-0,15
	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 4e = Ge + 3H_2O$	-0,13

	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	0,000
H	$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$	-0,828
	$2H^+ + 2e = H_2$	0,0000
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
Hf	$Hf^{4+} + 4e = Hf$	-1,70
	$HfO_2 + 4H^+ + 4e = Hf + 2H_2O$	-1,57
Hg	$HgS + 2e = Hg + S^{2-}$	-0,69
	$Hg(CN)_4^{2-} + 2e = Hg + 4CN^-$	-0,37
	$Hg_2I_2 + 2e = 2Hg + 2I^-$	-0,041
	$HgI_4^{2-} + 2e = Hg + 4I^-$	-0,04
	$HgO(красная) + H_2O + 2e = Hg + 2OH^-$	0,098
	$Hg_2Br_2 + 2e = 2Hg + 2Br^-$	0,140
	$HgBr_4^{2-} + 2e = Hg + 4Br^-$	0,21
	$Hg_2Cl_2 + 2K^+ + 2e = 2Hg + 2KCl (тв)$	0,2415
	$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$	0,268
	$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^- (1M KCl)$	0,28
	$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^- (0,1M KCl)$	0,334
	$HgCl_4^{2-} + 2e = Hg + 4Cl^-$	0,48
	$Hg_2SO_4 + 2e = 2Hg + SO_4^{2-}$	0,6151
	$Hg_2^{2-} + 2e = 2Hg$	0,788
	$Hg^{2+} + 2e = Hg$	0,850
	$2Hg^{2-} + 2e = Hg_2^{2+}$	0,920
	$HgO + 2H^- + 2e = Hg + H_2O$	0,926
Ho	$Ho^{3+} + 3e = Ho$	-2,319
I	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,14
	$2IO_3^- + 6H_2O + 10e = I_2 + 12OH^-$	0,21
	$IO_3^- + 3H_2O + 6e = I^- + 6OH^-$	0,25
	$2IO^- + H_2O + 2e = I_2 + 4OH^-$	0,45
	$IO^- + H_2O + 2e = I^- + 2OH^-$	0,49
	$I_2 + 2e = 2I^-$	0,536
	$I_3^- + 2e = 3I^-$	0,545
	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,56
	$HIO + H^+ + 2e = I^- + H_2O$	0,99
	$2ICl_2^- + 2e = I_2 + 4Cl^-$	1,06
	$IO_3^- + 6H^- + 6e = I^- + 3H_2O$	1,085
	$IO_3^- + 5H^- + 4e = HIO + 2H_2O$	1,14
	$2IO_3^- + 12H^- + 10e = I_2 + 6H_2O$	1,19
	$2HIO + 2H^+ + 2e = I_2 + 2H_2O$	1,45
	$H_5IO_6 + H^- + 2e = IO_3^- + 3H_2O$	1,60

Ir	$IrO_2 + 4H^+ + 4e = Ir + H_2O$	0,93
	$Ir^{3+} + 3e = Ir$	1,15
K	$K^+ + e = K$	-2,924
La	$La^{3+} + 3e = La$	-2,522
Li	$Li^+ + e = Li$	-3,045
Mg	$Mg(OH)_2 + 2e = Mg + 2OH^-$	-2,69
	$Mg^{2+} + 2e = Mg$	-2,363
	$Mg(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mg + 2H_2O$	-1,862
Mn	$MnCO_3 + 2e = Mn + CO_3^{2-}$	-1,48
	$Mn^{2-} + 2e = Mn$	-1,18
	$Mn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mn + 2H_2O$	-0,727
	$MnO_4^- + e = MnO_4^{2-}$	0,564
	$MnO_4^- + 2H_2O + 3e = MnO_2 + 4OH^-$	0,60
	$MnO_2 + 4H^- + 2e = Mn^{2-} + 2H_2O$	1,228
	$Mn_2O_3 + 6H^+ + 2e = 2Mn^{2-} + 3H_2O$	1,443
	$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$	1,507
	$Mn^{3-} + e = Mn^{2+}$ (8M H_2SO_4)	1,509
	$MnO_4^- + 4H^+ + 3e = MnO_2 + 2H_2O$	1,692
	$MnO_4^{2-} + 4H^- + 2e = MnO_2 + 2H_2O$	2,257
Mo	$H_2MoO_4 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	-1,091
	$MoO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = Mo + 8OH^-$	-1,05
	$Mo^{3-} + 3e = Mo$	-0,200
	$MoO_2 + 4H^- + 4e = Mo + 2H_2O$	-0,072
	$MoO_4^{2-} + 8H^- + 6e = Mo + 4H_2O$	0,154
	$MoO_3 + 2H + 2e = MoO_2 + H_2O$	0,320
	$MoO_4^{2-} + 4H^- + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	0,606

Элемент	Реакция	E^0
N	$3N_2 + 2\bar{e} = 2N_3^-$	-3,4
	$3N_2 + 2H^+ + 2\bar{e} = 2HN_3$	-3,1
	$N_2 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_2OH + 2OH^-$	-3,04
	$N_2 + 4H_2O + 4\bar{e} = N_2H_4 + 4OH^-$	-1,16
	$N_2 + 8H_2O + 6\bar{e} = 2NH_4OH + 6OH^-$	-0,74
	$NO_2^- + H_2O + \bar{e} = NO + 2OH^-$	-0,46
	$NO_2^- + 6H_2O + 6\bar{e} = NH_4OH + 7OH^-$	-0,15
	$NO_3^- + 2H_2O + 3\bar{e} = NO + 4OH^-$	-0,14
	$NO_3^- + 7H_2O + 8\bar{e} = NH_4OH + 9OH^-$	-0,12

	$NO_3^- + H_2O + 2\bar{e} = NO_2^- + 2OH^-$	0,01
	$N_2 + 6H^+ + 6\bar{e} = 2NH_3$	0,057
	$N_2H_4 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_4OH + 2OH^-$	0,1
	$N_2 + 8H^+ + 6\bar{e} = 2NH_4$	0,275
	$2NO_2^- + 4H_2O + 6\bar{e} = N_2 + 8OH^-$	0,41
	$NH_2OH + 2H_2O + 2\bar{e} = NH_4OH^- + 2OH^-$	0,42
	$2NO_2 + 4H_2O + 8e = N_2 + 8OH^-$	0,53
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,78
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,80
	$2NO + 2H_2O + 4e = N_2 + 4OH^-$	0,85
	$HNO_2 + 7H^+ + 6e = NH_4^+ + 2H_2O$	0,864
	$NO_3^- + 10H^+ + 8e = NH_4^+ + 3H_2O$	0,87
	$2NO_2 + 2e = 2NO_2^-$	0,88
	$N_2O + H_2O + 2e = N_2 + 2OH^-$	0,94
	$NO_3^- + 3H^+ + 2e = HNO_2 + 2H_2O$	0,94
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,957
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,96
	$HNO_2 + H^+ + e = NO + H_2O$	1,00
	$NO_2 + 2H^+ + 2e = NO + H_2O$	1,03
	$NO_2 + H^+ + e = HNO_2$	1,09
	$2NO_3^- + 10H^+ + 8e = N_2O + 5H_2O$	1,116
	$2NO_3^- + 12H^+ + 10e = N_2 + 6H_2O$	1,246
	$2HNO_2 + 4H^+ + 4e = N_2O + 3H_2O$	1,297
	$2NO_2 + 8H^+ + 8e = N_2 + 4H_2O$	1,36
	$2HNO_2 + 6H^+ + 6e = N_2 + 4H_2O$	1,45
	$2NO + 4H^+ + 4e = N_2 + 2H_2O$	1,678
	$N_2O + 2H^+ + 2e = N_2 + H_2O$	1,766
Na	$Na^+ + e = Na$	-2,714
Nd	$Nd^{3+} + 3e = Nd$	-2,431
Ni	γ-$NiS + 2e = Ni + S^{2-}$	-1,04
	α-$NiS + 2e = Ni + S^{2-}$	-0,83
	$Ni(OH)_2 + 2e = Ni + 2OH^-$	-0,72
	$Ni(NH_3)_6^{2+} + 2e = Ni + 6NH_3$	-0,49
	$NiCO_3 + 2e = Ni + CO_3^{2-}$	-0,45
	$Ni^{2+} + 2e = Ni$	-0,25
	$Ni(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Ni + 2H_2O$	0,110
	$NiO + 2H^+ + 2e = Ni + H_2O$	0,116
	$NiO_2 + 4H^+ + 2e = Ni^{2+} + 2H_2O$	1,68

Np	$Np^{3+} + 3e = Np$	-1,856
	$Np^{4+} + e = Np^{3+}$	0,152
	$NpO_2^+ + 4H^+ + 2e = Np^{3+} + 2H_2O$	0,451
	$NpO_2^+ + e = NpO_2$	0,564
	$NpO_2^{2+} + e = NpO_2^+$	1,149
	$Np_2O_5 + 2H^+ + 2e = 2NpO_2 + H_2O$	1,253
O	$O_2 + 2H_2O + 4e = 4OH^-$	0,401
	$O_2 + 2H^+ + 2e = H_2O_2$	0,682
	$H_2O_2 + 2e = 3OH^-$	0,88
	$O_2 + 4H^+ + 4e = 2H_2O$	1,229
	$O_3 + H_2O + 3e = O_2 + 2OH^-$	1,24
	$O_3 + 6H^+ + 6e = 3H_2O$	1,511
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
	$O_3 + 2H^+ + 2e = O_2 + H_2O$	2,07
Os	$OsO_2 + 2H_2O + 4e = Os + 4OH^-$	-0,15
	$OsCl_6^{3-} + e = Os^{2+} + 6Cl^-$	0,4
	$OsO_4 + 8H^+ + 8e = Os + 4H_2O$	0,85
	$OsCl_6^{2-} + e = OsCl_6^{3-}$	0,85
	$Os^{2+} + 2e = Os$	0,85
	$OsO_4 + 4H^+ + 4e = OsO_2 + 2H_2O$	0,96
P	$H_2PO_2^- + e = P + 2OH^-$	-2,05
	$HPO_3^{2-} + 2H_2O + 2e = H_2PO_2^- + 3OH^-$	-1,57
	$PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e = HPO_3^{2-} + 3OH^-$	-1,12
	$2H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_4P_2O_6 + 2H_2O$	-0,94
	$P + 3H_2O + 3e = PH_3 + 3OH^-$	-0,89
	$H_3PO_2 + H^+ + e = P + 2H_2O$	-0,51
	$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(белый) + 3H_2O$	-0,502
	$H_3PO_3 + 3H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(красный) + 3H_2O$	-0,454
	$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(белый) + 4H_2O$	-0,411
	$H_3PO_4 + 4H^+ + 4e = H_3PO_2 + 2H_2O$	-0,39
	$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(красный) + 4H_2O$	-0,383
	$H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_3PO_3 + H_2O$	-0,276
	$H_3PO_3 + 2H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$P + 3H^+ + 3e = PH_3$	0,06
	$H_4P_2O_6 + 2H^+ + 2e = 2H_3PO_3$	0,38
Pb	$PbS + 2e = Pb + S^{2-}$	-0,93
	$PbO + H_2O + 2e = Pb + 2OH^-$	-0,58
	$PbCO_3 + 2e = Pb + CO_3^{2-}$	-0,506

	$PbI_2 + 2e = Pb + 2I^-$	0,365
	$PbSO_4 + 2e = Pb + SO_4^{2-}$	-0,3563
	$PbF_2 + 2e = Pb + 2F^-$	-0,350
	$PbBr_2 + 2e = Pb + 2Br^-$	-0,280
	$PbCl_2 + 2e = Pb + 2Cl^-$	-0,268
	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	-0,126
	$PbO_3^{2-} + H_2O + 2e = PbO_2^{2-} + 2OH^-$	0,2
	$PbO + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,248
	$Pb(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,277
	$PbO_2 + H_2O + 2e = PbO + 2OH^-$	0,28
	$Pb_3O_4 + 2H^+ + 2e = 3PbO + H_2O$	0,972
	$PbO_2 + 4H^+ + 2e = Pb^{2+} + 2H_2O$	1,449-1,455
	$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = PbSO_4 + 2H_2O$	1,685
	$Pb^{4+} + 2e = Pb^{2+}$	1,694
Pd	$Pd(OH)_2 + 2e = Pd + 2OH^-$	0,07
	$PdI_6^{2-} + 2e = PdI_4^{2-} + 2I^-$	0,623
	$PdCl_4^{2-} + 2e = Pd + 4Cl^-$	0,623
	$PdO + 2H^+ + 2e = Pd + H_2O$	0,896
	$PdCl_6^{2-} + 4e = Pd + 6Cl^-$	0,96
	$Pd^{2+} + 2e = Pd$	0,987
	$PdBr_6^{2-} + 2e = PdBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,993
	$PdO_2 + 2H^+ + 2e = PdO + H_2O$	1,283
	$PdCl_6^{2-} + 2e = PdCl_4^{2-} + 2Cl^-$	1,288
Pt	$PtS + 2e = Pt + S^{2-}$	-0,95
	$PtS_2 + 2e = PtS + S^{2-}$	-0,64
	$Pt(OH)_2 + 2e = Pt + 2OH^-$	0,15
	$PtI_6^{2-} + 2e = PtI_4^{2-} + 2I^-$	0,393
	$PtBr_4^{2-} + 2e = Pt + 4Br^-$	0,58
	$PtBr_6^{2-} + 2e = PtBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,59
	$PtCl_6^{2-} + 2e = PtCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,720
	$PtCl_4^{2-} + 2e = Pt + 4Cl^-$	0,73
	$Pt(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pt + 2H_2O$	0,980
	$PtO_2 + 2H^+ + 2e = Pt(OH)_2$	1,045
	$Pt^{2+} + 2e = Pt$	1,188
Ra	$Ra^{2+} + 2e = Ra$	-2,925
Rb	$Rb^+ + e = Rb$	-2,925
S	$SO_4^{2-} + H_2O + 2e = SO_3^{2-} + 2OH^-$	-0,93
	$2SO_4^{2-} + 5H_2O + 8e = S_2O_3^{2-} + 10OH^-$	-0,76
	$SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S + 6OH^-$	-0,66

	$2SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S_2O_3^{2-} + 6OH^-$	-0,58
	$S_2^{2-} + 2e = 2S^{2-}$	-0,524
	$S + 2e = S^{2-}$	-0,48
	$2S + 2e = S_2^{2-}$	-0,476
	$S + H^+ + 2e = HS^-$	-0,065
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 8e = 2S^{2-} + 3H_2O$	-0,006
	$S_4O_6^{2-} + 2e = 2S_2O_3^{2-}$	0,08
	$SO_4^{2-} + 8H^- + 8e = S^{2-} + 4H_2O$	0,149
	$S + 2H^+ + 2e = H_2S$	0,141-0,17
	$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SO_3 + H_2O$	0,17
	$SO_3^{2-} + 6H^- + 6e = S^{2-} + 3H_2O$	0,231
	$2SO_4^{2-} + 10H^- + 8e = S_2O_3^{2-} + 5H_2O$	0,29
	$SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = H_2S + 4H_2O$	0,311
	$SO_4^{2-} + 8H^- + 6e = S + 4H_2O$	0,357
	$2H_2SO_3 + 2H^- + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,40
	$H_2SO_3 + 4H^+ + 4e = S + 3H_2O$	0,449
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 4e = 2S + 3H_2O$	0,5
	$2SO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,705
	$S_2O_8^{2-} + 2e = 2SO_4^{2-}$	2,01
Sb	$SbO_2^- + 2H_2O + 3e = Sb + 4OH^-$	-0,675
	$Sb + 3H^+ + 3e = SbH_3$	-0,51
	$SbO_3^- + H_2O + 2e = SbO_2^- + 2OH^-$	-0,43
	$Sb_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Sb + 3H_2O$	0,152
	$SbO^+ + 2H^+ + 3e = Sb + H_2O$	0,212
	$SbO_3^- + 2H^- + 3e = SbO_2^- + H_2O$	0,353
	$SbO_2^- + 4H^- + 3e = Sb + 2H_2O$	0,446
	$Sb_2O_5 + 6H^- + 4e = 2SbO^- + 3H_2O$	0,581
	$Sb_2O_5 + 4H^- + 4e = Sb_2O_3 + 2H_2O$	0,671
Sc	$Sc^{3+} + 3e = Sc$	-2,077
Se	$Se + 2e = Se^{2-}$	-0,92
	$Se + 2H^+ + 2e = H_2Se$	-0,40
	$SeO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Se + 6OH^-$	-0,366
	$SeO_4^{2-} + H_2O + 2e = SeO_3^{2-} + 2OH^-$	0,05
	$H_2ScO_3 + 4H^+ + 4e = Sc + 3H_2O$	0,741
	$SeO_4^{2-} + 4H^- + 2e = H_2SeO_3 + H_2O$	1,15
Si	$SiO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Si + 6OH^-$	-1,7
	$SiF_6^{2-} + 4e = Si + 6F^-$	-1,2
	$SiO_3^{2-} + 6H^- + 4e = Si + 3H_2O$	-0,455
	$Si + 4H^+ + 4e = SiH_4$	0,102

Sn	$SnS + 2e = Sn + S^{2-}$	-0,94
	$Sn(OH)_6^{2-} + 2e = HSnO_2^- + H_2O + 3OH^-$	-0,93
	$HSnO_2^- + H_2O + 2e = Sn + 3OH^-$	-0,91
	$SnF_6^{2-} + 4e = Sn + 6F^-$	-0,25
	$Sn^{2+} + 2e = Sn$	-0,136
	$SnO_2 + 2H^+ + 2e = SnO + H_2O$	-0,108
	$SnO_2 + 4H^+ + 4e = Sn + 2H_2O$	-0,106
	$SnO + 2H^+ + 2e = Sn + H_2O$	-0,104
	$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Sn + 2H_2O$	-0,091
	$SnCl_6^{2-} + 2e = SnCl_4^{2-} + 2Cl^-$ (1M HCl)	0,14
	$Sn^{4+} + 2e = Sn^{2+}$	0,151
Sr	$Sr^{2+} + 2e = Sr$	-2,888
Te	$Te + 2e = Te^{2-}$	-1,14
	$Te + 2H^+ + 2e = H_2Te$	-0,72
	$TeO_3^{2-} + 2H_2O + 4e = Te + 6OH^-$	-0,57
	$TeO_2 + 4H^+ + 4e = Te + 2H_2O$	0,529
	$TeO_4^{2-} + 2H^+ + 2e = TeO_3^{2-} + H_2O$	0,892
	$H_6TeO_6 + 2H^+ + 2e = TeO_2 + 4H_2O$	1,02
Ti	$Ti^{2+} + 2e = Ti$	-1,63
	$TiO + 2H^+ + 2e = Ti + H_2O$	-1,306
	$TiF_6^{2-} + 4e = Ti + 6F^-$	-1,19
	$TiO_2 + 4H^+ + 4e = Ti + 2H_2O$	-0,86
	TiO_2(рутил) $+ H^+ + 4e = Ti^{3+} + 2H_2O$	-0,666
	TiO_2(рутил) $+ 2H^+ + 4e = Ti^{2+} + 2H_2O$	-0,502
	$Ti^{3+} + e = Ti^{2+}$	-0,368
	$Ti^{4+} + e = Ti^{3+}$ (5M H_3PO_4)	-0,15
	$TiO^{2+} + 2H^+ + 2e = Ti^{2+} + H_2O$	-0,135
	$TiO^{2+} + 2H^+ + e = Ti^{3+} + H_2O$	0,10
Tl	$Tl_2S + 2e = 2Tl + S^{2-}$	-0,93
	$TlI + e = Tl + I^-$	-0,753
	$TlBr + e = Tl + Br^-$	-0,658
	$TlCl + e = Tl + Cl^-$	-0,557
	$TlOH + e = Tl + OH^-$	-0,344
	$Tl^+ + e = Tl$	-0,3363
	$Tl(OH)_3 + 2e = TlOH + 2OH^-$	-0,05
	$Tl_2O_3 + 3H_2O + 4e = 2Tl^+ + 6OH^-$	0,02
	$TlOH + H^+ + e = Tl + H_2O$	0,778
	$Tl^{3+} + 2e = Tl^+$	1,252
U	$UO_2 + 2H_2O + 4e = U + 4OH^-$	-2,39

	$U^{3+} + 3e = U$	-1,798
	$U^{4+} + e = U^{3+}$	-0,607
	$UO_2^{2+} = UO_2^{-}$	0,05
	$UO_2^{2+} + 4H^{-} + 2e = U^{4+} + 2H_2O$	0,334
	$UO_2^{+} + 4H^{+} + e = U^{4+} + 2H_2O$	0,62
V	$V^{2+} + 2e = V$	-1,175
	$V^{3+} + e = V^{2+}$	-0,255
	$VO_2^{+} + 4H^{+} + 5e = V + 2H_2O$	-0,25
	$VO_2^{2+} + e = VO$	-0,044
	$VO_2^{+} + 4H^{+} + 3e = V^{2-} + 2H_2O$	0,360
	$V_2O_5 + 6H^{+} + 2e = 2VO^{2+} + 3H_2O$	0,958
	$VO_2^{+} + 2H^{+} + e = VO^{2+} + H_2O$	1,004
	$VO_4^{3-} + 6H^{-} + 2e = VO^{-} + 3H_2O$	1,256
	$H_2VO_4^{-} + 4H^{-} + e = VO^{2-} + 3H_2O$	1,314
W	$WO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = W + 8OH^{-}$	-1,05
	$WO_2 + 4H^{+} + 4e = W + 2H_2O$	-0,119
	$WO_3 + 6H^{-} + 6e = W + 3H_2O$	-0,09
	$W_2O_5 + 2H^{-} + 2e = 2WO_2 + H_2O$	-0,031
	$2WO_3 + 2H^{+} + 2e = W_2O_5 + H_2O$	-0,029
	$WO_4^{2-} + 8H^{+} + 6e = W + 4H_2O$	0,049
	$2WO_4^{2-} + 6H^{-} + 2e = W_2O_5 + 3H_2O$	0,801
Zn	$ZnS + 2e = Zn + S^{2-}$	-1,405
	$Zn(CN)_4^{2-} + 2e - Zn + 4CN^{-}$	-1,26
	$Zn(OH)_2 + 2e = Zn + 2OH^{-}$	-1,245
	$Zn(OH)_4^{2-} + 2e = Zn + 4OH^{-}$	-1,22
	$ZnO_2^{2-} + 2H_2O + 2e = Zn + 4OH^{-}$	-1,216
	$ZnCO_3 + 2e = Zn + CO_3^{2-}$	-1,06
	$Zn(NH_3)_4^{2+} + 2e = Zn + 4NH_3$	-1,04
	$Zn^{2+} + 2e = Zn$	-0,763
	$ZnO_2^{2-} + 4H^{+} + 2e = Zn + 2H_2O$	0,441
Zr	$ZrO^{2+} + 2H^{-} + 4e = Zr + H_2O$	-1,570
	$ZrO_2 + 4H^{+} + 4e = Zr + 2H_2O$	-1,553
	$Zr^{4+} + 4e = Zr$	-1,539

Окислительно-восстановительные потенциалы водорода, кислорода и некоторых металлов в кислой, нейтральной и щелочной средах

Среда					
Кислая ($pH = 0$)		Нейтральная ($pH = 7$)		Щелочная ($pH = 14$)	
Red/Ox пара	φ^0, В	Red/Ox пара	φ^0, В	Red/Ox пара	φ^0, В
Mg^{2+}/Mg	-2.36	$Mg(OH)_2/Mg$	-2.38	$Mg(OH)_2/Mg$	-2.69
Al^{3+}/Al	-1.66	$Al(OH)_3/Al$	-1.88	CrO_2^-/Cr	-1.32
Zn^{2+}/Zn	-0.76	$Cr(OH)_3/Cr$	-0.93	ZnO_2^{2-}/Zn	-1.22
Cr^{3+}/Cr	-0.74	$Zn(OH)_2/Zn$	-0.81	SnO_2^2 /Sn	-0.91
Fe^{2-}/Fe	-0.44	$Sn(OH)_2/Sn$	-0.50	$Fe(OH)_2/Fe$	-0.87
Cd^{2+}/Cd	-0.40	$Fe(OH)_2/Fe$	-0.46	$2H_2O/H_2$	-0.83
Co^{2+}/Co	-0.28	$2H_2O/H_2$	-0.41	$Cd(OH)_2/Cd$	-0.82
Ni^{2-}/Ni	-0.25	$Cd(OH)_2/Cd$	-0.41	$Co(OH)_2/Co$	-0.73
Sn^{2+}/Sn	-0.14	$Co(OH)_2/Co$	-0.32	$Ni(OH)_2/Ni$	-0.72
Pb^{2+}/Pb	-0.13	$Ni(OH)_2/Ni$	-0.30	PbO_2^{2-}/Pb	-0.54
$2H^-/H_2$	0.00	$Pb(OH)_2/Pb$	-0.14	$Bi_2O_3/2Bi$	-0.45
Ag^+/Ag	+0.80	BiO^+/Bi	-0.04	AlO_2^-/Al	-0.36
Bi^{3+}/Bi	+0.21	$Cu(OH)_2/Cu$	+0.19	$Cu(OH)_2/Cu$	-0.22
Cu^{2+}/Cu	+0.34	$AgCl/Ag$	+0.22		
$O_2/2H_2O$	+1.22	$O_2/4OH^-$	+0.81	$O_2/4OH^-$	+0.40
		$Cl_2/2Cl^-$	+1.36		

Таблица 3

Названия некоторых кислот и их солей

Кислота		Название солей
Название	Формула	
Азотистая	HNO_2	Нитриты
Азотная	HNO_3	Нитраты
Бромоводородная	HBr	Бромиды
Дихромовая	$H_2Cr_2O_7$	Дихроматы
Иодоводородная	HJ	Иодиды
Кремниевая	H_2SiO_3	Силикаты
Марганцовая	$HMnO_4$	Перманганаты
Сероводородная	H_2S	сульфиды
Серная	H_2SO_4	сульфаты
Сернистая	H_2SO_3	сульфиты
Ортофосфорная	H_3PO_4	Фосфаты
Фосфористая	H_3PO_3	Фосфиты
Угольная	H_2CO_3	Карбрнаты
Уксусная	CH_3COOH	ацетаты
Хлороводородная	HCl	хлориды
Хлорноватистая	HClO	гипохлориты
Хлорноватая	$HClO_3$	хлораты
Хлорная	$HClO_4$	перхлораты
Хромовая	H_2CrO_4	хроматы



Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

Н. А. Зайцева

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ

Учебно-методическое пособие для выполнения практических работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей

Екатеринбург

2017

317

Рецензент: Т. И. Красненко, д-р химических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории оксидных систем ИХТТ УрО РАН

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры химии 25 февраля 2016 г. (протокол № 6) и рекомендовано для издания в УГГУ

Зайцева Н. А.
317 КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ: учебно-методическое пособие для выполнения прктических работ курсов «Химия» и «Неорганическая химия» для студентов всех специальностей / Н. А. Зайцева. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. – 35 с.

В учебно-методическом пособии изложены краткие сведения о качественных реакциях в неорганической химии. Пособие содержит необходимые сведения для выполнения практических работ по качественному анализу катионов и решения задач.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей.

© Зайцева Н. А., 2017

© Уральский государственный горный университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH^{4+} (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом.** При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от *pH*-среды.

2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.

3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	Na^+, K^+, NH_4^+	–	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	Ag^+, Pb^{2+}, Hg_2^{2+}	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	Ca^{2+}, Sr^{2+}, Ba^{2+}	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}, $^*As^{3+}$, $^*As^{5+}$, Sn^{2+}, Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	Fe^{2+}, Fe^{3+}, Mn^{2+}, Mg^{2+}, Bi^{3+}, Sb^{3+}, Sb^{5+}	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	Cu^{2+}, Co^{2+}, Ni^{2+}, Hg^{2+}, Cd^{2+}	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

$^*As^{3+}$ и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+}.

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $Fe(OH)_3$ и $Fe(OH)_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с

осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание $KMnO_4$? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $Cr_2O_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительный свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($C_4H_8N_2O_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа [$Fe(C_4H_7O_2N_2)_2$].

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав $Fe_4[Fe(CN)_6]_3$.

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини

имеет состав Fe_3 [Fe $(CN)_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+}, и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+}.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком Fe $(OH)_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2? Запишите уравнение реакции, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeCl_3$ и NaOH, если ПР (Fe $(OH)_3$) = $3{,}8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeSO_4$ и NaOH, если ПР (Fe $(OH)_2$) – $4{,}8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка Fe $(OH)_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для $FeCl_3$ и $FeSO_4$, определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}**, выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения – минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* – метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровавальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм^3. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрокристаллоскопический анализ* – метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс переведения вещества из водной фазы в органичсскую, используется для раздслсния и концснтрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживасмого вещсства.

6. *Каталитические реакции.*

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего CoOHCl, голубого CuOHCl и зелёного NiOHCl. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравнитс получснные осадки с осадками из псрвого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексообразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

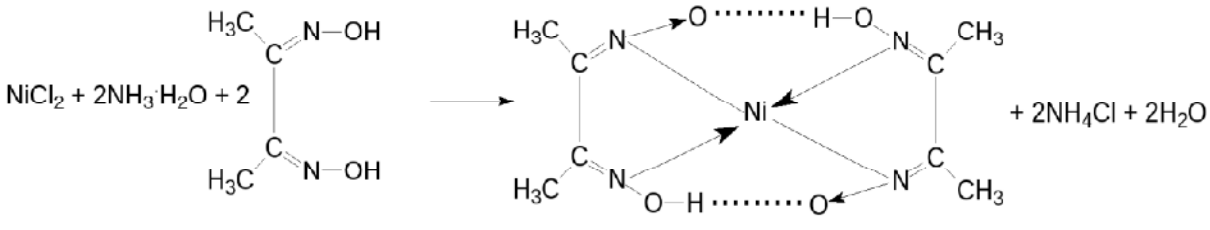
В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $C_4H_8N_2O_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования

диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе. Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+}с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьтс кристаллы сухой соли NH_4SCN, при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайтс. Дождитсь раздслсния в пробиркс водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+}, открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+}, соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **Al^{3+}, Cr^{3+}** и **Zn^{2+}**, научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: *pH*-среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением *pH* водного раствора. Значение *pH* можно контролировать с помощью индикаторов или прибора *pH*-метра. Для поддержания нужного значения *pH* при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение *pH* при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

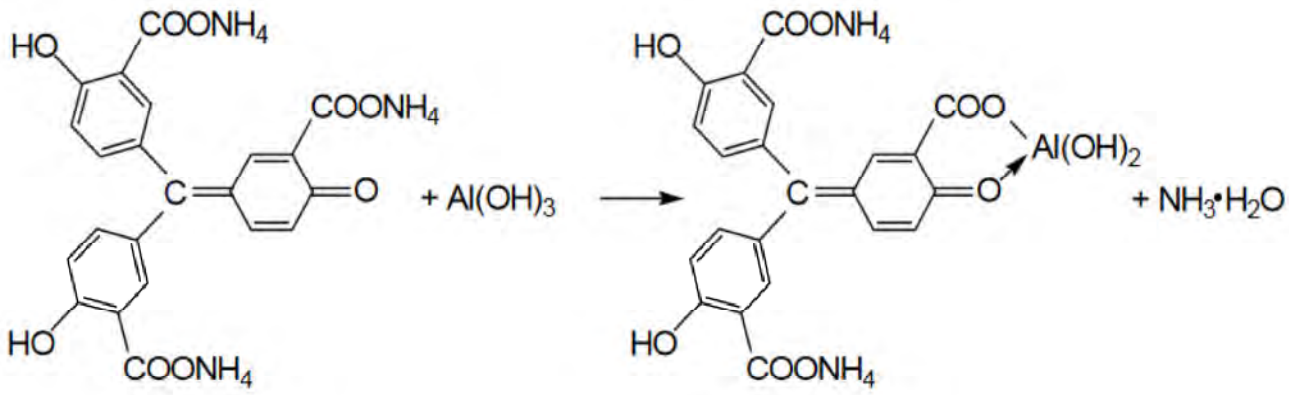
В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9(NH_4)_3$). Смесь нагрейте на

водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

В пробирке к 1 мл раствора $ZnCl_2$ добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $K_2Zn_3[Fe(CN)_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

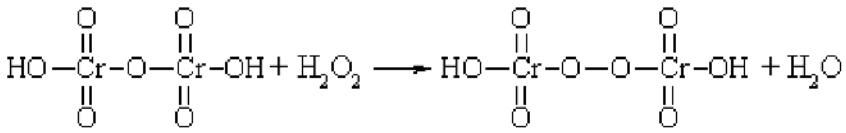
Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2. Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно-восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2, ~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6. Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:

$$2Na_2CrO_4+2H_2SO_4 \rightarrow H_2Cr_2O_7+2Na_2SO_4+H_2O$$



$$H_2Cr_2O_8 +3\ H_2O_2 \leftrightarrow 2\ H_2CrO_6 +2\ H_2O$$

Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.

3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^{+}, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушитс фильтры на воздухс в чашкс Пстри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^+, Hg^{2+} и Pb^{2+}, после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgJ (жёлтый), HgJ_2 (оранжевый), PbJ_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Блсдно-жслтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH. При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2, йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид ссрсбра (I), который затсм разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?

2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.

3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов $AgNO_3$ и KI, если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра ПР (AgI) =$8{,}3 \cdot 10^{-17}$.

4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «собрция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить, какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы соли:

Раствор бесцветный	**Раствор может быть окрашенным**
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсуствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щёлочи стал розовым	CoOHCl $Co(OH)_2$	В пробирке был $CoCl_2$
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $Pb(OH)_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2, а светло-бежевый гидроксид марганца $Mn(OH)_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

$$2\ Mn(OH)_2 + O_2 \rightarrow 2\ MnO_2\downarrow + 2\ H_2O.$$

Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:

$$Mn(OH)_2 + H_2O_2 \rightarrow MnO_2\downarrow + 2\ H_2O.$$

Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильнокислой среде:

$$2MnSO_4+5NaBiO_3+16HNO_3 \rightarrow$$

$$2HMnO_4+5Bi(NO_3)_3+NaNO_3+2Na_2SO_4+7H_2O.$$

Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвст. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и названис этого всщества. Составьтс уравнсния рсакций, которыс были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьтс уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвста. Про другой извсстно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделение бурого газа и образованис чёрного порошка. При пропускании над нагрстым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эршно А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2015. 1280 с.

Карапетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……..……..…...3
Лабораторная работа № 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА.....6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ…….……9
Лабораторная работа № 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} И Cu^{2+}…….....…….……10
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……...…14
Лабораторная работа № 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ $A1^{3+}$, Cr^{3+}, Zn^{2+}…….……15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……...…18
Лабораторная работа № 4. РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^{+}, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ……..…..……19
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ……...…22
Лабораторная работа № 5. ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ…….…….....23
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»……...…….…..26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……...34

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____ В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Б1.О.11 ХИМИЯ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Зайцева Н.А., к.х.н., доцент

Одобрены на заседании кафедры
Химии
(название кафедры)
Зав. кафедрой _____
(подпись)
Амдур А.М.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 12.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета
Горно-механического
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Степени окисления элементов. Окислители и восстановители……3
2. Классификация окислительно-восстановительных реакций……5
3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса……7
4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций)……10
5. Направление протекания окислительно-восстановительных реакций……19
Список литературы……17

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

1. Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только –1

Щелочные металлы (Na, K, Li, Rb, Cs) – только +1

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только +2

Алюминий – только +3.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления +1. Исключение составляют гидриды металлов (NaH, CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (–1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления –2. Исключение составляют фторид кислорода OF_2, (степень окисления кислорода +1) и пероксиды H_2O_2, Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода –1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны

(сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2, но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2, озоном O_3, хлором Cl_2 и бромом Br_2. К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2, углерод С и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2, и свинца (IV) PbO_2; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI; сульфит натрия Na_2SO_3; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3.

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO, H_2O_2, MnO_2, так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO_2, CH_4, Cl_2, $KMnO_4$	11	HF, Zn, H_3PO_4, NH_4Cl
2	H_2O_2, H_2SO_4, I_2, $K_2Cr_2O_7$	12	H_2SO_3, NaH_2SbO_3, Au, $ZnCl_2$
3	NaH, F_2, K_2HPO_4, N_2H_4	13	NH_4HS, P, C_6H_6, $Ba(ClO_4)_2$
4	OF_2, C_2H_6, O_2, K_2MnO_4	14	$NaNO_2$, $Ca(HS)_2$, Ag, PH_3
5	CaH_2, C_2H_4, Br_2, $Fe_2(SO_4)_3$	15	$BaCO_3$, AsH_3, Ca, Na_3SbO_4
6	PbO_2, C_2H_2, O_3, $MnOHNO_3$	16	HNO_3, Xe, $KClO_4$, NH_4OH
7	Na_2O_2, N_2, H_2O, K_2SiO_3	17	$Sn(OH)_2$, $CuCl_2$, K_2S, Mn
8	H_2S, Mg, Na_3SbO_3, $Cr(OH)_3$	18	Al_2S_3, Na_2SO_3, NaClO, Se
9	Na_2S, NH_3, H_2, $KHCO_3$	19	$NaClO_2$, Al_4C_3, He, $Bi(NO_3)_3$,
10	AlP, CO, HCl, NH_4NO_3	20	$NaHSO_3$, Si, Na_3AsO_3, $Cr(OH)_3$

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: NaCl, NaClO, HCl, $KClO_3$, $NaClO_4$, Cl_2O_7, $HClO_2$?

3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: $NaNO_2$, NO, N_2O_3, N_2H_4, N_2O, HNO_3, N_2O_5, NH_4NO_3, NH_3, NH_4Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H_2SO_4, $Ca(HS)_2$, H_2S, Na_2SO_3, Na_2S, SO_2, $Na_2S_2O_3$, SO_3, SO?

2. Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четрветрый тип – реакции конпропорционирования.

1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:

$$2\,Al + Fe_2O_3 \xrightarrow{t^\circ} Al_2O_3 + 2\,Fe,$$

$$C + 4\,HNO_{3(конц)} = CO_2\uparrow + 4\,NO_2\uparrow + 2\,H_2O.$$

2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:

$$2Cu(NO_3)_2 \xrightarrow{t^\circ} 2CuO + 4NO_2 + O_2\uparrow$$

$$2\,KNO_3 \xrightarrow{t^\circ} 2\,KNO_2 + O_2\uparrow.$$

3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:

$$Cl_2 + 2\,KOH \xrightarrow{\text{на холоду}} KCl + KClO + H_2O,$$

$$2\,NO_2 + 2\,NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O.$$

4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:

$$NH_4NO_3 \rightarrow N_2O + 2H_2O$$

$$NH_4NO_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O$$

Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3, HNO_2, H_2SO_4, NH_4NO_3, Br_2, H_2O_2, CaH_2?

2. Приведите пример реакции межмолекулярного конпропорционирования.

3. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? Реакцией конпропорционирования?

$$2\,KMnO_4 \xrightarrow{t^\circ} K_2MnO_4 + MnO_2 + 2O_2\uparrow$$

3. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

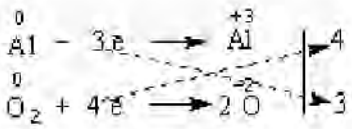
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

Определим степени окисления:

$$\overset{0}{Al} + \overset{0}{O_2} = \overset{+3\ -2}{Al_2O_3}$$

Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:



Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O_2) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al_2O_3 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$$

Пример 2. $(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^\circ} N_2 + Cr_2O_3 + H_2O$

Определим степени окисления:

$$\overset{-3+1}{(NH_4)_2}\ \overset{+6\ -2}{Cr_2\ O_7} = \overset{0}{N_2} + \overset{+3\ -2}{Cr_2O_3} + \overset{+1\ -2}{H_2O}$$

Азот отдаёт электроны, хром получает.

$$2N^{-3} - 6\bar{e} = N_2^0$$
$$2Cr^{+6} + 6\bar{e} = 2\ Cr^{+3}$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H_2O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^\circ} N_2\uparrow + Cr_2O_3 + 4\ H_2O$$

Пример 3. $Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + NO_2 + O_2$

Определим степени окисления:

$$\overset{+2}{Hg}\ \ \overset{+5\ -2}{(N\ O_3)_2} = \overset{0}{Hg} + \overset{+4\ -2}{NO_2} + \overset{0}{O_2}$$

Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:

$$2O^{-2} - 4\bar{e} = O_2^0$$
$$2N^{+5} + 1\ \bar{e} = 2\ N^{+4}$$
$$Hg^{+2} + 2\ \bar{e} = Hg^0$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO_2 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + 2NO_2 + O_2$$

Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Mn(NO_3)_2 \rightarrow MnO_2 + NO_2$	11	$BaO_2 \rightarrow BaO + O_2$
2	$K_2MnO_4 \rightarrow K_3MnO_4\ MnO_2 + O_2$	12	$AgNO_3 \rightarrow Ag + NO_2 + O_2$
3	$Zn(NO_3)_2 \rightarrow ZnO + NO_2 + O_2$	13	$FeSO_4 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2 + SO_3$
4	$K_2Cr_2O_7 \rightarrow O_2 + Cr_2O_3 + K_2CrO_4$	14	$KClO_4 \rightarrow KCl + O_2$
5	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	15	$CdSO_3 \rightarrow CdSO_4 + CdS$
6	$KMnO_4 \rightarrow K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2$	16	$HNO_3 \rightarrow H_2O + NO_2 + O_2$
7	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	17	$NaClO_2 \rightarrow NaClO_3 + NaCl$
8	$HNO_2 \rightarrow NO + NO_2 + H_2O$	18	$KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$
9	$Co(NO_3)_2 \rightarrow CoO + NO_2 + O_2$	19	$SnSO_4 \rightarrow SnO_2 + SO_2$
10	$LiNO_3 \rightarrow Li_2O + NO_2 + O_2$	20	$Ni(NO_3)_2 \rightarrow Ni(NO_2)_2 + O_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Fe_2O_3 + C \rightarrow CO_2 + Fe$	11	$Zn + AgNO_3 \rightarrow Zn(NO_3)_2 + Ag$
2	$KBr + Cl_2 \rightarrow KCl + Br_2$	12	$Al_2O_3 + Mg \rightarrow MgO + Al$
3	$Fe_2O_3 + H_2 \rightarrow H_2O + Fe$	13	$MnO_2 + Al \rightarrow Al_2O_3 + Mn$
4	$Al + H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2$	14	$H_2S + Br_2 \rightarrow S + HBr$
5	$O_2 + HI \rightarrow H_2O + I_2$	15	$CuCl_2 + Cr \rightarrow Cu + CrCl_3$
6	$Al + CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Cu$	16	$Mg + SiO_2 \rightarrow MgO + Si$
7	$Ca + H_2O \rightarrow H_2 + Ca(OH)$	17	$NaI + Cl_2 \rightarrow NaCl + I_2$
8	$TiO_2 + Mg \rightarrow MgO + Ti$	18	$Na + H_2O \rightarrow H_2 + NaOH$
9	$Al + FeO \rightarrow Al_2O_3 + Fe$	19	$KClO_3 + I_2 \rightarrow KIO_3 + Cl_2$
10	$KI + Br_2 \rightarrow KBr + I_2$	20	$Al + H_2O \rightarrow Al(OH)_3 + H_2$

4. Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присуствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^-. Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+. Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+, ни OH^-в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.

2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.

3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнять число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O, ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$O^{-2}+2H^+ = H_2O$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$
Восполнение недостатка кислорода	$H_2O= O^{-2}+2H^+$	$H_2O = O^{-2}+2H^+$	$2OH^- = O^{-2}+H_2O$

в) уравнять суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости "привести подобные" ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $H^+ + OH^- = H_2O$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

Пример 3. В кислой среде:

$K_2Cr_2O_7 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + J_2 + H_2O + K_2SO_4$

3 $2J^- - 2\bar{e} = J_2$

1 $Cr_2O_7^{2-} + 6\bar{e} + 14H^+ = 2Cr^{+3} + 7H_2O$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$K_2Cr_2O_7 + 6KJ + 7H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 3J_2 + 7H_2O + 4K_2SO_4$

Пример 4. В щелочной среде:

$KCrO_2 + KClO_4 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KCl + H_2O$

8 $CrO_2^- - 3\bar{e} + 4OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 2H_2O$

3 $ClO_4^- + 8\bar{e} + 4H_2O \rightarrow Cl^- + 8OH^-$

Суммарное молекулярное уравнение реакции

$8KCrO_2 + 3KClO_4 + 8KOH \rightarrow 8K_2CrO_4 + 3KCl + 4H_2O$

Пример 5. В нейтральной среде:

$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

3 $Mn - 2\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4H^+$

2 $MnO_4 + 3\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4OH^-$

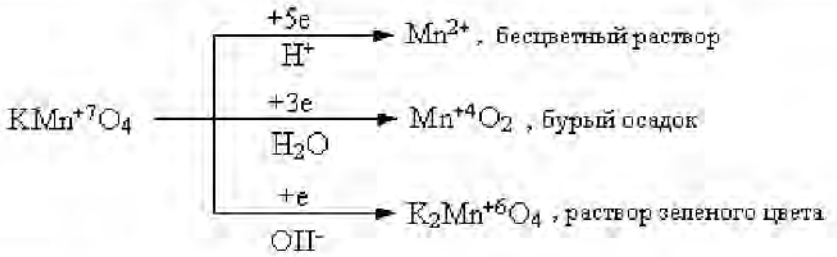
Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$2KMnO_4 + 3MnSO_4 + 2H_2O = 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$

Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:



Ниже приведены реакции $KMnO_4$ с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы КОН не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.

$$5\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 8\ H_2SO_4 = 5\ S\downarrow + 2\ MnSO_4 + 6\ K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$3\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 4\ H_2O \rightarrow 2\ MnO_2\downarrow + 3\ S\downarrow + 8\ KOH,$$

$$K_2S + 2\ KMnO_4 \xrightarrow{-(KOH)} 2\ K_2MnO_4 + S\downarrow.$$

2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $K_2Cr_2O_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

$$6\ FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ Fe_2(SO_4)_3 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7\ H_2O;$$

$$6\ KI + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ I_2\downarrow + Cr_2(SO_4)_3 + 4\ K_2SO_4 + 7\ H_2O.$$

3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:

$$H_2S + H_2O_2 = S\downarrow + 2\ H_2O,$$

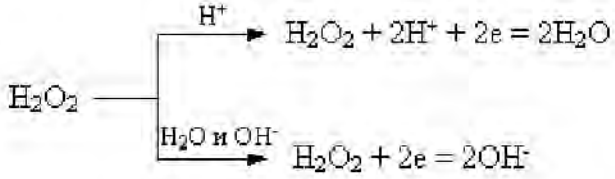
$$2\ KI + 2\ KNO_2 + 2\ H_2SO_4 = I_2\downarrow + 2\ K_2SO_4 + H_2O,$$

Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, $KMnO_4$), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановитеей:

$$5\ H_2O_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ O_2 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$5\ KNO_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ KNO_3 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 3\ H_2O.$$

Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:

$$2\ FeSO_4 + H_2O_2 + H_2SO_4 = Fe_2(SO_4)_3 + 2\ H_2O,$$

$$2\ KI + H_2O_2 = I_2\downarrow + 2\ KOH.$$

Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $Br_2 + KOH \rightarrow KBr + KBrO_3 + H_2O$

3) $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 + H_2O_2 \rightarrow O_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_3H_6 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_2H_6(OH)_2 + KOH$

Вариант 2

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + S\downarrow + H_2O$

2) $S + KOH \rightarrow K_2S + K_2SO_3 + H_2O.$

3) $BaS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + S\downarrow + NO_2\uparrow + H_2O$

4) $CH_2{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 3

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $NO_2 + NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O$

3) $CrCl_3 + Cl_2 + H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + HCl$

4) $CH_3C{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CH_3COOH$

Вариант 4

1) $Al + H_2SO_{4(конц.,\ гор.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $AuCl_3 + H_2O_2 + KOH \rightarrow Au + H_2O + O_2\uparrow + KCl$

3) $KMnO_4 + Fe(OH)_2 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + Fe(OH)_3\downarrow + KOH$

4) $C_5H_{10} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH + CH_3COOH$

Вариант 5

1) $Ag + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Ag_2SO_4\downarrow + SO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $NH_4HS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow S\downarrow + 2NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + 2H_2O$

3) $MnSO_4 + H_2O_2 + KOH \rightarrow MnO_2\downarrow + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_6H_{12} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 6

1) $Bi + H_2SO_4 \rightarrow Bi_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $CuS + HNO_3 \rightarrow NO_2\uparrow + CuSO_4 + H_2O$

3) $C + H_2SO_{4(конц.)} + K_2Cr_2O_{7(конц.)} \rightarrow CO_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $HCOH + NaOH + I_2 \rightarrow HCOONa + NaI + H_2O$

Вариант 7

1) $Ag + HNO_{3(разб.)} \rightarrow AgNO_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $Cr_2(SO_4)_3 + Br_2 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KBr + K_2SO_4 + H_2O$

3) $Br_2 + S + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HBr$

4) $CH_3C{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O$

Вариант 8

1) $Ba + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $MnO_2 + HCl \rightarrow MnCl_2 + H_2O + Cl_2\uparrow$

3) $As_2O_3 + NaOH + NaNO_3 \rightarrow Na_3AsO_4 + NaNO_2 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + KOH + MnO_2\downarrow + H_2O$

Вариант -9

1) $Be + HNO_{3(разб., гор.)} \rightarrow Be(NO_3)_2 + NO\uparrow + H_2O$

2) $P + H_2SO_4 \rightarrow H_3PO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $Bi(NO_3)_3 + NaClO + NaOH_{(конц.)} \rightarrow NaBiO_3\downarrow + NaNO_3 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}C_2H_5 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + K_2CO_3 + MnO_2 + H_2O$

Вариант 10

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $AlBr_{3(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AsH_3 + NaOH_{(разб.)} + NaClO \rightarrow Na_3AsO_4 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 11

1) $Ca + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ca(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $NH_4I_{(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow I_2\downarrow + H_2S\uparrow + H_2O + NH_4HSO_4$

3) $Bi(OH)_3 + KOH_{(конц.)} + KMnO_4 \rightarrow KBiO_3\downarrow + K_2MnO_4 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 12

1) $Ba + HNO_{3(оч. разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + NH_4NO_3 + H_2O$

2) $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $HBrO_3 + H_2O + S \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + K_2Cr_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 13

1) $Bi + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Bi(NO_3)_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $PbO_2 + HCl \rightarrow PbCl_2 + Cl_2 + H_2O$

3) $AsH_3 + H_2O + AgNO_3 \rightarrow As_2O_3\downarrow + Ag\downarrow + HNO_3$

4) $CH_3{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O + CO_2$

Вариант 14

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $C_2N_2 + KOH \rightarrow KCN + KCNO + H_2O$

3) $H_2SO_3 + I_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HI$

4) $C_4H_8 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 15

1) $Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $AlP + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow Al(NO_3)_3 + H_3PO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $Br_2 + SO_2 + H_2O \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_2H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 16

1) $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + NO + H_2O$

2) $H_2Cr_2O_7 + H_2O_2 \rightarrow H_2CrO_6 + H_2O$

3) $Si + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_2H_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 17

1) $As + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $B_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3BO_3\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $SiH_4 + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_6H_5COOK + K_2CO_3 + KOH$

Вариант 18

1) $Fe + H_2SO_{4(конц.)} \overset{t^\circ}{\rightarrow} Fe_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $I_2 + H_2O_2 \rightarrow HIO_3 + H_2O$

3) $B + KOH + H_2O \rightarrow KBO_2 + H_2\uparrow$

4) $C_3H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_2(COOH)_2 + H_2O$

Вариант 19

1) $As + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3AsO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $K_2C_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow KHSO_4 + CO\uparrow + CO_2\uparrow + H_2O$

3) $Pb(CH_3COOH)_2 + CaOCl_2 + H_2O \rightarrow PbO_2\downarrow + CaCl_2 + CH_3COOH$

4) $CH_3COCH_3 + I_2 + NaOH \rightarrow CHI_3 + CH_3COONa + NaI + H_2O$

Вариант 20

1) $C + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow CO_2\uparrow + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $HBr_{(конц.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AgNO_3 + NaOH + H_2O_2 \rightarrow Ag\downarrow + NaNO_3 + H_2O + O_2\uparrow$

4) $KMnO_4 + (COOH)_2 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + CO_2\uparrow + K_2SO_4 + H_2O$

Дополнительные уравнения

1. $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$
2. $As_2S_3 + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$
3. $HNO_3 + Cu_2S \rightarrow NO_2\uparrow + H_2O + CuSO_4 + Cu(NO_3)_2$
4. $SiC + NaOH + O_2 \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2O + Na_2CO_3$
5. $Bi(NO_3)_3 + Na_2O_2 + NaOH \rightarrow NaBiO_3 + NaNO_2 + H_2O + O_2$
6. $AgCN + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow AgNO_3 + NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + CO_2\uparrow$
7. $Al + NaOH + 6H_2O \rightarrow Na[Al(OH)_4] + H_2$
8. $Au + HCl + HNO_3 \rightarrow H[AuCl_4] + NO + H_2O$
9. $[Co(H_2O)_6]^{2+} + NH_3 + O_2 + H^+ \rightarrow [Co(NH_3)_6]^{3+} + H_2O.$
10. $Au + NaCN + H_2O + O_2 \rightarrow Na[Au(CN)_2] + NaOH$
11. $Pt + HNO_3 + HCl \rightarrow H_2[PtCl_6] + NO + H_2O$
12. $Na[Au(CN)_2] + Zn \rightarrow Na_2[Zn(CN)_4] + Au$
13. $Fe + C_6H_5COONa + H_2O + O_2 \rightarrow [Fe(C_6H_5COOH)_6](OH)_3 + NaOH$

Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:

Окисленная форма + ne^- → Восстановленная форма

Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции $\Delta E > 0$.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

$Zn^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Zn$; $\varphi^\circ = -0{,}763$ В

то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

$Zn^{2+} + H_{2(г)} \rightarrow Zn + 2\,H^+_{(р)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = -0{,}763 - (0) = -0{,}763$ В.

Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $Zn + 2\,H^+_{(р)} \rightarrow Zn^{2+} + H_{2(г)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = 0 - (-0{,}763) = +0{,}763$ В

Для положительных значений φ°, например пары Cu^{2+} / Cu

$Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu$; $\varphi^\circ = +0{,}338$ В

реакция

$Cu^{2+} + H_{2(г)} = Cu + 2\,H^+_{(р)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = +0{,}338 - (0) = +0{,}338$ В

где 2 $H^{I}_{(р)}$ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$2NaCl + Fe_2(SO_4)_3 \leftrightarrow 2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4$

Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :

$Cl_2 + 2e^- = 2Cl^-$, $\varphi_1^\circ = 1{,}36$ В;

$Fe^{3+} + e^- = Fe^{2-}$, $\varphi_2^\circ = 0{,}77$ В .

Поскольку $\varphi_1^\circ > \varphi_2^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем - ион Fe^{2-}; рассматриваемая реакция будет протекать так:

$2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4 \rightarrow 2NaCl + Fe_2(SO_4)_3$

Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$K_2Cr_2O_7 + 14HCl \leftrightarrow 2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O$

Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:

$Cr_2O_7^{2-} + 14H^{I} + 6e = 2Cr^{3I} + 7H_2O$ $\varphi''_1 = +1{,}33$ В

$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$ $\varphi''_2 = +1{,}36$ В

Поскольку $\varphi_2^\circ > \varphi_1^\circ$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::

$2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + 14HCl$

В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ° при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые

значения φ° близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\, d]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, K;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея (F = 96484.56 Кл/моль);

[Ox]– концентрация окисленной формы ионов;

[Red]– концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0.059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\, d]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции

$$2Hg + 2Ag^+ \leftrightarrow 2Ag + Hg_2^{2+}$$

при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[Ag^+] = 10^{-4}$ моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-1}$моль/л;

б) $[Ag^+] = 10^{-1}$моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-4}$моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:

$Hg_2^{2+} + 2e^- = 2Hg$, $\varphi_1^\circ = 0{,}79$ В;

$Ag^+ + e^- = Ag$, $\varphi_2^\circ = 0{,}80$ В.

По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

а) $\varphi_1 = \varphi_1^o + 0{,}059/2 \cdot \lg [Hg_2^{2+}] = 0{,}79 + 0{,}030 \lg 10^{-1} = 0{,}79 - 0{,}03 = 0{,}76$ В;

$\varphi_2 = \varphi_2^o + 0{,}059 \cdot \lg [Ag^+] = 0{,}80 + 0{,}059 \lg 10^{-4} = 0{,}80 - 0{,}24 = 0{,}56$ В.

В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

б) $\varphi_1 = 0{,}79 + 0{,}030 \cdot \lg 10^{-4} = 0{,}79 - 0{,}12 = 0{,}67$ В;

$\varphi_2 = 0{,}80 + 0{,}059 \cdot \lg 10^{-1} = 0{,}80 - 0{,}06 = 0{,}74$ В.

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e \rightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$$

окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0{,}059}{5} \cdot \lg \frac{[MnO_4^-] \cdot [H^+]^8}{[Mn^{2+}]}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1{,}507 + 0{,}012 \cdot \lg \frac{[MnO_4^-]}{[Mn^{2+}]} - 0.095\,pH$$

Потенциалы процесса зависит от pH среды и будет тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала $KMnO_4$ от концентрации ионов водорода пользуются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Приложение

Таблица 1

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0
Ag	α-$Ag_2S + 2\bar{e} = 2Ag + S^{2-}$	-0,70	B	$BF_4^- + 3e = B + 4F^-$	-1,04
	$Ag(CN)_2^- + \bar{e} = Ag + 2CN^-$	-0,29		$H_3BO_3 + 3H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,869
	$AgI + \bar{e} = Ag + I^-$	-0,152		$BO_3^{3-} + 6H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,165
	$AgCN + \bar{e} = Ag + CN^-$	-0,04	Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	-2,905
	$Ag(S_2O_3)_2^{3-} + \bar{e} = Ag + 2S_2O_3^{2-}$	0,01	Be	$Be^{2+} + 2e = Be$	-1,847
	$AgBr + \bar{e} = Ag + Br^-$	0,071		$Be(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-1,820
	$AgCl + \bar{e} = Ag + Cl^-$	0,222		$BeO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-0,909
	$Ag_2O + H_2O + 2\bar{e} = 2Ag + 2OH^-$	0,344	Bi	$Bi_2O_3 + 3H_2O + 6e = 2Bi + 6OH^-$	-0,46
	$Ag(NH_3)_2^+ + \bar{e} = Ag + 2NH_3$	0,373		$BiOCl + 2H^+ + 3e = Bi + Cl^- + H_2O$	0,16
	$Ag_2CrO_4 + 2\bar{e} = 2Ag + CrO_4^{2-}$	0,446		$Bi^{3+} + 3e = Bi$	0,215
	$Ag_2C_2O_4 + 2\bar{e} = 2Ag + C_2O_4^{2-}$	0,472		$BiO^+ + 2H^+ + 3e = Bi + H_2O$	0,32
	$AgBrO_3 + \bar{e} = Ag + BrO_3^-$	0,55		$Bi_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Bi + 3H_2O$	0,371
	$2AgO + H_2O + 2\bar{e} = Ag_2O + 2OH^-$	0,60		$NaBiO_3(т) + 6H^+ + 2e = Bi^{3+} + Na^+ + 3H_2O$	1,6 – 1,808
	$Ag^+ + \bar{e} = Ag$	0,799	Br	$2BrO^- + 2H_2O + 2e = Br_2 + 4OH^-$	0,45
	$Ag_2O + 2H^+ + 2\bar{e} = 2Ag + H_2O$	1,173		$2BrO_3^- + 6H_2O + 10e = Br_2 + 12OH^-$	0,50
	$2AgO + 2H^+ + 2\bar{e} = Ag_2O + H_2O$	1,398		$BrO_3^- + 2H_2O + 4e = BrO^- + 4OH^-$	0,54
Al	$AlO_2^- + 2H_2O + 3\bar{e} = Al + 4OH^-$	-2,35		$BrO_3^- + 3H_2O + 6e = Br^- + 6OH^-$	0,61
	$Al(OH)_3 + 3\bar{e} = Al + 3OH^-$	-2,31		$BrO^- + H_2O + 2e = Br^- + 2OH^-$	0,76
	$AlF_6^{3-} + 3\bar{e} = Al + 6F^-$	-2,07		$Br_3^- + 2e = 3Br^-$	1,05
	$Al^{3+} + 3e = Al$	-1,663		$Br_2(ж) + 2e = 2Br^-$	1,065
	$Al(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Al + 3H_2O$	-1,471		$BrO_3^- + 6H^+ + 6e = Br^- + 3H_2O$	1,44
	$AlO_2^- + 4H^+ + 3e = Al + 2H_2O$	-1,262		$2BrO_3^- + 12H^+ + 10e = Br_2 + 6H_2O$	1,52
As	$As + 3H^+ + 3e = AsH_3$	-0,60		$2HBrO + 2H^+ + 2e = Br_2 + 2H_2O$	1,59
	$HAsO_2 + 3H^+ + 3e = As + 2H_2O$	0,248	C	$HCOO^- + 2H_2O + 2e = HCHO + 3OH^-$	-1,07
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = HAsO_2 + 2H_2O$	0,559		$2CO_2 + 2H^+ + 2e = H_2C_2O_4$	-0,49
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = H_3AsO_3 + H_2O$	0,58		$CO_2 + 2H^+ + 2e = HCOOH$	-0,20
Au	$Au(CN)_2^- + e = Au + 2CN^-$	-0,61		$C(графит) + 4H^+ + 4e = CH_4$	-0,132
	$AuBr_4^- + 2e = AuBr_2^- + 2Br^-$	0,802		$CO_2 + 2H^+ + 2e = CO + H_2O$	-0,12
	$AuCl_4^- + 2e = AuCl_2^- + 2Cl^-$	0,926		$HCOOH + 2H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	-0,01
	$AuBr_2^- + e = Au + 2Br^-$	0,959		$HCOOH + 4H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,145
	$AuCl_2^- + 2e = Au + 2Cl^-$	1,15		$HCOO^- + 3H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	0,167
	$Au^{3+} + 2e = Au^+$	1,401		$CH_3CHO + 2H^+ + 2e = C_2H_5OH$	0,19
	$Au^{3+} + 3e = Au$	1,498		$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = HCHO + 2H_2O$	0,197
	$Au^+ + 3e = Au$	1,692		$HCOO^- + 5H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,199
Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0

C	$CO_3^{2-} + 8H^+ + 6e = CH_3OH + 2H_2O$	0,209	Co	$Co(OH)_2 - 2e = Co + 2OH^-$	-0,73
	$CO_3^{2-} + 3H^+ + 2e = HCOO^- + H_2O$	0,227		$CoCO_3 + 2e = Co + CO_3^{2-}$	-0,64
	$HCHO + 2H^+ + 2e = CH_3OH$	0,232		$Co(NH_3)_6^{2+} - 2e = Co + 6NH_3$	-0,42
	$2CO_3^{2-} + 4H^+ - 2e = C_2O_4^{2-} + 2H_2O$	0,441		$Co^{2+} + 2e = Co$	-0,277
	$C_2H_5OH + 2H^+ - 2e = C_2H_6 + H_2O$	0,46		$Co(OH)_2 - 2H^+ + 2e = Co + 2H_2O$	0,095
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = C(\text{графит}) + 3H_2O$	0,475		$Co(NH_3)_6^{3+} - e = Co(NH_3)_6^{2+}$	0,1
	$CO + 6H^+ + 6e = CH_4 - H_2O$	0,497		$CoO - 2H^+ + 2e = Co + H_2O$	0,166
	$CH_3OH + 2H^+ + 2e - CH_4 - H_2O$	0,59		$Co(OH)_3 - e - Co(OH)_2 + OH^-$	0,17
Ca	$Ca^{2-} + 2e = Ca$	-2,866		$Co^{3+} + 3e = Co$	0,33
Cd	$CdS + 2e - Cd + S^{2-}$	-1,175		$Co^{3+} + e - Co^{2+}$	1,38 - 1,842
	$Cd(CN)_4^{2-} + 2e = Cd + 4CN^-$	-1,09	Cr	$Cr(OH)_2 + 2e = Cr + 2OH^-$	-1,4
	$Cd(OH)_2 + 2e - Cd - 2OH^-$	-0,81		$Cr(OH)_3 + 3e - Cr + 3OH^-$	-1,3
	$Cd(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cd - 4NH_3$	-0,61		$CrO_2^- - 2H_2O + 3e = Cr + 4OH^-$	-1,2
	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	-0,403		$Cr^{2+} - 2e = Cr$	-0,913
	$Cd(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cd + 2H_2O$	0,005		$Cr^{3+} - 3e = Cr$	-0,744
	$CdO + 2H^+ - 2e - Cd + H_2O$	0,063		$Cr(OH)_3 + 3H^+ + 3e - Cr + 3H_2O$	-0,654
Ce	$Ce^{3+} + 3e = Ce$	-2,48		$Cr^{3+} - e = Cr^{2+}$	-0,407
	$Ce^{4+} + e - Ce^{3+}$ (1M H_2SO_4)	1,44		$CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e - Cr(OH)_3 + 5OH^-$	-0,13
	$Ce^{4+} + e - Ce^{3+}$ (1M HNO_3)	1,61		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 12e - 2Cr + 7H_2O$	0,294
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M $HClO_4$)	1,70		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Cr + 4H_2O$	0,366
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$	1,77		$CrO_4^{2-} + 4H^+ - 3e = CrO_2^- + 2H_2O$	0,945
Cl	$ClO_4^- + H_2O + 2e = ClO_3^- + 2OH^-$	0,36		$CrO_2^- - 4H^+ + e = Cr^{2+} + 2H_2O$	1,188
	$2ClO^- + 2H_2O + 2e = Cl_2 + 4OH^-$	0,40		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$	1,333
	$ClO_4^- + H_2O + 8e = Cl^- + 8OH^-$	0,56		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 3e = Cr^{3+} + 4H_2O$	1,477
	$ClO_3^- + 3H_2O + 6e = Cl^- - 6OH^-$	0,63	Cs	$Cs^+ + e = Cs$	-2,923
	$ClO_2 + 2H_2O + 5e = Cl^- + 4OH^-$	0,85	Cu	$Cu_2S + 2e = 2Cu + S^{2-}$	-0,89
	$ClO^- + H_2O + 2e = Cl^- + 2OH^-$	0,88		$CuS + 2e = Cu + S^{2-}$	-0,71
	$ClO_3^- + 2H^+ + e = ClO_2 + H_2O$	1,15		$Cu(CN)_2^- + e = Cu + 2CN^-$	-0,43
	$ClO_4^- + 2H^+ + 2e = ClO_3^- + H_2O$	1,189		$Cu_2O - H_2O - 2e - 2Cu + 2OH^-$	-0,36
	$ClO_2 + 4H^+ - 4e = 2HCl + H_2O$	1,351		$Cu(OH)_2 + 2e = Cu + 2OH^-$	-0,22
	$Cl_2 - 2e - 2Cl^-$	1,3595		$CuI + e - Cu + I^-$	-0,185
	$ClO_4^- + 8H^+ + 8e = Cl^- + 4H_2O$	1,38		$Cu(NH_3)_2^+ + e = Cu + 2NH_3$	-0,12
	$2ClO_4^- + 16H^+ + 14e = Cl_2 + 8H_2O$	1,39		$Cu(NH_3)_4^{2+} - 2e = Cu + 4NH_3$	-0,07
	$ClO_2 + 5H^+ - 5e = HCl + 2H_2O$	1,436		$Cu(NH_3)_4^{2+} - 2e = Cu(NH_3)_2^+ + 2NH_3$	-0,01
	$ClO_3^- + 6H^+ + 6e = Cl^- + 3H_2O$	1,451		$CuI_2^- + e = Cu - 2I^-$	0,00
	$2ClO_3^- + 12H^+ + 10e = Cl_2 + 6H_2O$	1,47		$CuBr + e = Cu + Br^-$	0,03
	$HClO + H^+ + 2e = Cl^- + H_2O$	1,494		$CuCl + e = Cu + Cl^-$	0,137
	$ClO_2 + 4H^+ - 5e = Cl^- + 2H_2O$	1,51		$Cu^{2+} + e = Cu^+$	0,153
	$2ClO_2 + 8H^+ + 8e = Cl_2 - 4H_2O$	1,549		$CuCl_2^- + e = Cu + 2Cl^-$	0,177
	$HClO_2 + 3H^+ - 4e = Cl^- + 2H_2O$	1,57		$2Cu^{2+} - H_2O - 2e = Cu_2O + 2H^+$	0,203
	$2HClO + 2H^+ + 2e - Cl_2 + 2H_2O$	1,63		$Cu^{2+} + 2e - Cu$	0,345
	$2HClO_2 + 6H^+ + 6e = Cl_2 - 4H_2O$	1,64		$Cu^{2+} + 2Cl^- + e = CuCl_2^-$	0,463
Co	β -CoS + 2e - Co + S^{2-}	-1,07		$Cu^+ + e = Cu$	0,520
	α -CoS + 2e = Co + S^{2-}	-0,90		$Cu^{2+} + Cl^- + e = CuCl$	0,538
Cu	$CuO + 2H^+ - 2e = Cu + H_2O$	0,570	Hg	$HgBr_4^{2-} + 2e = Hg + 4Br^-$	0,21

	$Cu(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cu + 2H_2O$	0,609		$Hg_2Cl_2 + 2K^+ + 2e = 2Hg + 2KCl$ (тв)	0,2415
	$Cu^{2+} + Br^- + e = CuBr$	0,640		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$	0,268
	$2CuO + 2H^+ + 2e = Cu_2O + H_2O$	0,669		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (1M KCl)	0,28
	$Cu^{2+} + I^- + e = CuI$	0,86		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (0,1M KCl)	0,334
	$Cu^{2+} + 2CN^- + e = Cu(CN)_2$	1,12		$HgCl_4^{2-} + 2e = Hg + 4Cl^-$	0,48
Dy	$Dy^{3+} + 3e = Dy$	-2,353		$Hg_2SO_4 + 2e = 2Hg + SO_4^{2-}$	0,6151
Eu	$Eu^{2+} + 2e = Eu$	-3,395		$Hg_2^{2+} + 2e = 2Hg$	0,788
	$Eu^{3+} + e = Eu^{2+}$	-0,429		$Hg^{2+} + 2e = Hg$	0,850
F	$F_2O + 2H^+ + 4e = 2F^- + H_2O$	2,1		$2Hg^{2+} + 2e = Hg_2^{2+}$	0,920
	$F_2 + 2e = 2F^-$	2,87		$HgO + 2H^+ + 2e = Hg + H_2O$	0,926
Fe	$FeS + 2e = Fe + S^{2-}$	-0,95	Ho	$Ho^{3+} + 3e = Ho$	-2,319
	$Fe(OH)_2 + 2e = Fe + 2OH^-$	-0,877	I	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,14
	$FeCO_3 + 2e = Fe + CO_3^{2-}$	-0,756		$2IO_3^- + 6H_2O + 10e = I_2 + 12OH^-$	0,21
	$Fe(OH)_3 + e = Fe(OH)_2 + OH^-$	-0,56		$IO_3^- + 3H_2O + 6e = I^- + 6OH^-$	0,25
	$Fe^{2+} + 2e = Fe$	-0,440		$2IO^- + H_2O - 2e = I_2 + 4OH^-$	0,45
	$Fe_3O_4 + 8H^+ = 8e = 3Fe + 4H_2O$	-0,085		$IO^- + H_2O + 2e = I^- + 2OH^-$	0,49
	$Fe_2O_3 + H_2O + 2H^+ + 2e = 2Fe(OH)_2$	-0,057		$I_2 + 2e = 2I^-$	0,536
	$Fe_2O_3 + 6H^+ = 6e = 2Fe + 3H_2O$	-0,051		$I_3^- + 2e = 3I^-$	0,545
	$Fe(OH)_2 - 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$	-0,047		$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,56
	$Fe^{3+} + 3e = Fe$	-0,037		$HIO + H^+ + 2e = I^- + H_2O$	0,99
	$Fe(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Fe + 3H_2O$	0,059		$2ICl_2^- + 2e = I_2 + 4Cl^-$	1,06
	$Fe(OH)_3 + H^+ + e = Fe(OH)_2 - H_2O$	0,271		$IO_3^- + 6H^+ + 6e = I^- + 3H_2O$	1,085
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$	0,356		$IO_3^- + 5H^+ + 4e = HIO + 2H_2O$	1,14
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M H_2SO_4)	0,68		$2IO_3^- + 12H^+ + 10e = I_2 + 6H_2O$	1,19
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M HCl)	0,70		$2HIO + 2H^+ + 2e = I_2 + 2H_2O$	1,45
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$ (1M HCl)	0,71		$H_5IO_6 + H^+ + 2e = IO_3^- + 3H_2O$	1,60
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$	0,771	Ir	$IrO_2 + 4H^+ + 4e = Ir + H_2O$	0,93
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 2e = 3Fe^{2+} + 4H_2O$	0,980		$Ir^{3+} + 3e = Ir$	1,15
Ga	$Ga^{3+} + 3e = Ga$	-0,53	K	$K^+ + e = K$	-2,924
Gd	$Gd^{3+} + 3e = Gd$	-2,397	La	$La^{3+} + 3e = La$	-2,522
Ge	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 2e = Ge^{2+} + 3H_2O$	-0,363	Li	$Li^+ + e = Li$	-3,045
	$GeO_2 + 4H^+ + 4e = Ge + 2H_2O$	-0,15	Mg	$Mg(OH)_2 + 2e = Mg + 2OH^-$	-2,69
	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 4e = Ge + 3H_2O$	-0,13		$Mg^{2+} - 2e = Mg$	-2,363
	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	0,000		$Mg(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mg + 2H_2O$	-1,862
H	$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$	-0,828	Mn	$MnCO_3 + 2e = Mn + CO_3^{2-}$	-1,48
	$2H^+ + 2e = H_2$	0,0000		$Mn^{2+} - 2e = Mn$	-1,18
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776		$Mn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mn + 2H_2O$	-0,727
Hf	$Hf^{4+} + 4e = Hf$	-1,70		$MnO_4^- + e = MnO_4^{2-}$	0,564
	$HfO_2 + 4H^+ + 4e = Hf + 2H_2O$	-1,57		$MnO_4^- + 2H_2O + 3e = MnO_2 + 4OH^-$	0,60
Hg	$HgS + 2e = Hg + S^{2-}$	-0,69		$MnO_2 + 4H^+ + 2e = Mn^{2+} + 2H_2O$	1,228
	$Hg(CN)_4^{2-} + 2e = Hg + 4CN^-$	-0,37		$Mn_2O_3 + 6H^+ + 2e = 2Mn^{2+} + 3H_2O$	1,443
	$Hg_2I_2 + 2e = 2Hg + 2I^-$	-0,041		$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$	1,507
	$HgI_4^{2-} + 2e = Hg + 4I^-$	-0,04		$Mn^{3+} + e = Mn^{2+}$ (8M H_2SO_4)	1,509
	HgO(красная) $+ H_2O + 2e = Hg + 2OH^-$	0,098		$MnO_4^- + 4H^+ + 3e = MnO_2 + 2H_2O$	1,692
	$Hg_2Br_2 + 2e = 2Hg + 2Br^-$	0,140		$MnO_4^{2-} + 4H^+ - 2e = MnO_2 + 2H_2O$	2,257
Mo	$H_2MoO_4 - 2H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	-1,091	Nd	$Nd^{3+} + 3e = Nd$	-2,431

	$MoO_4^{2-} + 4H_2O = 6e = Mo + 8OH^-$	-1,05	Ni	γ-NiS – 2e = Ni – S^{2-}	-1,04
	$Mo^{3-} + 3e = Mo$	-0,200		α-NiS + 2e = Ni + S^{2-}	-0,83
	$MoO_2 + 4H^+ + 4e = Mo + 2H_2O$	-0,072		$Ni(OH)_2 + 2e = Ni + 2OH^-$	-0,72
	$MoO_4^{2-} + 8H^- + 6e = Mo + 4H_2O$	0,154		$Ni(NH_3)_6^{2+} + 2e = Ni + 6NH_3$	-0,49
	$MoO_3 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + H_2O$	0,320		$NiCO_3 + 2e = Ni + CO_3^{2-}$	-0,45
	$MoO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	0,606		$Ni^{2+} - 2e = Ni$	-0,25
N	$3N_2 + 2\bar{e} = 2N_3^-$	-3,4		$Ni(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Ni + 2H_2O$	0,110
	$3N_2 + 2H^+ - 2\bar{e} = 2HN_3$	-3,1		$NiO + 2H^+ - 2e = Ni + H_2O$	0,116
	$N_2 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_2OH + 2OH^-$	-3,04		$NiO_2 + 4H^+ + 2e = Ni^{2+} + 2H_2O$	1,68
	$N_2 + 4H_2O + 4\bar{e} = N_2H_4 + 4OH^-$	-1,16	O	$O_2 + 2H_2O + 4e = 4OH^-$	0,401
	$N_2 + 8H_2O + 6\bar{e} = 2NH_4OH + 6OH^-$	-0,74		$O_2 + 2H^+ = 2e = H_2O_2$	0,682
	$NO_2^- + H_2O + \bar{e} = NO + 2OH^-$	-0,46		$H_2O_2 + 2e = 3OH^-$	0,88
	$NO_2^- + 6H_2O + 6\bar{e} = NH_4OH + 7OH^-$	-0,15		$O_2 + 4H^+ - 4e = 2H_2O$	1,229
	$NO_3^- + 2H_2O + 3\bar{e} = NO + 4OH^-$	-0,14		$O_3 + H_2O + 3e = O_2 + 2OH^-$	1,24
	$NO_3^- + 7H_2O + 8\bar{e} = NH_4OH + 9OH^-$	-0,12		$O_3 + 6H^+ + 6e = 3H_2O$	1,511
	$NO_3^- + H_2O + 2\bar{e} = NO_2^- + 2OH^-$	0,01		$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
	$N_2 + 6H^+ + 6\bar{e} = 2NH_3$	0,057		$O_3 + 2H^+ + 2e = O_2 + H_2O$	2,07
	$N_2H_4 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_4OH + 2OH^-$	0,1	Os	$OsO_2 + 2H_2O + 4e = Os + 4OH^-$	-0,15
	$N_2 + 8H^+ + 6\bar{e} = 2NH_4^+$	0,275		$OsCl_6^{3-} + e = Os^{2+} + 6Cl^-$	0,4
	$2NO_2^- + 4H_2O + 6\bar{e} = N_2 + 8OH^-$	0,41		$OsO_4 + 8H^+ + 8e = Os + 4H_2O$	0,85
	$NH_2OH + 2H_2O + 2\bar{e} = NH_4OH^+ + 2OH^-$	0,42		$OsCl_6^{2-} + e = OsCl_6^{3-}$	0,85
	$2NO_2 + 4H_2O + 8e = N_2 + 8OH^-$	0,53		$Os^{2+} + 2e = Os$	0,85
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,78		$OsO_4 + 4H^+ + 4e = OsO_2 + 2H_2O$	0,96
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,80	P	$H_2PO_2^- + e = P + 2OH^-$	-2,05
	$2NO + 2H_2O + 4e = N_2 + 4OH^-$	0,85		$HPO_3^{2-} + 2H_2O + 2e = H_2PO_2^- + 3OH^-$	-1,57
	$HNO_2 + 7H^+ + 6e = NH_4^+ + 2H_2O$	0,864		$PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e = HPO_3^{2-} + 3OH^-$	-1,12
	$NO_3^- + 10H^+ + 8e = NH_4^+ + 3H_2O$	0,87		$2H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_4P_2O_6 + 2H_2O$	-0,94
	$2NO_2 + 2e = 2NO_2^-$	0,88		$P + 3H_2O + 3e = PH_3 + 3OH^-$	-0,89
	$N_2O + H_2O + 2e = N_2 + 2OH^-$	0,94		$H_3PO_2 + H^+ + e = P + 2H_2O$	-0,51
	$NO_3^- + 3H^+ + 2e = HNO_2 + H_2O$	0,94		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(бел) + 3H_2O$	-0,502
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,957		$H_3PO_3 + 3H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,96		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(кр) + 3H_2O$	-0,454
	$HNO_2 + H^+ + e = NO + H_2O$	1,00		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(бел) + 4H_2O$	-0,411
	$NO_2 + 2H^+ + 2e = NO + H_2O$	1,03		$H_3PO_4 + 4H^+ + 4e = H_3PO_2 + 2H_2O$	-0,39
	$NO_2 + H^+ + e = HNO_2$	1,09		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(кр) + 4H_2O$	-0,383
	$2NO_3^- + 10H^+ + 8e = N_2O + 5H_2O$	1,116		$H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_3PO_3 + H_2O$	-0,276
	$2NO_3^- + 12H^+ + 10e = N_2 + 6H_2O$	1,246		$H_3PO_3 + 2H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$2HNO_2 + 4H^+ + 4e = N_2O + 3H_2O$	1,297		$P + 3H^+ + 3e = PH_3$	0,06
	$2NO_2 + 8H^+ + 8e = N_2 + 4H_2O$	1,36		$H_4P_2O_6 + 2H^+ + 2e = 2H_3PO_3$	0,38
	$2HNO_2 + 6H^+ + 6e = N_2 + 4H_2O$	1,45	Pb	$PbS + 2e = Pb + S^{2-}$	-0,93
	$2NO + 4H^+ + 4e = N_2 + 2H_2O$	1,678		$PbO + H_2O + 2e = Pb + 2OH^-$	-0,58
	$N_2O + 2H^+ + 2e = N_2 + H_2O$	1,766		$PbCO_3 + 2e = Pb + CO_3^{2-}$	-0,506
Na	$Na^+ + e = Na$	-2,714		$PbI_2 + 2e = Pb + 2I^-$	0,365
Pb	$PbSO_4 + 2e = Pb + SO_4^{2-}$	-0,3563	S	$S + 2H^+ + 2e = H_2S$	0,141

	$PbF_2 + 2e = Pb + 2F^-$	-0,350		$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SO_3 + H_2O$	0,17
	$PbBr_2 + 2e = Pb + 2Br^-$	-0,280		$SO_3^{2-} + 6H^+ + 6e = S^{2-} + 3H_2O$	0,231
	$PbCl_2 + 2e = Pb + 2Cl^-$	-0,268		$2SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = S_2O_3^{2-} + 5H_2O$	0,29
	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	-0,126		$SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = H_2S + 4H_2O$	0,311
	$PbO_3^{2-} + H_2O + 2e = PbO_2^{2-} + 2OH^-$	0,2		$SO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = S + 4H_2O$	0,357
	$PbO + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,248		$2H_2SO_3 + 2H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,40
	$Pb(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,277		$H_2SO_3 + 4H^+ + 4e = S + 3H_2O$	0,449
	$PbO_2 + H_2O + 2e = PbO + 2OH^-$	0,28		$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 4e = 2S + 3H_2O$	0,5
	$Pb_3O_4 + 2H^+ + 2e = 3PbO + H_2O$	0,972		$2SO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,705
	$PbO_2 + 4H^+ + 2e = Pb^{2+} + 2H_2O$	1,449-1,455		$S_2O_8^{2-} + 2e = 2SO_4^{2-}$	2,01
	$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = PbSO_4 + 2H_2O$	1,685	Sb	$SbO_2^- + 2H_2O + 3e = Sb + 4OH^-$	-0,675
	$Pb^{4+} + 2e = Pb^{2+}$	1,694		$Sb + 3H^+ + 3e = SbH_3$	-0,51
Pd	$Pd(OH)_2 + 2e = Pd + 2OH^-$	0,07		$SbO_3^- + H_2O + 2e = SbO_2^- + 2OH^-$	-0,43
	$PdI_6^{2-} + 2e = PdI_4^{2-} + 2I^-$	0,623		$Sb_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Sb + 3H_2O$	0,152
	$PdCl_4^{2-} + 2e = Pd + 4Cl^-$	0,623		$SbO^+ + 2H^+ + 3e = Sb + H_2O$	0,212
	$PdO + 2H^+ + 2e = Pd + H_2O$	0,896		$SbO_3^- + 2H^+ + 3e = SbO_2^- + H_2O$	0,353
	$PdCl_6^{2-} + 4e = Pd + 6Cl^-$	0,96		$SbO_2^- + 4H^+ + 3e = Sb + 2H_2O$	0,446
	$Pd^{2+} + 2e = Pd$	0,987		$Sb_2O_5 + 6H^+ + 4e = 2SbO^+ + 3H_2O$	0,581
	$PdBr_6^{2-} + 2e = PdBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,993		$Sb_2O_5 + 4H^+ + 4e = Sb_2O_3 + 2H_2O$	0,671
	$PdO_2 + 2H^+ + 2e = PdO + H_2O$	1,283	Sc	$Sc^{3+} + 3e = Sc$	-2,077
	$PdCl_6^{2-} + 2e = PdCl_4^{2-} + 2Cl^-$	1,288	Sc	$Sc + 2e = Sc^{2-}$	-0,92
Pt	$PtS + 2e = Pt + S^{2-}$	-0,95		$Se + 2H^+ + 2e = H_2Se$	-0,40
	$PtS_2 + 2e = PtS + S^{2-}$	-0,64		$SeO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Se + 6OH^-$	-0,366
	$Pt(OH)_2 + 2e = Pt + 2OH^-$	0,15		$SeO_4^{2-} + H_2O + 2e = SeO_3^{2-} + 2OH^-$	0,05
	$PtI_6^{2-} + 2e = PtI_4^{2-} + 2I^-$	0,393		$H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e = Se + 3H_2O$	0,741
	$PtBr_4^{2-} + 2e = Pt + 4Br^-$	0,58		$SeO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SeO_3 + H_2O$	1,15
	$PtBr_6^{2-} + 2e = PtBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,59	Si	$SiO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Si + 6OH^-$	-1,7
	$PtCl_6^{2-} + 2e = PtCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,720		$SiF_6^{2-} + 4e = Si + 6F^-$	-1,2
	$PtCl_4^{2-} + 2e = Pt + 4Cl^-$	0,73		$SiO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = Si + 3H_2O$	-0,455
	$Pt(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pt + 2H_2O$	0,980		$Si + 4H^+ + 4e = SiH_4$	0,102
	$PtO_2 + 2H^+ + 2e = Pt(OH)_2$	1,045	Sn	$SnS + 2e = Sn + S^{2-}$	-0,94
	$Pt^{2+} + 2e = Pt$	1,188		$Sn(OH)_6^{2-} + 2e = HSnO_2^- + H_2O + 3OH^-$	-0,93
Ra	$Ra^{2+} + 2e = Ra$	-2,925		$HSnO_2^- + H_2O + 2e = Sn + 3OH^-$	-0,91
Rb	$Rb^+ + e = Rb$	-2,925		$SnF_6^{2-} + 4e = Sn + 6F^-$	-0,25
	$SO_4^{2-} + H_2O + 2e = SO_3^{2-} + 2OH^-$	-0,93		$Sn^{2+} + 2e = Sn$	-0,136
	$2SO_4^{2-} + 5H_2O + 8e = S_2O_3^{2-} + 10OH^-$	-0,76		$SnO_2 + 2H^+ + 2e = SnO + H_2O$	-0,108
	$SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S + 6OH^-$	-0,66		$SnO_2 + 4H^+ + 4e = Sn + 2H_2O$	-0,106
	$2SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S_2O_3^{2-} + 6OH^-$	-0,58		$SnO + 2H^+ + 2e = Sn + H_2O$	-0,104
	$S_2^{2-} + 2e = 2S^{2-}$	-0,524		$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Sn + 2H_2O$	-0,091
S	$S + 2e = S^{2-}$	-0,48		$SnCl_6^{2-} + 2e = SnCl_4^{2+} + 2Cl^-$	0,14
	$2S + 2e = S_2^{2-}$	-0,476		$Sn^{4+} + 2e = Sn^{2+}$	0,151
	$S + H^+ + 2e = HS^-$	-0,065	Sr	$Sr^{2+} + 2e = Sr$	-2,888
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 8e = 2S^{2-} + 3H_2O$	-0,006	Te	$Te + 2e = Te^{2-}$	-1,14
	$S_4O_6^{2-} + 2e = 2S_2O_3^{2-}$	0,08		$Te + 2H^+ + 2e = H_2Te$	-0,72
	$SO_4^{2-} + 8H^+ + 8e = S^{2-} + 4H_2O$	0,149		$TeO_3^{2-} + 2H_2O + 4e = Te + 6OH^-$	-0,57
	$TeO_2 + 4H^+ + 4e = Te + 2H_2O$	0,529		$V^{2+} + 2e = V$	-1,175

	$TeO_4^{2-} + 2H^+ + 2e = TeO_3^{2-} + H_2O$	0,892		$V^{3+} + e = V^{2+}$	-0,255
	$H_6TeO_6 + 2H^+ + 2e = TeO_2 + 4H_2O$	1,02		$VO_2^+ + 4H^+ + 5e = V + 2H_2O$	-0,25
Ti	$Ti^{2+} + 2e = Ti$	-1,63		$VO_2^+ + e = VO^+$	-0,044
	$TiO + 2H^+ + 2e = Ti + H_2O$	-1,306		$VO_2^+ + 4H^+ + 3e = V^{2+} + 2H_2O$	0,360
	$TiF_6^{2-} + 4e = Ti + 6F^-$	-1,19	V	$V_2O_5 + 6H^+ + 2e = 2VO^{2+} + 3H_2O$	0,958
	$TiO_2 + 4H^+ + 4e = Ti + 2H_2O$	-0,86		$VO_2^+ + 2H^+ + e = VO^{2+} + H_2O$	1,004
	TiO_2(рутил) $+ H^+ + 4e = Ti^{3+} + 2H_2O$	-0,666		$VO_4^{3-} + 6H^+ + 2e = VO^+ + 3H_2O$	1,256
	TiO_2(рутил) $+ 2H^+ + 4e = Ti^{2+} + 2H_2O$	-0,502		$H_2VO_4^- + 4H^+ + e = VO^{2+} + 3H_2O$	1,314
	$Ti^{3+} + e = Ti^{2+}$	-0,368		$WO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = W + 8OH^-$	-1,05
	$Ti^{4+} + e = Ti^{3+}$ (5M H_3PO_4)	-0,15	W	$WO_2 + 4H^+ + 4e = W + 2H_2O$	-0,119
	$TiO^{2+} + 2H^+ + 2e = Ti^{2+} + H_2O$	-0,135		$WO_3 + 6H^+ + 6e = W + 3H_2O$	-0,09
	$TiO^{2+} + 2H^+ + e = Ti^{3+} + H_2O$	0,10		$W_2O_5 + 2H^+ + 2e = 2WO_2 + H_2O$	-0,031
Tl	$Tl_2S + 2e = 2Tl + S^{2-}$	-0,93		$2WO_3 + 2H^+ + 2e = W_2O_5 + H_2O$	-0,029
	$TlI + e = Tl + I^-$	-0,753		$WO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = W + 4H_2O$	0,049
	$TlBr + e = Tl + Br^-$	-0,658		$2WO_4^{2-} + 6H^+ + 2e = W_2O_5 + 3H_2O$	0,801
	$TlCl + e = Tl + Cl^-$	-0,557		$ZnS + 2e = Zn + S^{2-}$	-1,405
	$TlOH + e = Tl + OH^-$	-0,344	Zn	$Zn(CN)_4^{2-} + 2e = Zn + 4CN^-$	-1,26
	$Tl^+ + e = Tl$	-0,3363		$Zn(OH)_2 + 2e = Zn + 2OH^-$	-1,245
	$Tl(OH)_3 + 2e = TlOH + 2OH^-$	-0,05		$Zn(OH)_4^{2-} + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,22
	$Tl_2O_3 + 3H_2O + 4e = 2Tl^+ + 6OH^-$	0,02		$ZnO_2^{2-} + 2H_2O + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,216
	$TlOH + H^+ + e = Tl + H_2O$	0,778		$ZnCO_3 + 2e = Zn + CO_3^{2-}$	-1,06
	$Tl^{3+} + 2e = Tl$	1,252		$Zn(NH_3)_4^{2+} + 2e = Zn + 4NH_3$	-1,04
U	$UO_2 + 2H_2O + 4e = U + 4OH^-$	-2,39		$Zn^{2+} + 2e = Zn$	-0,763
	$U^{3+} + 3e = U$	-1,798		$ZnO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Zn + 2H_2O$	0,441
	$U^{4+} + e = U^{3+}$	-0,607		$ZrO^{2+} + 2H^+ + 4e = Zr + H_2O$	-1,570
	$UO_2^{2+} = UO_2^+$	0,05	Zr	$ZrO_2 + 4H^+ + 4e = Zr + 2H_2O$	-1,553
	$UO_2^{2+} + 4H^+ + 2e = U^{4+} + 2H_2O$	0,334		$Zr^{4+} + 4e = Zr$	-1,539
	$UO_2^+ + 4H^+ + e = U^{4+} + 2H_2O$	0,62			

Список литературы

Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Учебное издание

Наталья Анатольевна Зайцева, Ирина Альбертовна Низова

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

ЧАСТЬ II

Окислительно-восстановительные реакции

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка Н.*А.Зайцевой*

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.
Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.
Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

М. Л. Хазин

Б1.О.12 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Направление

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

форма обучения: очная, очно-заочная, заочная

Екатеринбург

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического
факультета УГГУ
19.11.2021.
Председатель комиссии
П. А. Осипов

М. Л. Хазин

Б1.О.12 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

форма обучения: очная

Издание УГГУ Екатеринбург, 2021

Х12

Рецензент: Ю. Н. Жуков, профессор, доктор технических наук (УрФУ)

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры
Эксплуатации горного оборудования 29 октября 2021 (протокол № 2)
и рекомендовано для издания в УГГУ

Хазин М. Л.

Х12 МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ: методические указания по самостоятельной работе студентов направления подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника. - Екатеринбург: Изд-во, УГГУ, 2021. – 14 с.

Для студентов направления подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника. Представлены современные конструкционные материалы, которые будут использоваться в горных машинах и оборудовании в ближайшие десятилетия. Данная работа позволяет учащимся ориентироваться в широкой номенклатуре материалов, осуществлять подбор по физико-механическим характеристикам с целью обеспечения наивысшего качества и точности изготавливаемых конструкций.

Табл. 2. Библ. 9 назв.

© Хазин М. Л., 2021
© Уральский государственный
горный университет, 2021

Оглавление

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ…… 5
1.1. Цель преподавания дисциплины..... 5
1.2. Задачи изучения дисциплины..... 5
1.3. Место дисциплины в структуре ОПОП…….. 5
1.4. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины 5
2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ..... 6
2.1. Наименование тем, их содержание, объем в часах..... 6
2.2. Распределение часов по темам и видам занятий……. 6
3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ..... 7
3.1. Методические рекомендации по самостоятельной подготовке теоретического материала 8
3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям 10
3.3. Методические рекомендации по подготовке практико-ориентированного задания 11
3.4. Контроль знаний студентов..... 11
4. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ…… 13
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……. 13
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК…….. 14

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цель дисциплины

Цель дисциплины: формирование научного и практического представления о структуре и свойствах материалов, овладение навыками решения задач, возникающие при выполнении профессиональных функций.

1.2. Задачи изучения дисциплины

Основная задача дисциплины – подготовка студентов к применению навыков разработки систем по обеспечению экологической и промышленной безопасности при производстве работ по эксплуатационной разведке, добыче и переработке твердых полезных ископаемых, строительству и эксплуатации подземных объектов.

Для этого необходимо:

- развитие у обучаемых знаний и навыков, необходимых для выбора материалов;
- ознакомление обучаемых с методами стандартных испытаний по определению физико-механических свойств и технологических показателей используемых материалов и готовых изделий;
- обучение студентов применению полученных практических и теоретических знаний при обеспечении качества и надежности горных машин и оборудования.

1.3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Место дисциплины в структуре ОПОП: Дисциплина «Материаловедение в машиностроении» является дисциплиной обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана по направлению подготовки 21.05.04 Горное дело специализация Открытые горные работы.

1.4. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

В процессе изучения дисциплины формируются общепрофессиональные компетенции и индикаторы достижения компетенции.

ПК-1.1: Способен демонстрировать знание и понимание фундаментальных наук, а также знания в междисциплинарных областях, позволяющие решать современные прикладные инженерные задачи

В результате изучения дисциплины студенты должны:

Знать:

- общую классификацию материалов, их характерные свойства, области применения;

– типовые методы измерения параметров и свойств материалов;

Уметь:

– выбирать материалы с необходимым комплексом физико-механических характеристик;
– проводить измерения параметров материалов;

Владеть:

– навыками выбора материалов с необходимым комплексом физико-механических характеристик;
– навыками проведения измерений параметров материалов;
– навыками использования технической и справочной литературы для выбора материалов.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Наименование и содержание тем

Тема 1: Строение, свойства и кристаллизация материалов.

Аморфная и кристаллическая структура. Кристаллизация и структура металлов и сплавов. Виды сплавов. Диаграммы состояния сплавов. Диаграмма железо-углерод. Технологии термической обработки: отжиг, закалка, отпуск, нормализация. Поверхностная закалка; химико-термическая обработка. Деформация и разрушение. Виды деформации, диаграмма деформации. Твердость, усталость, выносливость и износостойкость.

Тема 2: Конструкционные металлы и сплавы. Композиционные материалы.

Углеродистые и легированные конструкционные стали. Чугуны. Цветные металлы и их сплавы. Стекло и керамика. Пластмассы и полимеры. Классификация и виды композиционных материалов.

2.2. Распределение часов по темам и видам занятий

Тематический план изучения дисциплины для студентов очной формы обучения

№	*Тема*	*Контактная работа обучающихся с преподавателем, час*		*Самостоятельная работа*
		лекции	*практич. занятия/*	
1.	Строение, свойства и кристаллизация материалов.	8	8	54
2.	Конструкционные металлы и сплавы. Композиционные материалы.	10	10	54

	ИТОГО	**18**	**18**	**108**

Освоение дисциплины предусматривает репродуктивные (информационные лекции, опросы, работа с книгой и т.д.); активные (доклады, работа с информационными ресурсами).

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов по дисциплине «Материаловедение в машиностроении» позволяет сформировать знания, умения и навыки студентам, обучающимся по направлению подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника в области представления о структуре и свойствах материалов, овладения навыками решения задач, возникающих при выполнении профессиональных функций. Проверка знаний материала лекционных и практических занятий проводится в виде тестирования.

Основные цели самостоятельной работы:

- систематизация и закрепление теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубление и расширение теоретических знаний, формирование умений использовать справочную документацию и дополнительную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельного мышления;
- развитие исследовательских умений.

Особую важность приобретают умения обучающихся выбирать материалы для профессиональной деятельности, определять основные свойства материалов по маркам, знание свойств, классификации, характеристики применяемых в профессиональной деятельности материалов, самостоятельное применение полученных знаний и умений на практике. Методические рекомендации помогут обучающимся целенаправленно изучать материал по теме, определять свой уровень знаний и умений при выполнении самостоятельной работы.

3.1. Методические рекомендации по самостоятельной подготовке теоретического материала

Основной формой изучения курса является самостоятельная работа студента с книгой. Вначале следует ознакомиться с программой курса, затем прочитать соответствующие разделы по учебнику. При изучении раздела необходимо усвоить основные понятия, термины, внимательно рассмотреть

примеры и выводы. Усвоив тот или иной раздел учебника необходимо ответить на вопросы для самопроверки, приведённые в настоящих методических указаниях. Вопросы для самопроверки обращают внимание студента на наиболее важные разделы курса и дают возможность установить, всё ли главное им усвоено.

Самостоятельная работа студентов по изучению отдельных тем дисциплины включает поиск учебных пособий по данному материалу, проработку и анализ теоретического материала, самоконтроль знаний по данной теме с помощью нижеприведенных контрольных вопросов и заданий.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность металлического, ионного и ковалентного типов связи?
2. Каковы характерные свойства металлов и чем они определяются?
3. Что такое элементарная ячейка?
4. Что такое полиморфизм?
5. Что такое параметр кристаллической решетки, плотность упаковки и координационное число?
6. Что такое мозаичная структура?
7. Виды дислокаций и их строение.
8. Каковы термодинамические условия фазового превращения?
9. Каковы параметры процесса кристаллизации?
10. Что такое переохлаждение?
11. Что такое компонент, фаза, физико-химическая система, число степеней свободы?
12. Приведите объяснение твердого раствора, механической смеси, химического (металлического) соединения.
13. Что представляют собой твердые растворы замещения и внедрения? 4. Как строятся диаграммы состояния?
14. Объясните принцип построения кривых нагревания и охлаждения с помощью правила фаз.
15. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования непрерывного ряда твердых растворов.
16. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая полной нерастворимости компонентов в твердом состоянии.
17. Начертите и проанализируйте диаграмму состояния для случая образования эвтектики, состоящей из ограниченных твердых растворов.
18. Каким образом определяются состав фаз и их количественное соотношение?
19. Чем объясняется назначение процесса улучшения для конструкционной стали?
20. Как влияет степень легирования на механические свойства улучшаемой стали?

21. Какие требования предъявляются к рессорно-пружинным сталям?
22. Какие вы знаете износостойкие стали?
23. Каковы требования, предъявляемые к нержавеющим сталям?
24. Что такое композиты?
25. Как подразделяют композиты в зависимости от формы и размеров наполнителя?
26. Как подразделяют композиты по виду матрицы?
27. От чего зависят механические свойства композитов?
28. Какие композиционные материалы используют для работы при высоких температурах (жаропрочные)?
29. Что лежит в основе классификации полимеров?
30. Какие материалы относятся к обратимым и необратимым полимерам?
31. Какие вы знаете наполнители пластмасс?
32. Для чего вводят в пластмассы отвердители?
33. Приведите примеры пластиков с твердыми наполнителями.
34. Укажите область применения термопластов и реактопластов.
35. В чем преимущества пластмасс по сравнению с металлическими материалами? Каковы их недостатки?

3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Самостоятельная работа студентов по подготовке к практическим занятиям, включает проработку и анализ теоретического материала, а также самоконтроль знаний по теме практического занятия с помощью нижеприведенных контрольных вопросов и заданий. При изучении тем дисциплины рекомендуется использовать литературные источники.

Контрольные вопросы

1. Какие вы знаете хладостойкие стали и сплавы? Укажите их состав, свойства и назначение.
2. Какие вы знаете жаропрочные и жаростойкие стали и сплавы? Укажите их состав, свойства и назначение.
3. Какие вы знаете материалы с высокой твердостью? Укажите их состав, свойства и назначение.
4. Какие требования предъявляются к сплавам с высокой упругостью? Приведите примеры таких сплавов с указанием их состава, структуры, свойств и области применения.
5. Приведите примеры сплавов с особенностями теплового расширения. Их состав, свойства и назначение.
6. Какие вы знаете сплавы с заданными упругими свойствами? Их состав, свойства и назначение.

7. Каковы особенности титановых сплавов и области их применения?
8. Какой термической обработке подвергают сплавы на основе титана?
9. Приведите примеры сплавов на основе титана. Укажите их состав, обработку, свойства и область применения.
10. Высокопрочные стали.
11. Как классифицируются конструкционные стали по технологии термической обработки?
12. Какие требования предъявляются к цементуемым изделиям?
13. Чем определяется выбор марки цементуемой стали для изделий различного назначения?
14. Какова термическая обработка цементуемых деталей?
15. Приведите определения основных процессов термической обработки: отжига, нормализации и закалки.
16. Какие вам известны разновидности процесса отжига и для чего они применяются?
17. Какова природа фазовых и термических напряжений?
18. Какие вам известны разновидности закалки и в каких случаях они применяются?
19. Каковы виды и причины брака при закалке?
20. Какие Вам известны группы охлаждающих сред и каковы их особенности?
21. От чего зависит прокаливаемость стали и в чем ее технологическое значение?
22. Какие вам известны технологические приемы уменьшения деформации при термической обработке?
23. Для чего и как производится обработка холодом?
24. . В чем сущность и особенности термомеханической обработки.

3.3. Методические рекомендации по подготовке практико-ориентированного задания

Необходимо уяснить принципы обозначения сталей и сплавов. Обратить внимание на различение обозначений конструкционных и инструментальных сталей. Помнить, что одна и та же буква может обозначать различные легирующие элементы в обозначениях сталей и цветных металлов.

Примерные практико-ориентированные задания
1. Расшифруйте состав и марку сплавов КЧ30-6 и А12
2. Расшифруйте состав и марку сплавов 8Х18Н9АТ и 8Х18Н9ТА
3. Расшифруйте состав и марку сплавов 12ХГ2МТР и ТТ15К6

3.4. Контроль знаний студентов

Экзамен – форма контроля промежуточной аттестации, в результате которого обучающийся получает оценку по четырехбалльной шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Цель экзамена – завершить курс изучения дисциплины, проверить сложившуюся у обучающегося систему знаний, понятий, отметить степень полученных знаний, определить сформированность компетенций.

Для того чтобы быть уверенным на экзамене, необходимо ответы на наиболее трудные, с точки зрения обучающегося, вопросы подготовить заранее и тезисно записать. Запись включает дополнительные ресурсы памяти.

К экзамену необходимо начинать готовиться с первой лекции, практического занятия, так как материал, набираемый памятью постепенно, неоднократно подвергавшийся обсуждению, образует качественные знания, формирует необходимые компетенции.

При подготовке к экзамену следует пользоваться конспектами лекций, учебниками. Прежде всего, необходимо запоминать определение каждого понятия, так как именно в нем фиксируются признаки, показывающие его сущность и позволяющие отличать данную категорию от других. В процессе заучивания определений конкретных понятий обучающийся «наращивает» знания. Материаловедение имеет свою систему понятий, и обучающийся через запоминание конкретной учебной информации приобщается к данной системе, «поднимается» до ее уровня, говорит на ее языке (не пытаясь объяснить суть той или иной категории с помощью обыденных слов).

Однако преподаватель на эк замене проверяет не столько уровень запоминания учебного материала, сколько то, как обучающийся понимает те или иные категории и реальные проблемы, как умеет мыслить, аргументировать, отстаивать определенную позицию, объяснять заученную дефиницию.

Таким образом, необходимо разумно сочетать запоминание и понимание, простое воспроизводство учебной информации и работу мысли.

Для того чтобы быть уверенным на зачете, необходимо ответы на наиболее трудные, с точки зрения обучающегося, вопросы подготовить заранее и тезисно записать. Запись включает дополнительные ресурсы памяти.

Экзамен по дисциплине - «Материаловедение в машиностроении» может проводиться в устной, письменной форме (по билетам, в форме компьютерного тестирования, с использованием электронной информационно-образовательной среды). На подготовку к устному ответу обучающегося дается 40-60 минут в зависимости от объема билета. На подготовку ответа в письменной форме – не менее 120 минут.

При опоздании к началу письменного зачета - обучающийся на зачет не допускается. Использование средств связи, «шпаргалок», подсказок на зачете- является основанием для удаления обучающегося с зачета, а в зачетной ведомости проставляется оценка «не зачтено».

Для подготовки к зачету в письменной форме обучающийся должен иметь лист (несколько листов) формата А-4.

Лист (листы) формата А-4, на котором будет выполняться зачетное - задание, должен быть подписан обучающимся в начале работы в правом верхнем углу. Здесь следует указать:

- Ф. И. О. обучающегося;
- группу, курс
- дату выполнения работы
- название дисциплины

Страницы листов с ответами должны быть пронумерованы.

Проверка письменных работ осуществляется преподавателем, проводившим зачет, в течение 3-х рабочих дней после его проведения. Результаты письменного зачета - объявляются путем выдачи копии зачетной ведомости старосте группы, результаты устного зачета объявляются в процессе проведения зачета - после ответа обучающегося.

4. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Профессиональные пакеты программных средств:

1. Microsoft Windows 8 Professional
2. Microsoft Office Professional 2010
3. Microsoft Windows 8.1 Professional

Информационные справочные системы

ИПС «КонсультантПлюс»

ИПС «Гарант»

Базы данных

Scopus: база данных рефератов и цитирования
https://www.scopus.com/customer/profile/display.uri

E-library: электронная научная библиотека: https://elibrary.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балин В. С. Конструкционные материалы: учебное пособие. - Екатеринбург: Изд-во УГГУ. 2006. - 138 с.

2. Балин В. С., Зубов В. В. Материаловедение: учебное пособие/ 2-е изд., перераб. и доп. - Екатеринбург: УГГУ, 2012. - 202 с.

3. Балин В. С., Хазин М. Л. Стали и сплавы с особыми физическими свойствами: учебное пособие. - 3-е изд., стер. - Екатеринбург: УГГУ, 2007. - 49 с.

4. Болтон У. Конструкционные материалы: металлы, сплавы, полимеры, керамика, композиты: Карманный справочник = Engineering materials : пер. с англ. / - 2-е изд., стер. - Москва: Додэка-XXI, 2007. - 320 с.

5. Комаров О. С., Керженцева А. Ф., Макаева Г. Г. Материаловедение в машиностроении. М.: Высшая школа. 2009. 304 с.

6. Хазин М. Л. МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ: учебно-практическое пособие, Урал. гос. горный ун-т – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. – 184 с.

7. Хазин М. Л. Материаловедение: методические материалы. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2008. 208 с.

Учебное издание

Хазин Марк Леонтьевич

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ:

методические указания по самостоятельной работе студентов направления подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника

Учебное пособие
для самостоятельной работы

Редактор В. В. Баклаева

Подписано в печать . .22 г. Бумага писчая. Формат 60 х 84 1/16
Печать офсетная. Печ. л. 5,0. Уч.-изд. л 4,41. Тираж 50. Заказ №_____

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета
В лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____ В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Б1.О.13 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Информатики	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*	Председатель _____ *(подпись)*
Дружинин А.В.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 19.09.2024	Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов по направлению подготовки ***15.03.06 Мехатроника и робототехника*** при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата студент может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учится лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: «**реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;
- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата-обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Студент для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

Выбор темы реферата

Студенту предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом следует сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

Формулирование цели и составление плана реферата

Выбрав тему реферата и изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

Цель – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).
   1.1. (полное название параграфа, пункта);
   1.2. (полное название параграфа, пункта).
2. (полное наименование главы).
   2.1. (полное название параграфа, пункта);
   2.2. (полное название параграфа, пункта).

Заключение (выводы).

} Основная часть

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

Титульный лист оформляется в соответствии с Приложением.

Оглавление (план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

Введение. В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

Основная часть реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждый раздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

Заключение (выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

Библиография (список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания и электронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

Приложения могут включать графики, таблицы, расчеты.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и помарки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта Times New Roman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что…», «таблица позволяет заключить, что…» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещённого в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждой главы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире.

Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например, «Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «…в табл. 2.2».

Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минус (–), умножения (х) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «…в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

Схема – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

Диаграмма – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

График – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводят с указанием их порядкового номера, например: «…на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подрисуночный текст).

Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «…в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

Статья одного, двух или трех авторов из журнала

Зотова Л. А., Еременко О. В. Инновации как объект государственного регулирования // Экономист. 2010. № 7. С. 17–19.

Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами

Валютный курс и экономический рост / С. Ф. Алексашенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами

Олейник А. Н. Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

Книга, написанная более чем тремя авторами

Экономическая теория: учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

Сборники

Актуальные проблемы экономики и управления: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

Статья из сборника

Данилов А. Г. Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

Статья из газеты

Крашаков А. С. Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

Библиографические ссылки

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

Пример оформления затекстовой ссылки

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С.* Институциональная Горное дело: учебник и практикум для специалистиата и магистратуры /О.С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1.Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.

2.Ответы студента на вопросы преподавателя.

3.Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

- Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.
- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.
- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.
- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.
- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.
- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.
- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!
- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.
- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.
- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. 1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методо-ориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яndex, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Проверяемые компетенции: ОПК-2; ОПК-4; ОПК-11; ОПК-14

Знать:

- офисные приложения;

- основы создания баз данных;

- принципы работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Уметь:

- использовать офисные приложения;

- создавать базы данных средствами офисных приложений;

- использовать электронную почту и другие средства коммуникаций с помощью Интернета.

Владеть:

- инструментарием офисных приложений;

- технологией разработки баз данных;

- навыками работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Критерии оценивания:

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

Правила оценивания:

Каждый показатель оценивается в 1 балл

Критерии оценки:

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;

7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;

5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Приложение

Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

Руководитель:
Дружинин А.В.
Студент гр. МИР-24
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2024

Федеральное агентство по образованию
ФБГОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Методические указания
к лабораторным работам по дисциплине «Прикладное программное обеспечение»
для студентов технологических специальностей
очной и заочной форм обучения
Часть 1.

УДК
И57
Рецензент: Боровков В. А., доцент кафедры информатики

Прикладное программное обеспечение. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» для студентов технологических специальностей очной и заочной форм обучения / В. В. Тимухина, А. В. Дружинин, Т. Г. Завражина, Р. А. Мезенцева, Т. А. Самакаева, С. М. Колмогорова. – Екатеринбург: Изд–во УГГУ.–2021 – с.118

В методическом руководстве студентам предложены задания и методические указания по их выполнению в Windows, Word, Excel.

© Уральский государственный горный университет, 2021
© Авторы, 2021

ВВЕДЕНИЕ

Методическое руководство для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» для студентов технологических специальностей очной и заочной форм обучения состоит из двух частей в соответствии с поточными лекциями по дисциплине Прикладное программное обеспечение, читаемыми большинству студентов технологических специальностей очной формы обучения.

Часть 1. Включает изучение следующих тем:

1. Встроенные приложения Windows.
2. Текстовый редактор Word.
3. Табличный процессор Excel.

Часть 2. Включает изучение следующих тем:

1. Система управления базами данных.
2. Система проектирования «AutoCAD».
3. Программирование на VBA.
4. Работа в Internet

Методическое руководство содержит лабораторные работы разной степени сложности, что соответствует разному уровню подготовки студентов 1 курса по дисциплине «Прикладное программное обеспечение». Количество предложенных работ превышает часовую нагрузку, соответствующую учебным планам.

Каждый преподаватель может на основе предложенных работ создать свой набор лабораторных работ в соответствии с уровнем знаний студентов или предложить отдельным студентам индивидуальную практическую программу работы.

Студенты менее подготовленные, при наличии компьютера дома, могут самостоятельно выполнить набор предложенных работ, повышая свои навыки работы в рассматриваемых приложениях.

Студенты заочной формы обучения могут выполнить указанные преподавателем работы до приезда на сессию, в течение семестра, что положительно скажется на их навыках работы за компьютером.

Результат каждой выполненной работы студент должен сохранить в папке с именем своей группы. Файлы именовать номером выполненной работы.

По всем выполненным лабораторным работам студент должен оформить электронный отчет. Результат каждой работы необхо-

димо дополнить кратким описанием команд, использованных при выполнении работы.

Правила оформления отчета описаны в работе 2.6.

1. Встроенные приложения Windows

1. ВСТРОЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ WINDOWS

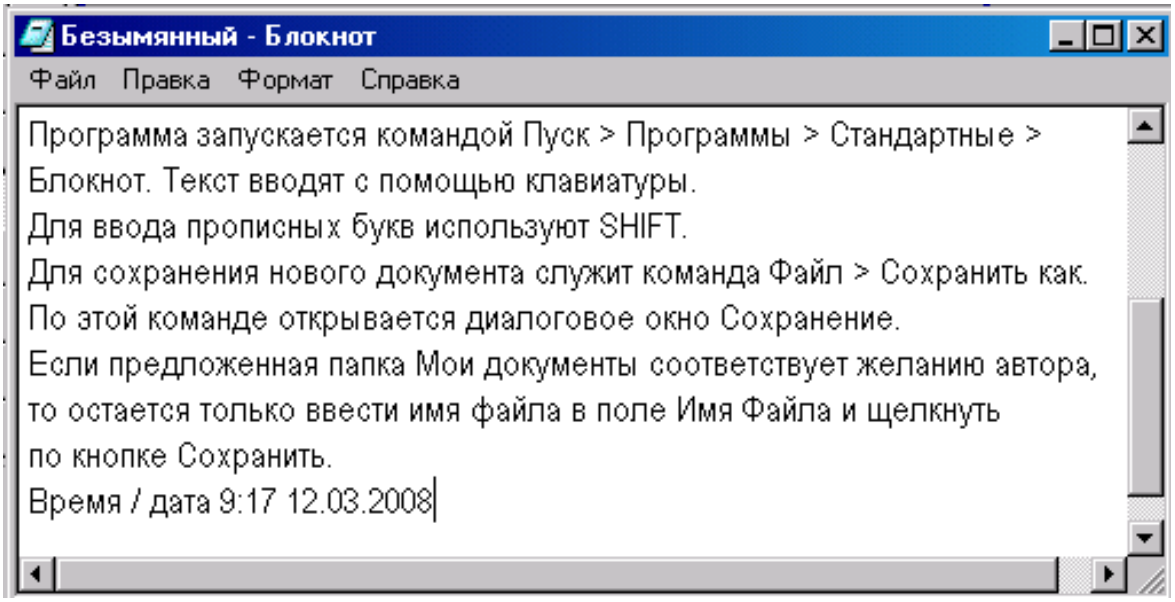
Работа 1.1. Стандартные приложения Windows

I. NOTEPAD (БЛОКНОТ) – это простейший текстовый редактор, который можно использовать в качестве удобного средства просмотра текстовых файлов (формат ***.txt***).

Для создания текстовых документов его применяют редко, обычно для создания системных файлов типа ***.bat*** (командных), так как редактор не имеет форматирования. Данную программу удобно использовать для отработки навыков работы с клавиатурой.

ЗАДАНИЕ 1

1. Запустите программу *Блокнот.*
2. Наберите текст.
3. Вставьте время / дату.



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Программа запускается командой *Пуск —> Программы —> Стандартные —> Блокнот.*
2. В этой программе есть единственное средство автоматизации и состоит оно в том, что при нажатии на клавишу *F5* в документ автоматически впечатывается текущее время и дата. Это удобно для ведения деловых записей и дневников.

II. PAINT — простейший графический редактор (основные форматы *.dib* или *.bmp*). Может работать и с форматами: *.jpeg, .gif, .png, .tiff.*

В состав его элементов управления, кроме строки меню, входят панель инструментов, палитра настройки инструмента и цветовая палитра. Кнопки панели инструментов служат для вызова чертежно–графических инструментов.

ЗАДАНИЕ 2

1. Запустите программу *Paint***.** Создайте 1 и 2 рисунки.
2. Задайте размер будущего рисунка (высота, ширина).
3. Наложите рис.1 на рис 2.
4. Подпишите рисунки.

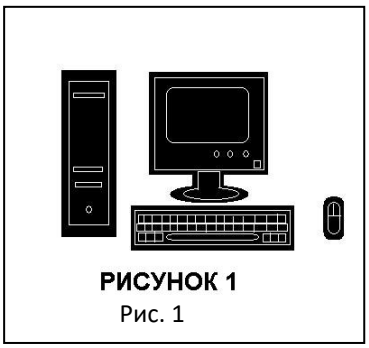


Рис. 1

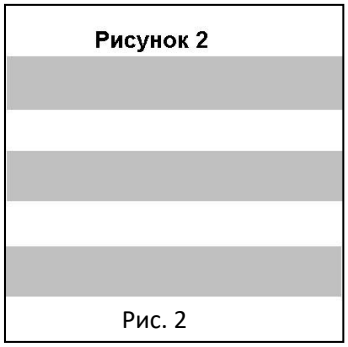


Рис. 2



Рис. 3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Программа запускается командой *Пуск —> Программы —> Стандартные —> Paint.*

2. Размеры задают в полях «Ширина» и «Высота» диалогового окна «Атрибуты» *(Рисунок —> Атрибуты).*

3. Все инструменты: карандаш, кисть, распылитель, геометрические фигуры, кроме *Ластика* выполняют рисование основным цветом (выбирается щелчком левой кнопки мыши по палитре красок). *Ластик* стирает изображение, заменяя его фоновым цветом (выбирается щелчком правой кнопки мыши в палитре красок).

4. Для ввода текста используют инструмент «Надпись». Выбрав инструмент, щелкните на рисунке примерно там, где надпись должна начинаться, на рисунке откроется поле ввода.

5. Для сохранения рисунка в файле используется подменю «Файл». В нем есть две команды – «Сохранить» и «Сохранить

как». Команда «Сохранить» сохраняет рисунок в файле с ранее заданным названием. Команда “Сохранить как” сохраняет рисунок в файле под новым названием. Свои файлы сохраните под названием *ris1.jpg u ris2.jpg*.

6. В качестве цвета текста используют основной цвет. Чтобы сделать фон надписи прозрачным, щелкните значок  . Чтобы сделать непрозрачным и выбрать цвет фона, щелкните значок  .

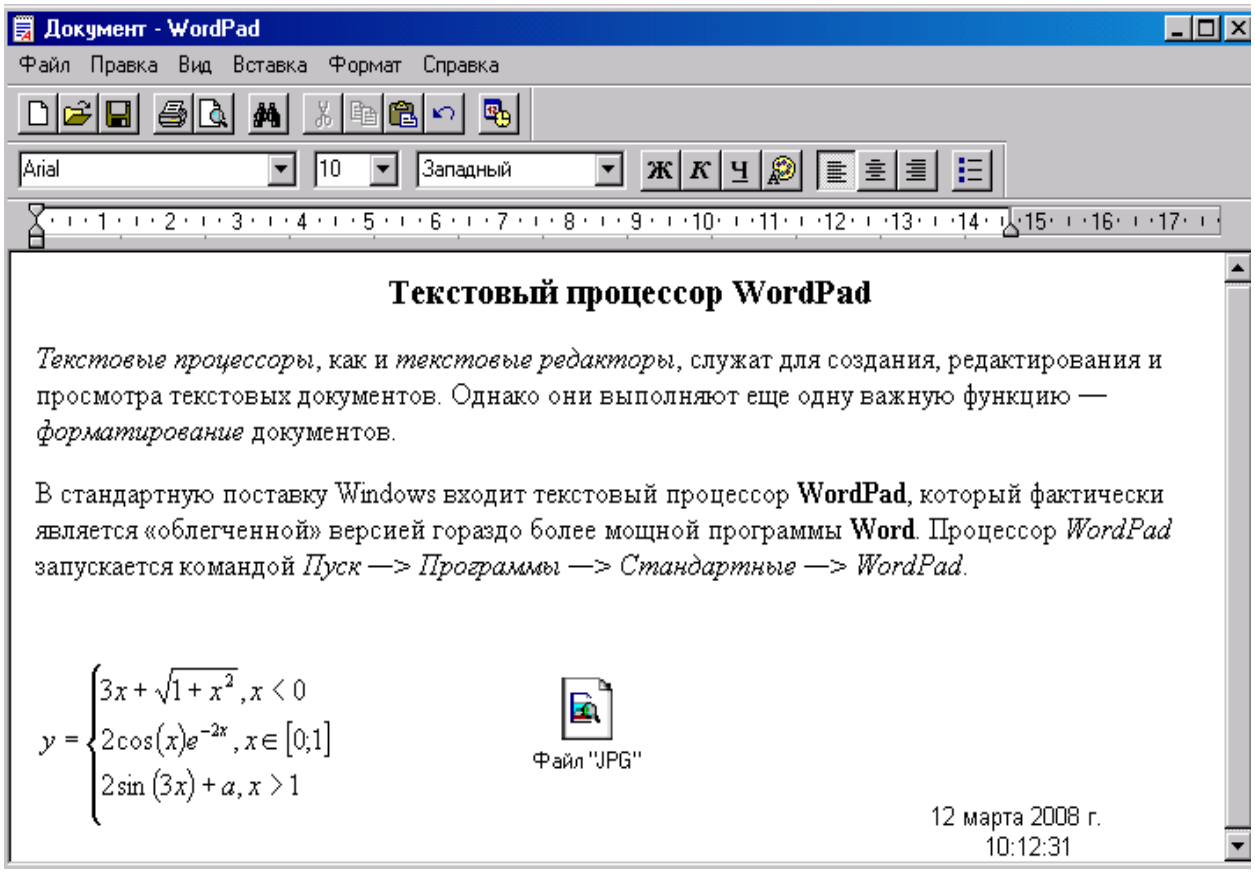
7. Чтобы открыть ранее созданный файл с рисунком, используют пункты меню *Файл —> Открыть*. Далее на экране появится диалоговое окно «Открытие файла».

8. Открыть файл *ris2.jpg* и наложить на него рис.1, для этого *Правка—>Вставить из файла ris1.jpg*, сделать прозрачным фон.

III. WORDPAD – текстовый редактор, служит для создания, редактирования и просмотра текстовых документов.

ЗАДАНИЕ 3

1. Запустите программу **WordPad**.
2. На странице WordPad наберите текст, дату, время.
3. Отформатируйте текст.
4. Вставьте формулу и рисунок.
5. Измените размер рисунка и формулы.

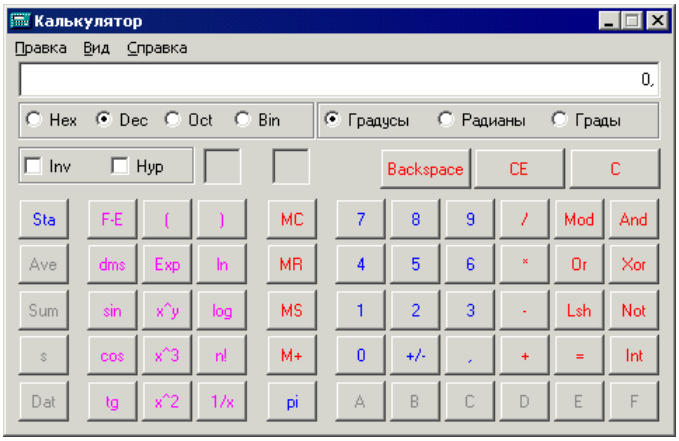


МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Запустите программу командой *Пуск —> Программы —> Стандартные —> WordPad.*
2. Набрать в окне документа *WordPad* предлагаемый текст.
3. Вставить рисунок. *Вставка —> Объект —>Создание из файла —>Обзор.* Для внедрения объекта снять флажок. Чтобы связать объект, установить флажок.
4. Набрать предлагаемую формулу *Вставка—>Объект—>Microsoft Equation 3.0*

5. Вставить в документ время и дату: *Вставка —> Дата, время.*

IV. КАЛЬКУЛЯТОР может быть в двух вариантах: **стандартного** калькулятора, выполняющего основные арифметические операции, и **инженерного** калькулятора с дополнительными функциями.



ЗАДАНИЕ 4

Вычислите значение уравнения: $Y = x^3 + 2{,}28 \cdot x^2 - 1{,}9347 \cdot x - 3{,}907$ при $x = 5$ с помощью калькулятора, сравните ваш ответ с правильным ответом 168,4195

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для выполнения расчета выполняется следующая последовательность действий: выберите *Вид – Инженерный*; выберите систему счисления; выберите требуемую разрядность результата и приступайте к расчету.

Клавиша Функция

( ) Открыть (закрыть) скобки

A–F Клавиши ввода для шестнадцатеричных чисел

cos Косинус (Inv: арккосинус)

dms Преобразование градусов в градусы–минуты–секунды (Inv: наоборот)

Exp Ввод показателя степени для экспоненциального представления числа

F–E Переключение на экспоненциальное представление чисел (только в десятичном режиме)

Int Целая часть числа (Inv: дробная часть числа)

In Натуральный логарифм (Inv: экспонента)

log Десятичный логарифм (Inv: показательная функция с основанием 10)

Mod Остаток от деления по модулю

n! Факториал

PI Число π (3,1415926)

Sin Синус введенного значения (Inv: арксинус)
Tan Тангенс введенного значения (Inv: арктангенс)
x^2 Квадрат введенного значения (Inv: корень квадратный)
x^3 Третья степень введенного значения (Inv: корень третьей степени)
x^y *Y*–я степень введенного значения (Inv: корень *y*–й степени)

Работа 1.2. Создание документа с использованием нескольких приложений

ЗАДАНИЕ 1

Создайте нижеприведенный текст с рисунком и результатами вычислений.

Для питания главного электропривода наиболее эффективно применение генераторов постоянного тока со смешанным возбуждением. Упрощенная схема магнитной цепи генератора для этого случая показана на рисунке, где приняты следующие обозначения: $r_н$ и $\omega_н$, $r_ш$ и $\omega_ш$ – сопротивление и число витков соответственно обмотки независимого возбуждения и шунтовой обмотки возбуждения; $r_д$ – добавочное сопротивление в цепи шунтовой обмотки возбуждения; $Ф$ – общий магнитный поток главных полюсов генератора; E_r – э. д. с. Источника независимого возбуждения.

Для данной схемы возбуждения справедлива система уравнений:

$$E_н = r_н i_н + 2\omega_н Ф \qquad (1)$$

$$E_r = r_ш i_ш + 2\omega_ш Ф \qquad (2)$$

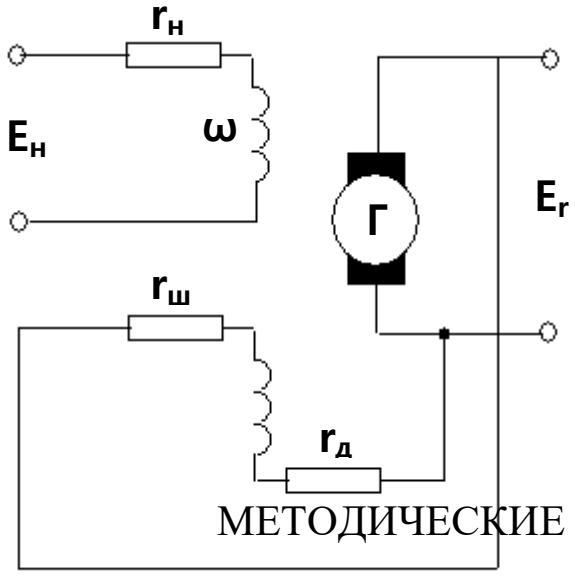
$$a\omega_\Sigma = i_н \omega_н + i_ш \omega_ш \qquad (3)$$

При заданных значениях

$\boldsymbol{i_н}$=1250; $\boldsymbol{r_н}$=12,2; $\boldsymbol{\omega_н}$=600, $\boldsymbol{r_ш}$=0,79; $\boldsymbol{\omega_ш}$=150**;** $\boldsymbol{i_ш}$=1250; $Ф$=5,81.

Вычислены:

$E_н$= _____; E_r= _____**;** $a\omega_\Sigma$= _____**;**



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

1. Запустить MS Word: *Пуск – Все программы – MS Office – MS Word.* Набрать текст до системы уравнений.
2. Сохранить текст: *Файл – Сохранить как* – на диске D создать папку с названием вашей группы (Имя папки), в папке сохранить текст под названием ЛабРаб_1 (D:\Имя папки\ЛабРаб_2.doc). Закрыть документ и выйти из MS Word (команда *Файл – Выход*).
3. Открыть файл и продолжить набор текста с символами.
4. Символы ω, Σ, Φ вставить с помощью команды *Вставка – Символ – Symbol.*
5. Вставка подстрочных индексов: *Формат – Шрифт– Подстрочный.*
6. Для выполнения расчетов открыть калькулятор *Пуск – Все программы – Стандартные – Калькулятор*.
7. Вычислить значение $E_н$ и поместить его в буфер памяти путем – *Правка – Копировать*, поместить калькулятор на панель задач. Вставить вычисленное значение в текст: *Правка – Вставить.*
8. Аналогичным образом выполнить оставшиеся вычисления, открывая калькулятор на панели задач.
9. Запустить приложение *Paint*, вычертить рисунок упрощенной схемы возбуждения таким образом, чтобы все однотипные элементы были одного размера, сделать надписи у элементов схемы.
10. Скопировать рисунок в буфер памяти, предварительно выделив его.
11. Вставить рисунок в свой файл: *Правка – Вставить*

Задание 2

Создайте документ «Основные электротехнические закономерности».

Наберите приведенный ниже текст и формулы.

Общее сопротивление цепи при параллельном соединении:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} \ .$$

Общая емкость конденсаторов при последовательном соединении:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}.$$

Закон Ома при переменном токе: $U = IZ,$

где Z — полное сопротивление, Ом.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2},$$

где $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, Ом; ω – угловая частота равная $\omega = 2\pi f$, где f – частота переменного тока, Гн, L– индуктивность, Гн, C– емкость, Гн.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Создание формул: *Вставка – Объект – Microsoft Equation 3.0* – панель инструментов.

2. ТЕКСТОВЫЙ РЕДАКТОР WORD

Общие принципы создания текстового документа

1. **Набор текста**.

Текст создается на основе шаблона. Обычно это шаблон Normal.dot, но может быть и другой шаблон. Набор текста осуществляется в точку вставки. Существуют два режима ввода текста.

ВСТАВКА – набранный текст раздвигается, и вновь набираемый символ помещается в точку вставки. Этот режим действует по умолчанию.

ЗАМЕНА – текст набирается поверх ранее набранного.

Переключение режимов ВСТАВКА/ЗАМЕНА – клавишей *Insert.*

Набор текста осуществляется абзацами. Только в конце абзаца нажимается клавиша *Enter*. Текст в абзаце переходит на другую строку в соответствии с параметром выравнивания абзаца.

2. **Проверка орфографии**, в том числе создание вспомогательных словарей.

Установить язык**:** *Сервис – Язык* – выбрать язык (по умолчанию настройка на русский).

Установить проверку орфографии**:** *Сервис – Параметры – вкладка Правописание – Автоматически проверять орфографию; Автоматически проверять грамматику. Установить соответствующие флажки.*

Создание вспомогательного словаря.

Если в набираемом тексте много специальных терминов (слов), они подчеркиваются красной линией (эти слова отсутствуют в словаре *Custom.dic*).

Создать новый словарь: *Сервис – Параметры – вкладка Правописание* **–** *Словари…* **–** *Создать* – введите имя словаря (например, geolog).

Добавить слова в словарь: **–** *Сервис – Параметры – вкладка Правописание* **–** *Словари…* – выберите имя словаря (например, geolog) – *Изменить* – введите слова в словарь.

3. **Вставка: объектов, полей, файлов, гиперссылок.**

Объекты – элементы документа, которые заключаются в прямоугольник, обрамленный маркерами, позволяющими изменять его размер: поля – элементы документа, принимающие вид – значение/код; файлы – внешние документы; гиперссылка – командная строка для загрузки, указанного в ней файла или сайта. Для вставки

объекта используется команда *Вставка – Объект* **–** указываете объект (др.).

4. **Редактирование** – это исправление ошибок, а также поиск неверного текста и замена его правильным и изменение структуры документа путем копирования, перемещения и удаления фрагментов текста.

Исправление ошибок: удаление символа – клавиши *Backspase* или *Delete*; отмена ошибочного ввода**:** *Правка – Отменить ввод;* найти ошибку и заменить: *Правка – Найти* – ввести ошибочный текст, *Правка – Заменить* – ввести правильный текст.

Изменение структуры документа: выделите фрагмент документа.

Копировать**:** *Правка – Копировать*, мышью показать куда, *Правка – Вставить*.

Переместить*: Правка – Вырезать*, мышью указать куда, *Правка – Вставить.*

Удалить**:** *Правка – Вырезать*

5. **Форматирование** – придание документу привлекательного вида. Команда меню *Формат* (*Шрифт, Абзац, Регистр, Список*, *Колонки, Границы и заливка, Буквица* и др.). При форматировании выделите фрагмент текста (или объект) либо перед набором текста установите нужные параметры форматирования.

Форматирование символа: Высота символа измеряется в пунктах. Пункт – 1/72 часть дюйма. Дюйм – 25 мм. Самая высокая буква равна 72 пунктам, т.е. 1 дюйму. Команда *Формат – Шрифт* – окно диалога *Шрифт* – вкладка *Шрифт.* Параметры – Начертание; Размер; Цвет; Интервал. Команда *Формат – Шрифт* – вкладка *Интервал.* Параметры – Масштаб, интервал, смещение. Команда *Формат – Шрифт* – вкладка *Анимация*.

Форматирование абзаца: абзац – фрагмент текста между двумя нажатиями на клавишу *Enter*. Команда *Формат – Абзац*. Параметры**:** *Отступ от поля; Отступ 1 строки; Выравнивание; Межстрочный интервал; Список и др.*

Обрамление: *Формат – Границы и заливка.* Параметры: тип границы; тип, цвет и ширину линий; стороны обрамления. Можно обрамить страницу, залить цветом фрагмент.

Форматирование объекта (рисунка; автофигуры; надписи; формулы и др.) *Формат – Объект*: вкладка *Цвета и линии* содержит параметры обрамления и заливки; вкладка *Размер* – установить

размеры; вкладка *Положение* – расположение объекта в тексте (обтекание объекта текстом); вкладка *Рисунок* – обрезать рисунок; вкладка *Надпись* – изменить внутренние поля надписи.

Форматирование раздела. Раздел – часть документа, ограниченная вставленными жесткими разрывами. Разделы могут быть по–разному отформатированы, например, иметь разные колонтитулы. Разрыв вставляется командой: *Вставка – Разрыв – новый раздел***.** Для каждого раздела можно установить свои колонтитулы. Колонтитулы размещаются в верхнем или нижнем поле страницы. Обычно содержат название раздела, параграфа. Создать колонтитул: *Вид – Колонтитул* – выберите из меню «Колонтитулы» верхний или нижний, введите текст, отформатируйте его, вставьте номер страницы.

Форматирование колонок. *Колонки* **–** это раздел текста с особым форматированием. Команда *Формат – Колонки***,** указать тип колонок, их количество и размер, если надо поставить разделитель.

Вид страницы: *Поля; Ориентация* и др. Команда *Файл – Параметры страницы***:** Вкладка *Поля – Размер полей; Переплет*; *Ориентация страницы*; Вкладка *Размер бумаги* и *Подача бумаги*; Вкладка *Источник бумаги – начать раздел, различать колонтитулы*.

Стиль форматирования – имеет имя и включает набор параметров форматирования, например стиль «Обычный». Стиль можно изменить, добавив или удалив параметры форматирования, или создать новый стиль на основе имеющегося, присвоив ему новое имя. *Формат – Стили и форматирование – Создать стиль.*

6. **Создание таблиц:** *Таблица – Вставить – Таблица* – Укажите число строк и столбцов. *Таблица – Нарисовать таблицу* – заполнить таблицу информацией.

Редактирование таблицы: *Таблица – Добавить – Строки – (Столбцы, Ячейки) – Удалить – Таблица – (Столбцы, Строки*, *Ячейки***) –** *Объединить ячейки – Разбить ячейки* – введите число строк, число столбцов.

Форматирование таблицы: *Таблица – Автоформат* – выберите один из предлагаемых форматов. *Автоподбор – Выровнять высоту строк; ширину столбцов; По содержимому; Фиксированная* ширина – *Свойства таблицы* – вкладка *Таблица* – Положение

таблицы на странице; Обтекание таблицы текстом; вкладка *Строка – Высота строки;* вкладка *Столбец – Ширина столбца.*

Работа с информацией внутри таблицы: *Сортировка; Преобразование в текст; Вычисления* – см. подробно в лабораторных работах 2.2 –2.4.

7. **Создание рисунков:** команда *Вставка – Объект – Рисунок MS Word.* Используя инструменты панели «Рисование» создайте рисунок. По завершению рисунка восстановите его границы и закройте. Созданный рисунок появится в документе в точке вставки.

8. **Создание оглавления:** *Вставка – Ссылка – Оглавления и указатели.*

9. **Просмотр и печать документа**: *Файл – Предварительный просмотр. Файл – Печать* – выберите параметры печати.

Приведенная последовательность создания текстового документа содержит команды основного меню, эти же команды могут быть выполнены с использованием кнопок Панелей инструментов.

Работа 2.1. Работа со списками. Объекты WordArt

Списки – это отформатированные (маркированные или нумерованные) абзацы.

ЗАДАНИЕ 1

1.Наберите в столбец приведенные фамилии, имена, отчества. Создайте копию. Отформатируйте одну копию в две колонки. Дополните первоначальный список новой информацией.
2. Создайте нумерованные и маркированные списки по приведенным образцам.

СПИСОК СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ГРУППЫ ОПИ:

1. Иванова Екатерина Петровна;
2. Степанов Петр Иванович;
3. Балабан Анна Станиславовна;
4. Котов Евгений Семенович;
5. Ломакин Герман Александрович;
6. Сильвестова Инна Леонидовна

.

ОЦЕНКИ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ГРУППЫ ОПИ
ПО МАТЕМАТИКЕ, ФИЗИКЕ И РУССКОМУ ЯЗЫКУ:

1. Иванова Екатерина Петровна:
   1.1. Контр. работа: Матем. 4; Физика 4; Рус. 4.
   1.2. Экзамен: Матем. 5; Физика 4; Рус. 5
2. Степанов Петр Иванович:
   2.1. Контр. работа: Матем.3; Физика 3; Рус.3.
   2.2. Экзамен: Матем. 4; Физика 4; Рус.4
3. Балабан Анна Станиславовна:
   3.1. Контр. работа: Матем. 4; Физика 4; Рус. 4.
   3.2. Экзамен: Матем. 4; Физика 4; Рус. 4.
4. Котов Евгений Семенович:
   4.1. Контр. работа: Матем. 3; Физика 3; Рус. 3.
   4.2. Экзамен: Матем. 5; Физика 4; Рус.4.
5. Ломакин Герман Александрович:
   5.1. Контр. работа: Матем. 5; Физика 5; Рус. 5.
   5.2. Экзамен: Матем. 5; Физика 5; Рус. 5.
6. Сильвестова Инна Леонидовна:
   6.1. Контр. работа: Матем. 5; Физика 5; Рус.4.
   6.2. Экзамен: Матем. 4; Физика 5; Рус .5.

ОЦЕНКИ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА ГРУППЫ ОПИ ПО ИНФОРМАТИКЕ:

- ❖ Иванова Екатерина Петровна
  - ➢ Курсовая 4
    - ▪ Контрольная 5
      - ▪ Экзамен 5
- ❖ Степанов Петр Иванович
  - ➢ Курсовая 4
    - ▪ Контрольная 3
      - ▪ Экзамен 5
- ❖ Балабан Анна Станиславовна
  - ➢ Курсовая 4
    - ▪ Контрольная 3
      - ▪ Экзамен 5
- ❖ Котов Евгений Семенович
  - ➢ Курсовая 4
    - ▪ Контрольная 5
      - ▪ Экзамен 5
- ❖ Ломакин Герман Александрович
  - ➢ Курсовая 4
    - ▪ Контрольная 3
      - ▪ Экзамен 5
- ❖ Сильвестова Инна Леонидовна
  - ➢ Курсовая 4
    - ▪ Контрольная 3
      - ▪ Экзамен 5

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для создания простого нумерованного или маркированного списка следует:

- ➢ Выделить текст, который будет оформлен в виде списка.
- ➢ Выбрать команду *Формат – Список* – вкладка *Нумерованный* (либо *Маркированный*) – выбрать тип списка, затем вид списка. Кроме того, возможно отредактировать или создать свой вид списка с использованием кнопки *Изменить*.
- ➢ После выбора вида списка применить его к выделенному тексту.
- ➢ Для создания многоуровневого списка следует текст, который будет оформлен в виде списка, предварительно подготовить:
  - ✓ Создать отступы текста для вложенных уровней. Для этого предназначены кнопки Уменьшить отступ и Увеличить отступ на панели инструментов «*Форматирование*», либо можно воспользоваться сочетанием клавиш *Shift* + *Alt* + ← или *Shift* + *Alt* + →, либо использовать маркеры отступов на горизонтальной линейке.
  - ✓ Выделить текст, который будет оформлен в виде многоуровнего списка.
  - ✓ Воспользоваться командой *Формат – Список* – вкладка *Многоуровневый*.

- ✓ Выбрать вид списка из предложенных.

➢ Для разделения текста на две колонки: выделить текст, команда *Формат – Колонки* – установить параметры: количество колонок и их размер.

ЗАДАНИЕ 2

Создайте различные текстовые эффекты, используя объект WordArt

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ



1. В меню *«Вставка»* вызовите подменю *«Объект»* и запустите приложение WordArt или воспользуйтесь кнопкой 

, расположенной на панели инструментов. Можно изменить текст и задать иную графическую форму.
2. Пользуйтесь коллекцией WordArt и 
Меню "Текст - Фигура".

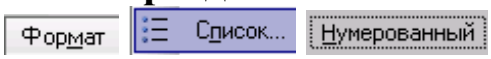


Работа 2.2 Форматирование: создание списков, колонок, буквицы. Преобразование текста в таблицу

ЗАДАНИЕ 1
Создайте новый документ, набрав следующий текст:

Урал – обширный и богатый регион России. От других горнопромышленных районов страны Урал отличается, во – первых, тем, что промышленное использование полезных ископаемых началось более 300 лет назад; во – вторых, не только богатством, но и исключительным разнообразием полезных ископаемых; в – третьих, в решающие моменты российской истории Урал играл роль «опорного края державы»; в – четвертых, центральная власть до 1917 года и особенно в советское время уделяла Уралу, развитию горного дела в крае самое пристальное внимание.

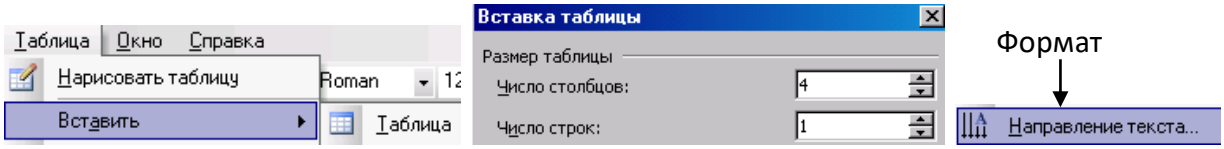
Для выполнения последующих заданий создавайте копии текста.

ЗАДАНИЕ 2
Текст разделить на абзацы. Пронумеровать абзацы текста. 

Урал – обширный и богатый регион России. От других горнопромышленных районов страны Урал отличается:
1. Промышленным использованием полезных ископаемых, которое началось более 300 лет назад.
2. Не только богатством, но и исключительным разнообразием полезных ископаемых.
3. В решающие моменты российской истории Урал играл роль «опорного края державы».
4. Центральная власть до 1917 года и особенно в советское время уделяла Уралу, развитию горного дела в крае самое пристальное внимание.

ЗАДАНИЕ 3

Преобразовать текст в таблицу с изменением направления текста в ячейках.



Урал – обширный и богатый регион России. От других горнопромышленных районов страны Урал отличается:

Промышленное использование полезных ископаемых началось более 300 лет назад.	Не только богатством, но и исключительным разнообразием полезных ископаемых.	В решающие моменты российской истории Урал играл роль «опорного края державы».	Центральная власть до 1917 года и особенно в советское время уделяла Уралу, развитию горного дела в крае самое пристальное внимание.

ЗАДАНИЕ 4

Разбить текст на две колонки с разделителем и промаркировать текст.

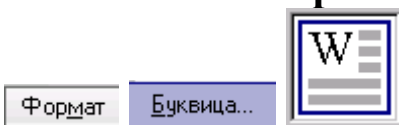


Урал – обширный и богатый регион России. От других горнопромышленных районов страны Урал отличается:

- Промышленным использованием полезных ископаемых, которое началось более 300 лет назад.
- Не только богатством, но и исключительным разнообразием полезных ископаемых.
- В решающие моменты российской истории Урал играл роль «опорного края державы».
- Центральная власть до 1917 года и особенно в советское время уделяла Уралу, развитию горного дела в крае самое пристальное внимание.

ЗАДАНИЕ 5

Разбить на четыре колонки и вставить буквицу.



Урал – обширный и богатый регион России. От других горнопромышленных районов страны Урал отличается:

Промышленным использованием полезных ископаемых, которое началось более 300 лет назад.

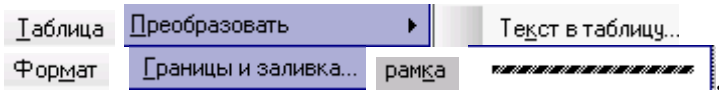
Не только богатством, но и исключительным разнообразием полезных ископаемых.

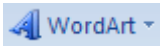
В решающие моменты российской истории Урал играл роль «опорного края державы».

Центральная власть до 1917 года и особенно в советское время уделяла Уралу, развитию горного дела в крае самое пристальное внимание.

ЗАДАНИЕ 6

Вставить текст в таблицу с одним столбцом, в рамке.



, ВСТАВКА – 

– для заголовка

Урал – обширный и богатый регион России.
От других горнопромышленных районов страны Урал отличается:

Промышленное использование полезных ископаемых началось более 300 лет назад.
Не только богатством, но и исключительным разнообразием полезных ископаемых.
В решающие моменты российской истории Урал играл роль «опорного края державы».
Центральная власть до 1917 года и особенно в советское время уделяла Уралу, развитию горного дела в крае самое пристальное внимание.

Работа 2.3. Создание и форматирование таблицы, вычисления в таблице с использованием функций

Текстовый процессор Word позволяет выполнять вычисления, записывая в отдельные ячейки таблицы формулы с помощью команды *Таблица – Формулы*.

Формула задаётся как выражение, в котором использованы:

- **абсолютные** ссылки на ячейки таблицы в виде списка, разделяемые точкой с запятой – A1; B5; E10 и т.д., или блока – начало и конец блока ячеек – A1:F1;
- **ключевые слова** для ссылки на блок ячеек:
  LEFT – ячейки, расположенные в строке левее ячейки с формулой;
  RIGHT– ячейки, расположенные в строке правее ячейки с формулой;
  ABOVE– ячейки, расположенные в столбце выше ячейки с формулой;
  BELOW– ячейки, расположенные в столбце ниже ячейки с формулой;
- **константы** – числа, текст в двойных кавычках;
- **встроенные функции** Word;
- **знаки операций** (+ , –, *, /, %, ^, =, <, <=, >=, < >,>)

Таблица 1

Виды встроенных функций

Категория	Функция	Назначение
Статистические	AVERAGE()	Вычисление среднего значения для диапазона ячеек, например: =AVERAGE(A1:C20)
	COUNT()	Подсчёт числа значений в указанном диапазоне ячеек, например: =COUNT(A1:C20; B25; A30)
	MAX()	Нахождение максимального значения в указанном блоке ячеек, например: =MAX(A1:C20; B25; A30)
	MIN()	Нахождение минимального значения в указанном блоке ячеек, например: =MIN (A1:C20; B25; A30)

Категория	Функция	Назначение
Статис-тические	SUM()	Нахождение суммы чисел в указанном блоке ячеек, например: =SUM (A1:C20; B25; A30)
Математические	ABS(x)	Абсолютное значение вычисляемого выражения, например: = ABS(A1*B12–C25+100)
	MOD(x, y)	Остаток от деления первого числа на второе, например: = MOD(A1,C12)
	INT(x)	Целая часть числа, например: = INT(234.45)
	PRODUCT()	Произведение чисел в указанном диапазоне ячеек, например: = PRODUCT(A1:C20; B25; A30)
	ROUND(x, y)	Округление значения до указанного числа знаков, например, округлить до сотен: = ROUND(2345.45.–2)
	SIGN(x)	Определение знака числа, например (–1 для отрицательных и 1 для положительных): = SIGN(–2345.45)
Логические	IF(x,y,z)	Проверка заданного условия и присвоение значения ячейке: если условие истинно – *значение 1*, иначе *значение 2:*= IF (E12>G12; *значение 1;значение 2)*
	AND(x,y)	Вычисляет значение 1, если заданы истинные значения логических аргументов, иначе – 0, например: = AND(A4>3; B3<3)
	OR(x,y)	Вычисляет значение 0, если заданы истинные значения любого логического аргумента, иначе – 1, например: = OR (A2>3; D3<=4)
	NOT(x)	Вычисляет значение 0, если задано истинное значение логического аргумента, иначе – 1, например: = NOT(D4>2)

Категория	Функция	Назначение

Логические	DEFINED(x)	Определяет значение в ячейке.
	FALSE	Логическая константа ***ложь***, которой соответствует число 0.
	TRUE	Логическая константа ***истина***, которой соответствует число 1.
	DEFINED(x)	Определяет значение в ячейке.

ЗАДАНИЯ

1. Создайте таблицу (табл. 2), вычислите средний и суммарный балл успеваемости.
2. Создайте две копии таблицы. Отсортируйте таблицы. Одну копию – по возрастанию значений столбца «Ф.И.О.». Вторую – по убыванию значений столбца «Суммарный балл успеваемости».

Таблица 2

Успеваемость студентов

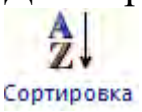
Ф. И. О.	Оценки по предметам			Суммарный балл успеваемости
Иванов. П. А.	4	5	3	12
Арбузов И. И.	4	5	5	14
Сидоров П. П.	5	5	5	15
Николаев А. А.	3	5	3	11
Федоров И. А.	3	4	5	12
Лазарева Л. В.	4	4	3	11
Средний балл успеваемости	3,83	4,67	4	12,5

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

1. Создать таблицу с помощью команды *Таблица – Вставить*, ввести данные, приведенные в таблице.
   - При добавлении строк (столбцов) и объединении (разбивке) ячеек использовать соответствующие команды меню *Таблица.*

- Для столбца «Суммарный балл» и «Средний балл успеваемости» произвести вычисления, воспользоваться командой *Таблица – Формула* (использовать таблицу 1).

2. Для сортировки используйте команду *Таблица – Сортировка*



или значок «Сортировка» на панели инструментов, предварительно поставив курсор в любую ячейку таблицы со значением.

Работа 2.4. Вычисления в таблицах

ЗАДАНИЕ 1

Создайте таблицу сложной структуры (табл.1) используя команды объединения и разбивки ячеек, вычислите значения столбцов «Всего», «Итого» и строк «Итого», «Средний», «Максимальный», «Минимальный» объем продаж.

Таблица 1

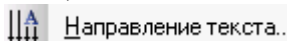
Объем продаж на внутреннем и внешнем рынках, тыс.руб.

№ П/П	НАИМЕНОВАНИЕ ТОВАРА	ВНУТРЕННИЙ РЫНОК			ВНЕШНИЙ РЫНОК			ИТОГО
		I пол.	II пол.	Всего	I пол.	II пол.	Всего	
1.	Печь СВЧ	150	200	350	300	300	600	950
2.	Телевизор	850	1020	1870	-	-	-	1870
3.	Пылесос	1350	1400	2750	720	850	1570	4320
4.	Кофемолка	345	344	689	769	32	801	1490
5.	Миксер	2345	463	2808	34	456	490	3298
Итого		5040	3427	8467	1823	1638	3461	11928
Средний				1693,4			692,2	2385,6
Максимальный				2808			1570	4320
Минимальный				350			490	950

ЗАДАНИЕ 2

Создайте таблицу 2, итоговые показатели вычислите по формулам.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для создания таблицы 1 и 2 с помощью команды *Таблица – Вставить* введите необходимые данные.
2. При добавлении строк (столбцов) и объединении (разбивке) ячеек использовать соответствующие команды меню *Таблица*.
3. Для выбора направления текста нажать ПКМ 

и выбрать соответствующее направление.

4. Для вычисления воспользоваться командой *Таблица – Формула*

Таблица 2

Успеваемость студентов инженерно–экономического факультета УГГУ

СВЕДЕНИЯ ОБ УСПЕВАЕМОСТИ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО–ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА УГГУ																	
№ п.п.	Группа	Учебная дисциплина	Средний балл	Всего сдавало	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно	Неявки	Учебная дисциплина	Средний балл	Всего сдавало	Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно	Неявки
		I семестр								**II семестр**							
1	3	Прикладное программное обеспе-	3.8	32	12	10	6	3	1	Прикладное программное обеспе-	4.4	32	12	10	6	3	1
2	2		3.5	27	7	9	6	3	2		3.4	20	6		5	2	0
3	1		3.4	28	9	8	3	5	3		3.9	23	9	8	3	5	5
4	4		3.5	29	8	8	8	3	2		3.5	29	8	4	6		4
	Итого			116	36	35	23	14	8	Итого		104	35	12	20	10	10

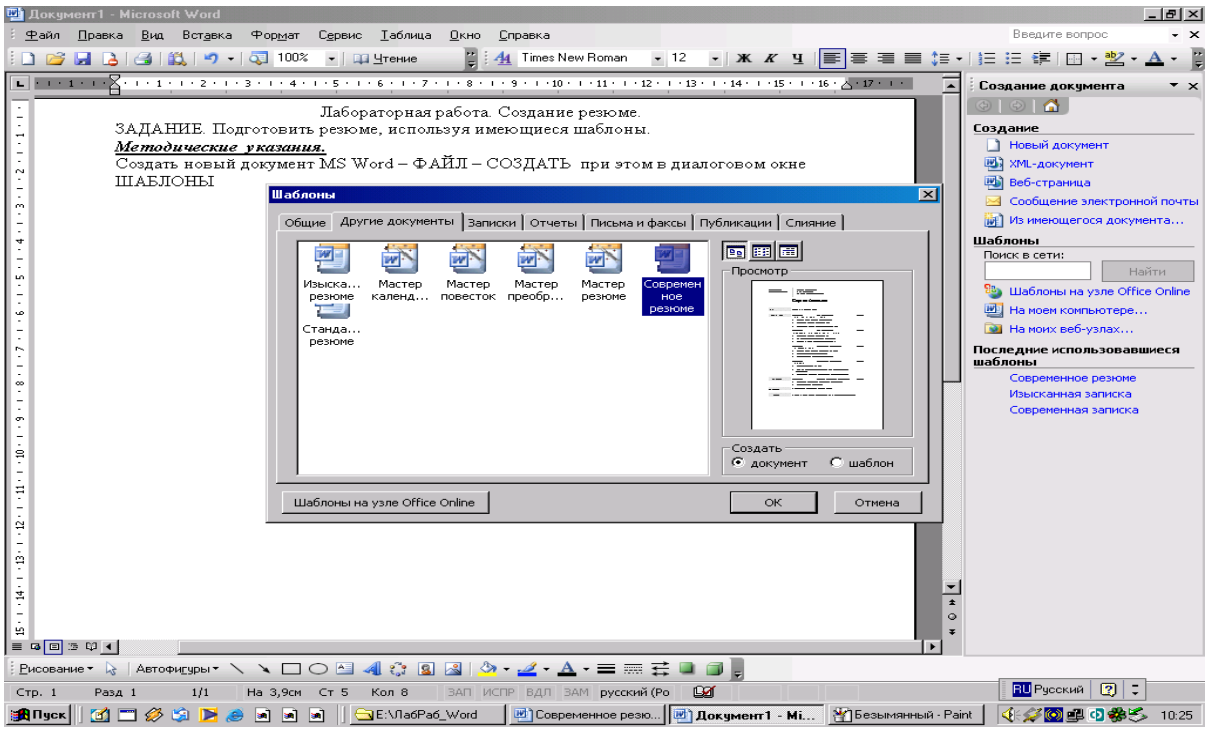
Работа 2.5. Создание резюме по шаблону

ЗАДАНИЕ

Подготовить резюме, используя специальный шаблон.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

Создать новый документ *MS Word – Файл – Создать*. Выбрать в *Области Задач* шаблоны на моем компьютере. В диалоговом окне *Шаблоны* открыть вкладку *Другие документы* – выбрать шаблон, например *Стандартное резюме*.



Введите в поля шаблона требуемую информацию о себе
Ниже приведен пример резюме.

Екатеринбург, ул. Строителей, д. 20, кв. 45
тел. 8 915 275–17–22, ivano@mail.ru

Алексей Сергеевич Иванов

Цель	Участие в конкурсе на получение стипендии академика Ферсмана
Краткая характеристика претендента	2002–2005 Уральский государственный горный университет г. Екатеринбург **Студент инженерно экономического факультета** • Первое место на Республиканской олимпиаде по программированию среди студентов ВУЗов(2008). • Первое место на Республиканской олимпиаде по математике среди студентов ВУЗов(2007). • Публикации трех научных статей в реферируемых журналах. • Выступление на пяти Международных математических конференциях 2001 Золотая медаль Москва • Международная олимпиада по математике. • Губернаторская стипендия лучшему студенту. 2000 Серебряная медаль Пекин • Международная олимпиада по математике. • Студент года.
Образование	1991–2002 Школа – лицей № 13 Екатеринбург • Школа – лицей окончена с золотой медалью. • Класс с углубленным изучением математики и информатики.
Увлечения	• Компьютеры, путешествия, чтение.

Работа 2.6 Создание отчета о проделанных лабораторных работах

Результат выполнения каждой лабораторной работы должен быть сохранен в файле с именем, отражающем номер лабораторной работы.

Текст файла по каждой лабораторной работе должен содержать: номер работы, название работы, задания, краткие методические указания и результат выполнения.

Отчет по оформлению должен быть близок к данным методическим указаниям.

ЗАДАНИЕ

1. Объединить последовательно файлы всех работ в один файл с именем «Отчет …(далее фамилии студентов)».
2. Вставить колонтитулы для каждой работы, содержащие номер работы, номер страницы.
3. В начало отчета вставить титульный лист и оглавление.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. **Объединение файлов**: открыть файл с 1–й лабораторной работой, поставить курсор в конец файла, выполнить команду *Вставка – Файл* **–** открыть папку с файлами по лабораторным работам, выбрать файл по 2–й работе – Вставить. Повторить эти действия, вставив все файлы. Выполнить команду *Файл – Сохранить как* **–** указать Вашу папку и новое имя объединенного файла « Отчет (Фамилии студентов)».
2. *Вставка колонтитулов***:** поставьте курсор в конец работы; вставьте разрыв: *Вставка – Разрыв – Новый раздел со следующей страницы;* перейдите на начало работы, скопируйте её название; выполните команду *Вид – Колонтитулы***;** вставьте название работы в область колонтитула и номера страниц; отожмите кнопку меню колонтитулов «Как в предыдущем»; закройте колонтитул. Повторите все действия для каждой работы.
3. **Вставка оглавления.** Убедитесь, что названия всех лабораторных работ имеют одинаковый стиль форматирования, например, «Заголовок 1». Поставьте курсор в начало документа и вы-

полните команду *Вставка – Ссылка – Оглавления и указатели,* выберите вид оглавления.

4. Наберите титульный лист.

Пример титульного листа.

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО « Уральский государственный горный университет»

Кафедра информатики

ОТЧЕТ

по лабораторным работам

по дисциплине « Прикладное программное обеспечение»

Выполнил: Иванов И.И.

Группа: ПРМ–16–1

Проверил: Тимухина В.В.

Екатеринбург – 2016

ТАБЛИЧНЫЙ ПРОЦЕССОР Excel

Общие принципы создания и оформления расчетной таблицы.

Создание расчетной таблицы

Основой таблицы Excel является ячейка. Адрес ячейки определяется именем столбца и номером строки, на пересечении которых находится ячейка, например, A1, B15. Интервал ячеек определяется адресом левой верхней ячейки и правой нижней B2:D4.

Таблица создается на рабочем листе. Контекстное меню ярлыка рабочего листа содержит команды работы с рабочим листом. Рабочие листы можно добавлять, копировать, перемещать, переименовывать, удалять. Удаленный лист восстановить нельзя.

1**.** Ввод данных в ячейки таблицы.

Два вида данных: константы и формулы.

Константы: числовые, текстовые, даты/время, логические, значения ошибок.

Ввод данных: выберите ячейку, введите информацию, нажмите Enter. Старое значение в ячейке сотрется, вводимая информация отражается в строке формул. Курсор (по умолчанию) переместится вниз.

ПРИ ВВОДЕ ЧИСЕЛ. Вид вводимого числа зависит от формата ячейки: обычный, числовой, дробный, процентный, денежный, экспоненциальный (по умолчанию – обычный). Число прижимается к правой стороне ячейки.

ПРИ ВВОДЕ ТЕКСТА. Если вводимый длинный текст не помещается в ячейке, то он перекрывает другие ячейки, но принадлежит той ячейке, в которую вводится. Для размещения текста в ячейке можно изменить ширину ячейки или набрать текст в ячейке в несколько строк *Формат – Ячейки*–вкладка *Выравнивание – переносить по словам.*

2. Автозаполнение ячеек.

Используется команда *Правка – Заполнить***.** Автозаполнением можно заполнить ряды дат, времени, прогрессия: арифметическая (например, номер по порядку) или геометрическая.

3. *Ввод формул.*

Формула вводится одновременно в строку формул и в ячейку. Формула начинается с символа = (равно), и может содержать константы, адреса ячеек, знаки арифметических действий и функции. Константы и знаки арифметических действий вводятся с клавиату-

ры, адреса ячеек указываются щелчком мыши, функции вводятся с использованием *Мастера функций*.
Функции – ранее определённые формулы, они имеют такой синтаксис: *Имя_Функции* (аргументы). Имя выбирается из списка функций, аргументами могут быть адреса ячеек, константы, либо выражения. Аргумент может отсутствовать, но скобки обязательны.
4**. Выделение фрагментов таблицы.**
Выделение строк – провести указателем мыши, при нажатой левой клавиши, по номерам соответствующих строк.
Выделение столбцов – провести указателем мыши по именам столбцов.
Выделение интервала ячеек – провести указателем мыши от верхнего левого угла интервала до правого нижнего угла.
5**. Редактирование: вырезать, копировать, вставить, удалить, удалить лист и т.д.**
Команды редактирования применимы к ячейке, интервалу ячеек или к рабочему листу. Для выполнения этих команд необходимо выделить фрагмент (интервал) ячеек и из меню *Правка* выбрать соответствующую команду.
6. **Добавление (удаление) строк, столбцов, ячеек.**
Добавление: команда *Вставка – Строки (Столбцы, Ячейки).*
Удаление: Выделить нужный интервал *Правка – Удалить.*
При добавлении и удалении ячеек таблица может деформироваться.
7. **Форматирование чисел, текста, шрифта, обрамление и заливка ячеек цветом.**
Используется команда *Формат – Ячейки* и соответствующая вкладка. Для форматирования чисел – вкладка *Число.* Например, для задания нужного количества знаков после запятой: команда *Формат– Ячейки* **–**вкладка *Число* **–** формат *Числовой* **–** число знаков после запятой. Для ввода текста в ячейку в несколько строк: *Формат – Ячейки* **–** вкладка *Выравнивание – переносить по словам.*
8. **Построение графиков и диаграмм.**
Выделить столбцы данных с названиями. Обратиться к *Мастеру диаграмм*, шаг 1 –выбрать *тип диаграммы*, шаг 2 – исходные данные уже выделены до вызова *мастера,* шаг 3– указать *параметры диаграммы*, шаг 4 – указать *место размещения диаграммы*: на рабочем листе или на отдельном листе.
9. **Работа с таблицей как с базой данных: сортировка, фильтрация, форма ввода данных, промежуточные итоги.**

Эти действия выполняются командами меню *Данные.* Для работы с этими командами необходимо:

1. «Шапка» таблицы должна находиться в одной строке.
2. Таблица должна быть отделена от строки названия и строки итогов пустой строкой.
3. Слева и справа от таблицы не должно быть никаких данных.
4. Курсор поставить в любую ячейку таблицы.

- Сортировка – перестановка строк таблицы по возрастанию или убыванию значений выбранного столбца.

Команда *Данные – Сортировка* – выбрать столбец – вид сортировки (по убыванию или по возрастанию).

- Фильтрация – выборка строк таблицы, удовлетворяющих условию.

Команда *Данные – Фильтр – Автофильтр* – задать условие.

- Добавление исходных данных:

Команда *Данные – Форма* – введите данные в поля формы.

- Промежуточные итоги можно получить на предварительно отсортированной таблице по тому параметру, по которому нужно подвести итоги.

Команда *Данные – Итоги* – указать имя столбца, по которому была проведена сортировка, выбрать операцию и отметить столбцы, по которым подводить итоги.

10. **Таблицы подстановки.**

Позволяет использовать формулу, введенную в одну ячейку, рассчитать данные целой таблицы. Существуют таблицы с одной (для функций с одной переменной) или двумя ячейками подстановки (для функций с двумя переменными). Таблицу нужно подготовить определенным образом. С одной ячейкой подстановки:

1. Ввести исходные данные в столбец (или строку);
2. Ввести формулу, которая будет содержать ссылку на ячейку подстановки над столбцом, где будет результат.
3. Затем выделить интервал ячеек, включающий исходные данные, ячейку с формулой и будущий результат и выполнить команду *Сервис – Таблица подстановок* – сослаться на адрес ячейки ввода.

11. **Сводные таблицы.**

Позволяют из большой таблицы сделать выборки. Используется *Мастер Сводных таблиц*. Команда: *Данные – Сводная таблица.* Указать источник данных, место расположения сводной таблицы, указать поля и данные, по которым нужно получить сводку.

12. **Специальные инструменты: подбор параметра, поиск решения.**

Позволяют найти оптимальное (наилучшее) решение. При подборе изменяется один параметр. Команда – *Сервис – Подбор параметра* – указать ячейку с искомым параметром и изменяющуюся ячейку. При поиске решения можно изменять много параметров. Для чего необходимо записать математическую постановку задачи, определив целевую функцию и ограничения, подготовить таблицу и выполнить команду *Сервис – Поиск решения* – задать все параметры. Если *Поиска решения* нет в меню, его нужно подключить *Сервис – Надстройки – Поиск решения.*

Работа 3.1. Основные приемы работы: ввод данных и формул, форматирование таблицы, построение графиков

ЗАДАНИЕ 1

Создать таблицу под названием «Анализ показателей производства» и построить графики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

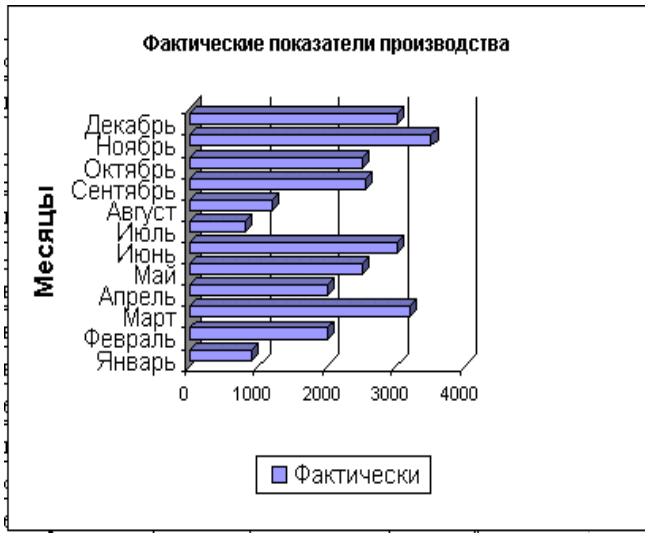
	A	B	C	D
1	**Анализ показателей производства**			
2	Показатели производства			
3	Пок. / месяцам	План	Фактически	%
4	Январь	**1000**	**900**	90%
5	Февраль	**2000**	**2000**	100%
6	Март	**3000**	**3200**	107%
7	Апрель	**1500**	**2000**	133%
8	Май	**3000**	**2500**	83%
9	Июнь	**2000**	**3000**	150%
10	Июль	**1000**	**800**	80%
11	Август	**1500**	**1200**	80%
12	Сентябрь	**2000**	**2550**	128%
13	Октябрь	**2000**	**2500**	125%
14	Ноябрь	**3000**	**3500**	117%
15	Декабрь	**4000**	**3000**	75%
16	Квартал I	6000	6100	
17	Квартал II	6500	7500	
18	Квартал III	4500	4550	
19	Квартал IV	9000	9000	

Поместите курсор в ячейку А1 и наберите «Анализ показателей производства», нажмите Enter, затем в ячейке А2 – «Показатели производства».

- Далее, перемещая курсор, заполните ячейки данными.
- Название месяца введите автозаполнением: в ячейке А4 наберите слово «Январь», установите курсор в правый нижний угол ячейки А4 на маркер заполнения, нажмите ЛКМ и протащите до ячейки А15.
- Для того чтобы вычислить проценты необходимо фактические показатели производства разделить на плановые. Формула начинается со знака = и мышкой указываются адреса ячеек.
- Для вычисления квартального показателя используем *Автосуммирование* Σ или функцию *=СУММ( )*. Не забудьте, что в квартал входит три месяца.
- Для построения диаграммы 1 выделите ячейки А3:А15, затем, нажав кнопку Ctrl, выделите ячейки С3:С15, вставка - нажмите значок *диаграмма – Линейчатая с группировкой.* На вкладке *Работа с диаграммой – макет – название диаграммы,* введите названия. Для построения диаграммы 2 выделите интервал ячеек

A16:B19, выберите вставка - *гистограмма с группировкой*, на вкладке *Работа с диаграммой – макет – Таблица данных - Дополнительные параметры таблицы данных.*

- Обрамите таблицу, используя команду *Формат – Ячейки – Граница.*



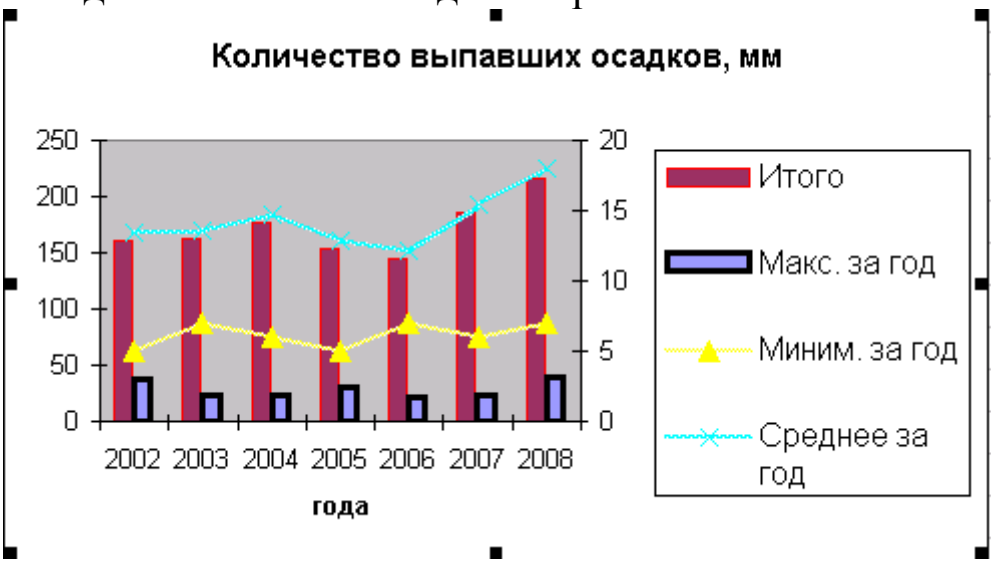


ЗАДАНИЕ 2

1. **Составьте электронную таблицу, вычисляющую количество выпавших осадков.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Количество выпавших осадков, мм									
2		2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	Макс. кол. за месяц	Мин. кол. за месяц
3	Январь	25	17	23	25	17	23	35		
4	Февраль	37	12	13	20	21	23	40		
5	Март	8	16	6	7	9	20	16		
6	Апрель	10	7	11	12	8	16	7		
7	Май	12	8	16	5	9	9	8		
8	Июнь	7	9	20	8	16	12	9		
9	Июль	6	11	23	7	9	20	11		
10	Август	8	16	12	8	16	6	16		
11	Сентябрь	13	13	9	14	12	13	13		
12	Октябрь	5	9	9	7	9	20	10		
13	Ноябрь	10	24	12	10	7	11	24		
14	Декабрь	20	21	23	31	12	13	27		
15	Итого									
16	Макс. за год									
17	Миним. за год									
18	Среднее за год									

2. **Постройте гистограмму** «Количество выпавших осадков». Вставка - *гистограмма с группировкой*, в которой по годам отражено «Итого», «Макс. за год», «Миним. за год», «Среднее за год». «Среднее за год» и «Миним. За год» построить.



Работа 3.2. Мастер функций

Задание 1

Рассчитать комиссионную ставку для торговых агентов. Она зависит от объема продаж. Если объем продаж свыше 100 тыс.руб., то комиссионная ставка равна 6%, если не превышает 100 тыс.руб., то комиссионная ставка равна 5%.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

	A	B	C
1	***Комиссионные торговых агентов***		
2			
3	**Торговые агенты**	**Продажи за месяц**	**Комиссионные**
4	Романцев	130 658,00	
5	Бабий	41 209,00	
6	Сидоров	965 840,00	
7	Левченко	56 023,00	
8	Молчанов	69 845,00	
9	Колесников	185 926,00	
10	Арутюнянц	116 523,00	
11	Кудрявцева	33 565,00	
12	Лившиц	69 954,00	

Для решения данной задачи нужно воспользоваться функцией *Если.*

Синтаксис любой функции имеет имя и аргументы – *Имя функции* **(***аргументы***)**.

Все функции объединены в категории. Функция ЕСЛИ относится к категории логические и имеет следующий синтаксис: *Если.* (*проверяемое условие; величина, возвращаемая в случае, если данное условие выполняется;*

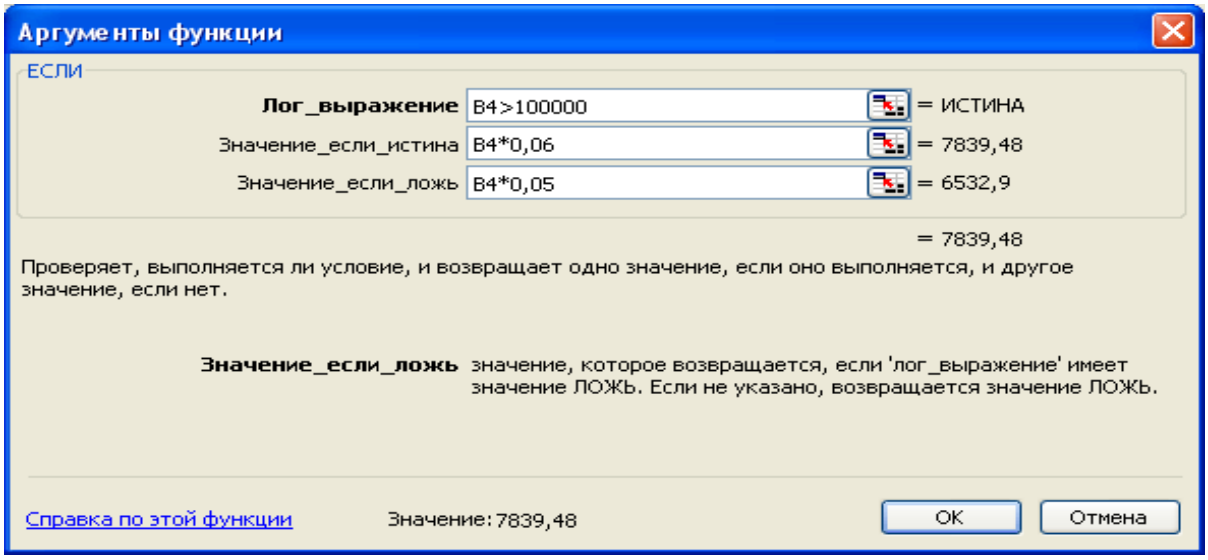
величина, возвращаемая при невыполнении данного условия).

Для работы с функциями используют *Мастер функций* . Он состоит из двух шагов: выбор *Имени функции* и задание *аргументов.*

Выделите ячейку, в которой вы собираетесь разместить результат выполнения функции *ЕСЛИ,* например С4.

1. Щелкните на кнопке *Мастер функций* из списка «Категория» выберите *«Логические»,* в следующем окне выберите функцию *ЕСЛИ.*

2. В диалоговом окне «Аргументы функции» в поле *Лог_выражение* введите проверяемое условие, например B4>100000, считая, что объем продаж содержится в ячейке B4.



3. В поле *Значение_если_истина* введите величину, которая будет возвращена, если окажется, что заданное условие выполняется. Например, если нужно задать 6 % комиссионных для тех, у кого объем продаж превышает 100 тыс.руб., в это поле нужно ввести B4*0,06.

4. В поле *Значение_если_ложь* введите величину, которая будет возвращена, если окажется, что заданное условие не выполняется. Например, если нужно задать 5 % комиссионных для тех, у кого объем продаж не превышает 100 тыс.руб., в это поле нужно ввести B4*0,05. Щелкните кнопку ОК. Excel внесет функцию в рабочую таблицу и будет помещать результаты ее выполнения в выделенную ячейку. (Примечание: Если оставить пустым поле *Значение_если_ложь*, то при невыполнении заданного условия Excel возвратит не число, а слово «Ложь».)

5. Вид функции в ячейке C4 приведен в строке формул: *=ЕСЛИ(B4>100000;B4*0,06;B4*0,05)*. Чтобы рассчитать комиссионные для всех других работников скопируйте данную формулу одним из известных методов. Например, протащив маркер заполнения с ячейки C4 до ячейки C12.

C4 | fx | =ЕСЛИ(B4>100000;B4*0,06;B4*0,05

	A	B	C	D
1	*Комиссионные торговых агентов*			
2				
3	**Торговые агенты**	**Продажи за месяц**	**Комиссионные**	
4	Романцев	130 658,00	7 839,48	
5	Бабий	41 209,00	2 060,45	
6	Сидоров	965 840,00	57 950,40	
7	Левченко	56 023,00	2 801,15	
8	Молчанов	69 845,00	3 492,25	
9	Колесников	185 926,00	11 155,56	
10	Арутюнянц	116 523,00	6 991,38	
11	Кудрявцева	33 565,00	1 678,25	
12	Лившиц	69 954,00	3 497,70	

ЗАДАНИЕ 2

Скопируйте рассчитанную таблицу и рассчитайте новые комиссионные ставки для торговых агентов.

Если объем продаж выше 130 тыс.руб. – задать 10 % комиссионных, для тех, у кого объем продаж превышает 100 тыс.руб., но меньше 130 тыс.руб. – 5 % комиссионных, для тех, у кого объем продаж не превышает 100 тыс.руб. – 3 % комиссионных.

Работа 3.3. Автозаполнение, абсолютные и относительные ссылки.

ЗАДАНИЕ

Создать электронную таблицу учета платы за квартиру согласно образцу.

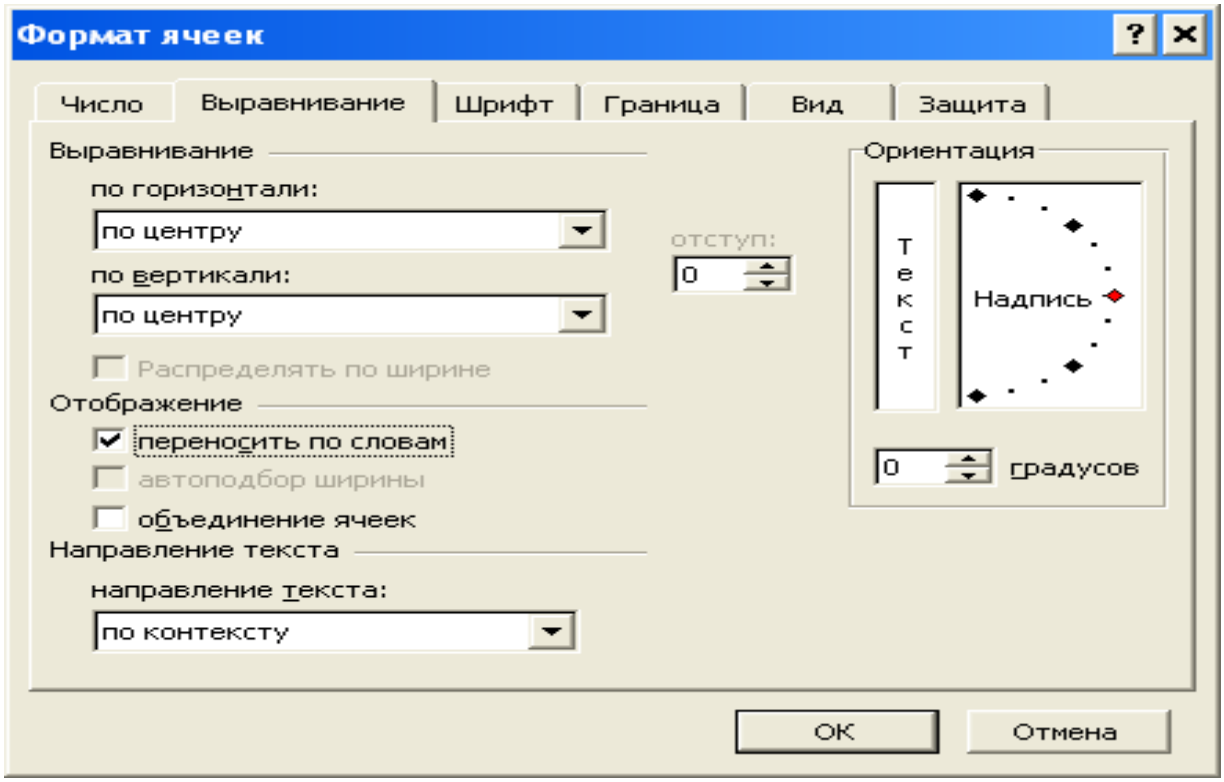
1. Все заголовки столбцов должны быть выровнены по центру, как по горизонтали, так и по вертикали, при определении формата ячейки, примите опцию переноса слов. Отформатируйте таблицу по образцу.
2. Столбец «№ квартиры» – автозаполнение с 10 (шаг 1). Форомат: курсив, по центру.
3. Столбец «Фамилия квартиросъемщика» формат: по левому краю.
4. Столбец «Площадь» – автозаполнение с 70 (шаг – 0,5), формат: курсив, по центру
5. Столбец «Сумма»: для каждой квартиры умножается значение из графы «Площадь» (с относительным адресом) на значение из ячейки «Тариф» (с абсолютным адресом).
6. Столбец «Дата оплаты» – автозаполнение с 10 марта (шаг 1), каждая последующая квартира произвела оплату на день позже предыдущей.
7. Столбец «Просрочка»: если оплата была произведена до срока оплаты включительно, то автоматически ставиться 0 (нуль); если позже срока, то должно подсчитываться количество дней просрочки («Дата оплаты» относительный адрес – «Срок оплаты» абсолютный адрес). Формат: курсив, по центру.
8. Столбец «Штраф»: для каждой квартиры умножается значение из графы «Пени за 1 день» (абсолютный адрес) на значение из графы «Просрочка». Формат « денежный», целый.
9. Столбец «Итого»: суммируется значение из граф «Сумма» и «Штраф», формат «денежный», целый.
10. В конце ведомости подсчитать: среднюю площадь, минимальную сумму, максимальную просрочку, максимальный штраф, итого, используя соответствующие функции.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Квартплата							
2	Тариф за 1 кв. м:		5р.					
3	Срок оплаты:		10 мар					
4	Пени за 1 день :		1,5р.					
5	№ квартиры	Фамилия квартирос.	Площадь кв. м	Сумма	Дата оплаты	Прос-рочка	Штраф	Итого
6	10	Ивашкина	70	350р.	10 мар	0	0р.	350р.
7	11	Баранова	69,5	348р.	11 мар	1	2р.	349р.
8	12	Корнилова	69	345р.	12 мар	2	3р.	348р.
9	13	Воробьев	68,5	343р.	13 мар	3	5р.	347р.
10	14	Скоркин	68	340р.	14 мар	4	6р.	346р.
11	15	Новиков	67,5	338р.	15 мар	5	8р.	345р.
12	16	Зубков	67	335р.	16 мар	6	9р.	344р.
13	17	Сырников	66,5	333р.	17 мар	7	11р.	343р.
14	18	Миронов	66	330р.	18 мар	8	12р.	342р.
15	19	Рублева	65,5	328р.	19 мар	9	14р.	341р.
16	20	Лобанова	65	325р.	20 мар	10	15р.	340р.
17		Средняя площадь	67,5					
18		Минимальная сумма		325р.				
19		Максимальная просрочка				10		
20		Максимальный штраф					15р.	
21		Итого						3 795р.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для форматирования столбцов использовать правую клавишу мыши (ПКМ): *Формат ячеек* – вкладка *Выравнивание*.
2. Автозаполнение ячеек: *Правка – Заполнить – Прогрессия– Арифметическая (ряды даты*), либо введите значение в первую и вторую ячейки, выделите их и протяните ЛКМ, зацепив маркер заполнения, либо введите значение в первую ячейку (для дат) и протяните маркер.
3. При вычислениях используйте в ссылках (адреса ячеек) относительные и абсолютные адреса. Относительный адрес при копировании формул изменяется: при копировании по столбцу в адресах ячеек изменяется номер строки; при копировании по строке в адресах ячеек изменяется имя столбца. *Абсолютные адреса при копировании не изменяются!* Абсолютный адрес устанавливают клавишей F4, например, для «Штрафа» = $C$4*F6.

Относительный адрес – C4, абсолютный адрес – $C$4, смешанные адреса – $C4 и C$4.



4. Для вычисления формул используйте *Мастер функций*. Для поля «Просрочки» используется функция *ЕСЛИ*. Синтаксис и правило использования функции см. в лабораторной работе 3.2. Например, = *ЕСЛИ(E6 <= $C$3;0;E6 – $C$3).*
5. Для вычисления параметров: «Средняя площадь», «Минимальная сумма», «Максимальная просрочка», «Максимальный штраф», «Итого» используйте функции: *(СРЗНАЧ(аргументы), СУММ(аргументы), МИН(аргументы), МАКС(аргументы).* Ввод функций в формулы осуществляйте *Мастером функций*.

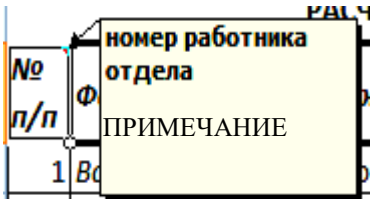
Работа 3.4. Создание примечаний, числовое форматирование

ЗАДАНИЕ

Сформировать на рабочем листе ведомость «Расчет заработной платы работников научно–проектного отдела «Альфа».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	РАСЧЕТ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ РАБОТНИКОВ НАУЧНО-ПРОЕКТНОГО ОТДЕЛА "АЛЬФА"										
3	*п/п*	*Фамилия И. О.*	*Должность*	*Тарифная ставка*	*Стаж*	*k*	*Надбавка за стаж*	*Итого*	*Процент налога*	*Удержать*	*Выплата*
4	1	*Вольская А. Д.*	лаборант	5 670,00							
5	2	*Ермакова Л. П.*	инженер	8 000,00							
6	3	*Заяц В. Д.*	мл. н. сотрудник	7 700,00	11						
7	4	*Иванова А. С.*	лаборант	5 500,00							
8	5	*Игнатович В. П.*	ст. н. сотрудник	9 700,00	6						
9	6	*Котов В. А.*	инженер	8 000,00							
10	7	*Михайлова Н. п.*	инженер	8 000,00	8						
11	8	*Мороз В. И.*	ст. н. сотрудник	9 700,00							
12	9	*Никонова Е. И.*	мл. н. сотрудник	7 700,00							
13	10	*Петрашевич Г. С.*	зав.лаборатории	12 200,00	16						
14	11	*Петров В. М.*	лаборант	5 670,00							
15	12	*Сергейчик П. П.*	мл. н. сотрудник	7 700,00	11						
16	13	*Степаненко А. В.*	ст. н. сотрудник	9 700,00							
17	14	*Уланович А. С.*	лаборант	5 500,00	7						
18	15	*Уткие П. И.*	ст. н. сотрудник	9 700,00	6						
19	*Всего к выдаче:*										

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ



1. В ячейку А2 поместить название ведомости
2. В ячейки А3:К3 ввести названия полей ведомости: *№ п/п…Выплата.*
3. К шапке ведомости – к каждому столбцу – создать скрытые примечания.

Примечания создаются командой *Вставка – Примечание* (также можно использовать панель инструментов *Рецензтрование,* которая добавляется командой *Вид – Панели Инструментов – Рецензирование).*

Тексты Примечаний по столбцам:

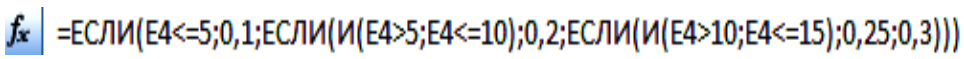
№ п/п – номер работника отдела;

Фамилия И. О. – заносятся все фамилии работающих в научно–проектном отделе;

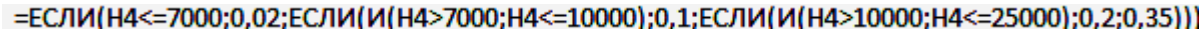
Должность – занимаемая должность на момент заполнения ведомости;
Тарифная ставка – денежный эквивалент занимаемой должности;
Стаж – вносится целое число отработанных лет на момент заполнения ведомости;
k – коэффициент за стаж работы;
Надбавка за стаж – денежный эквивалент за стаж работы;
Итого – начисление заработной платы с учетом тарифной ставки и стажа работы;
Процент налога – определяет процент отчислений в бюджет;
Удержать – денежный эквивалент отчислений в бюджет;
Выплата – сумма, предназначенная к выдаче.

4. При расчетах в ведомости учитывать следующее:

Коэффициент *k* присваивается из следующего расчета: 0,1 – отработано до 5 лет включительно, 0,2 – от 5 до 10 лет включительно, 0,25 – от 10 до 15 лет включительно, 0,3 – свыше 15 лет. Формула для ячейки F4:



Надбавка за стаж – произведение *тарифной ставки* на *k*,
G4 =D4*F4
Формат числа для ячейки G4: *Формат – Ячейки* –вкладка *Число*, из списка *Числовые форматы* выбрать *Все форматы* и в поле *Тип* ввести формат # ##0,00р.
Итого – сумма *Тарифной ставки* и *Надбавки за стаж* *(H4=D4 + G4).* Формат числа аналогичен предыдущему.
Процент налога – учитывает, что : 2 % – начисление (по *Итого*) составляет до 7000 р. включительно, 10 % – более 7000 р. до 10000 р. включительно, 20 % – более 10000 р. до 25000 р. включительно, 35 % – превышающие 25000 р. Пример формулы для I4:



Формат числа (I4) – *Процентный.*
Удержать – произведение *Итого* на *Процент налога.* Формат пользовательский, аналогичный ячейкам столбцов D, G,H**:** # ##0,00р.
Выплата – разность между *Итого* и *Удержать.*

5. Подсчитайте *Всего к выдаче,* используя *Автосуммирование.*
6. Объедините ячейки в соответствии с образцом *Формат – Ячейки* – вкладка *Выравнивание – Объединить ячейки.*
7. Обрамите таблицу *Формат – Ячейки* – вкладка *Граница.*

8. Отформатируйте текстовую информацию по образцу *Формат – Ячейки* – вкладка *Шрифт*.

Результат решения задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	РАСЧЕТ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ РАБОТНИКОВ НАУЧНО-ПРОЕКТНОГО ОТДЕЛА "АЛЬФА"										
3	№ п/п	Фамилия И. О.	Должность	Тарифная ставка	Стаж	k	Надбавка за стаж	Итого	Процент налога	Удержать	Выплата
4	1	Вольская А. Д.	лаборант	5 670,00р.		0,1	567,00р.	6 237,00р.	2%	124,74р.	6 112,26р.
5	2	Ермакова Л. П.	инженер	8 000,00р.		0,1	800,00р.	8 800,00р.	10%	880,00р.	7 920,00р.
6	3	Заяц В. Д.	мл. н. сотрудник	7 700,00р.	11	0,25	1 925,00р.	9 625,00р.	10%	962,50р.	8 662,50р.
7	4	Иванова А. С.	лаборант	5 500,00р.		0,1	550,00р.	6 050,00р.	2%	121,00р.	5 929,00р.
8	5	Игнатович В. П.	ст. н. сотрудник	9 700,00р.	6	0,2	1 940,00р.	11 640,00р.	20%	2 328,00р.	9 312,00р.
9	6	Котов В. А.	инженер	8 000,00р.		0,1	800,00р.	8 800,00р.	10%	880,00р.	7 920,00р.
10	7	Михайлова Н. п.	инженер	8 000,00р.	8	0,2	1 600,00р.	9 600,00р.	10%	960,00р.	8 640,00р.
11	8	Мороз В. И.	ст. н. сотрудник	9 700,00р.		0,1	970,00р.	10 670,00р.	20%	2 134,00р.	8 536,00р.
12	9	Никонова Е. И.	мл. н. сотрудник	7 700,00р.		0,1	770,00р.	8 470,00р.	10%	847,00р.	7 623,00р.
13	10	Петрашевич Г. С.	зав.лаборатории	12 200,00р.	16	0,3	3 660,00р.	15 860,00р.	20%	3 172,00р.	12 688,00р.
14	11	Петров В. М.	лаборант	5 670,00р.		0,1	567,00р.	6 237,00р.	2%	124,74р.	6 112,26р.
15	12	Сергейчик П. П.	мл. н. сотрудник	7 700,00р.	11	0,25	1 925,00р.	9 625,00р.	10%	962,50р.	8 662,50р.
16	13	Степаненко А. В.	ст. н. сотрудник	9 700,00р.		0,1	970,00р.	10 670,00р.	20%	2 134,00р.	8 536,00р.
17	14	Уланович А. С.	лаборант	5 500,00р.	7	0,2	1 100,00р.	6 600,00р.	2%	132,00р.	6 468,00р.
18	15	Уткие П. И.	ст. н. сотрудник	9 700,00р.	6	0,2	1 940,00р.	11 640,00р.	20%	2 328,00р.	9 312,00р.
19	Всего к выдаче:							140524,00р.		18 090,48р.	122 433,52р.

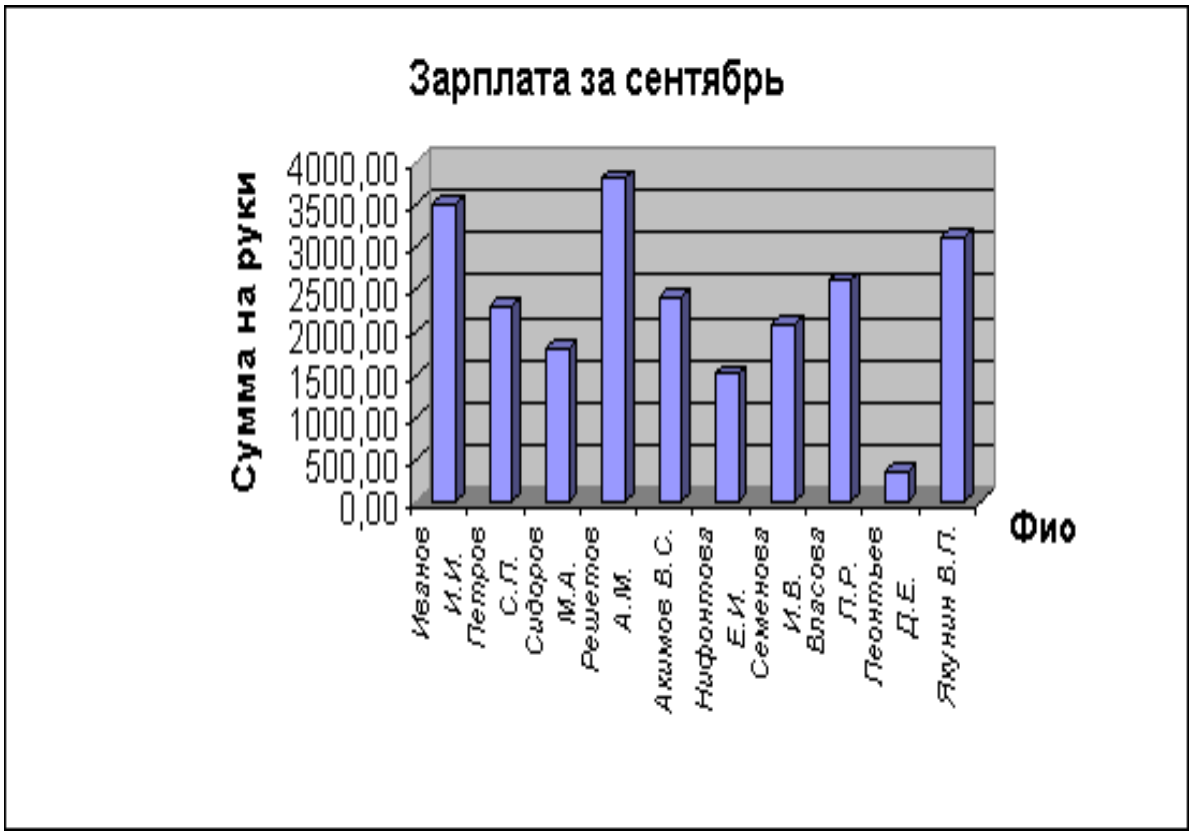
Работа 3.5. Вычисления с использованием функций, форматирование графиков

ЗАДАНИЕ

1. Дайте название рабочему листу «Зарплата».
2. Создайте таблицу, заполнив шапку и значения столбцов приведенными в таблице данными: «№ », «Фамилия И.О.», «Оклад», «Дети».
3. Вычислите по формулам значения в первых ячейках столбцов: «Уральский коэффициент», «З/плата с уральским коэф.», «С начала года», «Налоги», «Сумма на руки».
4. Скопируйте полученные формулы в остальные ячейки соответствующих столбцов.
5. Вычислите итоговые значения и скопируйте их в соседние ячейки этих строк.
6. Отформатируйте таблицу в соответствии с приведенным видом.
7. Постройте столбиковую диаграмму рассчитанной «Зарплаты за сентябрь».

	A	B	C	D	E	F		H	I
1	Сентябрь 2006 г.								
2	№	Фамилия И.О.	Оклад	Уральский коэф.	З/плата с урал. коэф.	С начала года	Дети	Налоги	Сумма на руки
3	1	Иванов И.И.	3500	525,00	4025,00	36225,00	2	523,25	3501,75
4	2	Петров С.П.	2300	345,00	2645,00	23805,00	2	343,85	2301,15
5	3	СидоровМ.А.	1800	270,00	2070,00	18630,00	1	269,10	1800,90
6	4	РешетовА.М.	3800	570,00	4370,00	39330,00	1	568,10	3801,90
7	5	Акимов В.С.	2400	360,00	2760,00	24840,00	2	358,80	2401,20
8	6	Нифонтова Е.И.	1500	225,00	1725,00	15525,00	0	224,25	1500,75
9	7	Семенова И.В.	2100	315,00	2415,00	21735,00	1	313,95	2101,05
10	8	Власова Л.Р.	2600	390,00	2990,00	26910,00	2	388,70	2601,30
11	9	Леонтьев Д.Е.	320	48,00	368,00	3312,00	0	0,00	368,00
12	10	Якунин В.П.	3100	465,00	3565,00	32085,00	2	463,45	3101,55
13		Всего	23420	3513,00	26933,00	242397,00	13	3453,45	23479,55
14		Среднее	2342	351,30	2693,30	24239,70	1	345,35	2347,96
15		Max	3800	570,00	4370,00	39330,00	2	568,10	3801,90
16		Min	320	48,00	368,00	3312,00	0	0,00	368,00

Налоговый вычет	400



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Ввод формул**.** Формула начинается со знака =. Адреса ячеек со значениями, участвующими в вычислениях, указываются щелчком мыши. Для выбора функций используется команда *Вставка – Функции* или *Мастер функций* f_x.
2. Формулы для вычислений:
   - «Уральский коэф.» составляет 15 % от оклада. «Уральский коэф.»=0,15* «Оклад».
   - «З/плата с уральским коэф.» = «Оклад» + «Уральский коэф.».
   - Начисления заработной платы накопительным итогом за девять месяцев с начала года. «С начала года» = З/плата с урал. коэф.* кол. месяцев. В данном примере количество месяцев равно 9.
   - «Налоги». *Если* «З/плата с уральским коэф.» *меньше, чем* налоговый вычет, в нашем случае это 400 рублей, то *налог будет равен 0. Если* начисления «С начала года», *меньше или равны 15000руб., то налог равен* – («З/плата с уральским коэф.» – «Налоговый вычет» – *300** «Дети»*)*0,13; в противном случае* «З/плата с уральским коэф.» **0,13.*

Адрес ячейки D18 – «Налоговые вычеты» необходимо задать в виде абсолютной ссылки – $D$18, которая задается функциональной клавишей F4.

- «Сумма на руки» = «З/плата с уральским коэф.» – «Налоги».
- Вычисления формул итоговых строк*: Мастер функций – Категории – Статистические* – найдите нужную функцию *(СУММ( ), СРЗНАЧ( ), MAX( ), MIN( )).* Введите диапазон ячеек с данными для вычисления значений функций.
- Скопируйте формулы в соответствующие строки.

3. Построение графика по данным, расположенным не в соседних столбцах: выделить диапазон ячеек, данные которых будут располагаться по оси *X* (столбец «Фамилия И.О.»), нажать клавишу.*Ctrl* и не отпуская ее, выделить диапазон ячеек, данные которых будут располагаться на оси *Y* **(**столбец «Сумма на руки»). Далее обычные действия: Вызвать *Мастер построения диаграмм,* выбрать *Тип диаграммы* и ее вид. Ввести *Параметры диаграммы***,** задать *Размещение диаграммы.*
4. Отформатировать график (изменение его оформления)**.** Выделить нужный фрагмент графика, вызвать контекстное меню (КМ), выбрать *Формат* – изменить значения параметров: шрифт, вид и толщину линий, вид стрелок и т.д.

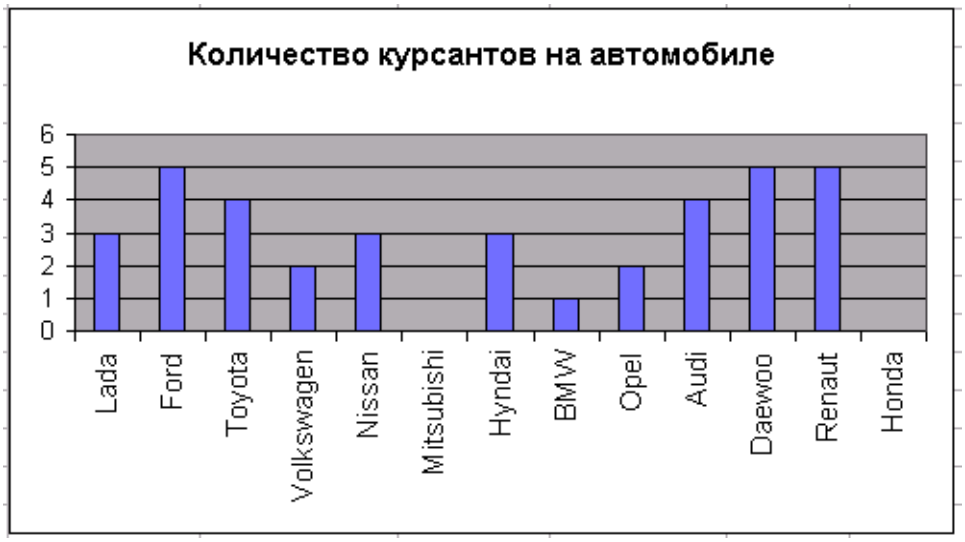
Работа 3.6. Использование сложных функций
ВАРИАНТ 1

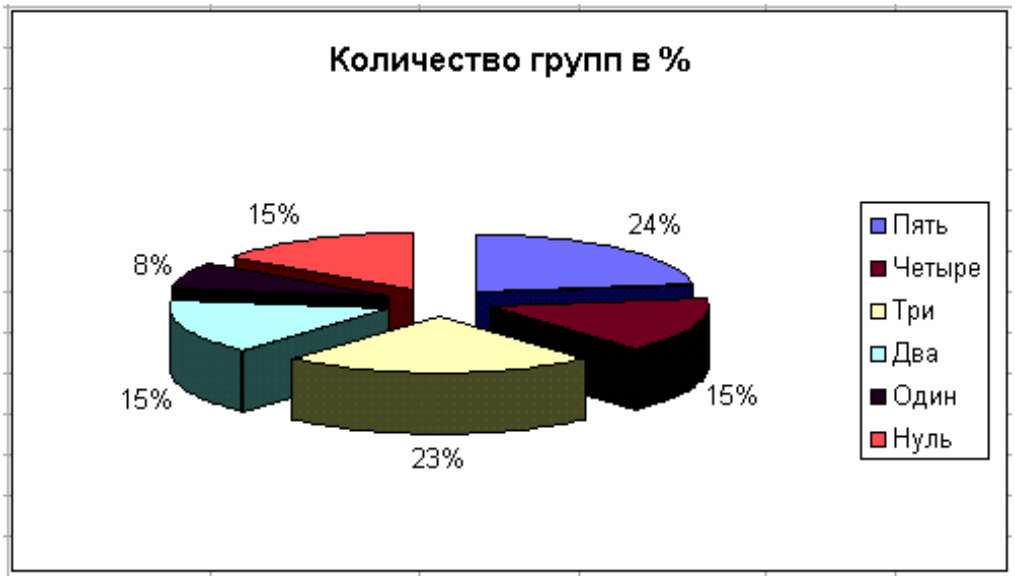
ЗАДАНИЕ

1. Введите название рабочего листа – «Автошкола «Автолайн».
2. Наберите «шапку» ведомости, заполните значение столбцов: «№» – автозаполнением; «Фамилия инструктора» – 13 – ю фамилиями, «Число курсантов» разбить на два столбца, в столбце «Цифрой» ввести числовое значение с клавиатуры.
3. В первую ячейку столбца «Прописью» введите формулу, используя, *Мастер формул*. Если число цифрой равно 0, то прописью «Нуль», если – 1, то «Один», если – 2, то прописью «Два», если – 3, то прописью «Три», если – 4, то «Четыре», если – 5, то «Пять».
4. Скопируйте формулу во все ячейки столбца.
5. В отдельной таблице подсчитайте количество оценок.
6. По результатам этой таблицы постройте две диаграммы – *Гистограмму* со значениями и *Круговую* (в процентном формате).

	A	B	C	D	E
1	Автошкола "АвтоЛайн"				
2	№	Фамилия инструктора	Автомобили	Число курсантов	
3				Цифрой	Прописью
4	1	Абакумов	Lada	3	Три
5	2	Воронцов	Ford	5	Пять
6	3	Дроздов	Toyota	4	Четыре
7	4	Зубкова	Volkswagen	2	Два
8	5	Колосов	Nissan	3	Три
9	6	Ладыгин	Mitsubishi	0	Нуль
10	7	Михайлов	Hyndai	3	Три
11	8	Никонов	BMW	1	Один
12	9	Плотников	Opel	2	Два
13	10	Важенина	Audi	4	Четыре
14	11	Дозморова	Daewoo	5	Пять
15	12	Иванова	Renaut	5	Пять
16	13	Сараева	Honda	0	Нуль

	A	B	C
18		Численность курсантов в группе	Количество групп
19		Пять	3
20		Четыре	2
21		Три	3
22		Два	2
23		Один	1
24		Нуль	2
25		Итого	13





МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Ввод формулы с использованием функции *ЕСЛИ*. *Мастер функций* – функция *ЕСЛИ***.** Синтаксис функции: *ЕСЛИ (Условие; Действие «истина»; Действие «ложь»)*

В приведенном ниже примере формула анализирует содержимое ячейки D4 – цифровое число курсантов для инструктора Абакумова.

=ЕСЛИ(D4=5;"Пять";ЕСЛИ(D4=4;"Четыре";ЕСЛИ(D4=3;"Три";ЕСЛИ(D4=2;"Два";ЕСЛИ(D4=1;"Один";ЕСЛИ(D4=0;"Нуль";"Ошибка ввода")))))).

2. Для подсчета количества групп используется функция *СЧЁТЕСЛИ:*

СЧЁТЕСЛИ (Диапазон ячеек, в которых ведется подсчет; Условие). Например, для «Пять» формула = *СЧЁТЕСЛИ (D4:D16;"=5").*



3. Круговая диаграмма строится для столбца «Количество групп», выбирается соответствующий вид диаграммы. Надписи задаются в окне «Параметры диаграммы» на вкладке «Подписи данных».

ВАРИАНТ 2

ЗАДАНИЕ

1. Измените название рабочего листа – «Экзаменационная ведомость».
2. Наберите «шапку» ведомости, заполните значение столбцов: «№» – автозаполнением; «Фамилия И. О.» – любыми 10 – ю фамилиями», «№ зачетной книжки» и числовое значение оценки введите с клавиатуры.
3. В первую ячейку столбца «Прописью» введите формулу, используя, *мастер формул*. Если числовая оценка равна 2, то прописью «Неудовлетворительно», если – 3, «Удовлетворительно», если – 4, то «Хорошо», если – 5, то «Отлично», если – «н/я», то «Неявка»
4. Скопируйте формулу во все ячейки столбца.
5. В отдельной табличке подсчитайте количество оценок.
6. По результатам этой таблицы постройте кольцевую диаграмму.

	A	B	C	D	E	F
1	Экзаменационная ведомость					
2						
3	Группа_____ Дисциплина_____					
4						
5				Оценка		
6	№	Фамилия И. О.	№ зачетной	Число	Прописью	Роспись
7	1	Иванов И. И.	275	3	Удовлетворительно	
8	2	Петров П. П.	265	5	Отлично	
9	3	Сидоров С. С.	232	н/я	Неявка	
10	4	Решетников Р. Р.	214	4	Хорошо	
11	5	Абрамов А. А.	193	5	Отлично	
12	6	Кац В. Ш.	171	н/я	Неявка	
13	7	Бильбао К. Ф.	150	2	Неудовлетворительно	
14	8	Нифонтов К. Р.	128	5	Отлично	
15	9	Русинов Р. Д.	107	4	Хорошо	
16	10	Якушин Я. Т.	85	3	Удовлетворительно	
17						
18		"Отлично"	3			
19		"Хорошо"	2			
20		"Удовлетворительно"	2			
21		"Неудовлетворительно"	1			
22		"Неявка"	2			
23		Итого	10			



Методические указания аналогичны варианту 1.

Работа 3.7. Команды сортировки и фильтрации

ЗАДАНИЕ

1. Наберите в MS Excel таблицу с выделенными значениями (кроме значений в колонках «% жилого фонда» и «Стоимость 1 кв. м.), оформите и отформатируйте по указанному образцу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Квартирное агенство "МЕЧТА"								
2	№	Кол-во комнат	Район	Теле-фон	Общий метраж	Жилой метраж	Стоимость квар-тиры, тыс. руб	% жилого фонда	Стоимость 1 кв. м., тыс. руб
3	1	3	Ленинский	Есть	58,3	38,5	286	66,0	4,91
4	2	3	Чкаловский	Нет	48	40,6	89	84,6	1,85
5	3	2	Кировский	Есть	43	32	115	74,4	2,67
6	4	1	Октябрьский	Есть	35	25	75	71,4	2,14
7	5	1	Юго-Западный	Есть	32	21	126	65,6	3,94
8	6	1	Юго-Западный	Есть	26	16	64	61,5	2,46
9	7	1	Юго-Западный	Нет	50	32	95	64,0	1,90
10	8	2	Октябрьский	Нет	46	40	185	87,0	4,02
11	9	2	Кировский	Нет	62	45	246	72,6	3,97
12	10	2	Чкаловский	Нет	48	35	94	72,9	1,96
13	11	3	Чкаловский	Нет	96	75	192	78,1	2,00
14	12	2	Ленинский	Нет	29	21	126	72,4	4,34
15	13	3	Ленинский	Нет	56	49	164	87,5	2,93
16	14	3	Ленинский	Нет	108,5	80	580	73,7	5,35
17	15	4	Кировский	Есть	96	71	396	74,0	4,13
18	16	2	Кировский	Есть	48,2	40	180	83,0	3,73
19	17	2	Ленинский	Есть	38	32	195	84,2	5,13
20	18	1	Чкаловский	Есть	26	16	48	61,5	1,85
21	19	1	Октябрьский	Нет	28	18	85	64,3	3,04
22	20	1	Юго-Западный	Есть	36	22,3	45	61,9	1,25
23	21	2	Юго-Западный	Есть	51	40	97	78,4	1,90
24	22	2	Кировский	Нет	65	42	115	64,6	1,77
25	23	3	Кировский	Нет	86	50	200	58,1	2,33
26	24	3	Кировский	Нет	84,3	58	215	68,8	2,55
27	25	2	Ленинский	Есть	68,6	36	325	52,5	4,74
28	Итого				1364,9	975,4	4338		
29	Средние показатели				54,60	39,02	173,52	71,33	3,07

2. Вычислите «% жилого фонда» и «Стоимость 1 кв. м.».
3. Определите Итоговые и Средние показатели.
4. **Примените Автофильтр** и выполните следующие действия:
   - выделите все однокомнатные квартиры и перенесите их на лист 2;

- выделите все двухкомнатные квартиры и перенесите их на лист 3;
- выделите все трехкомнатные квартиры и перенесите их на лист 4;
- выделите все четырехкомнатные квартиры и перенесите их на лист 5;

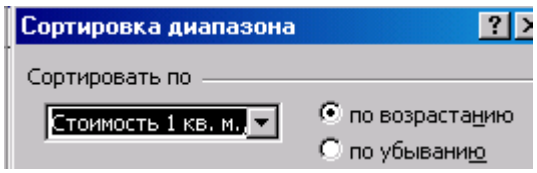
5. Переименуйте указанные в п.4 рабочие листы следующим образом: «1–комнатные», «2–комнатные» и т. д.
6. На листах 2 – 5 вычислите показатели, указанные в п.3.
7. **Отсортируйте**: 1–комнатные квартиры – по возрастанию стоимости 1 кв. м.; 2–комнатные квартиры – по возрастанию стоимости квартиры; 3–комнатные квартиры – по убыванию жилого метража.
8. На листе 1 отфильтруйте квартиры с жилым метражом более 30 м и стоимостью 1 кв. м менее 2 тыс.руб., результат скопируйте на лист 6.
9. На листе 1 найдите: самую дорогую квартиру; самую большую по общему метражу; имеющую самую низкую стоимость; с самым высоким процентом жилого фонда.
10. Найденные квартиры скопируйте на лист 7.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для определения итоговых и средних показателей воспользуйтесь функциями *СУММ(аргумент)* и *СРЗНАЧ(аргумент).*

При фильтрации и сортировке данных в таблице поставьте курсор в любую ячейку таблицы и выполните соответствующую команду.

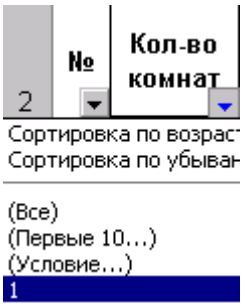
2. Сортировка выполняется командой *Данные – Сортировка*. Выберите столбец, по которому осуществляется сортировка и параметр



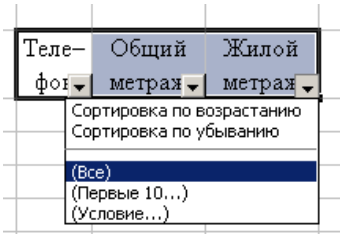
№	Кол-во комнат	Стоимость 1 кв. м., тыс. руб
20	1	1,25
18	1	1,85
7	1	1,90
4	1	2,14
6	1	2,46
19	1	3,04
5	1	3,94

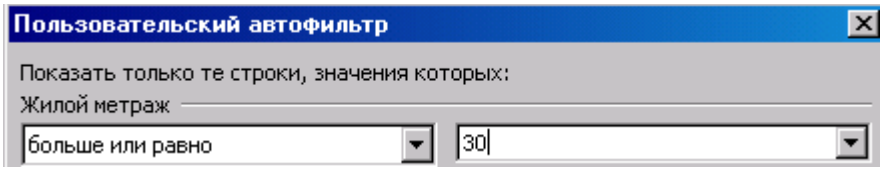
3. Фильтрация осуществляется командой *Данные – Фильтр – Автофильтр*. Выберите параметр фильтрации или задайте *Условие.*

1	Квартирное агенство "МЕЧТА"								
2	№	Кол-во комнат	Район	Теле-фон	Общий метраж	Жилой метраж	Стоимость квар-тиры, тыс. руб	% жилого фонда	Стоимость 1 кв. м., тыс. руб
6	4	1	Октябрьский	Есть	35	25	75	71,4	2,14
7	5	1	Юго-Западный	Есть	32	21	126	65,6	3,94
8	6	1	Юго-Западный	Есть	26	16	64	61,5	2,46
9	7	1	Юго-Западный	Нет	50	32	95	64,0	1,90
20	18	1	Чкаловский	Есть	26	16	48	61,5	1,85
21	19	1	Октябрьский	Нет	28	18	85	64,3	3,04
22	20	1	Юго-Западный	Есть	36	22,3	45	61,9	1,25



Задание условия фильтрации





Работа 3.8. Подбор параметра на примере решения уравнения

ЗАДАНИЕ

Решите уравнение своего варианта, используя команду *«Подбор параметра».*

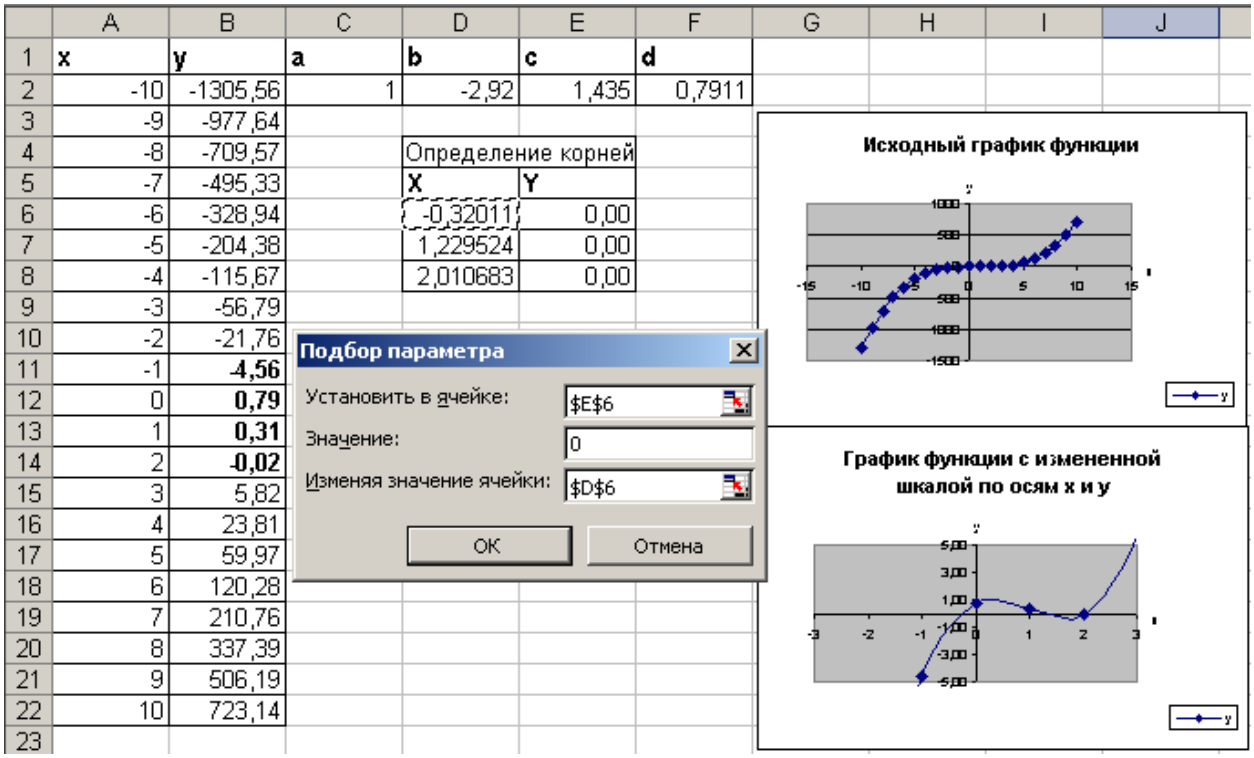
Решить уравнение, значит найти значение аргумента (*X*), при котором функция (*Y)* принимает значение равное нулю, т. е пересекает ось *X.*

№ вари–анта	Уравнение	№ вари–анта	Уравнение
1	X^3–2,92x^2+1,435x+0,7911=0	6	X^3–0,12x^2+1,4775x+0,191 =0
2	X^3–2,56 x^2+1,325 x+4,395 =0	7	X^3–0,77x^2+0,251x+0,016=0
3	X^3–2,84x^2+5,6064x+14,766=0	8	X^3–0,88x^2+0,399x+0,03 =0
4	X^3–1,41x^2+5,472x+7,380=0	9	X^3–0,78x^2+0,826x+0,1467=0
5	X^3–0,85x^2+0,4317x+0,0439=0	10	X^3–2,28x^2+1,9347x+3,907=0

Пример решения уравнения: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ при $a = 1; b = – 2,92; c = 1,435; d = 0,7911$ на интервале изменения X [–10;10] с шагом изменения X равном 1.

1. Создайте таблицу изменения *X* в заданном интервале и вычислите *Y* по заданной формуле (=$C$2*A2^3+$D$2*A2^2+$E$2*A2+$F$2) . Коэффициенты *a, b, c, d* заданы абсолютным адресом.

2. Выделите интервал ячеек A1:B22 и постройте график функции (тип графика «Точечный»). Назовите его «Исходный график функции». Скопируйте график при нажатой клавише *Ctrl* и потяните его мышью. Переформатируйте копию графика, изменив диапазон для *X* [–3, 3] и *Y* [–5, 5]. Это позволит увидеть точки пересечения функции с осью аргумента.



	x	y	a	b	c	d
2	-10	-1305,56	1	-2,92	1,435	0,7911
3	-9	-977,64				
4	-8	-709,57		Определение корней		
5	-7	-495,33		X	Y	
6	-6	-328,94		-0,32011	0,00	
7	-5	-204,38		1,229524	0,00	
8	-4	-115,67		2,010683	0,00	
9	-3	-56,79				
10	-2	-21,76				
11	-1	**-4,56**				
12	0	**0,79**				
13	1	**0,31**				
14	2	**-0,02**				
15	3	5,82				
16	4	23,81				
17	5	59,97				
18	6	120,28				
19	7	210,76				
20	8	337,39				
21	9	506,19				
22	10	723,14				
23						

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Найти интервалы, на которых существуют корни уравнения. Это интервалы изменения аргумента, на концах которых функция изменяет знак. Для наглядности определения интервалов нужно построить график функции. Для этого создайте таблицу, в которой выполните следующие действия.

- Протабулируйте аргумент: введите значения аргумента в некотором диапазоне, например, от –1 до 1 или от –10 до 10 с малым шагом изменения (ячейки A2:A22).
- Протабулируйте функцию. Вычислите значения функции для всех значений аргумента (ячейки B2:B22).
- Постройте график.
- Визуально определите интервалы аргумента, в которых функция меняет знак. На каждом из этих интервалов имеется свой корень.
- Если по первоначальному графику трудно определить точки пересечения графика с осью *X*, то график необходимо переформатировать. Команды выбирайте в контекстном меню соответствующего объекта. Указатель мыши поместите на ось графика, вызовите *КМ Формат оси* – вкладка *Шкала* установите для оси *X* максимум 3, минимум –3, для *Y* максимум 5, минимум –5. На графике

посмотрите точки пересечения функции с осью *X*. Это будут корни уравнения.

- Для определения точных корней выделите ячейки, например D6:D8, в них поместите примерные значения корней (взятые с графика или из таблицы). В диапазон ячеек E6:E8 поместите формулы для вычисления функций (скопируйте из соответствующих ячеек таблицы, принадлежащих этим же строкам).
- Выполните команду *Сервис – Подбор параметра – Установить в ячейке* E6 (введите ссылку на ячейку, содержащую функцию) – *Значение* 0 – *Изменяя значение ячейки* D6 (введите ссылку на ячейку, содержащую аргумент). Повторите эти действия. В ячейках E6:E8 установятся значения функции 0, в ячейках D6:D8 значения корней.

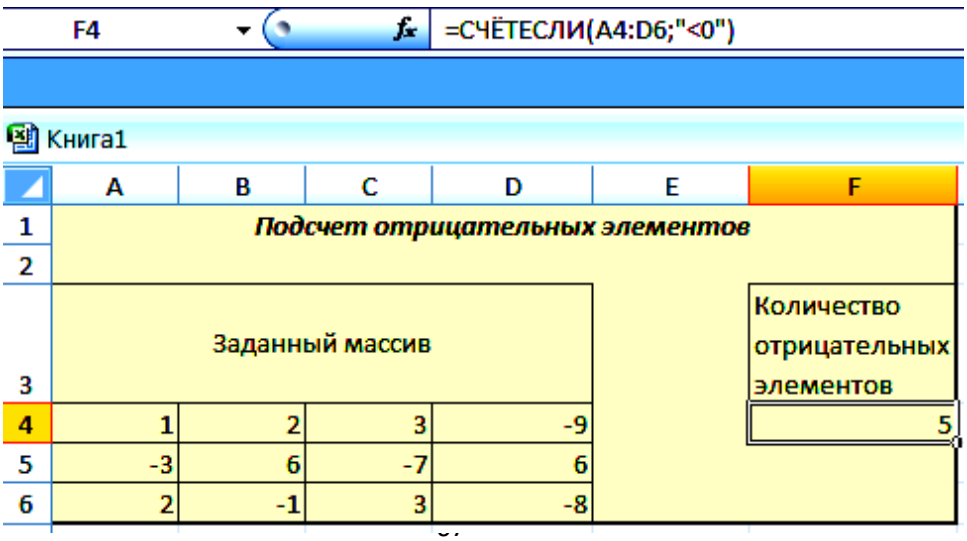
Работа 3.9. Работа с массивами и матрицами

При работе с матрицами используются специальные формулы: МУМНОЖ(аргументы) – умножение матриц; МОБР(аргументы) – вычисление обратной матрицы; МОПРЕД(аргументы) – вычисляется определитель матрицы; ТРАСП(аргументы) –транспонирование матрицы.

Для получения численных результатов с использованием данных функций следует: выделить диапазон ячеек для вывода результата, ввести формулу в строку формул и нажать одновременно клавиши *<Ctrl>+<Shift>+<Enter>*.

ЗАДАНИЕ 1

Подсчитать в заданном двумерном массиве количество отрицательных элементов.



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Заполните ячейки A4:D6 необходимыми значениями.
2. В ячейку F4 введите формулу; =СЧЁТЕСЛИ(A4:D6;"<0")

ЗАДАНИЕ 2

Решить систему линейных уравнений $A^2X = B$, где значения соответствующих матрицы и вектора–столбца имеют вид:

$A = \begin{bmatrix} 23 & 7 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Алгебраический вид системы: $\begin{matrix} a_{11}^2 \cdot x_1 + a_{12}^2 \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}^2 \cdot x_1 + a_{22}^2 \cdot x_2 = b_2 \end{matrix}$.

	A	B	C	D	E	F
7						
8	***Решение системы линейных уравнений***					
9						
10	Матрица А			Свободный столбец		Вектор решений
11	23	7		3		-0,44
12	11	4		2		1,426666667

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Можно перемножить только те матрицы, у которых количество строк матрицы 2 равняется количеству столбцов матрицы 1. Для решения системы уравнений нужно вычислить обратную матрицу коэффициентов А и умножить на столбец свободных элементов.
В ячейку F11 введите формулу, используя мастер функций:

=МУМНОЖ(МОБР(МУМНОЖ(A11:B12;A11:B12));D11:D12)

ЗАДАНИЕ 3

Решить систему уравнений $A\ X = B$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 12 & -4 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Запишите систему в алгебраическом виде.

ЗАДАНИЕ 4

Заданы четыре матрицы A, B, C и D одинаковой размерности, содержащие по 3 строки и по 4 столбца. Вычислить результирующую матрицу $E = 5A - \cos(B) + C^2 - D$.

Вычислите результирующую матрицу $F= 3A+B+2C–D$, проверьте результат.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. На рабочий лист поместите данные соответствующих матриц *A, B, C* и *D*.
2. Используя команду *Вставка – Объект – Тип объекта* , поместите на лист формулу Microsoft Equation 3.0 $E = 5A - \cos(B) + C^2 - D$.
3. Выделите диапазон ячеек для результата, установите указатель мыши в строку формул, введите формулу: =5*I21:L23-COS(I26:L28)+I31:L33*I31:L33-I36:L38 и нажмите клавиши *Ctrl+Shift+Enter*.

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
20	Матрица A								
21	1	67	0	4					
22	2	8	9	5		Результирующая матрица			
23	3	9	8	6		$5A-\cos(B)+C^2-D$			
24									
25	Матрица B								
26	4	0	-9	3		-67,3464	3283	-4,08887	45,98999
27	7	8	-11	0		10,2461	7586,146	118,9956	86
28	6	7	6	3		-5,96017	125,2461	2786,04	65,98999
29									
30	Матрица C								
31	5	55	0	4					
32	2	-87	9	-8					
33	-6	9	52	6					
34									
35	Матрица D								
36	98	76	5	-9					
37	3	23	7	2					
38	56	0	-43	1					

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ EXCEL

Работа 4.1. Определение места числа в списке, функция *РАНГ*

ЗАДАНИЕ

Сформировать и заполнить отчетную ведомость работы сети компьютерных клубов по форме:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	***Ведомость работы сети компьютерных клубов***							
2								
3	***Клуб***	***Январь***	***Февраль***	***Март***	***Суммарная выручка***	***Место***	***Средняя выручка***	***Процент***
4	Альтаир	345	543,9	423,9				
5	Грувит	657,7	234	982,4				
6	Полигон	765,2	1007,5	873,1				
7	Гелакс	123,5	734	487,7				
8	Звезда	879	985,9	980,3				
9	Хексен	348	591,2	678				
10	Антей	987	634	1009,4				
11	Арсенал	1009,5	793,2	987,9				
12	Арена	434	934	567				
13	Блиндаж	835,8	879	934				
14	***Итого***							

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

- В ячейку А1 ввести название ведомости.
- В ячейки А3 : Н3 ввести название полей ведомости.
- В поле «Клуб» – строки «Альтаир»… «Блиндаж», «*Итого».*
- Вычислить «Суммарную выручку» по каждому клубу используя функцию *Сумм(аргументы*). При вводе функций пользоваться *Мастером функций*
- Определить «Место», для этого используется функция *Ранг (аргументы).*

Данная функция возвращает ранг числа в списке чисел. Ранг числа – это его величина относительно других значений в списке. (Если список отсортировать, то ранг числа будет его позицией) .

Синтаксис*: Ранг(число;ссылка;порядок)*

Число – это число, для которого определяется ранг; *ссылка* – это массив или ссылка на список чисел (нечисловые значения в ссылке игнорируются); *порядок* – это число, определяющее способ упорядочения (0 – ранг 1 у максимального числа ; любое число – ранг 1 у минимального числа).

Например, в ячейке F4 формула =РАНГ(E4;$E$4:$E$13) определяет ранг числа в ячейке E4 среди чисел столбца E4:E13.

- Вычислить «Среднюю выручку» по каждому клубу, используя функцию =*Срзнач(аргументы)* .
- Вычислить общие итоги, используя функцию *Сумм(аргументы).*

Работа 4.2. Определение частоты попадания числа в заданный интервал. Функция *ЧАСТОТА*

ЗАДАНИЕ

Составить отчет торговой сети

Менеджер торговой сети магазинов имеет значения выручки за три летних месяца по шести магазинам. Необходимо составить отчетную ведомость по результатам деятельности за этот период с простейшей обработкой данных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Выручка сети магазинов в млн.руб.									
2	Магазин	Июнь	Июль	Август	Суммарная выручка	Место	Средняя выручка	Процент	Диапа-зоны	Коли-чество
3	1	324	435	534	1293	6	431,00	12%	1000	0
4	2	435	645	354	1434	5	478,00	13%	1500	2
5	3	532	623	451	1606	4	535,33	15%	2000	1
6	4	723	634	751	2108	2	702,67	20%		3
7	5	536	734	876	2146	1	715,33	20%		
8	6	834	811	435	2080	3	693,33	19%		
9	Итого	3384	3882	3401	10667					

Создайте таблицу, в которой заполните исходной информацией столбцы: «Магазин», «Июнь», «Июль», «Август» (кроме итоговой строки), и вычислите:

1. Суммарную и среднюю выручку каждого из магазинов за отчетный период.
2. Итоговую выручку всех магазинов за каждый месяц отчетного периода.
3. Место, которое занимает каждый из магазинов в суммарном объеме выручки.
4. Процентную долю каждого из магазинов в суммарном объеме выручки.
5. Количество магазинов, имеющих суммарную выручку до 1000 млн. руб., от 1000 до 1500 млн. руб., от 1500 до 2000 млн. руб. и свыше 2000 млн. руб.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. «Суммарная выручка» по магазинам и «Итого» по месяцам определяется с использованием функции *СУММ(диапазон ячеек)*. Запишите формулу в ячейку E3 и скопируйте по

столбцу для всех магазинов. Запишите аналогичную формулу в ячейку B9 и скопируйте итог по строке для каждого месяца и суммарной выручке.

2. «Место» магазина среди остальных определяется функцией *РАНГ (адрес ячейки* для значения которой определяется место; *диапазон ячеек).* Для первого магазина в ячейке F3 записана формула =*РАНГ(E3;$E$3 :$E$8)*
3. «Средняя выручка» вычисляется с использованием функции = *СРЗНАЧ (диапазон ячеек).* Вид формулы в ячейке G3 = *СРЗНАЧ(B3:D3).*
4. Доля объема выручки магазина в общей выручки. «Процент» = «Суммарная выручка» магазина / Итоговая «Суммарная выручка». Вид формулы в ячейке H3 =E3/$E$9.
5. Скопируйте формулы из диапазона ячеек E3:H3 в соседние ячейки по указанным столбцам.
6. Определение количества магазинов, попавших в заданный интервал по значению «Суммарной выручки» основано на использовании массива формул с функцией *ЧАСТОТА (диапазон ячеек значений; диапазон ячеек граничных значений*). Для массива формула вводится не в одну ячейку, а в выделенный диапазон. Выделите диапазон J3:J6, введите в него формулу = *ЧАСТОТА(E3:E8;I3:I5).* Завершить ввод формулы нажатием комбинации клавиш Ctrl + Shift + Enter.

Работа 4.3. Текстовые функции и функции даты и времени

ЗАДАНИЕ

Разработать рабочую книгу «Список сотрудников». Она должна включать следующие рабочие листы: Лист 1– Список сотрудников, лист 2 – Возраст и стаж работы, лист 3– Анкетные данные.

1. Измените название 1 рабочего листа – «Список сотрудников».
2. Создайте таблицу 1 и заполните её данными.

Список сотрудников Таблица 1

№ п/п	Фамилия	Имя	Отчество	Место работы	Должность	Дата рождения	Город	Улица	Дом	Квар–тира	Оклад	Дата поступления
1	Вольская	Анна	Дмитриевна	ЦКТ	инженер	03.12.1979	Екатеринбург	Декабристов	12	3	13000,00	01.01.1998
2	Ермаков	Леонид	Викторович	ИНФ	ассистент	12.06.1980	Екатеринбург	Фрунзе	1	125	10000,00	28.10.1985
3	Заяц	Виктор	Сергеевич	АКТ	доцент	05.08.1960	Екатеринбург	Мельникова	4	67	20000,00	30.10.1984
4	Аванова	Алла	Борисовна	ЭГП	ассистент	09.09.1978	Екатеринбург	Щорса	7	89	15000,00	25.08.1990
5	Игнатович	Валерий	Иванович	ОПИ	профессор	10.05.1952	Екатеринбург	Декабристов	12	23	11000,00	11.03.1977
6	Котов	Сергей	Сергеевич	ИНФ	инженер	18.02.1980	Екатеринбург	Фурманова	34	46	10500,00	19.01.2002
7	Михайлова	Екатерина	Михайловна	ИНФ	лаборант	23.04.1980	Екатеринбург	Гоголя	2	135	5000,00	20.08.2000
8	Мороз	Александр	Петрович	АКТ	доцент	29.05.1960	Екатеринбург	Чапаева	78	12	20000,00	30.06.1985
9	Никонова	Светлана	Ивановна	ЭГП	ассистент	13.12.1984	Екатеринбург	Пушкина	36	67	12000,00	29.08.2005
10	Петрашевич	Елена	Юрьевна	ЦКТ	инженер	19.06.1975	Екатеринбург	Щербакова	29	89	13000,00	16.05.2000
11	Петров	Юрий	Алексеевич	ЦКТ	уч.мастер	17.07.1974	Екатеринбург	Белинского	30	20	10000,00	01.01.1999
12	Сергейчик	Иван	Матвеевич	ОПИ	доцент	07.07.1972	Екатеринбург	Крауля	40	50	20000,00	01.03.2002
13	Степаненко	Любовь	Михайловна	ЭГП	доцент	06.08.1960	Екатеринбург	Токарей	19	27	20000,00	16.08.1980
14	Уланович	Алексей	Владимирович	ЭГП	ассистент	01.01.1987	Екатеринбург	Заводская	25	15	14000,00	12.12.2005
15	Уткин	Петр	Ильич	АКТ	профессор	03.11.1949	Екатеринбург	Татищева	58	78	25000,00	08.12.1985

3. Перейдите на лист 2, назовите его «Возраст и стаж работы» и создайте таблицу 2, которая создается по таблице 1 (с листа «Список сотрудников») с использование формул.
4. Посчитайте средний, максимальный и минимальный возраст сотрудников.

Возраст и стаж работы Таблица 2

			Стаж работы	
№	Фамилия И.О.	Возраст	Годы	Месяцы
1	Вольская А.Д.	27	08	11
2	Ермаков Л.В.	26	21	2
3	Заяц В.С.	46	22	1
4	Аванова А.Б.	28	16	4
5	Игнатович В.И.	54	29	9
6	Котов С.С.	26	04	11
7	Михайлова Е.М.	26	06	4
8	Мороз А.П.	46	21	5
9	Никонова С.И.	22	01	3
10	Петрашевич Е.Ю.	31	06	7
11	Петров Ю.А.	32	07	11
12	Сергейчик И.М.	34	04	9
13	Степаненко Л.М.	46	26	4
14	Уланович А.В.	19	01	0
15	Уткин П.И.	57	21	0
	Среднее	35		
	Максимум	57		
	Минимум	19		

5. Перейдите на лист 3, назовите его «Анкетные данные» и создайте таблицу 3 по данным таблицы 1 (с листа «Список сотрудников») с использование формулы с последующим копированием ее во все ячейки столбца.

4. Использование функций Excel

Анкетные данные Таблица 3

№	Анкетные данные
1	Вольская Анна Дмитриевна, 03.12.1979 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Декабристов, д.12, кв.3
2	Ермаков Леонид Викторович, 12.06.1980 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Фрунзе, д.1, кв.125
3	Заяц Виктор Сергеевич, 05.08.1960 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Мельникова, д.4, кв.67
4	Аванова Алла Борисовна, 09.09.1978 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Щорса, д.7, кв.89
5	Игнатович Валерий Иванович, 10.05.1952 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Декабристов, д.12, кв.23
6	Котов Сергей Сергеевич, 18.02.1980 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Фурманова, д.34, кв.46
7	Михайлова Екатерина Михайловна, 23.04.1980 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Гоголя, д.2, кв.135
8	Мороз Александр Петрович, 29.05.1960 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Чапаева, д.78, кв.12
9	Никонова Светлана Ивановна, 13.12.1984 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Пушкина, д.36, кв.67
10	Петрашевич Елена Юрьевна, 19.06.1975 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Щербакова, д.29, кв.89
11	Петров Юрий Алексеевич, 17.07.1974 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Белинского, д.30, кв.20
12	Сергейчик Иван Матвеевич, 07.07.1972 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Крауля, д.40, кв.50
13	Степаненко Любовь Михайловна, 06.08.1960 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Токарей, д.19, кв.27
14	Уланович Алексей Владимирович, 01.01.1987 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Заводская, д.25, кв.15
15	Уткин Петр Ильич, 03.11.1949 г.р., Место проживания: г.Екатеринбург, ул.Татищева, д.58, кв.78

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. При создании таблицы 2 используются функции категории *Дата и время* и *Текстовые – Мастера функций* f_x.

✓ Столбец «Фамилия И.О.» может быть заполнен двумя способами:

а) с использованием текстовых функции *Сцепить() и Левсимв()*. Сцепляются «Фамилия» и левые символы имени и отчества с точкой, например:

=Сцепить('Список сотрудников'!B3;
" ";Левсимв('Список сотрудников'!C3;1);
"."; Левсимв('Список сотрудников' !D3;1);".";)

б) С использованием символа сцепления – &, выполняя те же действия, что и в 1–м пункте дополнительно включая пробелы, например:

='Список сотрудников'!B3&" "&Левсимв('Список сотрудников'!C3;1)
&"."&Левсимв ('Список сотрудников'!D3;1)&"."

✓ Столбец «Возраст» *=Сегодня() – 'Список сотрудников'!G3)* формируется по столбцу «Дата рождения»

✓ Столбец «Годы» *=Сегодня()* – ('Список сотрудников'!M3) формируется по столбцу «Дата поступления»

} Формат ячеек установить ГГ

✓ Столбец «Месяцы»*=Месяц(D4–1)* } Формат ячеек – числовой

2. Все формулы копируются с помощью маркера заполнения.

3. Вычисление формул итоговых строк: – *Мастер функций* f_x – *Категории – Статистические – функции Срзнач(), Max(), Мин().*

4. При создании таблицы 3 применяется формула с использованием символа сцепления (&): «Фамилия», «Имя», «Отчество», переведённой в текст «Дата рождения», символов «г.р., Место проживания : г. », «Город», «ул.», «Улица», «д.», «Дом», «кв.», «Квартира», например:

='Список сотрудников'!B3&" "&'Список сотрудников'!C3&
" " &'Список сотрудников'!D3 &", "&
Текст('Список сотрудников'!G3;"ДД.ММ.ГГГГ")&
" г.р., Место проживания: г."& 'Список сотрудников'!H3&
", ул."&'Список сотрудников'!I3&", д."&'Список сотрудников'! J3&
", кв."&'Список сотрудников'!K3.

или используется функция *Сцепить* (), например:

=Сцепить('Список сотрудников'!B3;" ";'Список сотрудников'!C3;
" ";'Список сотрудников'!D3;",";
ТЕКСТ('Список сотрудников'!G3;"ДД.ММ.ГГГГ");

*" г.р., Место проживания : г.";'Список сотрудников'!H3;
", ул.";'Список сотрудников'!I3;",";" Д.";'Список сотрудников'!J3;",";
" кв.";'Список сотрудников'!K3)*

Работа 4.4. Экономические расчеты с использованием финансовых функций

ЗАДАНИЕ 1

Расчет амортизационных отчислений.
Приобретено оборудование стоимостью 100000 руб. Продолжительность эксплуатации оборудования – 8 лет. Остаточная стоимость – 12000 руб. Рассчитать величину амортизационных отчислений за каждый (любой) год эксплуатации.

B5 =АПЛ(B1;B2;B3)

	A	B	C
1	Стоимость оборудования при покупке	100 000,00р.	
2	Стоимость оборудования в конце срока эксплуатации	12 000,00р.	
3	Продолжительность эксплуатации (в годах)	8	
4			
5	Ежегодные амортизационные отчисления	**11 000,00р.**	
6			

Рис. 1. Расчет амортизационных отчислений с использованием функции *АПЛ.*

Определить величину ежегодной амортизации оборудования для условий своего варианта. Исходные данные и таблицу результатов представить на рабочем листе Excel.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

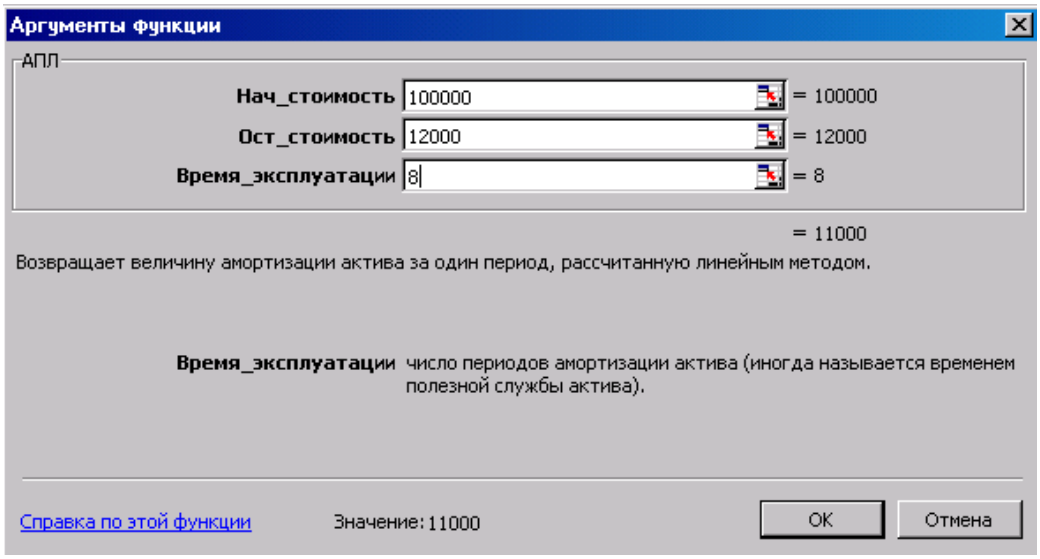
Для расчета амортизационных отчислений необходимо знать три параметра: начальная стоимость имущества; остаточная стоимость по окончании эксплуатации; продолжительность эксплуатации.

Расчет амортизационных отчислений может быть произведен с использованием различных методик. В зависимости от этого могут быть применены и различные функции Excel.

В простейшем случае амортизация разносится равномерно на каждый год эксплуатации имущества. При этом для расчета величины амортизационных отчислений используют функцию *АПЛ.*
Синтаксис функции: *АПЛ(Нач_стоим;Ост_стоим;Время),*

где *Нач_стоим* – начальная стоимость имущества; *Ост_стоим* – остаточная стоимость имущества; *Время* – продолжительность эксплуатации.

Функция *АПЛ* вводится в формулу с использованием *Мастера функций*. Ниже приведено окно задания аргументов данной функции.



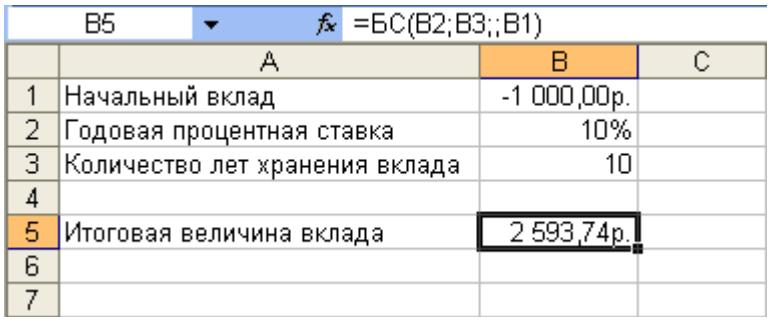
Варианты заданий

№ варианта	Начальная стоимость оборудования, тыс. руб.	Остаточная стоимость оборудования, тыс. руб.	Срок эксплуатации, лет
1	5800	400	8
2	6000	350	5
3	2000	150	9
4	16400	4150	7
5	11700	2900	10
6	4300	190	9
7	8400	2100	4
8	3100	750	6
9	2210	450	3
10	5590	780	7
11	1500	200	5
12	14600	4300	8
13	10800	3260	7
14	6100	180	10
15	8200	240	9
16	3440	200	8
17	4580	580	4
18	2550	170	6
19	1900	700	3
20	7340	1600	5

ЗАДАНИЕ 2

Расчет суммы вклада (либо величины займа)

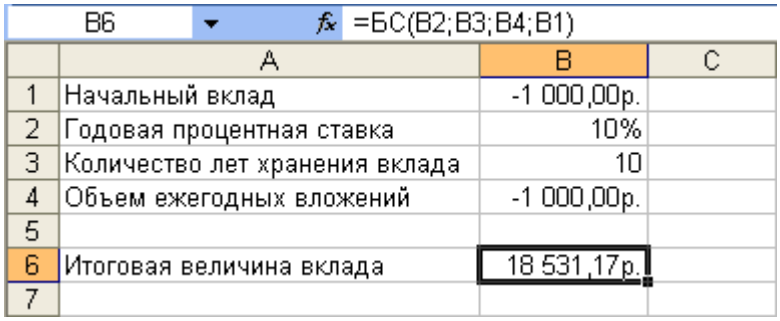
1. Рассчитать будущую сумму вклада в размере 1000 руб., внесенного на 10 лет с ежегодным начислением 10 % (рис. 2). Будущую сумму вклада при тех же условиях, но с ежегодным пополнением 1000 руб.(рис. 3).



B5 =БС(B2;B3;;B1)

	A	B	C
1	Начальный вклад	-1 000,00р.	
2	Годовая процентная ставка	10%	
3	Количество лет хранения вклада	10	
4			
5	Итоговая величина вклада	2 593,74р.	
6			
7			

Рис. 2. Расчет величины вклада без пополнений

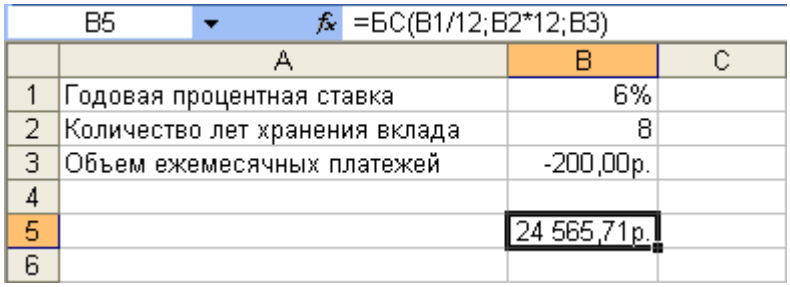


B6 =БС(B2;B3;B4;B1)

	A	B	C
1	Начальный вклад	-1 000,00р.	
2	Годовая процентная ставка	10%	
3	Количество лет хранения вклада	10	
4	Объем ежегодных вложений	-1 000,00р.	
5			
6	Итоговая величина вклада	18 531,17р.	
7			

Рис. 3. Расчет величины вклада с пополнением

2. Рассчитать будущую сумму вклада при ежемесячном внесении 200 руб. в течение 8 лет с ежегодным начислением 6%. Начальный вклад равен 0 (рис. 4).



B5 =БС(B1/12;B2*12;B3)

	A	B	C
1	Годовая процентная ставка	6%	
2	Количество лет хранения вклада	8	
3	Объем ежемесячных платежей	-200,00р.	
4			
5		24 565,71р.	
6			

Рис. 4. Расчет величины вклада при регулярном пополнении с нулевой начальной суммой

3. Расчет величины возможного займа. Требуется рассчитать, какую сумму можно занять на 8 лет под 6 % годовых, если есть возможность выплачивать ежемесячно по 200 руб.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

Во всех примерах использована функция *БС (будущая стоимость).*

- Эта функция вычисляет будущую величину вклада, который образуется в результате единовременного вложения и/или регулярных периодических вложений под определенный процент.
- Эту же функцию можно использовать для вычисления возможной величины займа под определенный процент, при определенных регулярных периодических выплатах по погашению займа.

Синтаксис функции: *БС(Ставка; Кпер; Плт; Пс; Тип),*

где *Ставка* – процентная ставка за период; *Кпер* – период времени или количество платежей; *Плт* – выплата, производимая в каждый период; *Пс* – первоначальный размер вклада. Если аргумент опущен, он полагается равным 0 (будущая стоимость займа, например, равна 0); *Тип* – число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата. 0 или опущен – в конце периода, 1 – в начале периода.

При создании формулы следует устанавливать одинаковую размерность периода для процентной ставки и числа платежей. Например, если платежи производятся один раз в год, то и процентная ставка должна быть дана в годовом исчислении, а если платежи производятся ежемесячно, то должна быть задана месячная процентная ставка.

Все аргументы, означающие денежные средства, которые должны быть выплачены, представляются отрицательными числами; денежные средства, которые должны быть получены, представляются положительными числами.

При создании формулы не обязательно указывать все аргументы функции. Вместо отсутствующего аргумента в строке формул должна быть точка с запятой.

Примеры использования функции *БС* приведен на рис. 2 – 4. Функцию вводить с помощью *Мастера функций*, она относится к категории финансовых функций.

ЗАДАНИЕ 3

Расчет стоимости инвестиции.

1. Рассчитать величину вложения под 10 % годовых, которое будет ежегодно в течение 10 лет приносить доход 1000 руб. (рис. 1.).

B5 =ПС(B2;B3;B1)

	A	B	C
1	Требуемый ежегодный доход	1 000,00р.	
2	Процентная ставка	10%	
3	Число лет выплат	10	
4			
5	Стоимость инвестиции	-6 144,57р.	
6			

Рис. 1. Расчет стоимости инвестиции по известному ежегодному доходу

Результат вычисления получается отрицательным (–6 144,57 руб.), поскольку эту сумму необходимо заплатить (инвестировать).

2. Рассчитать величину вложения под 10 % годовых, которое через 10 лет принесет доход 10000 руб. (рис. 2).

B5 =ПС(B1;B2;;B3)

	A	B	C
1	Процентная ставка	10%	
2	Число лет выплат	10	
3	Итоговый доход	10 000,00р.	
4			
5	Стоимость инвестиции	-3 855,43р.	
6			

Рис. 2. Расчет стоимости инвестиции по известному итоговому доходу

Результат вычисления получается отрицательным (–3855,43 руб.), поскольку эту сумму необходимо заплатить (инвестировать).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В данных расчетах можно использовать функцию *ПС*– (первоначальная стоимость**)**. Эта функция вычисляет для текущего момента времени необходимую величину вложения под определенный процент, для того чтобы в будущем единовременно получить и/или периодически получать заданную сумму (доход).

Синтаксис функции: *ПС(Ставка; Кпер; Плт; Бс; Тип),*

где *Ставка* – процентная ставка за период; *Кпер* – общее число платежей или срок выплат; *Плт* – выплата, производимая в каждый период; *Бс* – значение будущей стоимости или остатка средств после последней выплаты. Если аргумент опущен, он полагается равным 0.

Тип – число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата. 0 или опущен – в конце периода, 1 – в начале периода.
Примеры использования функции ПС приведены на рис. 1,2. Функцию вводить с помощью *Мастера функций,* она относится к категории финансовых функций.

ЗАДАНИЕ 4

Расчет размера платежей.
1. Рассчитать величину ежемесячного вложения под 6 % годовых, которое через 12 лет составит сумму вклада 50000 руб. (рис. 3). Или при тех же условиях, но с начальным вкладом 10000 руб. (рис.4).

B5 =ПЛТ(B2/12;B3*12;;B1)

	A	B	C
1	Требуемое величина сбережений	50 000,00р.	
2	Годовая процентная ставка	6%	
3	Число лет хранения	12	
4			
5	Необходимая сумма месячного платежа	**-237,93р.**	
6			
7			

Рис. 3**.** Расчет ежемесячных платежей без начального вклада.

B6 =ПЛТ(B2/12;B3*12;B4;B1)

	A	B	C
1	Требуемое величина сбережений	50 000,00р.	
2	Годовая процентная ставка	6%	
3	Число лет хранения	12	
4	Начальный вклад	-10 000,00р.	
5			
6	Необходимая сумма месячного платежа	**-140,34р.**	
7			

Рис. 4. Расчет ежемесячных платежей с начальным вкладом.

Результаты вычислений получаются отрицательными, поскольку эти суммы необходимо выплачивать.
2. Рассчитайте платежи по займу. Например, необходимо рассчитать величину ежемесячной выплаты по займу в 50000 руб. под 6 % годовых на 12 лет. Используйте ту же функцию.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для данных расчетов используется функция *ПЛТ* – платёж.

Функция *ПЛТ* вычисляет размер периодических выплат, необходимых для погашения займа, полученного под определенный процент, за определенный срок. Эту же функцию можно использовать для вычисления величины регулярных вложений под определенный процент, необходимых для достижения определенной величины вклада за определенный срок.

Синтаксис функции: *ПЛТ(Ставка; Кпер; Пс; Бс; Тип),* значения аргументов смотри задания 2,3.

Примеры использования функции *ПЛТ* приведены на рис. 3,4. Функцию вводить с помощью *Мастера функций*, она относится к категории финансовых функций.

ЗАДАНИЕ 5

Расчет продолжительности платежей.

Рассчитать количество ежемесячных платежей для погашения займа в 10000 руб., полученного под 10 % годовых, при условии ежемесячной выплаты 200 руб. (рис. 5).

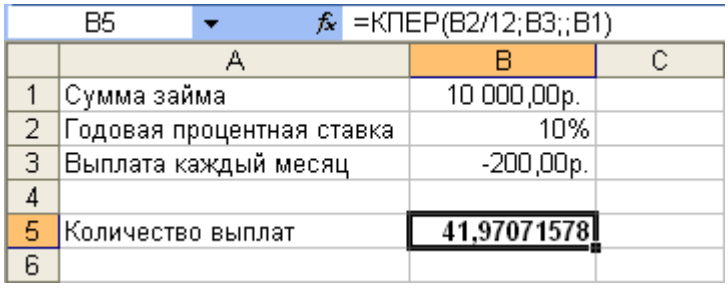


Рис. 5**.** Расчет количества платежей или длительности периода выплат.

Результат вычисления – 42 ежемесячные выплаты.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для расчета используют функцию *КПЕР* – количество периодов.

Функция *КПЕР* вычисляет количество периодических выплат, необходимых для погашения займа, полученного под определенный процент. Эту же функцию можно использовать для вычисления количества периодических вложений под определенный процент, необходимых для достижения определенной величины вклада.

Синтаксис функции *КПЕР(Ставка; Плт; Пс; Бс; Тип***), значения аргументов смотри задания 2,3.

Пример использования функции *КПЕР* приведены на рис.9. Функцию вводить с помощью *Мастера функций*, она относится к категории финансовых функций

ЗАДАНИЕ 6

Расчет платежей по займу (кредиту). Платеж, вычисляемый функцией *ПЛТ,* состоит из двух частей: Основной платеж – это часть платежа (ПЛТ), идущая на погашение основного долга (кредита), вычисляется функцией *ОСПЛТ*. Другая часть платежа идет на погашение процентов по кредиту и вычисляется функцией *ПРПЛТ.*
Определить величину платежа по кредиту, долю основного платежа и долю погашения процентов за четвертый год, если выдана ссуда размером 1 000 000 000 сроком на 5 лет под 12 % годовых.

	A	B
1	РАСЧЕТ ПЛАТЕЖЕЙ ПО ЗАЙМУ	
2		
3	Размер выданной ссуды	1 000 000 000
4	Срок ссуды (срок выплат)	5
5	Годовая процентная ставка	12%
6	Период выплаты	4
7		
8	Выплата по погашению займа	-221 149 339,88р.
9	Выплата по погашению процентов	-56 260 392,06р.
10	Размер платежа	-277 409 731,94р.
11	Размер платежа (проверка)	-277 409 731,94р.

Рис. 6. Расчет размера платежа и доли, идущей на погашения долга и процентов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Используются функции: *ПЛТ, ОСПЛТ ПРПЛТ*.

Напомним, функция *ПЛТ* рассчитывает ежегодный равный платеж по кредиту.

Синтаксис: *ПЛТ(Ставка; Кпер; Пс; Бс; Тип).*

Функция *ОСПЛТ* возвращает величину платежа в погашение основной суммы долга.

Синтаксис функции: *ОСПЛТ (Ставка; Период; Кпер; Пс; Бс).*

Функция *ПРПЛТ* возвращает величину платежа в погашение суммы процентов.

Синтаксис функции: *ПРПЛТ(Ставка; Период; Кпер; Пс; Бс).*
Период — период, для которого требуется найти платежи (должен находиться в интервале от 1 до *Кпер*); остальные аргументы см. задания 2, 3.

Выше приведен пример использования описанных функций. Функции вводить с помощью *Мастера функций,* они относятся к категории финансовых функций.

Работа 4.5. Использование функции ПЛТ (платеж) в финансовых расчетах

ЗАДАНИЕ 1

Рассчитать 20–летнюю ипотечную ссуду со ставкой 10 % годовых при начальном взносе 25 % и ежемесячной (ежегодной) выплате.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для вычисления величины постоянной периодической выплаты ренты (например, регулярных платежей по займу) при постоянной процентной ставке используется функция *ПЛТ (Ставка; Кпер; Бс; Пс; Тип).*

	A	B	C	D	E
1	РАСЧЕТ ИПОТЕЧНОЙ ССУДЫ				
2	**Исходные данные**				
3	Цена	350 000р.			
4	Первый взнос	25%			
5	Годовая процентная ставка	10%			
6	Размер ссуды				
7					
8	Срок погашения ссуды		мес.	20	лет
9	**Расчетные данные**	выплаты в месяц		выплаты в год	
10	Переодические выплаты				
11	Общая сумма выплат				
12	Общая сумма комиссионных				
13					

Расчетные формулы:

Цена=Цена(1–Первый взнос);

*Срок погашения ссуды(мес.)= Срок погашения ссуды(лет) *12;*

Периодические выплаты(мес.) =ПЛТ(% ставка/12; Срок погашения ссуды(мес.); – Размер ссуды);

Периодические выплаты(год) =ПЛТ(% ставка; Срок погашения ссуды(год); – Размер ссуды);

*Общая сумма выплат(мес.) = Срок погашения ссуды(мес.) * * Периодические выплаты(мес.);*

*Общая сумма выплат(год) = Срок погашения ссуды(год) * *Периодические выплаты(год);*

Общая сумма комиссионных(мес.)=Общая сумма выплат(мес.) – – Размер ссуды;

Общая сумма комиссионных(год)=Общая сумма выплат(год)– –Размер ссуды.

Результат расчета

	A	B	C	D	E
1	РАСЧЕТ ИПОТЕЧНОЙ ССУДЫ				
2	**Исходные данные**				
3	Цена	350 000р.			
4	Первый взнос	25%			
5	Годовая процентная ставка	10%			
6	Размер ссуды	262 500р.			
7					
8	Срок погашения ссуды	240	мес.	20	лет
9	**Расчетные данные**	выплаты в месяц		выплаты в год	
10	Переодические выплаты	2 533,18р.		30 833,15р.	
11	Общая сумма выплат	607 963,64р.		616 663,03р.	
12	Общая сумма комиссионных	345 463,64р.		354 163,03р.	
13					

ЗАДАНИЕ 2

На приобретение автомобиля в банке взят кредит на сумму 50000 руб. на 4 года под 15 % годовых. По условиям кредитного договора выплаты будут производиться в начале каждого месяца. **Определить размер ежемесячной выплаты по кредиту.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Необходимо выбрать одну временную единицу измерения для аргументов — *Ставка* – % ставка и *Кпер* – срок кредита. Так как по условиям договора выплаты будут производиться ежемесячно, необходимо задать эти аргументы применительно к одному временному периоду — месяцу. Поэтому *Ставка* в пересчете на 1 месяц равна 15 % / 12 = 1,25 %. *Кпер* = 4*12=48.

	A	B	C	D	E	F
1	**Секреты депозита**					
2	Сумма вклада	Процентная ставка	Кол-во платежей	Размер платежа	Период выплаты	Накопленная сумма
3	**Пс**	**Ставка**	**Кпер**	**Плт**	**Тип**	**Бс**
4						
5	**50000**	**1,25%**	**48**	**-1 374,36р.**	**1**	**0**

2. Основная сумма кредита *Пс* = 50000 руб.

3. *Тип* = 1, так как ежемесячная выплата будет производиться в начале месяца.

4. Размер ежемесячного платежа по кредиту вычисляется по формуле с использованием функции = *ПЛТ((Ставка;Кпер;Пс;Бс;Тип).* В результате вычисления появится отрицательное значение: –1374,36 руб. (это означает, что деньги выплачиваются заемщиком).

В данном случае в формуле присутствует аргумент *Бс*, значение которого равно 0. Его нельзя опускать, так как значение следующего за ним аргумента *Тип* равно 1. Если бы они оба были равны 0, их можно было бы не вносить в формулу.

Интересный нюанс. Если бы вы погашали этот кредит не в начале, а в конце каждого месяца, рассчитанная сумма увеличилась на 17,18 руб. и составила 1391,54 руб. Это при условии, что значение аргумента *Тип*=0.

ЗАДАНИЕ 3

Решено открыть накопительный депозитный вклад сроком на 3 года. Предложенные банком условия депозита гарантируют получение 7,5 % годовых. При открытии депозита 1 июля 2008 года был внесен первый взнос в размере $1000. Все последующие пополнения депозита решено делать в начале каждого следующего месяца. **Рассчитать какой должна быть сумма ежемесячного взноса, чтобы через 3 года иметь сбережений на сумму $10000.**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Используем для расчета *ПЛТ(Ставка;Кпер;Пс;Бс;Тип).* В данном случае в формуле будет использован еще и аргумент *Бс,* определяющий будущую сумму накоплений с учетом начисленных процентов к моменту окончания депозита.

2. *Ставка = Ставка/12.*

3. *Кпер=Кпер*12–1* – здесь вычтен первый месяц, в счет которого был внесен начальный вклад ($1000).

4. *Пс* (первоначальная сумма) имеет отрицательное значение (–1000). Это значит, что данная сумма была внесена вкладчиком, а не получена им.

5. *Бс* (будущая стоимость) имеет положительное значение (+10000), так как накопленная сумма будет получена вкладчиком по окончании действия депозита.

6. Размер платежа = *ПЛТ(Ставка; Кпер: Пс;Бс; Тип)*

D4 =ПЛТ(B4;C4;A4;F4;E4)

	A	B	C	D	E	F
1	**Секреты депозита**					
2	Сумма вклада	Процент-ная ставка	Кол-во платежей	Размер платежа	Период выплаты	Накоплен-ная сумма
3	**Пс**	**Ставка**	**Кпер**	**Плт**	**Тип**	**Бс**
4	**-1000,00**	**0,625%**	**35**	**-223,20р.**	**1**	**10000**

Как видите, для накопления $10000 в течение 3–х лет нужно ежемесячно вносить на 7,5 % депозит по $223,20 при условии, что начальный взнос составил $1000.

7. Если бы вы решили первое пополнение сделать не 1 августа, а 31 августа, т. е. в конце месяца и все последующие пополнения делать в последний день месяца, то аргумент *Тип* имел бы значение 0.

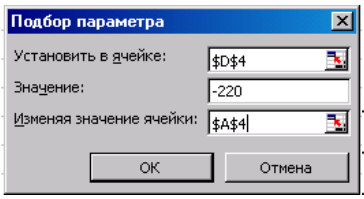
Секреты депозита					
Сумма вклада	Процент-ная ставка	Кол-во платежей	Размер платежа	Период выплаты	Накоплен-ная сумма
Пс	**Ставка**	**Кпер**	**Плт**	**Тип**	**Бс**
-1000,00	**0,625%**	**35**	**-224,59р.**	**0**	**10000**

В этом случае размер ежемесячного вклада по сравнению с первым вариантом увеличился на $1,39 и *Плт* составил –224,59$.

8. Пополнение без сдачи. Полученное значение ежемесячного взноса — $223,20 — неудобно для реальных расчетов в банке при пополнении депозитного вклада. Проще вносить $200 или $220 и пополнять депозит, что называется, «без сдачи». Но если вы хотите накопить такую же сумму ($10000) и на тех же условиях, то придется пересмотреть размер первичного взноса.

Воспользуемся для этого механизмом *Сервис – Подбор параметра*. В окне *Подбор параметра* введите адрес ячейки, в которой рассчитана функция *ПЛТ*, в поле *Значение* — число –220 (обязательно со знаком «минус»), в поле *Изменяя значение ячейки* — ссылку на ячейку, в которой внесена сумма первичного взноса (A4), и нажмите *ОК*. Новая сумма первичного взноса — $1100,85.

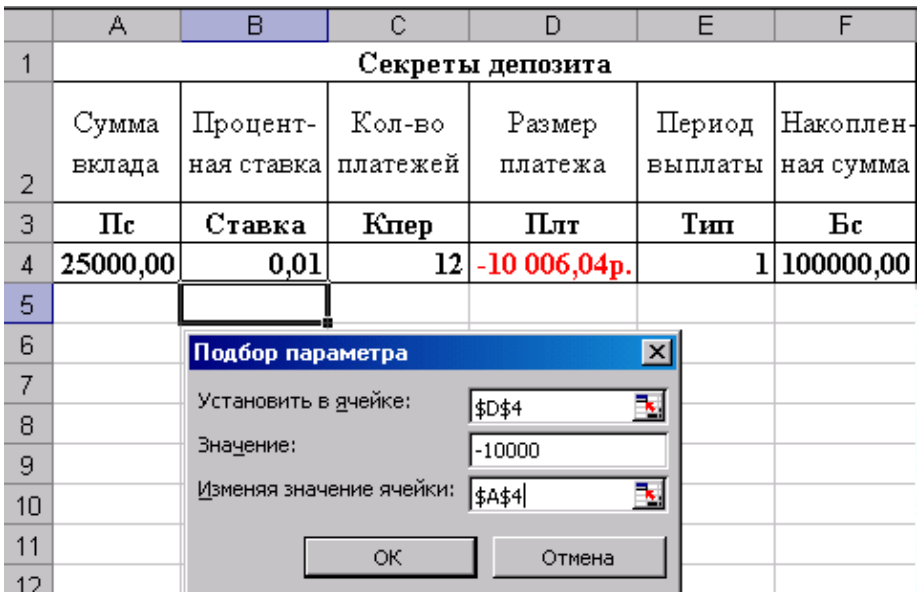
Внимание! В функцию *ПЛТ* должно быть введено значение аргументов *Ставка* и *Кпер* приведенные к месяцам.



Секреты депозита					
Сумма вклада	Процентная ставка	Кол-во платежей	Размер платежа	Период выплаты	Накопленная сумма
Пс	**Ставка**	**Кпер**	**Плт**	**Тип**	**Бс**
-1100,85	0,625%	35	-220,00р.	1	10000

ЗАДАНИЕ 4

Открыт накопительный депозитный вклад сроком на 1 год. Предложенные банком условия депозита гарантируют получение 12 % годовых. При открытии депозита 1 января 2008 года был внесен первый взнос в размере 25000 руб. Все последующие пополнения депозита решено делать в начале каждого следующего месяца. **Рассчитать какой должна быть сумма ежемесячного взноса, чтобы через 1 год иметь сбережения на сумму100000 руб.**



Сумма вклада	Процентная ставка	Кол-во платежей	Размер платежа	Период выплаты	Накопленная сумма
Пс	**Ставка**	**Кпер**	**Плт**	**Тип**	**Бс**
24931,36	0,01	12	-10 000,00р.	1	100000,00

ЗАДАНИЕ 5

Выполнить самостоятельно.

При открытии накопительного депозитного вклада сроком на 5 лет банк предложил условия депозита гарантирующие получение 15 % годовых. При открытии депозита 31 декабря 2008 года был внесен первый взнос в размере 5000 руб. Все последующие пополнения депозита решено делать в конце каждого следующего месяца. **Рассчитать какой должна быть сумма ежемесячного взноса, чтобы через 5 лет иметь сбережения на сумму 300000 руб.**

Работа 5.1. Построение графика функции на заданном диапазоне изменения аргумента.

ЗАДАНИЕ

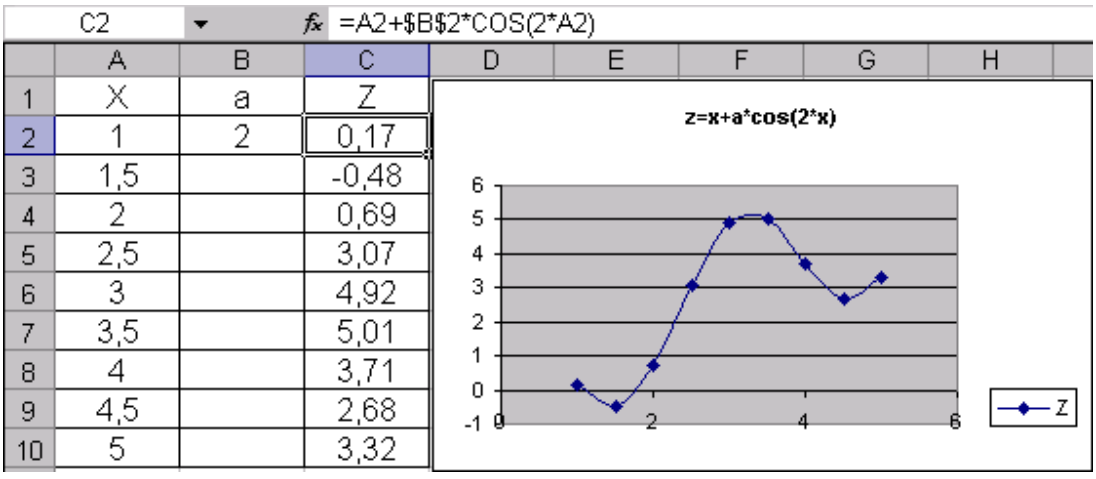
1. Постройте график функции $Z = x + a \cdot Cos(2x)$ интервал $x \in [1;5]$, Δx=0,5

Создайте таблицу: *X* изменяйте в заданном интервале, *a* – любое число, например 2, вычислите *Z* по заданной формуле. Назовите график: $Z = x + a \cdot Cos(2x)$.

2. Постройте график функции соответствующий вашему варианту.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Протабулируйте аргумент *X*: введите начальное значения аргумента 1, затем следующее значение аргумента 1,5, выделите эти две ячейки и протяните маркер заполнения до конечного значения *X*=5.
2. Вычислите значения функции для всех значений аргумента. Адрес коэффициента *a* – задайте абсолютным адресом.
3. Постройте график функции: выделите диапозон ячеек значений аргумента и функции с «шапкой» – **МАСТЕР ДИАГРАММ – Тип графика –Точечный.**
4. Задайте параметр: **Параметры диаграммы – Название и т.д.**



	A	B	C
1	X	a	Z
2	1	2	0,17
3	1,5		-0,48
4	2		0,69
5	2,5		3,07
6	3		4,92
7	3,5		5,01
8	4		3,71
9	4,5		2,68
10	5		3,32

5. Построение графиков

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1	$Y = t^2 \cdot \frac{t+\sqrt{t+a}}{t-\sqrt{t-b}}$ интервал t∈[2;4], Δt=0,2	7	$Z = 2^{-x} arctg(x+a)$ интервал x∈[–1;1], Δx=0,2
2	$Y = \frac{bx^2 - a}{e^{ax}+1}$ интервал x∈[–1;1], Δx=0,2	8	$S = e^{-ax}\sqrt{ax + bSin(2x)}$ интервал x∈[1;2], Δx=0,1
3	$Z = x^a + a \cdot Cos(2x)$ интервал x∈[1;5], Δx=0,5	9	$Y = -Cos(x) + x^a$ интервал x∈[0,85;2,35], Δx=0,15
4	$Y = Sin\left(\frac{x}{a}\right) + e^x$ интервал x∈[–1;1], Δx=0,2	10	$S = b \cdot Sin(ax^2)$ интервал x∈[–1;1], Δx=0,2
5	$Z = x + \sqrt{a + b \cdot Sin(3x)}$ интервал x∈[1;2], Δx=0,1	11	$Z = b \cdot t \cdot e^{at^2}$ интервал t∈[–1;1], Δt=0,2
6	$Y = e^{-bx}\sqrt{x+1}$ интервал x∈[–1;1], Δx=0,2	12	$f = \frac{a}{x+2}x^2$ интервал x∈[–1;1], Δx=0,2

Работа 5.2. Построение графика сложной функции.

ЗАДАНИЕ

Построить график функции $y = \begin{cases} 3x + \sqrt{1+x^2}, при & x < 0 \\ 2\cos(x)e^{-2x}, при & 0 < x < 1 \\ 2\sin(3x), при & x > 1 \end{cases}$ при x∈[–2;1.5]

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Создайте таблицу из столбцов X и У.
2. Столбец X заполните автозаполнением: введите начальное значение X = – 2, затем второе значение X= –1,5. Выделите эти ячейки и зацепив мышью за маркер заполнения протяните до получения конечного значения X=1,5.
3. Столбец У значениями вычисленной функции.

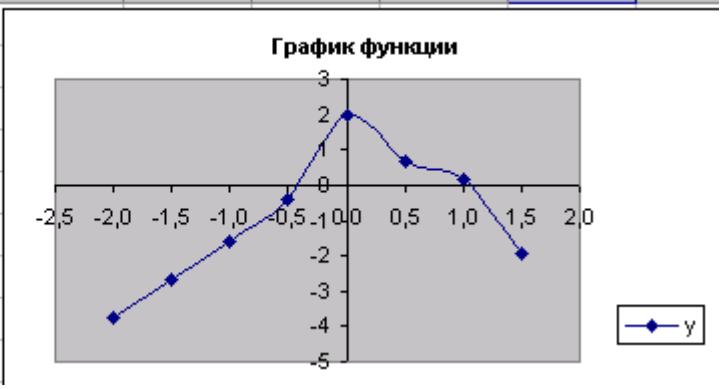
Если x<0, то функция вычисляется по формуле $y = 3x + \sqrt{1+x^2}$,
если x>1, то функция вычисляется по формуле $y = 2\sin(3x)$,
иначе (то есть при 0 < x < 1) функция вычисляется по формуле $y = 2\cos(x)e^{-2x}$.

4. То есть формула для вычисления функция формируется с использованием функции

ЕСЛИ. В ячейке B2 формула:

```
=ЕСЛИ(A2<0;3*A2+КОРЕНЬ(1+A2^2);ЕСЛИ(A2>1;2*SIN(3*A2);2*COS(A2)*EXP(A2)^-2))
```

	A	B
1	x	y
2	-2	-3,8
3	-1,5	-2,7
4	-1	-1,6
5	-0,5	-0,4
6	0	2,0
7	0,5	0,6
8	1	0,1
9	1,5	-2,0



5. Построение графиков

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1	$y=\begin{cases}\dfrac{1+x+x^2}{1+x^2}, x<0\\ \sqrt{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}, x\in[0;1]\\ 2\lvert 0{,}5+\sin(x), x\ge 1\rvert\end{cases}$ При x∈[–1,7;1,5]	6	$y=\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}, x<0\\ 2\cos^2(x), x\in[0;1]\\ \sqrt{1+\lvert 2\sin(3x)\rvert^{1/3}}, x>1\end{cases}$ При x∈[–1,5;1,5]
2	$y=\begin{cases}\dfrac{1+\lvert x\rvert}{1+x+x^2}, x\le -1\\ 2\ln(1+x^2)+\dfrac{1+\cos^4(x)}{2+x}, x\in[-1;0]\\ \left(1+x^{\frac{3}{5}}\right)+b, x\ge 0\end{cases}$ При x∈[–2;2], b=1,2	7	$y=\begin{cases}\left\lvert x^{1/3}\right\rvert, x<0\\ -2x+\dfrac{x}{1+x}, x\in[0;1]\\ \dfrac{\lvert 3-x\rvert}{1+x}, x\ge 1\end{cases}$ При x∈[–1,8;1,8]
3	$y=\begin{cases}\dfrac{a+1+\lvert x\rvert}{1+x+x^2}, x<-1\\ 2\ln(1+x^2)+\dfrac{1+\cos^4(x)}{2+x}, x\in[-1;0]\\ \left(1+x^{\frac{3}{5}}\right)+b, x>0\end{cases}$ При x∈[–2;2], a=1,5	8	$y=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^2}, x<0\\ \sqrt{1+\dfrac{x}{1+x}}, x\in[0;1]\\ 2\lvert\sin(3x)\rvert, x\ge 1\end{cases}$ При x∈[–2;1,8]
4	$y=\begin{cases}3x+\sqrt{1+x^2}, x<0\\ 2\cos(x)e^{-2x}, x\in[0;1]\\ 2\sin(3x), x>1\end{cases}$ При x∈[–2;1.5]	9	$y=\begin{cases}\dfrac{1+x+a}{1+x^2}, x<0\\ \sqrt{1+\dfrac{x}{1+x}}, x\in[0;1]\\ 2\lvert\sin(3x)\rvert, x\ge 1\end{cases}$ При x∈[–2;1,8], Δx=0,1; a=2
5	$y=\begin{cases}3x+\sqrt{1+x^2}, x<0\\ 2\cos(x)e^{-2x}, x\in[-2;-1]\\ 2\sin(3x)+a, x>1\end{cases}$ При x∈[–2;1,5], a=2	10	$y=\begin{cases}ax+\sqrt{1+x^2}, x<0\\ \sin(x)e^{-3x}, x\in[-2;0]\\ 3\cos(2x)+a, x>1\end{cases}$ При x∈[–2;1,5], a=2

Работа 5.3. Графическая интерпретация данных.

ЗАДАНИЕ

Часто по результатам экспериментальных работ или по результатам расчетов требуется построить графики для данных, которые графически несопоставимы (например: числа 1000 и 0,001). Для того, чтобы совместить несопоставимые данные на одном графике в Excel есть тип графика с двумя осями (т.е. для чисел порядка 1000 будет одна ось, а для чисел порядка 0,001 – другая)

Используя, мастер диаграмм постройте графики типа точечный. При построении графиков установите все возможные параметры в диалоговом окне 3 шага «Параметры диаграммы»: Заголовки; Оси; Линии сетки; Легенду; Подписи данных; таблицу данных.

1. Рассчитайте значение функции $У_1=X^2$, $У_2=X^3$, $У_3=X^4$, для изменения аргумента **X** от –1 до 1, с шагом 0,1.
2. Рассчитайте значение функции $У_4=X_2^2$, для изменения аргумента $\mathbf{X_2}$ от –5 до 5 с шаг. 1.
3. Рассчитайте значение функции $У_5=X_3^2$ для изменения аргумента $\mathbf{X_3}$ от 1 до 10, с шаг. 1.
4. Построить совмещенные графики $У_1$, $У_2$, $У_3 = F(x)$ на отдельном листе, добавьте на него графики $У_4$, $У_5 = F(x)$, используя две оси для значений Y и X.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. При расчете значений аргументов **X, $\mathbf{X_2}$,$\mathbf{X_3}$** используйте **автозаполнение**: введите в 1 ячейку начальное значение и во 2 ячейку следующее значения аргумента, выделите эти две ячейки и пртяните за маркер заполнения до конечного значения.

2. Для создания диаграммы: **МАСТЕР ДИАГРАММ** вкладка **Нестандартные** – **Графики** (**2 оси**).

3. Добавить на существующий график новый (по одному новому графику): выделить график, в меню **ДИАГРАММА (**или **Контекстное Меню) – Исходные данные –** вкладка **Ряд – Добавить – (**перейти на таблицу) и последовательно указать адреса ячеек: имя ряда; диапозон аргумента Х и диапозон функции У.

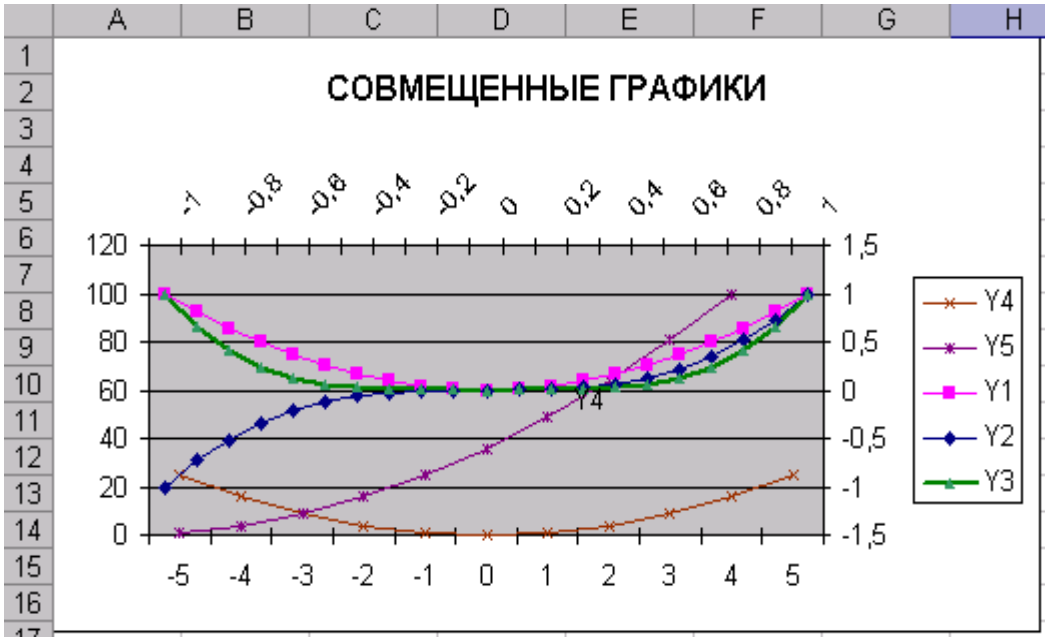
4. Для создания второй оси: в меню **ДИАГРАММА (**или **Контекстное Меню) –Параметры диаграммы** – вкладка **Оси** – **Вспомогательные оси** .

5. Подписи второй оси создаются: в меню **ДИАГРАММА (**или **Контекстное Меню) – Исходные данные –** вкладка **Ряд – Добавить –** указать адреса соответствующих ячеек.

Расчетная таблица

5. Построение графиков

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**X**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	**X2**	**Y4**	**X3**	**Y5**
2	-1	1	-1	1	-5	25	1	1
3	-0,9	0,81	-0,729	0,6561	-4	16	2	4
4	-0,8	0,64	-0,512	0,4096	-3	9	3	9
5	-0,7	0,49	-0,343	0,2401	-2	4	4	16
6	-0,6	0,36	-0,216	0,1296	-1	1	5	25
7	-0,5	0,25	-0,125	0,0625	0	0	6	36
8	-0,4	0,16	-0,064	0,0256	1	1	7	49
9	-0,3	0,09	-0,027	0,0081	2	4	8	64
10	-0,2	0,04	-0,008	0,0016	3	9	9	81
11	-0,1	0,01	-0,001	0,0001	4	16	10	100
12	0	0	0	0	5	25		
13	0,1	0,01	0,001	0,0001				
14	0,2	0,04	0,008	0,0016				
15	0,3	0,09	0,027	0,0081				
16	0,4	0,16	0,064	0,0256				
17	0,5	0,25	0,125	0,0625				
18	0,6	0,36	0,216	0,1296				
19	0,7	0,49	0,343	0,2401				
20	0,8	0,64	0,512	0,4096				
21	0,9	0,81	0,729	0,6561				
22	1	1	1	1				



Работа 5. 4. Построение функции заданной уравнением в полярных координатах. (Трехлепестковая роза).

ЗАДАНИЕ.

Построить график функции, заданный уравнением в полярных координатах: $\rho = a \sin(3\varphi)$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

1. Рассчитать координаты точек графика в декартовых координатах.

Формулы для расчета:

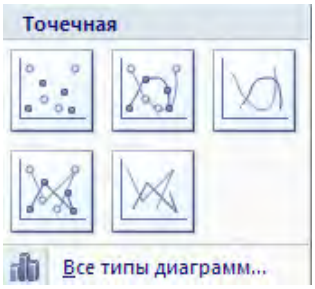
Дать пояснения к вычислению X и У

Координата	Ячейка	Значение
фи	**A2**	От 0 до 70 с шагом 0,05
ро	**B2**	=6*SIN(3*A2)
X	**D2**	=B2*COS(A2)
Y	**E2**	=B2*SIN(A2)

Рассчитанные значения:

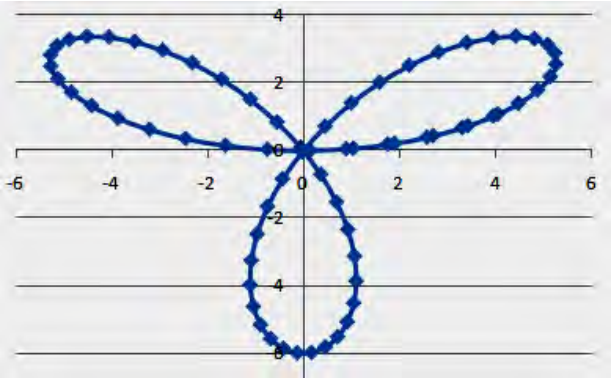
	A	B	C	D	E
1	фи	ро		X	Y
2	0	0		0	0
3	0,05	0,896629		0,895508	0,044813
4	0,1	1,773121		1,764263	0,177017
5	0,15	2,609793		2,580488	0,390003
6	0,2	3,387855		3,320323	0,673063
7	0,25	4,089833		3,96269	1,011841
8	0,3	4,699961		4,490045	1,388934
9	0,35	5,204539		4,889002	1,784625
10	0,4	5,592235		5,150789	2,177719
11	0,45	5,85434		5,271524	2,546436
12	0,5	5,98497		5,252305	2,869347
13	0,55	5,98119		5,099111	3,126292
14	0,6	5,843086		4,822507	3,299254
15	0,65	5,573758		4,437179	3,373163
16	0,7	5,179256		3,961314	3,336568
17	0,75	4,668439		3,415845	3,182189
18	0,8	4,052779		2,823598	2,907286
19	0,85	3,346102		2,208371	2,513861
20	0,9	2,564279		1,593982	2,008669

2 По значениям X и У построить график. Тип графика **точечный.**



5. Построение графиков

Построенный график:



Работа 5.5. Построение поверхности

Общие указания

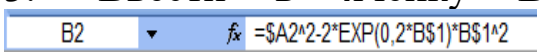
Работа по построению поверхности второго порядка предполагает использование следующей методики:

1. Подготовить диапазон изменения значений функции по двум координатам, расположив изменения одной координаты вдоль некоторого столбца вниз, а другой – вдоль прилегающей строки вправо.
2. Ввести на пересечении строки и столбца координат необходимую формулу для построения поверхности воспользоваться маркером автозаполнения для ее копирования на всю область построения поверхности.

ЗАДАНИЕ

Построить поверхность, заданную функцией Z=X2 – 2e0,2У У2 ,
при изменении X на интервале [–1;1] с шагом 0,1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Задать изменение аргумента X в столбце A от –1 с шагом 0,1 до значения 1 автозаполнением.
2. Задать изменение аргумента У в строке (в примере это строка 1) от 1 с шагом 0,1 до значения 1 автозаполнением.
3. Ввести в ячейку B2 (в примере) формулу функции 

На ячейки аргументов X и У задаются смешанные ссылки: для X ($A2) фиксируется столбец A(клавишей F4 добавляется знак $ к букве A), для У (B$1) фиксируется строка 1 (клавишей F4 добавляется знак $ к цифре 1).
4. Скопировать формулу на весь диапозон ячеек изменения X и У.

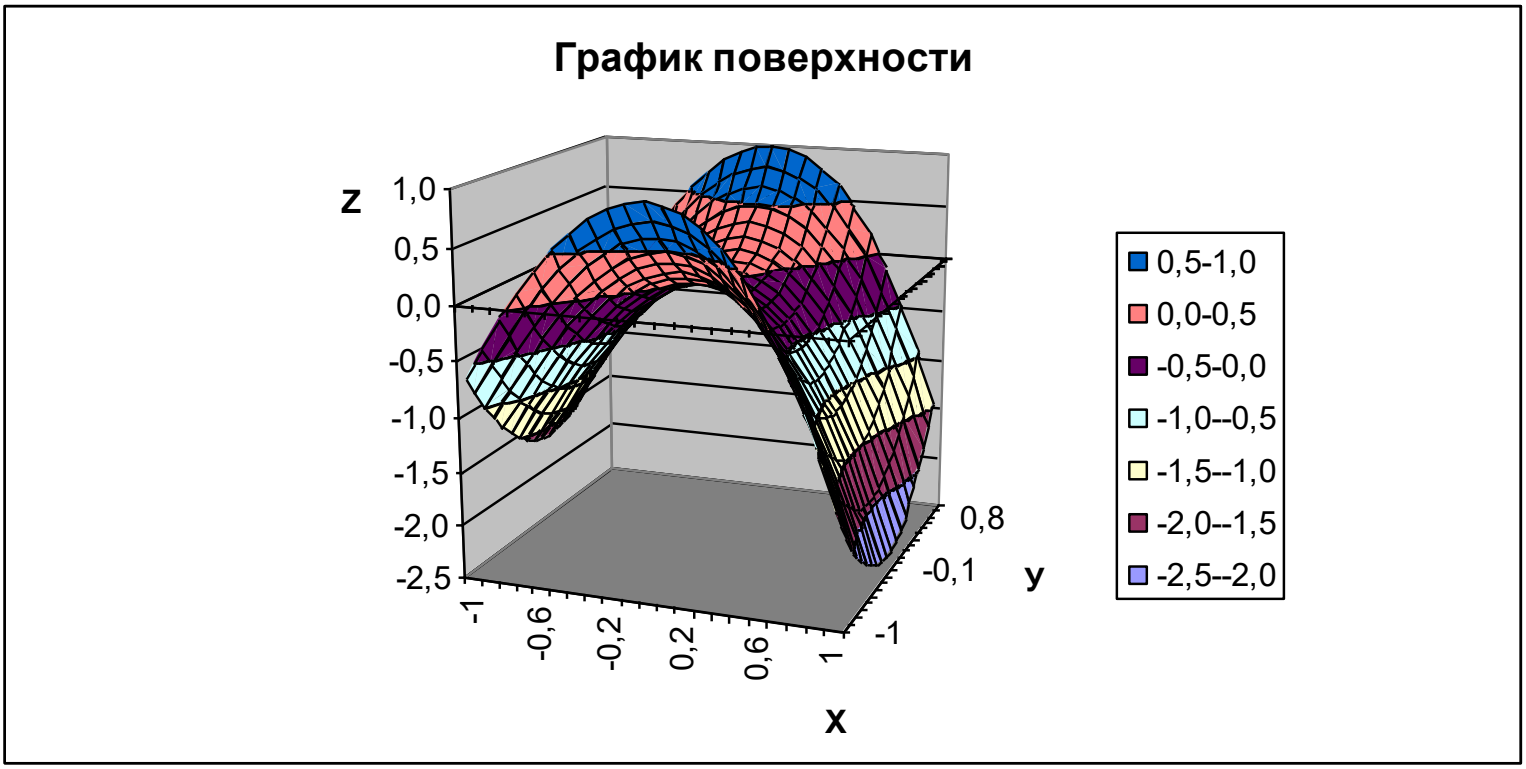
5. Построение графиков

B2 fx =$A2^2-2*EXP(0,2*B$1)*B$1^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1		-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	-1	-0,6	-0,4	-0,1	0,1	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,4	0,2	-0,1	-0,5	-0,9	-1,4
3	-0,9	-0,8	-0,5	-0,3	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,3	0,0	-0,3	-0,7	-1,1	-1,6
4	-0,8	-1,0	-0,7	-0,5	-0,2	0,0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,3	0,1	-0,2	-0,5	-0,9	-1,3	-1,8
5	-0,7	-1,1	-0,9	-0,6	-0,4	-0,1	0,0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5	0,4	0,3	0,1	-0,1	-0,3	-0,6	-1,0	-1,4	-2,0
6	-0,6	-1,3	-1,0	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2	0,0	-0,2	-0,5	-0,8	-1,1	-1,6	-2,1
7	-0,5	-1,4	-1,1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	-0,1	-0,3	-0,6	-0,9	-1,3	-1,7	-2,2
8	-0,4	-1,5	-1,2	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,0	-0,2	-0,4	-0,7	-1,0	-1,3	-1,8	-2,3
9	-0,3	-1,5	-1,3	-1,0	-0,8	-0,5	-0,4	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,0	-0,1	-0,3	-0,5	-0,7	-1,0	-1,4	-1,8	-2,4
10	-0,2	-1,6	-1,3	-1,1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,3	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,2	-0,3	-0,5	-0,8	-1,1	-1,5	-1,9	-2,4
11	-0,1	-1,6	-1,3	-1,1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,5	-0,8	-1,1	-1,5	-1,9	-2,4
12	0	-1,6	-1,4	-1,1	-0,9	-0,6	-0,5	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,6	-0,8	-1,1	-1,5	-1,9	-2,4
13	0,1	-1,6	-1,3	-1,1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,5	-0,8	-1,1	-1,5	-1,9	-2,4
14	0,2	-1,6	-1,3	-1,1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,3	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,2	-0,3	-0,5	-0,8	-1,1	-1,5	-1,9	-2,4
15	0,3	-1,5	-1,3	-1,0	-0,8	-0,5	-0,4	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,0	-0,1	-0,3	-0,5	-0,7	-1,0	-1,4	-1,8	-2,4
16	0,4	-1,5	-1,2	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,0	-0,2	-0,4	-0,7	-1,0	-1,3	-1,8	-2,3
17	0,5	-1,4	-1,1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	-0,1	-0,3	-0,6	-0,9	-1,3	-1,7	-2,2
18	0,6	-1,3	-1,0	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2	0,0	-0,2	-0,5	-0,8	-1,1	-1,6	-2,1
19	0,7	-1,1	-0,9	-0,6	-0,4	-0,1	0,0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5	0,4	0,3	0,1	-0,1	-0,3	-0,6	-1,0	-1,4	-2,0
20	0,8	-1,0	-0,7	-0,5	-0,2	0,0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,3	0,1	-0,2	-0,5	-0,9	-1,3	-1,8
21	0,9	-0,8	-0,5	-0,3	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,3	0,0	-0,3	-0,7	-1,1	-1,6
22	1	-0,6	-0,4	-0,1	0,1	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,4	0,2	-0,1	-0,5	-0,9	-1,4
23																						

5. Построить график поверхности. Выделить подготовленные данные, обратится к **МАСТЕРУ ДИАГРАММ – Тип графика – Поверхность**.

6. Постройте поверхность, соответствующую Вашему варианту.



ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№ вари–анта	Уравнение
1	$Z = X^2 – Y^2$ при X, Y є [–1;1]
2	$Z = 3X^2 – 2\sin^2(Y)\ Y^2$ при X, Y є [–1;1]
3	$Z = 5X^2\cos^2(Y) – 2Y^2\ e^Y$ при X, Y є [–1;1]
4	$Z = 2X^2\cos^2(X) – 2Y^2$ при X, Y є [–1;1]
5	$Z = 2e^{2X}X^2 – 2Y^4$ при X, Y є [–1;1]
6	$Z=X^2 – 2e^{0,2}\ У^2$ при X, Y є [–1;1]

Работа 5.6. Построение сферы.

Общие указания

Работа по построению поверхности второго порядка (случай, когда третья координата входит в уравнение поверхности в квадрате) предполагает использование следующей методики:

1. Подготовить диапазон изменения функции по двум координатам, расположив изменения одной координаты вдоль некоторого столбца вниз, а другой – вдоль прилегающей строки вправо.
2. Ввести на пересечении координат необходимую формулу для построения поверхности воспользоваться маркером автозаполнения для ее копирования на всю область построения поверхности.
3. В формуле следует учесть поправку на положительные и отрицательные значения квадратного корня на данной области определения.
4. Выделить подготовленные данные и воспользоваться МАСТЕРОМ ДИАГРАММ (тип диаграммы – **Поверхность**).
5. Отформатировать полученную поверхность.

ВНИМАНИЕ!

Требуется учесть следующую особенность – в диапазоне изменения функции необходимо дублировать значения координат.

ЗАДАНИЕ

1. Построить сферу: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Преобразовать уравнение к виду: $Z = \pm\sqrt{1 - X^2 - Y^2}$
2. Подготовьте диапазон области определения функции в соответствии с таблицей. В диапазон B5:B46 вводятся значения X от –1 до 1 с шагом 0,1, причем каждое значение дублируется последовательно дважды. Аналогично вводятся значения У в диапазон ячеек C4:AR4 от –1 до 1 с шагом 0,1.
3. В диапазон A6:A47 добавить повторяющиеся числа 2 и 3 (для использования в формуле).
4. Формула для вычисления функции Z в ячейке C5:
5. =КОРЕНЬ(1–$B5*$B5–C$4*C$4)*ЕСЛИ(ОСТАТ($A5;2)=0;1;–1)

5. Построение графиков

(Пояснить вторую часть формулы)

6. Воспользоваться маркером автозаполнения для копирования формулы на всю область построения поверхности.

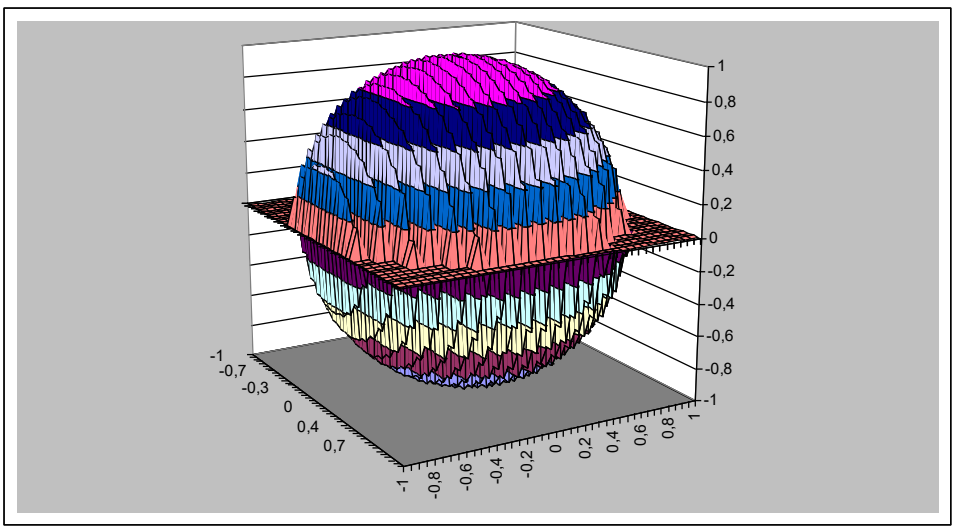
7. Выделить диапазон ячеек B4:AR46, обратится к **МАСТЕРУ ДИАГРАММ – Тип графика – Поверхность.**

8. Отформатировать полученную сферу.

Расчетная таблица.

ЕСЛИ | =КОРЕНЬ(1-$B5*$B5-C$4*C$4)*ЕСЛИ(ОСТАТ($A5;2)=0;1;-1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
4			-1	-1	-0,9	-0,9	-0,8	-0,8	-0,7	-0,7	-0,6	-0,6
5	2	-1	=0;1;-1)	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
6	3	-1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
7	2	-0,9	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
8	3	-0,9	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
9	2	-0,8	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
10	3	-0,8	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
11	2	-0,7	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,141421	0,141421	0,387298	0,387298
12	3	-0,7	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,14142	-0,14142	-0,3873	-0,3873
13	2	-0,6	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,387298	0,387298	0,52915	0,52915
14	3	-0,6	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,3873	-0,3873	-0,52915	-0,52915
15	2	-0,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,331662	0,331662	0,509902	0,509902	0,6245	0,6245
16	3	-0,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,33166	-0,33166	-0,5099	-0,5099	-0,6245	-0,6245
17	2	-0,4	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,173205	0,173205	0,447214	0,447214	0,591608	0,591608	0,69282	0,69282
18	3	-0,4	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,17321	-0,17321	-0,44721	-0,44721	-0,59161	-0,59161	-0,69282	-0,69282
19	2	-0,3	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,316228	0,316228	0,519615	0,519615	0,648074	0,648074	0,74162	0,74162
20	3	-0,3	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,31623	-0,31623	-0,51962	-0,51962	-0,64807	-0,64807	-0,74162	-0,74162
21	2	-0,2	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,387298	0,387298	0,565685	0,565685	0,685565	0,685565	0,774597	0,774597
22	3	-0,2	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,3873	-0,3873	-0,56569	-0,56569	-0,68557	-0,68557	-0,7746	-0,7746
23	2	-0,1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,424264	0,424264	0,591608	0,591608	0,707107	0,707107	0,793725	0,793725
24	3	-0,1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,42426	-0,42426	-0,59161	-0,59161	-0,70711	-0,70711	-0,79373	-0,79373
25	2	0	0	0	0,43589	0,43589	0,6	0,6	0,714143	0,714143	0,8	0,8
26	3	0	0	0	-0,43589	-0,43589	-0,6	-0,6	-0,71414	-0,71414	-0,8	-0,8
27	2	0,1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,424264	0,424264	0,591608	0,591608	0,707107	0,707107	0,793725	0,793725
28	3	0,1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,42426	-0,42426	-0,59161	-0,59161	-0,70711	-0,70711	-0,79373	-0,79373
29	2	0,2	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,387298	0,387298	0,565685	0,565685	0,685565	0,685565	0,774597	0,774597



5. Построение графиков

6. МАКРОСЫ В EXCEL

Работа 6.1. Создание макросов

Макросы – средства, позволяющие создавать код программ на VBA (Visual Basic for Application) без программирования, записывая в макрос любые действия, которые можно выполнить в EXCEL.

ЗАДАНИЕ.

1. Создайте семь макросов:

Макрос1 – Создайте новый рабочий лист, переименуйте его, присвоив имя «**Новый**»
Макрос2 – Создайте столбец значений **X** в диапазоне чисел от –3 до 3 с шагом 0,5
Макрос3 – Создайте столбец значений **Y**, вычислив по формуле **$Y=5X^3+2$**
Макрос4 – Постройте **график** функции
Макрос5 – Найдите **корень** уравнения
Макрос6 – Удалите лист
Макрос7 – Закрыть

2. Создайте форму, расположив на ней семь кнопок.



3. Подключите к кнопкам ранее созданные макросы. Запустите программу на выполнение.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

1. Выполните первое задание без записи макросов.
2. Создание Макросов: **СЕРВИС–Макрос–Начать запись – введите имя макроса,** выполните нужные для построения макроса команды, **Остановите запись макроса.** Имена макросам назначаются произвольно, но лучше, если имя макроса будет отражать его действие, например для нашего задания: Новый, Х,У, График, Корни, Удалить.
3. Просмотреть коды Макросов: **СЕРВИС–Макрос–Макрос–** выберите имя макроса – **ВОЙТИ** просмотреть Макрос можно, перейдя в редактор VBA–Alt+F11 или **СЕРВИС–Макрос–Редактор VBA –** откройте папку Модулей, выберите нужный макрос.
4. Создание Формы: Перейдите в редактор VBA, выполните команду **INSERT–UserForm**

4.1. На панели инструментов «Элементы Управления» выберите «Кнопку», курсор переместите в область формы и отрисуйте мышью кнопку.

4.2. Введите для кнопки название, изменив её свойство Caption(надпись).

4.3. Аналогично создайте все семь кнопок. Кнопки можно скопировать: выделите кнопку, нажмите клавишу Ctrl, удерживая её перетащите кнопку столько раз сколько нужно копий.

4.4. Отредактируйте текст на каждой кнопке, изменив свойство Caption для каждой кнопки.

5. Подключение макроса к кнопке Формы: Дважды щелкните мышью по кнопке. Система переведет Вас в среду редактора кода, куда автоматически поместит две строки процедуры обработки данной кнопки.

```
Private Sub CommandButton1_Click()

End Sub
```

Поместите между этими строками имя вызываемого Макроса. Например.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
X' Вызов Макроса X, который создает столбец X.
End Sub
```

Таким образом подключите все Макросы к кнопкам.

5. Макрос **Новый** при каждом выполнении добавляет рабочий лист с новым, следующем номером.

```
Sub Новый()
' Новый Макрос
' Макрос записан 27.07.2008
    Sheets("Лист1").Select’ Лист1 выделить
    Sheets.Add’ Добавить лист
    Sheets("Лист4").Select’Этот лист выделить
    Sheets("Лист4").Name = "Новый"’ Добавленному листу присвоить имя «Новый»
    Range("A1").Select’Выделить ячейку A1, для дальнейших действий.
End Sub
```

В Макросе добавляется лист 4, но при повторном применении Макроса добавится лист с другим номером и это вызовет ошибку выполнения Макроса, поэтому его нужно отредактировать так, чтобы не указывать конкретный номер листа.

```
Sub Новый()
    Sheets("Лист1").Select
    Sheets.Add
    ActiveSheet.Name = "Новый" Активному листу присвоить имя «Новый»
End Sub
```

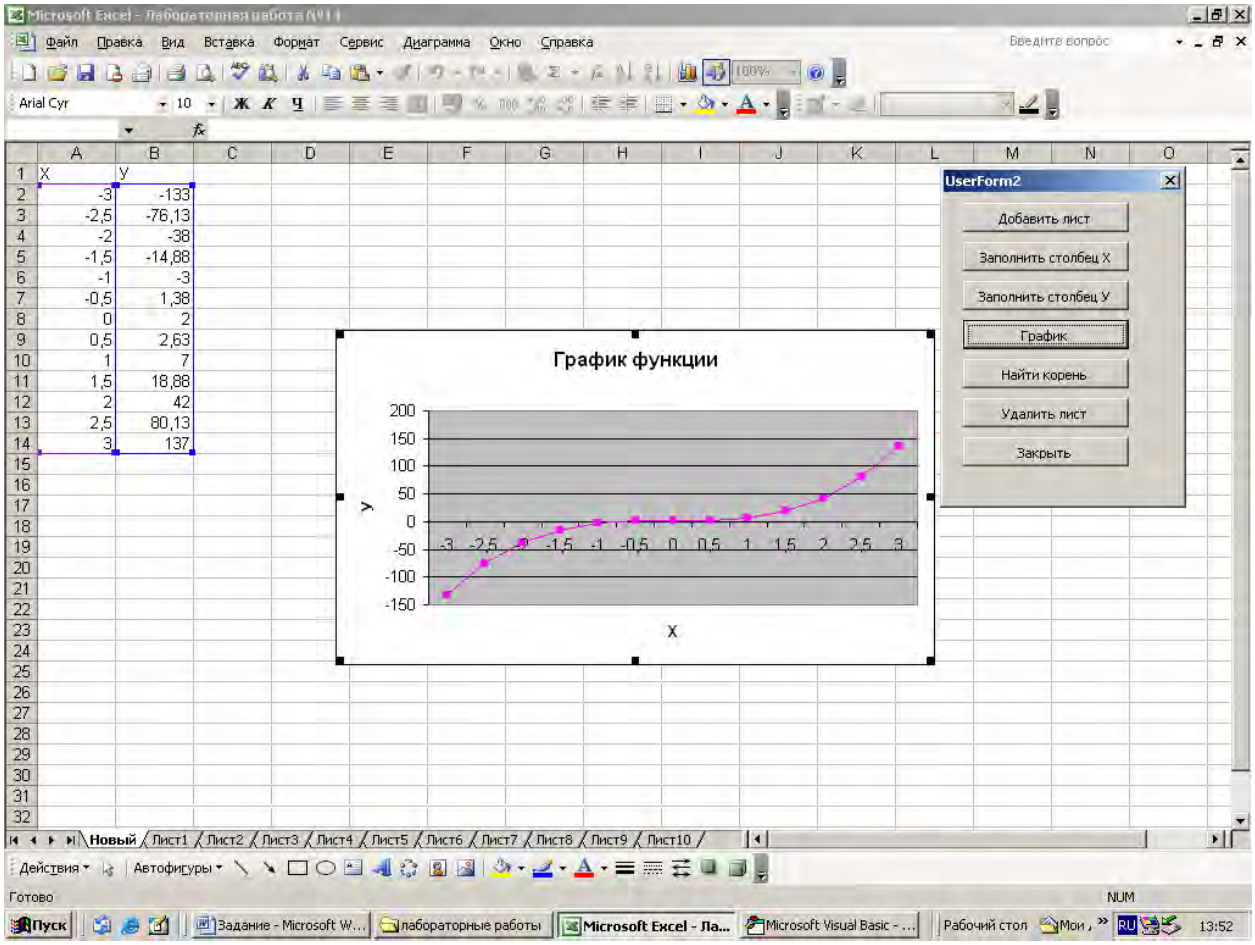
6. Для закрытия Формы применить метод **UserForm1.Hide**

7. Для вызова формы на выполнение: выполните команду RUN–**Run Sub/User Form (F5).**

Нажимая последовательно на соответствующие кнопки, проверьте работу макросов.

Результат выполнения задания

6. Макросы в Excel



7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача оптимизации состоит в выборе из некоторого множества допустимых решений, то, которое удовлетворяют целевой функции. Целевая функция это зависимость показателя эффективности от значений искомых параметров. В качестве показателя эффективности используются такие величины как прибыль, затраты и т.д. При этом на параметры допустимого решения накладываются ограничения, связанные с реальной технологией. Они выражаются в виде математических ограничений, чаще имеющих вид неравенства.

Решение задачи оптимизации состоит из нескольких этапов:

1.Формализация задачи – математическая постановка задачи.

- Целевая функция:

$Z=F(X1, X2,\ldots\ Xn)\rightarrow\min$ (max, заданной величине) – это минимум потерь или максимум прибыли.

X1, X2,…… Xn– искомые параметры влияющие на целевую функцию.

- Ограничения для X1, X2,…… Xn обычно условия неравенства

2. Для решения используются методы: линейного программирования; симплекс метод. Эти методы реализованы в Excel в виде инструмента – **Поиск решения**.

Работа 7.1. Задача о планировании производства

ЗАДАНИЕ

Фирма производит изделия, назовём их A, B, C. Для их производства используются три типа комплектующих изделий: компл.1, компл.2, компл.3.

Известно: Расход каждого типа комплектующего для каждого вида изделия, цена каждого вида изделия, запасы каждого типа комплектующих (приведены в таблице).

Комплектующие	Нормы расхода комплектующих на изделия, ед.			Запасы комплектующих, ед.
	A	B	C	
Компл.1	20	50	10	5000
Компл.2	20		40	4000
Компл.3	20	10	10	4000
Цена изделия, руб	500	700	550	

7. Решение задач оптимизации

Определить сколько нужно произвести изделий различного вида, чтобы получить максимальную прибыль, если использовать весь запас комплектующих

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Математическая постановка задачи.

Пусть X1, X2, X3 количество выпускаемых изделий A, B, C.

- Целевая функция – доход от продажи изделий

$$Z=500\ X1+ 700\ X2+ 550\ X3 \rightarrow max$$

- Ограничения:

  По расходу комплектующих. Их расход должен быть меньше или равен запасам.

  $20\ X1+50\ X2+10\ X3 \leq 5000$ – ограничение по компл.1.

  $20\ X1+40\ X3 \leq 4000$ – ограничение по компл.2.

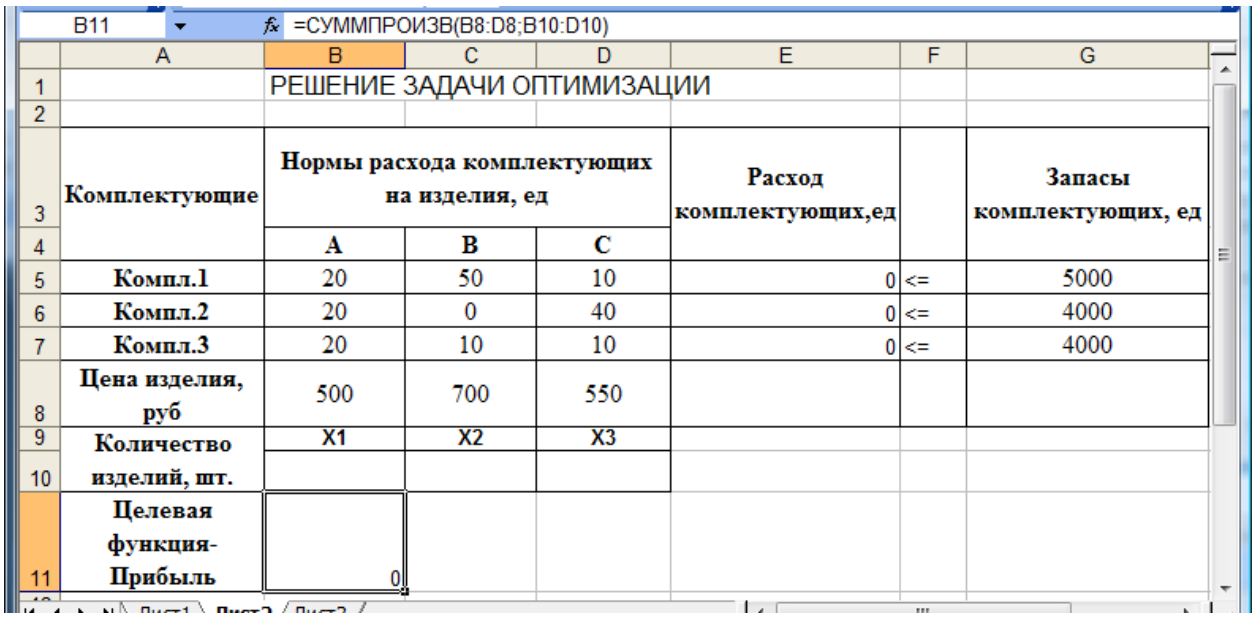
  $20\ X1+10\ X2+10\ X3 \leq 4000$ – ограничение по компл.3.

  По количеству выпускаемой продукции.

  $X1 \geq 0;\ X2 \geq 0;\ X3 \geq 0$ –количество выпускаемых изделий не может быть отрицательным.

  X1; X2; X3 – целое – выпускаемые изделия неделимые (целые).

2. По исходным данным и математической постановке задачи создается таблица для решения.



	A	B	C	D	E	F	G
1		РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ					
2							
3	**Комплектующие**	**Нормы расхода комплектующих на изделия, ед**			**Расход комплектующих,ед**		**Запасы комплектующих, ед**
4		**A**	**B**	**C**			
5	**Компл.1**	20	50	10	0	<=	5000
6	**Компл.2**	20	0	40	0	<=	4000
7	**Компл.3**	20	10	10	0	<=	4000
8	**Цена изделия, руб**	500	700	550			
9	**Количество**	**X1**	**X2**	**X3**			
10	**изделий, шт.**						
11	**Целевая функция-Прибыль**	0					

В ячейки B10:D10 Excel выведит найденные количества изделий A, B, C.

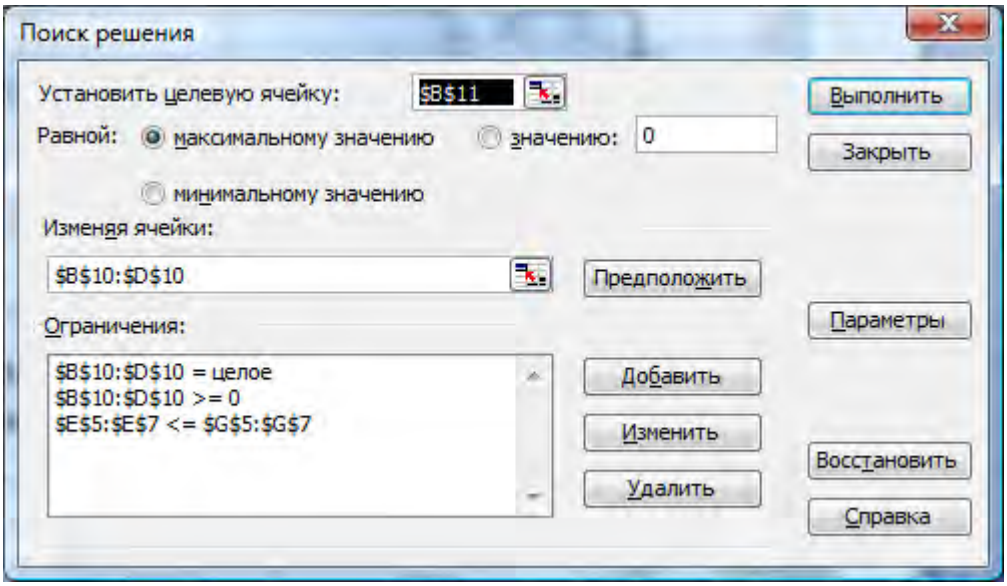
Целевая функция – это сумма произведений *Количества изделий и Цены изделий*, т.е. в ячейке B11 формула =СУММПРОИЗВ(B8:D8;B10:D10).

Правая часть ограничения по расходу комплектующих записана в ячейках E5:E7. Формула, например, в ячейке E5 имеет вид =СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$10:$D$10). Эту формулу скопировать в ячейки E6:E7.

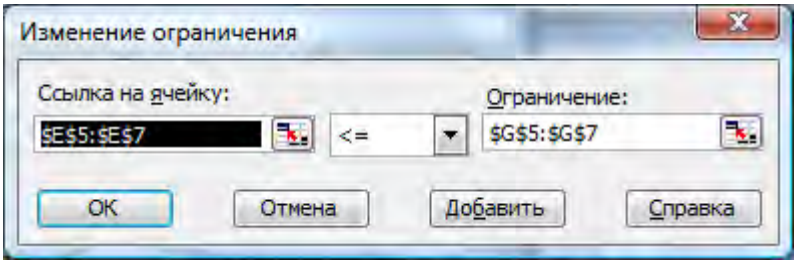
3. Решение задачи средствами Excel.

Установите курсор в ячейку B11 и выполните команду **СЕРВИС – Поиск решения**.

В диалоговом окне «Поиск решения»:



- В поле «Установить целевую ячейку» адрес ячейки B11.
- В поле «Равной» установить на максимальное значение.
- В поле «Изменяя ячейки» дать ссылку на ячейки с искомыми X1, X2, X3, то есть на ячейки B10:D10.
- В поле «Ограничения» добавим ограничения нажав на кнопку ДОБАВИТЬ. В появившемся диалоговом окне указать, например, для ограничения по комплектующим в левом поле адреса ячеек с расходами комплектующих, в правом поле адреса ячеек с запасами комплектующими, в средем поле из списка выбрать соответствующий знак логического отношения – ДОБАВИТЬ.



Таким образом задать все ограничения. Далее в окне «Поиск решения» нажать на кнопку ПАРАМЕТРЫ и установить флажок на опции Линейная модель. Затем **Выполнить.**

В итоге получим результат оптимизации.

	A	B	C	D	E	F	G
1		РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ					
2							
3	**Комплектующие**	**Нормы расхода комплектующих на изделия, ед**			**Расход комплектующих,ед**		**Запасы комплектующих, ед**
4		**A**	**B**	**C**			
5	**Компл.1**	20	50	10	5000	<=	5000
6	**Компл.2**	20	0	40	4000	<=	4000
7	**Компл.3**	20	10	10	3960	<=	4000
8	**Цена изделия, руб**	500	700	550			
9	**Количество**	X1	X2	X3			
10	**изделий, шт.**	180	26	10			
11	**Целевая функция-Доход**	113700					

Выводы: Из данного запаса комплектующих можно изготовить изделий вида А – 180 шт., изделий типа В – 26 шт., изделий типа С – 10 шт. Комплектующие 1 и 2 типов будут израсходованы полностью, 3 комплектующего останется 40 ед. При этом при реализации изделий будет получен максимально возможный доход 113700 рублей.

Работа 7.2. Задачи для самостоятельного решения

Решить ниже приведенные задачи, используя **Поиск решения.**

ЗАДАЧА 1

В одной из туристических фирм, на Черноморском побережье в каждом заезде запланирован пеший поход в горное селение, находящееся на высоте 2,5 км от моря. В селение ведут три тропы, две из которых имеют вторую категорию сложности, а третья – четвертую катего-

рию. Для четвертой категории сложности требуется специальное медицинское заключение и, таким образом, сужается круг участников похода. Для похода по второй категории сложности требуется 1 сопровождающий на 10 отдыхающих; для похода по четвертой категории сложности требуется 1 сопровождающий на 5 отдыхающих. Стоимость похода для каждого отдыхающего по второй категории сложности равен 200 руб. в день, а по четвертой – 350 руб. Для похода по первому маршруту требуется 6 дней, по второму – 5; а для похода по четвертой категории сложности – 2 дня. В одном из заездов в поход пожелало пойти 54 человека. После мед. проверки, в случае выхода похода по четвертой категории сложности остался 21 человек. Определите выбор маршрутов при условии максимальной финансовой выгоды для туристической фирмы, если фирма имеет пять туристических имнструкторов.

ЗАДАЧА 2

Озеро можно заселить двумя видами рыб: А и В. Средняя масса рыбы вида А равна 2 кг, а вида В – 1 кг. В озере имеется два вида пищи P1 и P2. Средние потребности одной рыбы вида А составляют 1 ед. корма P1 и 3 ед. корма P2 в день. Аналогичные потребности для рыбы вида В составляют 2 ед. и 1 ед. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 500 ед. P1 и 900 ед. P2. Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?

ЗАДАЧА 3

Имеется четыре типа железорудных концентратов с содержанием железа Fe_i (i = 1, 2, 3, 4) и содержанием серы S_i (i=1, 2, 3, 4). Необходимо составить шихту для окомкования так, чтобы содержание в ней серы было минимальным, а содержание железа $Fe_{min} \le Fe \le Fe_{max.}$

Исходные данные:

Плановое задание: Fe_{max} =63%; Fe_{min} =61%.

Содержание железа в концентратах Fe_1 = 62%; Fe_2 = 60%; Fe_3 = 63%; Fe_4 = 64%.

Содержание серы в концентратах S_1 =0,3%; S_2 =0,2%; S_3 =0,4%; S_4 =0,2%;

Дополнительные ограничения X1 = 0,1; X2 ≥ 0,2.

Указание: количество каждого типа концентрата в шихте определять в долях единицы.

7. Решение задач оптимизации

8. РЕШЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ OFFICE

Работа 8.1. Документ «Обогатительная задача».

ЗАДАНИЕ

1. Загрузите WORD. **Пуск – Программы – Microsoft Office – Microsoft Word**.
2. Выведите на экран Панели Инструментов (ПИ) «**Стандартная**», «**Форматирования**» (если их нет). Добавьте на ПИ «Форматирования» кнопки «**нижний и верхний индекс**».
3. Кнопками ПИ «Форматирования» установите: шрифт – 

, выравнивание **по ширине**, межстрочный интервал 1,5.
4. Установите размеры полей: верхнее и нижнее – 2 см, левое 3 см, правое 1,5 см.
5. Наберите 1–4 абзацы приведенного текста «Обогатительная задача».
6. Вставьте **Надпись**, наберите внутри его текст, с параметрами форматирования: высота 16; жирный курсив, с выравниванием по центру, граница с тенью.
7. Наберите последующий текст с формулами. Однострочные формулы набирайте символами, остальные, используя редактор формул.
8. Поместите курсор в месте расположения рисунка и создайте рисунок схемы.

Обогатительная задача.

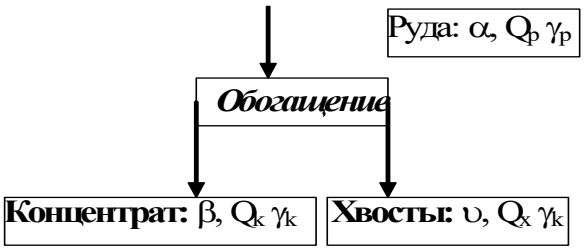
На обогатительную фабрику поступает руда, характеризуемая количеством Q_p и качеством – массовой долей полезного компонента в руде. В результате обогащения руда разделяется на два продукта концентрат и отходы (или на несколько продуктов в зависимости от типа руды, например полиметаллические руды, содержат несколько извлекаемых компонентов, поэтому в результате обогащения получается несколько концентратов).

Концентрат характеризуется количеством Q_K и качеством β– массовой долей полезного компонента в концентрате.

Отходы (на технологическом жаргоне отходы называются «хвосты») характеризуется количеством Q_x и качеством υ–массовой долей полезного компонента в отходах.

Процессы обогащения подчиняются законам *материального баланса*, суть которого заключается в следующем:

Сколько продукта вошло в операцию обогащения,
Столько же должно выйти из операции обогащения.



Закон материального баланса можно пояснить на примере простой схемы:

γ_p γ_k γ_x – выход соответственно руды (он всегда равен 100%), концентрата и хвостов.

Уравнения материального баланса:

$$100 = \gamma_к + \gamma_x; \quad (1)$$

$$100\alpha = \gamma_к\beta + (100 - \gamma_к)\upsilon \quad (2)$$

Из уравнений материального баланса определяется выход хвостов $\gamma_x = 100 - \gamma_к$ выход концентрата $\gamma_к = \frac{\alpha - \upsilon}{\beta - \upsilon} * 100$ (3) и извлечение $\varepsilon = \gamma_к \frac{\beta}{\alpha}$ (4)

Количество концентрата $Q_k = Q_p\gamma_k$, количество отходов $Q_x = Q_p(100 - \gamma_k)$

Обычно результаты расчета технологического баланса сводятся в таблицу.

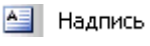
9. В этом же документе создайте таблицу, заполните её информацией и отформатируйте: установите соответствующие шрифты, обрамление и заливку. В «шапке» выравнивание по центру. Обрамление и заливку осуществите кнопками ПИ «Границы и заливка».

Результат технологического баланса

Наименование продукта	Выход	Количество продукта	Массовая доля полезного компонента
Концентрат	γ_k	Q_k	β
Отходы (хвосты)	$100-\gamma_k$	Q_x	υ
Руда	100	Q_p	α

10. Предъявите работу преподавателю и оформите отчет.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Вывод на экран ПИ. Подключить панели инструментов – **ВИД – Панели Инструментов –**отметьте нужные панели, для добавления кнопок на ПИ выполните далее **Настройка –** вкладка **Команды –** категория **Формат** – найдите нужную кнопку и мышью перетащите на ПИ.
2. Установить размеры полей **ФАЙЛ – Параметры страницы –** вкладка **Поля –…**
3. Ввод символов, отсутствующих на клавиатуре **ВСТАВКА – Символ …**мышью выбираете символ, затем кнопка ЗАКРЫТЬ.
4. Ввод индексовь – «нажимаете» мышью кнопку «**индекс**»  на ПИ и вводите нужный символ, затем кнопку «отжимаете».
5. Вставить **Надпись – ВСТАВКА – Надпись** или кнопка 

6. Обвести границу – выделить объект **– ФОРМАТ – Границы и заливка –** вкладка **Границы – Тень – Тип линии – Цвет** и др.
7. Ввод формул **ВСТАВКА – Объект – Microsoft Equation** и далее используя ПИ редактора формул, выбираете соответствующие кнопки со структурами формул или символов. Формула создается как единое целое. Выйти из редактора – (1ЩЛЧК) вне окна формулы, вернуться к набору или исправлению формулы (2ЩЛЧК) на формуле.
8. Создать рисунок **ВСТАВКА – Объект – Рисунок Microsoft** и затем, используйте инструменты ПИ Рисования: линия; толщина линий, вид стрелок; надпись; цвет и др. Текст набирается только в **Надпись**. Завершите рисунок командами **Восстановить границы рисунок, Обтекать текстом, Закрыть**.
9. Создание таблицы – кнопка «**Нарисовать таблицу**» или команду **ТАБЛИЦА – Добавить таблицу…,** укажите число строк и столбцов.

Заполнение таблицы – обычный ввод текста. Перемещение по таблице – (ЩЛЧК) мышью или клавиша **Tab**.

Работа 8.2. Расчет материального баланса при обогащении с использованием EXCEL.

ЗАДАНИЕ 1

1. Создайте таблицу «**1. Исходные данные**». В «шапке» таблицы ячейки «**№ секции**», «**Руда**», «**Концентрат**», «**Отходы**» объедините. Текст в них выровняйте по центру. Введите числовые данные в столбец «**№ смены**» Автозаполнением, в столбцы «**Мас.доля, %**» и «**Количество, т/час**» как приведено в таблице.
2. Обрамите таблицу и залейте по приведенному образцу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		***1. Исходные данные***									
3		**Руда**		**Концентрат**				**Отходы**			
4	№	**Количество, т/ч**	**Мас. доля, %**	**Количество, т/ч**	**Мас. доля, %**	**Выход, %**	**Извлечение, %**	**Количество, т/ч**	**Мас. доля, %**	**Выход, %**	**Потери, %**
5	1	100	16,5		60,5				5		
6	2	150	16,2		67,9				5,3		
7	3	170	15,9		54,9				4,4		
8	4	200	14,8		61,4				6,2		
9	5	180	16,8		54,9				7,9		
10	6	150	17,6		56,9				4,2		
11	7	140	18		60,3				5,1		
12	8	170	17,5		62,5				4,3		

3. Скопируйте таблицу «**1. Исходные данные**», назовите копию «**2. Результаты расчета**».
4. В ячейки D17, F17, G17, H17, J17, K17 введите формулы (по правилам Excel), начиная с ячейки F17 «Выход» концентрата $\gamma_к = \frac{\alpha - \upsilon}{\beta - \upsilon} * 100$, G17 «Извлечение» концентрата $\varepsilon = \gamma_к \frac{\beta}{\alpha}$, J17 «Выход» отходов $\gamma_x = 100 - \gamma_к$, K17 «Потери» с отходами $\varepsilon_x = 100 - \varepsilon_k$, D17 «Количество концентрата» $Q_k = Q_p \gamma_k$, H17 «Количество отходов» $Q_{отх} = Q_p - Q_k$, где

α– количество руды, т/ч; Q_p– масс. доля руды, %; Q_k– количество концентрата, т/ч; β– масс. доля концентрата, %; γ_k– выход концентрата, %; ε_k– извлечение концентрата, %; Q_k– количество отходов, т/ч; ν– масс. доля отходов руды, %; γ_x– выход отходов, %; ε_x– потери с отходами, %;

6. Скопируйте формулы из ячеек D17, F17:H17, J17:K17 в нижележащие до строки 24

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
14	*2. Результаты расчета*										
15		Руда		Концентрат				Отходы			
16	№	Коли-чество, т/ч	Мас. доля, %	Коли-чество, т/ч	Мас. доля, %	Вы-ход, %	Извлече-ние, %	Коли-чество, т/ч	Мас. доля, %	Вы-ход, %	Потери, %
17	1	100	16,5	21	60,5	20,72	75,98	79	5	79,28	24,02
18	2	150	16,2	26	67,9	17,41	72,98	124	5,3	82,59	27,02
19	3	170	15,9	39	54,9	22,77	78,63	131	4,4	77,23	21,37
20	4	200	14,8	31	61,4	15,58	64,63	169	6,2	84,42	35,37
21	5	180	16,8	34	54,9	18,94	61,88	146	7,9	81,06	38,12
22	6	150	17,6	38	56,9	25,43	82,20	112	4,2	74,57	17,80
23	7	140	18	33	60,3	23,37	78,29	107	5,1	76,63	21,71
24	8	170	17,5	39	62,5	22,68	81,00	131	4,3	77,32	19,00
25	**Итого**	1260	16,59	260	59,53	20,65	74,11	1000	5,41	79,35	25,89

9. Оформите строку **Итоги**. В ячейку B25 – введите формулу $Q_{cp} = \sum Q_i$, используя функцию СУММ(B17:B24), затем скопируйте её в ячейки D25, H25. В ячейку C25 введите формулу $\alpha_{cp} = \sum(Q_i \cdot \alpha_i) / \sum Q_i$, используя функцию СУММПРОИЗВ(B17:B24;C17:C24) и СУММ(B17:B24), затем скопируйте формулу в ячейки E25, I25. В ячейки F25:G25, J25, K25 скопируйте формулы из вышестоящих ячеек.

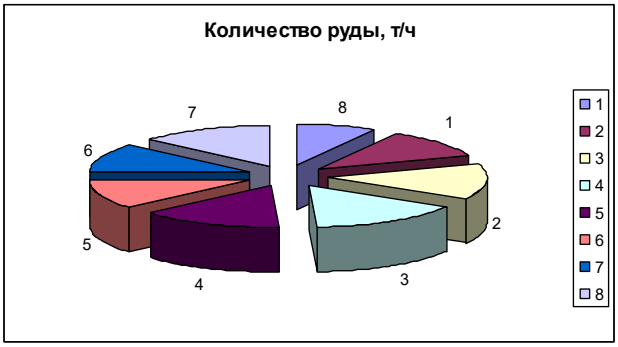
10. Постройте круговую диаграмму и график, с двумя осями ординат, оформите её соответствующими надписями.

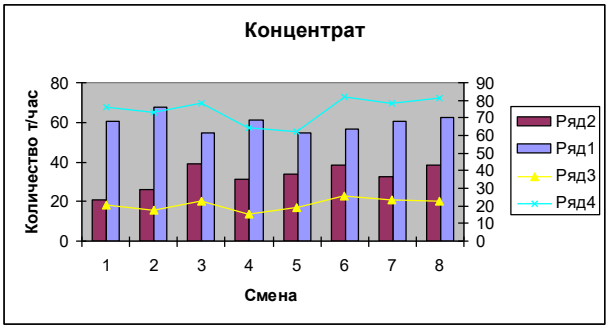
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

- Объединить ячейки: **ФОРМАТ – Ячейки** – вкладка **Выравнивание – Объединить ячейки – Выравнивание по центру**;
- Обрамление и заливка: **ФОРМАТ – Ячейки** – вкладка **Граница, вкл. Вид**;
- Копирование: **ПРАВКА – Копировать**, курсор в ячейку A15, **ПРАВКА – Вставить**;
- **Ввод формул**: наберите =, мышью указывайте адреса нужных ячеек, вводите знаки арифметических действий, скобки и функции, используя МАСТЕР ФУНКЦИЙ.
- **Копирование формул**: выделите фрагмент, мышью зацепите Маркер заполнения и переместите до нужной ячейки.
- **Построение графиков**. Выделите диапазон ячеек с исходными данными с шапкой таблицы, включите **Мастер Диаграмм**  ,

на вкл. **Параметры** введите название диаграммы, выберите место размещения.

- Построение графика с двумя осями. Выделите диапазон ячеек с данными для построения первого графика (диаграммы) (D17:D24), – **МАСТЕР ДИАГРАММ – Тип Диаграмм – Гистограмма – Далее –** вкладка **Ряды – Добавить** (переключитесь на таблицу) **–**в поле **Имя** установите ссылку на ячейку E16 , в поле **Значения** – укажите диапазон ячеек E17:E24. Нажмите кнопку **НАЗАД –** вкладка **Нестандартные,** выберите **График Гистограмм 2**, вновь перейдите на вкладку ряды и добавьте аналогично данные для построения других графиков – **ДАЛЕЕ –** вкладка **Параметры –**введите название графика и Осей – **ДАЛЕЕ** –Выберите место расположения.
- Для редактирования и форматирования диаграммы или её фрагментов выделите её, а затем используйте команды меню **ДИАГРАММА** или команды **Контекстного меню (КМ).**





ЗАДАНИЕ 2

1. Загрузить файл с таблицы «обогатительная задача»
2. Изменить значение в таблице «массовая доля в руде», посмотрите как изменился результат
3. Переместите графики на отдельные листы; переименуйте рабочие листы с графиками.
4. Таблицу «Результаты расчета» скопировать на другой рабочий лист, присвоив имя этому рабочему листу «Сортированный»
5. Добавте в начало таблицы столбцы «Дата», «Смена».
6. Отделите заголовок от таблицы пустой строкой.
7. Добавьте перед Итоговой строкой 10 пустых строк.
8. Добавте 7 новых записей в таблицу используя встроенную Форму.
9. Скопируйте новую таблицу с листа «Сортированный» на новый рабочий лист, присвоив ему имя «Фильтрованный».
10. На листе «Сортированный» отсортируйте таблицу, выбрав первым параметром сортировки «количество руды» по возрастанию и вторым параметром «массовую долю в руде» по убыванию.
11. На листе «Фильтрованный» отфильтруйте таблицу, вводя только записи для тех смен, в которые «извлечение» больше 65% и меньше 80%; окрасте записи одним цветом; отмените автофильтр.
12. На листе «Сортированный» подведите промежуточные итоги для каждой смены: 1, 2 и 3, подсчитав суммы для полей: количество руды, концентрата и отходов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

- Для перемещения графика на отдельный лист, выделите график и используйте **Контекстное меню–Рамещение–Отдельный лист**
- Для переименования листа **Контекстное меню** ярлыка рабочего листа**–Переименовать**
- Для вставки строк/столбцов **ВСТАВИТЬ – Строки/Столбцы.**
- Для добавления новой записи. Поставьте курсор в любую заполненную ячейку таблицы и выполнить **ДАННЫЕ–Форма–Добавить –** ввести данные в соответствующие поля, аналогичные тем, что в таблице.

- Сортировка данных в таблице. Поставьте курсор в любую заполненную ячейку таблицы и выполните **ДАННЫЕ – Сортировать –** по возрастанию/по убыванию
- При фильтровании таблицы поставьте курсор в любую заполненную ячейку таблицы и выполнить **ДАННЫЕ –Фильтрация** – задать условие фильтрации.
- При подведение промежуточных итогов таблица должна быть отсортирована по соответствующему полю. Поставьте курсор в любую заполненную ячейку таблицы и выполнить **ДАННЫЕ– Итоги,** укажите поле при изменении которого нужно подводить итоги, расположение итоговой строки, математическое действие (сумма) и выбрать имена полей: «количество руды», «количество концентрата», «количество отходов».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				Руда		Концентрат				Отходы			
2	№	Дата	Смена	Коли-чество, т/ч	Мас. доля, %	Коли-чество, т/ч	Мас. доля, %	Вы-ход, %	Извлече ние, %	Коли-чество, т/ч	Мас. доля, %	Вы-ход, %	Поте-ри, %
3			**Общий итог**	2468		508				1960			
4			**1 Итог**	785		155				630			
5	1	01.09.2007	1	100	16,5	21	60,5	20,72	75,98	79	5	79,28	24,02
6	7	03.09.2007	1	140	18	33	60,3	23,37	78,29	107	5,1	76,63	21,71
7	10	04.09.2007	1	155	17,3	33	63,5	21,03	77,18	122	5	78,97	22,82
8	13	05.09.2007	1	190	15,8	38	59,6	19,78	74,61	152	5	80,22	25,39
9	4	02.09.2007	1	200	14,8	31	61,4	15,58	64,63	169	6,2	84,42	35,37
10			**2 Итог**	850		172				678			
11	2	01.09.2007	2	150	16,2	26	67,9	17,41	72,98	124	5,3	82,59	27,02
12	8	03.09.2007	2	170	17,5	39	62,5	22,68	81,00	131	4,3	77,32	19,00
13	11	04.09.2007	2	170	17,5	38	58	22,41	74,29	132	5,8	77,59	25,71
14	14	05.09.2007	2	180	17,0	35	63	19,30	71,52	145	6	80,70	28,48
15	5	02.09.2007	2	180	16,8	34	54,9	18,94	61,88	146	7,9	81,06	38,12
16			**3 Итог**	833		181				652			
17	6	02.09.2007	3	150	17,6	38	56,9	25,43	82,20	112	4,2	74,57	17,80
18	9	03.09.2007	3	160	16,0	34	60	21,43	80,36	126	4	78,57	19,64
19	12	04.09.2007	3	163	14,9	26	62,3	16,11	67,34	137	5,8	83,89	32,66
20	3	01.09.2007	3	170	15,9	39	54,9	22,77	78,63	131	4,4	77,23	21,37
21	15	05.09.2007	3	190	16,0	44	56	23,08	80,77	146	4	76,92	19,23
22													
23													
24													
25	**Итого**			4151	9,97	429	36,92	20,20	74,75	1696	3,16	79,80	25,25

Таблица рабочего листа «Сортированный» с промежуточными итогами.

Итоговая строка над данными.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				Руда		Концентрат				Отходы			
2	№	Дата	Смена	Количес-тво, т/	Мас. доля,	Количес-тво, т/	Мас. доля,	Выход, %	Извлече-ние, %	Количес-тво, т/	Мас. доля,	Выход, %	Потери, %
3	1	01.09.2007	1	100	16,5	21	60,5	20,72	75,98	79	5	79,28	24,02
4	2	01.09.2007	2	150	16,2	26	67,9	17,41	72,98	124	5,3	82,59	27,02
5	3	01.09.2007	3	170	15,9	39	54,9	22,77	78,63	131	4,4	77,23	21,37
6	4	02.09.2007	1	200	14,8	31	61,4	15,58	64,63	169	6,2	84,42	35,37
7	5	02.09.2007	2	180	16,8	34	54,9	18,94	61,88	146	7,9	81,06	38,12
8	6	02.09.2007	3	150	17,6	38	56,9	25,43	82,20	112	4,2	74,57	17,80
9	7	03.09.2007	1	140	18	33	60,3	23,37	78,29	107	5,1	76,63	21,71
10	8	03.09.2007	2	170	17,5	39	62,5	22,68	81,00	131	4,3	77,32	19,00
11	9	03.09.2007	3	160	16,0	34	60	21,43	80,36	126	4	78,57	19,64
12	10	04.09.2007	1	155	17,3	33	63,5	21,03	77,18	122	5	78,97	22,82
13	11	04.09.2007	2	170	17,5	38	58	22,41	74,29	132	5,8	77,59	25,71
14	12	04.09.2007	3	163	14,9	26	62,3	16,11	67,34	137	5,8	83,89	32,66
15	13	05.09.2007	1	190	15,8	38	59,6	19,78	74,61	152	5	80,22	25,39
16	14	05.09.2007	2	180	17,0	35	63	19,30	71,52	145	6	80,70	28,48
17	15	05.09.2007	3	190	16,0	44	56	23,08	80,77	146	4	76,92	19,23
18													
19													
20													
21	Итого			2468	16,59	260	59,53	20,65	74,11	1000	5,41	79,35	25,89

Таблица рабочего листа «Фильтрованный».
Цветом выделены строки, удовлетворяющие условию.

Работа 8.3. Рабочая книга расчета заработной платы.

ЗАДАНИЕ

Разработать рабочую книгу расчета Заработной Платы.
Она должна включать следующие Рабочие листы:
Лист1 – **Общий**, Лист2 – **Январь**, Лист3 – **Февраль**, Лист4 –**Март**
Лист Общий содержит таблицы: «Исходные данные» и «Итоговые данные» – информацию об итоговых показателях за расчитанные месяцы.
Листы Январь, Февраль и Март содержат расчетную информацию о Заработной плате коллектива сотрудников.
Порядок выполнения работы:

1. Переименуйте лист1, присвоив ему имя Общий. Для этого щелкните ярлык Лист1 и в Контекстном меню (КМ) выберите команду **Переименовать**, введите новое имя «Общий».
2. Создайте табличку, приведенную ниже. Заполните столбец Месяц Автозаполнением: введитев ячейку Январь и потяните за маркер заполнения
3. Обрамите таблицу и залейте первые строку и столбец, используя кнопки ПИ или команды **ФОРМАТ – Ячейки…–Рамка (Вид)**. При редактировании таблицы используйте команды меню **Правка, Вставка**.
4. Перейдите на Рабочий Лист2, переименуйте его в Январь и выполните на нем расчеты в соответствии с последующими указаниями. Проверьте результаты расчетов по заданию.
5. Скопируйте рабочий лист Январь, переименуйте копию в Февраль и выполните на нем действия (редактирование) в соответствии с последующими указаниями. Проверьте результаты расчетов по заданию.
6. Скопируйте рабочий лист Февраль, переименуйте копию в Март и выполните на нем действия (редактирование) в соответствии с последующими указаниями. Проверьте результаты расчетов по заданию.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные**				**Итоговые данные**			
2	год	2002						
3	Месяц	Кол.раб.дней в месяце	Мин.ЗП.		Месяц	Зар.пл. с РК	Зар.пл.итогом	Налог
4	Январь	21	100		Январь	3423	3423	445
5	Февраль	21	110		Февраль	4066	7489	529
6	Март	22	110		Март	3558	11047	463
7	Апрель	22			Апрель			
8	Май	21			Май			
9	Июнь	22			Июнь			
10	Июль	22			Июль			
11	Август	23			Август			
12	Сентябрь	22			Сентябрь			
13	Октябрь	23			Октябрь			
14	Ноябрь	22			Ноябрь			
15	Декабрь	23			Декабрь			

7. На листе «Общий» создайте таблицу «Итоговые данные». Заполните столбец Месяц автозаполнением. Названия 2,3,4 столбцов заполняйте как формулы, беря соответствующие значения из таблиц Листов Январь, Февраль, Март

8. Измените в листах Февраль, Март данные в столбце Кол.отработанных дней. Посмотрите результат в Итоговой таблице.
9. Измените размер Мин.зарплаты, посмотрите результат в Итоговой таблице.
10. Исследуйте различные ячейки с помощью инструментов панели **Зависимости:**

Влияющие ячейки, Зависимые ячейки, Окно информации, в котором выведите все сведения о ячейке.

Рабочий лист «Январь». Порядок выполнения работы.

1. Создайте таблицу. Приведенную ниже. Для этого:
   столбец «№» заполните автозаполнением как арифметическую прогрессию – через КМ или **Правка – Заполнить – Прогрессия** или используя маркер заполнения.
   столбец «ФИО» заполните автозаполнением, предварительно создав Список Пользователя **СЕРВИС – Параметры – Списки,** кнопка **Добавить**, в окно Элементы списка ввести Фамилии. Вставить список в таблицу – набрать первое ФИО и потянуть маркер вниз.

столбцы «Разряд», «Тариф.коэф», «Раб.дни» – данные относящиеся к конкретному работнику заполняются числами приведенными в таблице.

При заполнении столбца **«Тариф.коэф»** проверьте установку **СЕРВИС – Параметры – Првка – Фиксированный десятичный формат при вводе –** разрядов **–2**

Значение других столбцов и строки **«Итого»** вычисляются.

2. Вычислить значения полей для первой строки: «Зар.пл.»– заработанная плата; «Зар.пл. с РК» – Зарплата с районным коэффициентом; «Зар.пл. итогом» – это зарплат наращенным итогом с начала года; «Налог», «Начислено» – это «Зар.пл. с РК» минус «Налог».

   «Зар. пл.» = (Тариф.коэф. * Раб.дни * Мин.Зар.пл) / Кол.рабочих дней в месяце; например в ячейке F3 формула **=D3*E3*Общий!$C$4/Общий!$B$4.**

   «Зар. пл. с РК» = 1,15 * Зар.пл.; формула в G3 **=1,15*F3.**

   «Зар. пл. итогом» за Январь = Зар. пл. с РК; формула в H3 **=G3.**

   «**Налог**» **=** Если Зар. пл. итогом <12000, то Налог = 0,13 * Зар. пл. с РК, иначе Налог = 0,2 * Зар. пл. с РК; формула в I3 **=ЕСЛИ(H3<12000;0,13*G3;0,2*H3).**

   «Начислено» = Зар. пл. с РК – Налог; формула в J3 **=G3–I3.**

3. Скопировать формулы из интервала ячеек первой строки таблицы в интервалы второй – пятой строк таблицы используя Маркер заполнения.
4. Вычислить итоговые показатели, используя кнопку **Автосуммирования** Σ или **МАСТЕР ФУНКЦИЙ.**

Рабочий лист Январь

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Расчет заработной платы за январь 2002г.**									
2	№	ФИО	Разряд	Тариф.коэф.	Раб.дни	Зар.пл.	Зар.пл. с РК	Зар.пл.итогом	Налог	Начислено
3	1	Ивнов И.И.	10	5,84	21	584,00	671,60	671,60	87,31	584,29
4	2	Петров П.П.	12	6,25	21	625,00	718,75	718,75	93,44	625,31
5	3	Сидоров С.С.	15	7,36	15	525,71	604,57	604,57	78,59	525,98
6	4	Егоров Е.Е.	9	5,67	20	540,00	621,00	621,00	80,73	540,27
7	5	Афанасьеф А.А.	14	7,02	21	702,00	807,30	807,30	104,95	702,35
8		Итого				2976,71	3423,22	3423,22	445,02	2978,20

5. Подготовьте рабочий лист **Февраль**.

Рабочий лист «Февраль». Порядок выполнения работы.

1. Проверьте значения в поле «Раб. Дни» для каждого работника.
2. Скорректируйте формулы в столбцах: «**Зар. пл.**» и «**Зар. пл. итогом**» = Зар. пл. с РК за январь + Зар. пл. с РК за февраль;

Зар. пл. =D3*E3*Общий!$C$5/Общий!$B$5

Зар. пл. итогом =G3+Январь!G3

3. Скопируйте скорректированные формулы вниз по соответствующему столбцу.

В остальных столбцах формулы остаются неизменными. Проверьте это, активизируя различные ячейки и анализируя вид формулы.

4. Подготовьте рабочий лист **Март.**

Рабочий лист Февраль

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Расчет заработной платы за февраль 2002г.**									
2	№	ФИО	Разряд	Тариф.коэф.	Раб.дни	Зар.пл.	Зар.пл. с РК	Зар.пл.итогом	Налог	Начислено
3	1	Ивнов И.И.	10	5,84	21	642,40	738,76	1410,36	96,04	642,72
4	2	Петров П.П.	12	6,25	21	687,50	790,63	1509,38	102,78	687,84
5	3	Сидоров С.С.	15	7,36	21	809,60	931,04	1535,61	121,04	810,00
6	4	Егоров Е.Е.	9	5,67	21	623,70	717,26	1338,26	93,24	624,01
7	5	Афанасьеф А.А.	14	7,02	21	772,20	888,03	1695,33	115,44	772,59
8		Итого				3535,40	4065,71	7488,93	528,54	3537,17

Рабочий лист Март. Порядок выполнения работы.

1. Откорректируйте формулы в ячейках «**Зар. пл.**» и «**Зар. пл. итогом**». К последней прибавьте Зар. пл. с РК за январь и февраль;

Зар. пл. =D3*E3*Общий!$C$6/Общий!$B$6

Зар. пл. итогом =G3+Январь!G3+Февраль!G3

Рабочий лист Март

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Расчет заработной платы за март 2002г.**									
2	№	ФИО	Разряд	Тариф.коэф.	Раб.дни	Зар.пл.	Зар.пл. с РК	Зар.пл.итогом	Налог	Начислено
3	1	Ивнов И.И.	10	5,84	22	642,40	738,76	2149,12	96,04	642,72
4	2	Петров П.П.	12	6,25	22	687,50	790,63	2300,00	102,78	687,84
5	3	Сидоров С.С.	15	7,36	10	368,00	423,20	1958,81	55,02	368,18
6	4	Егоров Е.Е.	9	5,67	22	623,70	717,26	2055,51	93,24	624,01
7	5	Афанасьеф А.А.	14	7,02	22	772,20	888,03	2583,36	115,44	772,59
8		Итого				3093,80	3557,87	11046,80	462,52	3095,35

Вероника Всеволодовна Тимухина, доц, канд. техн. наук,
Алексей Владимирович Дружинин, доц, канд. техн. наук,
Тамара Григорьевна Завражина, доц, канд. техн. наук,
Раиса Александровна Мезенцева, инженер,
Тамара Александровна Самакаева, инженер,
Светлана Михайловна Колмогорова, инженер.

ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Методические указания
к лабораторным работам по дисциплине «Прикладное программное обеспечение»
для студентов технологических специальностей
очной и заочной форм обучения

Корректура кафедры информатики.
Подписано к печати
Формат бумаги 60 х 84 1/16
Печ. л. 7,18 Тираж 200 экз.

Издательство ГОУ ВПО УГГУ
Екатеринбург, ул. Куйбышева 30
Уральский государственный горный университет
лаборатория множительной техники

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-
методической работе
_____В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Б1.О.13 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Информатики	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Дружинин А.В.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 19.09.2024	Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 3
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 ... 10
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров» ... 10
Создание файла базы данных Access ... 10
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 ... 19
Работа с простыми запросами ... 19
Конструирование запросов на выборку с условием отбора ... 19
Вычисляемые поля в запросах ... 22
Параметры в запросах ... 24
Групповые операции в запросах ... 26
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 ... 30
Работа с многотабличными запросами ... 30
Запросы на изменение ... 34
Задание для самостоятельной работы ... 37
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 ... 38
Работа с формами ... 38
Условное форматирование элементов управления ... 39
Создание разделенной формы ... 41
Многотабличные формы ... 42
Создание многотабличной формы с помощью мастера ... 43
Одиночная многотабличная форма ... 46
Задание для самостоятельной работы ... 50
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5 ... 50
Работа с отчетами ... 50
Задание для самостоятельной работы ... 52
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6 ... 53
Создание главной кнопочной формы ... 53
с использованием макросов ... 53
Создание управляющих кнопок на экране ... 56
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ... 61
Указания к выполнению работы ... 61
Варианты заданий ... 61
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ... 73

ВВЕДЕНИЕ

Система управления базами данных

СУБД (система управления базами данных) является универсальным программным инструментом создания и обслуживания баз данных и приложений пользователя в самых разных предметных областях. СУБД обеспечивает создание, многоаспектный доступ к данным и использование одних и тех же данных различными задачами и приложениями пользователей.

СУБД поддерживаются различные модели данных. *Модель данных* – это метод (принцип) логической организации данных, используемый СУБД. Наиболее известными являются иерархическая, сетевая и реляционная модели.

В СУБД для персональных компьютеров (настольных СУБД) поддерживается преимущественно *реляционная модель*, которую отличает простота и единообразие представления данных простейшими *двумерными таблицами.*

Основной логической структурной единицей манипулирования данными является *строка* таблицы – *запись*. *Структура записи* определяется составом входящих в неё *полей*. Совокупность полей записи соответствует логически связанным реквизитам, характеризующим некоторую сущность предметной области.

Типовыми функциями СУБД по манипулированию данными являются выборка, добавление, удаление, изменение данных.

- *Выборка данных* – выборка записей из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц в соответствии с заданными условиями.
- *Добавление* и *удаление* данных – добавление новых записей в таблицы и удаление существующих.
- *Изменение данных* – изменение значений данных в полях существующих записей.

Данные из одной или нескольких взаимосвязанных таблиц могут подвергаться обработке. К операциям *обработки* относятся, например, расчеты в пределах каждой записи, группировка записей в соответствии с *заданным* критерием группировки и обработка записей выделенных групп с помощью статистических функций, таких как суммирование, определение максимального, подсчет числа записей в группе и т. п.

СУБД Access включает разнообразные и многочисленные относительно автономные инструментальные средства, ориентированные на создание объектов базы данных и приложений пользователя.

- *Разнообразие мастера* в режиме ведения диалога с пользователем позволяют создавать объекты и выполнять разнообразные функции по реорганизации объектов базы данных и приложений пользователя.
- *Средства программирования* СУБД включают язык запросов *SQL*, язык макрокоманд и язык объектно-ориентированного программирования для приложений *Microsoft Visual Basic for Applications (VBA).*
- *Средства графического конструирования* позволяют создавать объекты базы данных и объекты приложения с помощью многочисленных графических элементов, не прибегая непосредственно к программированию. Среди многочисленных средств графического конструирования и диалоговых средств Access следует выделить средства для создания:
- таблиц и схем баз данных, отображающих их связи;
- запросов выборки, отбирающих и объединяющих данные нескольких таблиц в виртуальную таблицу, которая может использоваться во многих задачах приложения;
- запросов на изменение данных базы;
- экранных форм, предназначенных для ввода, просмотра и обработки данных в диалоговом режиме;
- отчетов, предназначенных для ввода, просмотра и вывода на печать данных из базы и результатов их обработки в удобном для пользователя виде.

Реляционная база данных

База данных является организованной на машинном носителе совокупностью взаимосвязанных данных и содержит сведения о различных сущностях одной предметной области: реальных объектах, процессах, событиях или явлениях.

Реляционная база данных представляет собой множество взаимосвязанных двумерных таблиц – *реляционных таблиц*, называемых также *отношениями*, в каждой из которых содержаться сведения об одной сущности автоматизируемой предметной области.

Логическую структуру реляционной базы данных образует совокупность реляционных таблиц, между которыми установлены логические связи.

В таблицах базы должны сохраняться все данные, необходимые для решения задач предметной области, причем каждый элемент данных должен храниться в базе только в одном экземпляре. Для создания таблиц,

соответствующих реляционной модели данных, используется процесс, называемый нормализацией данных. *Нормализация* – это удаление из таблиц повторяющихся данных путем их переноса в новые таблицы, записи которых не содержат повторяющихся значений.

Структура реляционной таблицы определяется составом полей. Каждое *поле* отражает определенную характеристику сущности. Для поля указывается *тип* и *размер* элементарного данного, размещаемого в нем, и ряд др. свойств. Содержимое поля отображается в столбце таблицы. Столбец таблицы содержит данные одного типа.

Содержание таблицы заключено в её строках, однотипных по структуре, каждая строка таблицы содержит данные о конкретном экземпляре сущности и называется *записью*.

Для однозначного определения (*идентификации)* каждой записи таблица должна иметь *уникальный (первичный) ключ.* По значению ключа таблицы отыскивается единственная запись в таблице. Ключ может состоять из одного или нескольких полей таблицы. Значение уникального ключа не может повторяться в нескольких записях.

Логические связи между таблицами дают возможность объединять данные из разных таблиц. Связь каждой пары таблиц задается одинаковыми полями в них – *ключом связи*. Таким образом, обеспечивается рациональное хранение недублированных данных и их объединение в соответствии с требованиями решаемых задач.

В нормализованной реляционной базе данных связь двух таблиц характеризуется отношениями записей типа «один-к-одному» (1:1) или «один-ко-многим» (1:M). Отношение 1:1 предполагает, что каждой записи одной таблицы соответствует одна запись другой таблицы. Отношение типа 1:M предполагает, что каждой записи первой таблицы соответствует много записей во второй, но каждой записи второй таблицы соответствует только одна запись в первой.

Для двух таблиц, находящихся в отношении типа 1:M, связь устанавливается по уникальному ключу таблицы, представляющей в отношении сторону «один», – *главной таблицы* в связи. Во второй таблице, представляющей в отношении сторону «многие» и называемой *подчиненной*, этот ключ связи может быть либо частью уникального ключа, либо не входить в состав ключа. В подчиненной таблице ключ связи называется ещё *внешним ключом*.

Схема данных

В СУБД Access процесс создания реляционной базы данных включает создание *схемы данных*. Схема данных наглядно отображает логическую структуру базы данных: таблицы и связи между ними, а также обеспечивает использование установленных в ней связей при обработке данных.

Для нормализованной базы данных, основанной на одно-многозначных и однозначных отношениях между таблицами, в схеме данных для связей таких таблиц по первичному ключу или уникальному индексу главной таблицы могут устанавливаться параметры *связной целостности*.

При поддержании целостности взаимосвязанных данных не допускается наличия записи в подчиненной таблице, если в главной таблице отсутствует связанная с ней запись. Соответственно при первоначальной загрузке базы данных, а также корректировке, добавлении и удалении записей система допускает выполнение операции только в том случае, если она не приводит к нарушению целостности. Связи, определенные в схеме данных, автоматически используются для объединения таблиц при разработке многотабличных форм, запросов, отчетов, существенно упрощая процесс их конструирования. В схеме связи могут устанавливаться для любой пары таблиц, имеющих одинаковое поле, позволяющее объединять эти таблицы. **Объекты Access**

База данных Access включает следующие сохраняемые в одном accdbфайле объекты:

- *таблицы, запросы, схемы данных,* непосредственно имеющие отношение к базе данных;
- *формы, отчеты, макросы* и *модули*, называемые *объектами приложения.*

Формы и отчеты предназначены для типовых процессов обработки данных: просмотра, обновления, поиска по заданным критериям, получения отчетов. Эти объекты приложений конструируются из графических элементов, называемых *элементами управления*. Основные элементы управления служат для отображения полей таблиц, являющихся источниками данных объекта.

Для автоматизации доступа к объектам и их взаимодействия используется программный код. Только с помощью программного кода получается полноценное приложение пользователя, функции которого доступны через меню, панели инструментов и формы. Для создания программного кода служат модули на языке *VBA* и макросы.

Каждый объект и элемент управления имеет свои свойства, определяя которые можно настраивать их. С каждым объектом и элементом управления связывается набор событий, которые могут обрабатываться макросами или

процедурами обработки событий на VBA, входящими в состав модулей форм, отчетов.

Объекты представлены в области навигации окна базы данных Access. Все операции по работе с объектами и приложениями начинаются в этом окне.

- *Таблицы* создаются пользователем для хранения данных об одной сущности – одном информационном объекте модели данных предметной области. Таблица состоит из полей (столбцов) и записей (строк). Каждое поле содержит одну характеристику информационного объекта предметной области. В записи собраны сведения об одном экземпляре информационного объекта. База данных Access может включать до 32768 объектов (в том числе формы, отчеты и т. д.). Одновременно может открываться до 2048 таблиц.
- *Запросы*. Запросы на выборку служат для выборки нужных данных из одной или нескольких связанных таблиц. Результатом выполнения запроса является виртуальная таблица. В запросе можно указать, какие поля исходных таблиц следует включить в запись таблицы запроса и как отобрать нужные записи. Таблица запроса может быть использована с другими таблицами базы при обработке данных. Запросы на изменение позволяют обновлять, удалять или добавлять данные в таблицы, а также создавать новые таблицы на основе уже существующих.
- *Схема данных* определяет, с помощью каких полей таблицы связываются между собой, как будет выполняться объединение данных этих таблиц, нужно ли проверять связную целостность при добавлении и удалении записей, изменение ключей таблиц. Схемы данных в области навигации в окне базы данных отображаются только в проектах Access, работающих с базами данных сервера. Для отображения схемы данных в базах данных Access используется команда **Схема данных**, размещенная на вкладке ленты **Работа с базами данных** в группе **Отношения**.
- *Формы* являются основным средством создания диалогового интерфейса приложения пользователя. Форма может создаваться для работы с электронными документами, сохраняемыми в таблицах базы данных. Вид таких документов может соответствовать привычному для пользователя бумажному документу. Форма используется для разработки интерфейса по управлению приложением. Включаемые в форму процедуры обработки событий позволяют управлять процессом обработки данных в приложении. Такие процедуры хранятся в модуле формы. В формы могут вставляться рисунки, диаграммы, звуковые фрагменты, видео. Возможна разработка форм с набором вкладок, с

каждой из которых связано выполнение той или иной функции приложения.

- *Отчеты* предназначены для формирования на основе данных базы выходных документов любых форматов, содержащих результаты решения задач пользователя, и вывода их на печать. Как и формы, отчеты могут включать процедуры обработки событий. Использование графических объектов позволяет дополнять данные отчета иллюстрациями. Отчеты обеспечивают возможность анализа данных при использовании фильтрации, агрегирования и представления данных источника в различных разрезах. *Макросы* являются программами, состоящими из последовательностей макрокоманд, которые выполняются по вызову или при наступлении некоторого события в объекте приложения или его элементе управления. Макросы данных выполняются при наступлении некоторого события в исходных таблицах. Макросы позволяют автоматизировать некоторые действия в приложении пользователя. Создание макросов осуществляется в диалоговом режиме путем выбора нужных макрокоманд и задания параметров, используемых ими при выполнении.
- *Модули* содержат процедуры на языке *Visual Basic for Applications*. Могут создаваться процедуры-программы, процедуры-функции, которые разрабатываются пользователем, и процедуры для обработки событий.

Интерфейс пользователя Access

Для Access 2013 разработан интерфейс пользователя, упрощающий доступ к многочисленным функциональным возможностям в процессе создания и работы с объектами базы данных и приложений пользователя.

Основу этого интерфейса составляют *ленты* и *область навигации.* Собранные на одной ленте команды четко соответствуют задачам, выполняемым в Access, что позволяет легко находить нужную команду.

Основные элементы интерфейса пользователя в Access 2013:

- *страницы*, предназначенные для управления файлами баз данных. Стартовая страница отображается при запуске Access и позволяет открыть существующие файлы баз данных или создать новые. В процессе работы доступны страницы, открываемые при щелчке на цветном значке **Файл**.

Они содержат команды для сохранения, сжатия и восстановления базы данных, определения параметров и ряд др.;

- *лента* – широкая полоса, расположенная в верхней части окна Access. Она содержит стандартные вкладки с группами наиболее часто используемых команд, контекстные вкладки, которые появляются только тогда, когда их использование допустимо, и *панель быстрого доступа* – небольшую панель инструментов, на которую можно добавить нужные команды. Лента является основой интерфейса пользователя и обеспечивает быстрый доступ к набору команд, применимых к выполняемым в базе данных в текущий момент работам;
- *коллекция (галерея)* – элемент интерфейса, который не просто отображает команды, а показывает набор результатов выполнения этих команд с отображением внешнего вида вариантов выбора;
- *диалоговые окна* могут выводиться при выполнении команд для уточнения операции и передачи параметров. В некоторых группах вкладок ленты имеются кнопки вызова диалоговых окон;
- *контекстное меню* вызывается щелчком правой кнопкой мыши на элементе объекта. Содержит команды, зависящие от контекста – элемента объекта, с которым работает пользователь, или выполняемой задачи; *панель быстрого доступа* – единственная панель инструментов, предусмотренная в интерфейсе. Она обеспечивает доступ одним нажатием кнопки к наиболее часто используемым командам. Это панель настраивается в соответствии с предпочтениями пользователя;
- *область навигации* расположена в левой части окна. В ней отображаются объединенные в группы объекты базы данных;
- *вкладки документов* – таблицы, запросы, формы, отчеты и макросы отображаются на вкладках в рабочем пространстве окна Access – окне документов;
- *строка состояния* – полоса в нижней части окна программы, в которой отображаются сведения о состоянии объекта и располагаются кнопки, позволяющие изменить режим его представления;
- *мини-панель инструментов* – прозрачный элемент, подключенный к объекту, который появляется над выбранным текстом и позволяет легко отформатировать его;
- *панель сообщений* – это единственное средство вывода всех предупреждений системы безопасности. Отображается, когда в открываемой базе данных имеется любое потенциально опасное выполняемое содержимое.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1
Создание таблиц базы данных «Реализация товаров»

Создать базу данных для учета реализации товаров со складов. Организовать хранение информации в создаваемой базе данных с помощью четырех таблиц: «Товары», «Фирмы», «Склады» и «Продажи».

Этапы проектирования базы данных:

1. Исследование предметной области и формулировка основных допущений (накладываемых условий). На этом этапе составляется список всех форм и отчетов, которые могут быть затребованы пользователями вашей БД.
2. Анализ данных. Составить перечень всех элементов данных, входящих в формы и отчеты, и сгруппировать их в таблицы БД.
3. Установить, какие взаимосвязи существуют между элементами данных. Определить первичные и вторичные (внешние) ключи отношений. Организовать поля данных в таблицах.

Создать базу данных «Реализация товаров», при условии, что на одном складе может храниться только один вид товара.

Создание файла базы данных Access

Для создания файла новой локальной базы данных щелкните в области создания базы данных стартового окна Access на элементе **Пустая база данных** (рис. 1.1). В открывшемся окне введите имя файла в поле **Имя файла** – например, ***Реализация товаров***.

Щелчком по кнопке **Создать,** завершите процесс создания пустого файла новой базы данных. В результате по умолчанию откроется окно созданной базы данных с пустой таблицей с именем **Таблица1** в режиме таблицы (рис. 1.2).

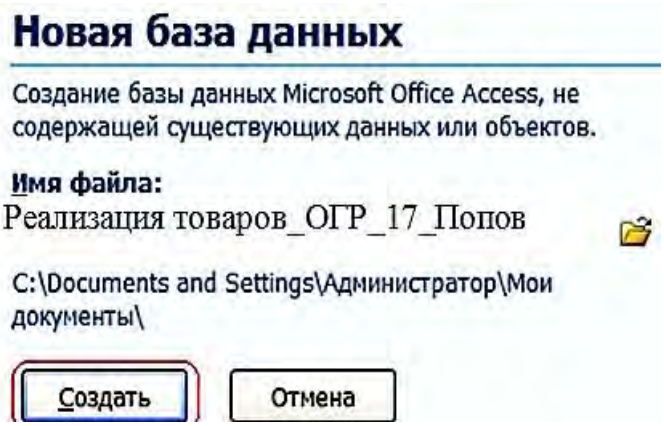


Рис. 1.1. Определение имени и местоположения файла новой базы данных

Так как создание таблиц будет происходить при помощи конструктора таблиц, поэтому закройте таблицу при помощи щелчка по значку «**Закрыть**».



Рис. 1.2. **Таблица1** в режиме таблицы

Задание 1. Создание таблицы базы данных «Реализация товаров»

Рассмотрим последовательность действий при создании таблиц. Для этого начнем создание таблицы «Товар» с определения её структуры в режиме конструктора таблиц. На вкладке ленты **Создание** в группе **Таблицы** выполним команду **Конструктор таблиц** (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Лента с открытой вкладкой **Создание**

В окне конструктора **Таблица1** определим все поля таблицы «Товар». Для каждого поля таблицы «Товар» определим **Имя поля**, **Тип данных.**



Рис. 1.4. Таблица «Товары» в режиме «**Конструктор**»

Теперь определим первичный ключ таблицы. Выделим поле «**Код товара»**, щелкнув кнопкой мыши на области маркировки, слева от имени поля, и нажмем кнопку **Ключевое поле** на вкладке ленты **Конструктор** в группе **Сервис**. Признаком установки ключа является изображение ключа слева от имени поля  .

Сохраним созданную структуру таблицы и присвоим имя новой таблице – «Товар». Для этого выполним команду **Сохранить** на Панели быстрого доступа или на вкладке **ФАЙЛ**. В окне **Сохранение** введем имя таблицы.

При сохранении таблицы происходит обновление файла базы данных, в которую помещается созданная таблица. Таблица «Товар» появиться в списке объектов **Таблицы** в области навигации открытой базы данных «Реализация товаров».

После сохранения структуры таблицы переходите ко второму этапу создания таблицы – созданию записей. Для этого переключитесь в режим таблицы нажатием кнопки **Режим** на ленте конструктора или выбором нужного режима при открытии списка данной кнопки (рис. 1.5).



Рис. 1.5. Выбор режима представления таблицы

Как и в режиме конструктора, в режиме таблицы можно удалить столбец. При этом следует помнить, что удаляются все данные столбца, и отменить удаление невозможно. Удаление поля первичного ключа в режиме таблицы невозможно. Для этого необходимо использовать режим конструктора.

Открыть таблицу для ввода исходных данных. Установить курсор в первую строку таблицы и ввести исходные данные. Ввод данных в каждое поле таблицы завершать нажатием клавиши **Enter.** По окончании ввода данных при необходимости увеличить ширину полей. Записать таблицу «Товар» на диск.

Товары

Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽
3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽
4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽
5	Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽
6	Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 ₽
7	Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 ₽
8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽
9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽
10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽
(№)					

Рис. 1.6. Таблица «Товары» в режиме таблицы

Задание 2. Создание таблицы «Фирмы»

Для поля Телефон следует задать маску ввода: **(# # #) # # # - # # - # #**



Рис. 1.7. Таблица «Фирмы» в режиме «**Конструктор**»

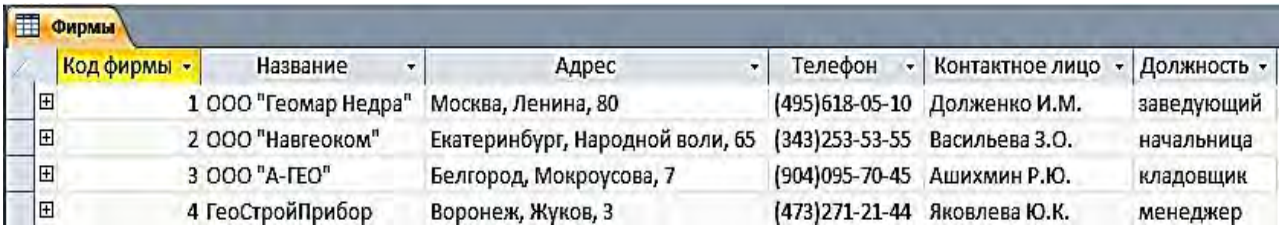
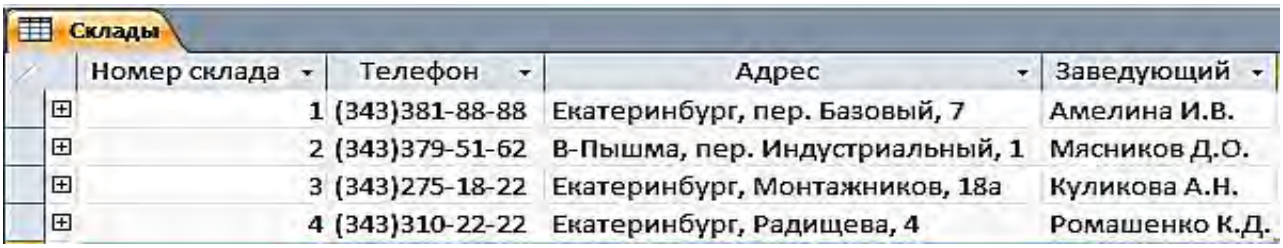


Рис. 1.8. Таблица «Фирмы» в режиме таблицы

Задание 3. Создание таблицы «Склады»



Рис. 1.9. Таблица «**Склады**» в режиме «**Конструктор**»



Склады

Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
2	(343)379-51-62	В-Пышма, пер. Индустриальный, 1	Мясников Д.О.
3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.

Рис. 1.10. Таблица «**Склады**» в режиме «**Таблицы**»

Задание 4. Создание таблицы «Продажи»

1. Ввести в первой строке имя поля: **Дата продажи** и выбрать для него тип Дата/время.
2. Сформировать поле **Код фирмы** и выбрать для него числовой тип.
3. Указать в качестве источника данных для поля **Код фирмы** список кодов фирмы, внесенных в поле с таким же названием в таблицу «Фирмы», рис. 1.11.
4. Не переводя курсор со строки **Код фирмы**, щелкнуть мышью по закладке **Подстановка.**
5. Щелкнуть мышью по слову **Поле** в строке **Тип элемента управления**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
6. Выбрать щелчком мыши из раскрывшегося списка строку **Поле со списком**.
7. Щелкнуть мышью по незаполненному полю в строке **Источник строк**, а затем – по появившейся при этом кнопке **Раскрыть список**.
8. Щелчком мыши выбрать строку с названием таблицы «Фирмы».

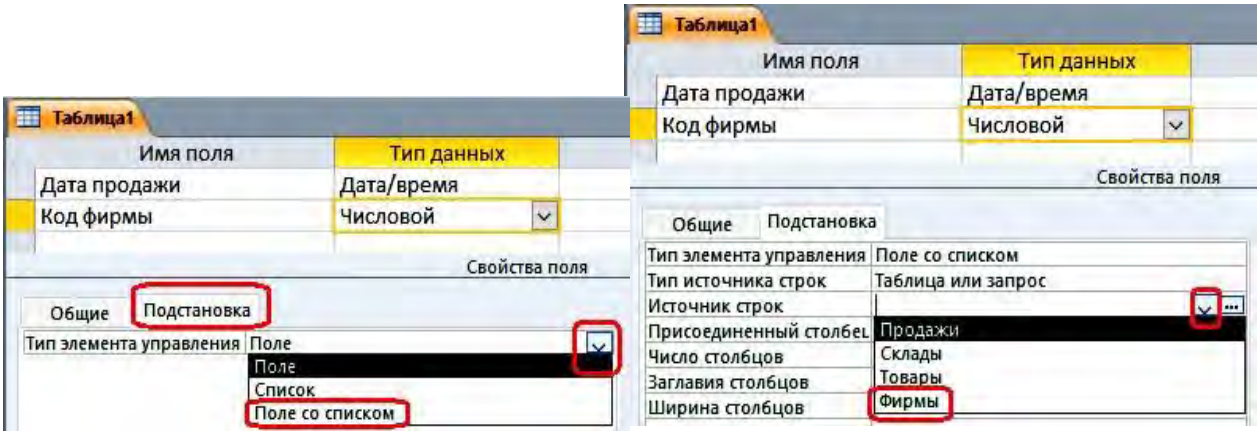


Рис. 1.11. Окно таблицы с подстановкой в режиме «**Конструктора**»



Рис. 1.12. Окно таблицы с выбором источника строк



Рис. 1.13. Окно таблицы «**Продажи**» в режиме «**Конструктора»**

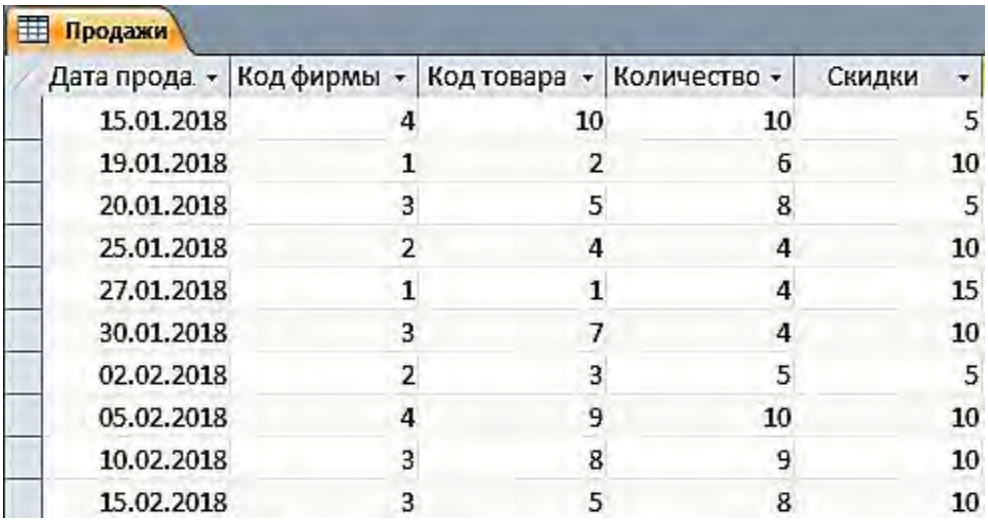


Рис. 1.14. Таблица «**Продажи**» в режиме «**Таблицы**»

Задание 5. Создание схемы данных

Создание схемы данных начинается с выполнения команды **Схема данных** в группе **Отношения** на вкладке ленты **Работа с базами данных**. В результате выполнения этой команды открывается окно схемы данных и диалоговое окно **Добавление таблицы**, в котором осуществляется выбор таблиц, включаемых в схему (рис. 1.15).



Рис. 1.15. Вкладка ленты **Работа с базами данных**

В окне **Добавление таблицы** отображаются все таблицы и запросы, содержащиеся в базе данных. Выберем вкладку **Таблицы** и с помощью кнопки **Добавить** разместим в окне **Схема данных** все ранее созданные таблицы базы данных «Реализация товаров». При создании связей в схеме данных используется проект структуры реляционной базы данных, в котором показаны все одно-многозначные связи таблиц. Реализуются связи с помощью добавления в связанные таблицы общих полей, называемых *ключом связи.*

На рис. 1.16 в созданной схеме данных БД «Реализация товаров» все связи отмечены символами **1** или ∞. Это свидетельствует о том, что одно-многозначные связи установлены правильно (по простому и составному ключу).

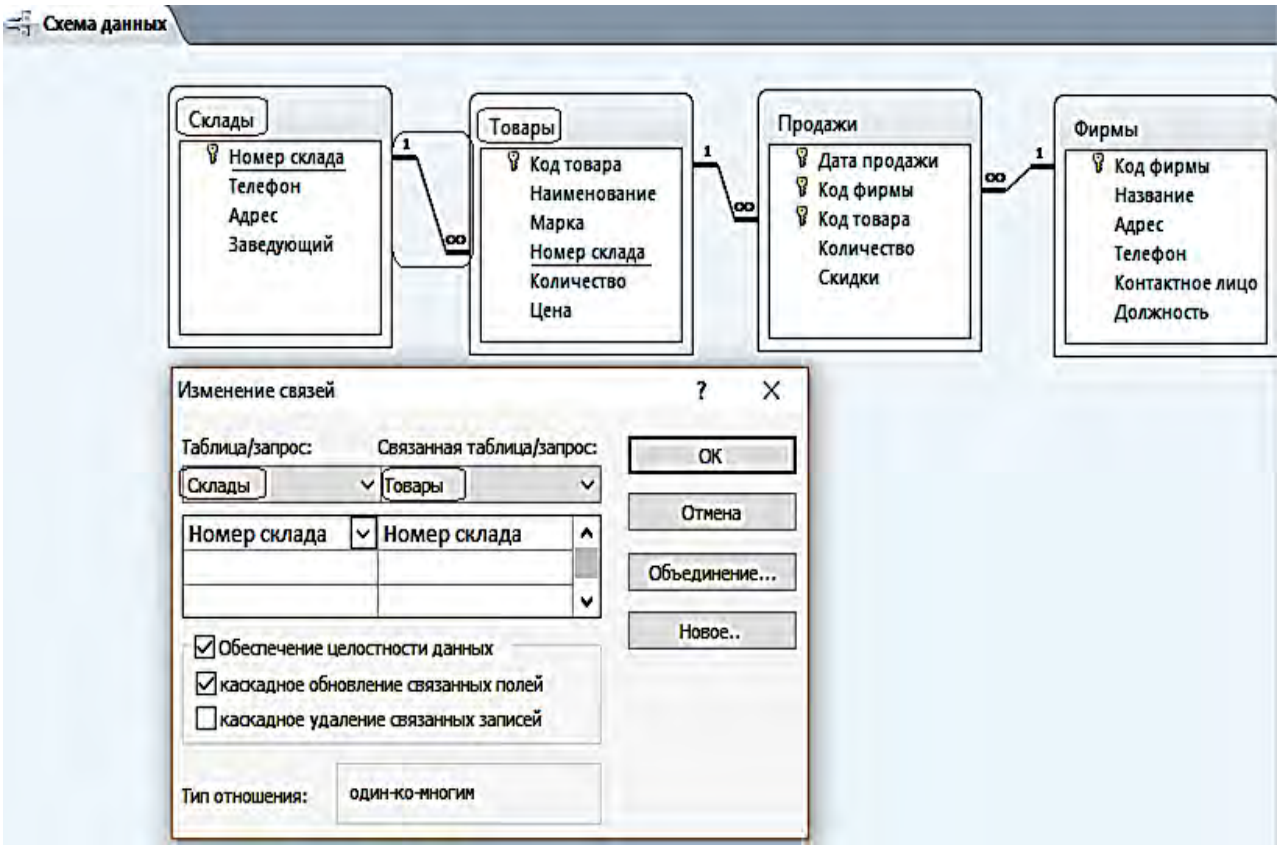


Рис. 1.16. Схема данных БД «**Реализация товаров**»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Работа с простыми запросами

Конструирование запросов на выборку с условием отбора

Задание 1. Выбрать товар по его наименованию

1. Для создания запроса в окне базы данных выберите вкладку ленты – **Создание** и в группе **Запросы** нажмите кнопку **Конструктор запросов**.

2. В окне **Добавление таблицы** выберите таблицу «Товар» и нажмите кнопку добавить. Выбранная таблица будет отображена в области схемы данных запроса. Закройте окно **Добавление таблицы**, нажав кнопку **Закрыть.** На ленте появляется и автоматически активизируется новая вкладка **Работа с запросами / Конструктор**, на которой цветом выделен тип создаваемого запроса – **Выборка.**

3. В окне конструктора (рис. 2.1) последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» поля **Наименование, Марка и Цена** в столбцы бланка запроса в строку **Поле**. Для этого необходимо щелкнуть двойным щелчком на имени поля таблицы в схеме данных запроса.

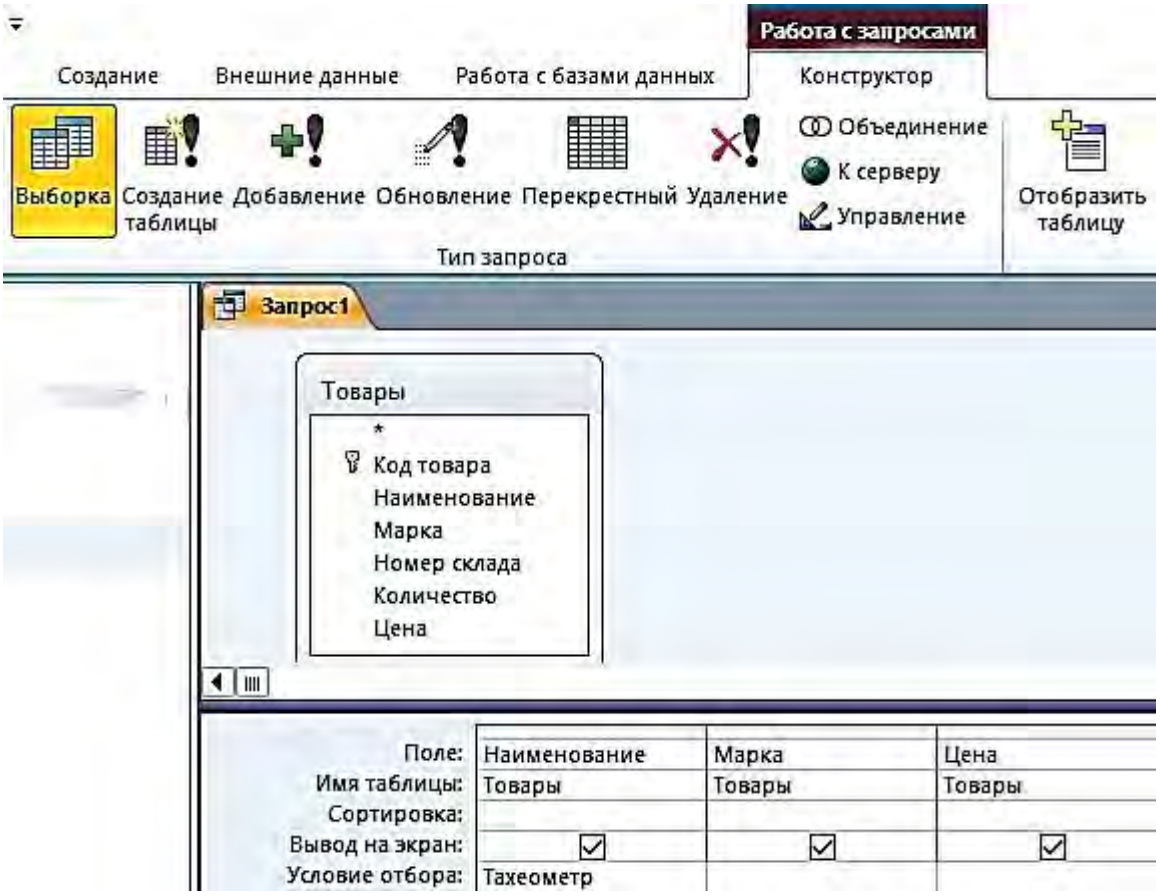


Рис. 2.1. Окно конструктора запроса на выборку

4. Запишите в строке **Условия отбора** наименование товара – Тахеометр. Используемое в выражении текстовое значение вводится в двойных кавычках, которые добавляются автоматически.

5. Выполните запрос, щелкнув по кнопке **Выполнить !** или на кнопке **Режим**  в группе **Результаты**. На экране откроется окно запроса в режиме таблицы с записью из таблицы «Товар», отвечающий заданным условиям (рис. 2.2). Дайте ему имя **2_По наименованию Тахеометр**.

1_По наименованию Тахеометр

Наименование	Марка	Цена
Тахеометр	SP FOKUS 6	319 463,00 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	357 487,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	225 000,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	240 000,00 ₽

Рис. 2.2. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы»**

Задание 2. Выбрать товары, цена которых менее 100 000 руб. и более 20 000 руб., и количество больше или равно 9

1. Создайте новый запрос в режиме конструктора, добавьте таблицу «Товар». В окне конструктора последовательно перетащите из списка полей таблицы «Товар» в бланк запроса поля (рис. 2.3).

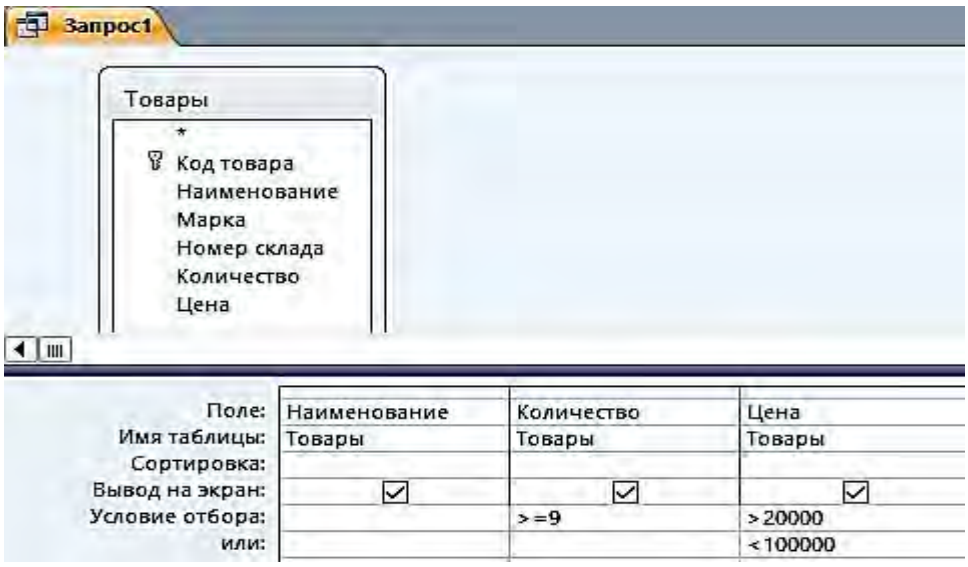


Рис. 2.3. Окно конструктора запроса на выборку с логическими операциями в условии отбора

2. Запишите **Условия отбора**, как показано в бланке запроса. Между условиями, записанными в одной строке, выполняется логическая операция AND. Между условиями, записанными в разных строках, выполняется логическая операция OR.

3. Выполните запрос. Дайте ему имя **2_Цена_количество** (рис. 2.4).

2_Цена_количество

Наименование	Количество	Цена
Теодолит	9	84 193,00 ₽
Теодолит	5	58 764,00 ₽
Теодолит	8	50 625,00 ₽
Теодолит	10	30 000,00 ₽
Нивелир	15	16 680,00 ₽
Нивелир	18	12 500,00 ₽

Рис. 2.4. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы**»

Задание 3. Выбрать скидки, равные 10, за заданный период (после 25 января 2018 г.) (рис. 2.5, 2.6)

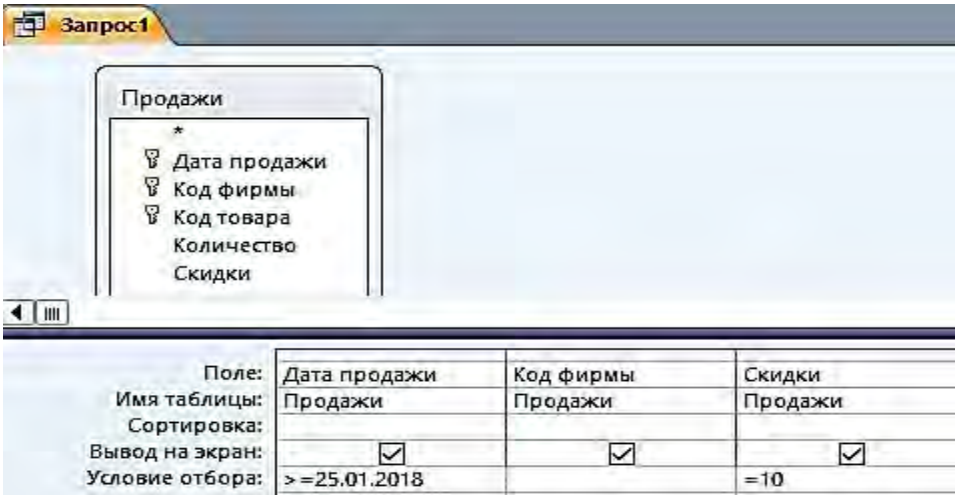


Рис. 2.5. Окно конструктора запроса на выборку
с логическими операциями в условии отбора

3_Дата_скидка

Дата прода	Код фирмы	Скидки
25.01.2018	2	10
30.01.2018	3	10
05.02.2018	4	10
10.02.2018	3	10
15.02.2018	3	10

Рис. 2.6. Просмотр запроса в режиме «**Таблицы**»

Вычисляемые поля в запросах

В запросе, как и в таблице, для каждой записи могут производиться вычисления с числовыми, строковыми значениями или со значениями дат с использованием данных из одного или нескольких полей. Результат вычисления образует в таблице запроса новое вычисляемое поле (рис. 2.7).

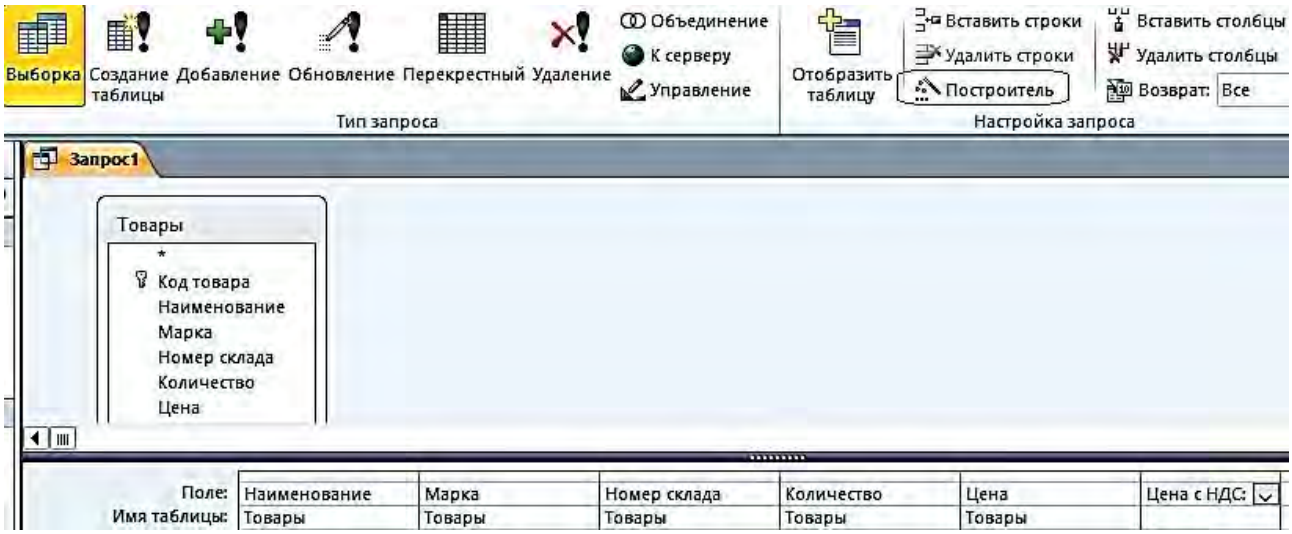


Рис. 2.7. Запрос с вычисляемым полем

Задание 4. В таблице «Товар» вычислить Цену с НДС, при ставке НДС 35 %

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товары». Перетащите в бланк запроса поля **Наименование, Марка, Номер склада, Количество, Цена** (рис. 2.8).

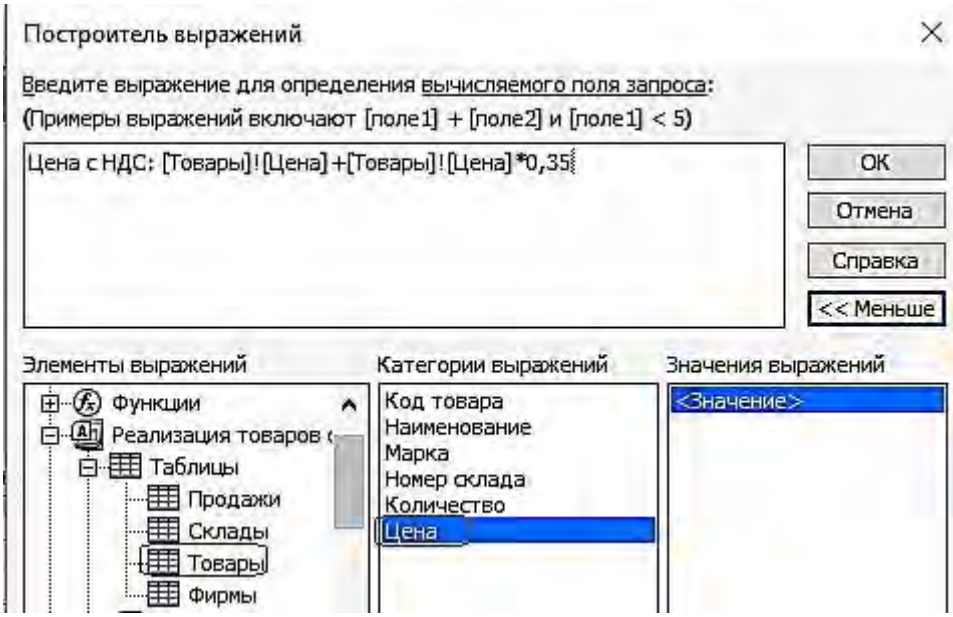


Рис. 2.8. Построитель выражений

2. Для подсчета цены с учетом НДС создайте после поля Цена вычисляемое поле **Цена с НДС** (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель**  в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения.

4. В левой верхней части окна **Построитель выражений** (см. рис. 2.8) выберите свою базу данных «Реализация товаров со складов», далее выберите таблицу «**Товары**», на которой построен запрос. Справа отобразится список её полей. Последовательно выбирайте нужные поля и операторы, двойным щелчком вставляя в выражение. Выражение сформируется в верхней части окна. Обратите внимание – построитель перед именем поля указал имя таблицы, которой оно принадлежит, и отделил его от имени поля восклицательным знаком.

5. Слово «Выражение» удаляйте, иначе оно выдает, синтаксическую ошибку.

Полученный запрос «**4_Цена с НДС**» в режиме «**Таблицы»** изображен на рис. 2.9.

4_Цена с НДС

Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Цена с НДС
Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽
Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽
Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽
Теодолит	4Т15П	3	5	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽
Теодолит	4Т30П	3	8	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽
Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽
Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽
Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽

Рис. 2.9. Просмотр запроса «**4_Цена с НДС**» в режиме «**Таблицы»**

Задание 5. В вычисляемых полях и условиях отбора можно использовать встроенные функции. Необходимо выбрать количество продаж, в заданном месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку по таблице «Продажи».

2. Создайте вычисляемое поле **Заданный месяц** (в правой) пустой ячейке строки, записав туда одно из выражений: а Format([Продажи]![Дата продажи];"mmmm") – эта функция возвратит полное название месяца;

b или Format([Продажи]![Дата продажи];"mm") – эта функция возвратит номер месяца;

3. Для отбора продаж в заданном месяце, в вычисляемом поле в строку **Условие отбора** введите название месяца, например, – Январь, или номер месяца, например, 1, в соответствии с параметром в функции Format (рис. 2.10, 2.11).

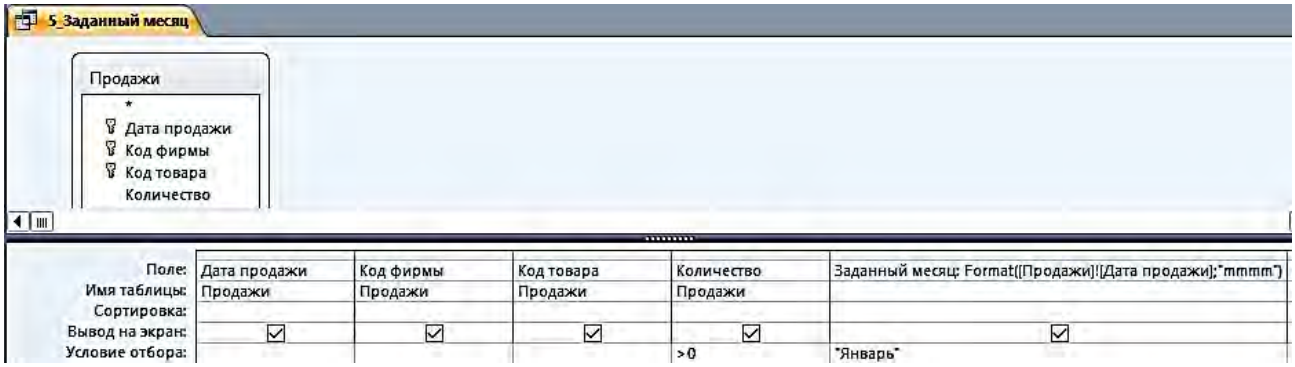


Рис. 2.10. Запрос с функцией выделения из даты полного названия месяца в вычисляемом поле

5_Заданный месяц

Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Количество	Заданный месяц
15.01.2018	4	10	10	Январь
19.01.2018	1	2	6	Январь
20.01.2018	3	5	8	Январь
25.01.2018	2	4	4	Январь
27.01.2018	1	1	4	Январь
30.01.2018	3	7	4	Январь

Рис. 2.11. Просмотр запроса «**5_Заданный месяц**» в режиме «**Таблицы**»

Параметры в запросах

При решении практических задач удобнее вводить выражение в условие отбора в процессе выполнения запроса в диалоге с пользователем, не переходя в режим конструктора. Обеспечить такой диалог можно с помощью *параметра запроса.* Имя параметра запроса задается в строке **Условие отбора** в квадратных скобках. При выполнении запроса это имя появиться в диалоговом окне **Введите значение параметра.**

Задание 6. Скопируйте запрос «5_Заданный месяц» и переименуйте его в «6_Параметрический запрос»

1. Замените в условии отбора рассмотренного запроса название месяца Январь на имя параметра – [Название месяца].

2. Выполните запрос. Открывшееся диалоговое окно (рис. 2.12) позволит ввести значение параметра запроса – **Название месяца**.

3. Введите Январь и получите результат.

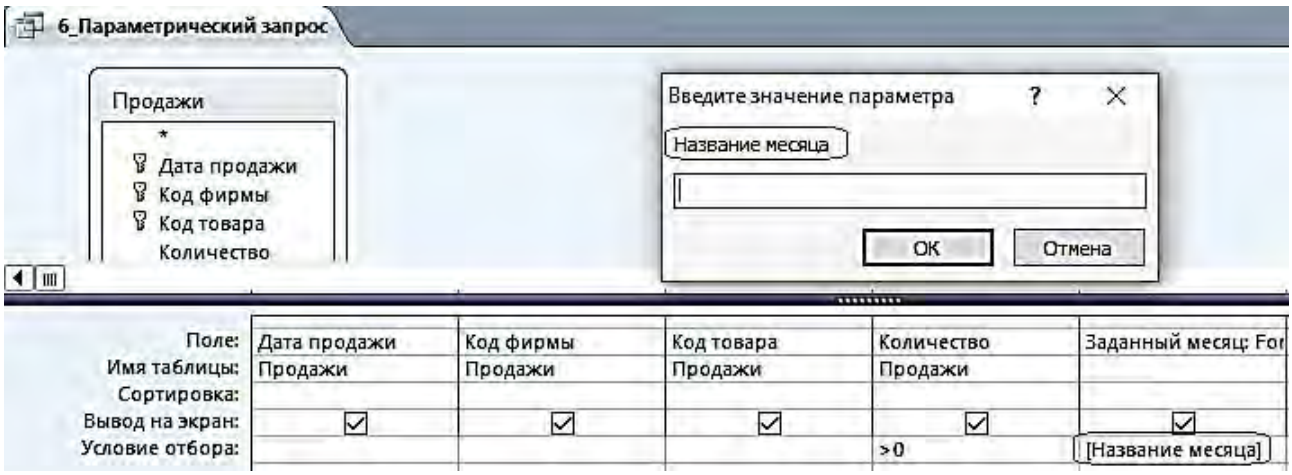


Рис. 2.12. Диалоговое окно ввода значения параметра

Параметры запроса могут быть использованы не только в выражениях условий отбора, но и для ввода значений операндов в вычисляемых полях.

Задание 7. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблицы «Товар»

Перетащите в бланк запроса поля Наименование и Цена. Для увеличения цены на заданный процент в вычисляемое поле запишите выражение с параметром запроса [На сколько процентов увеличить?]/100 (рис. 2.13).

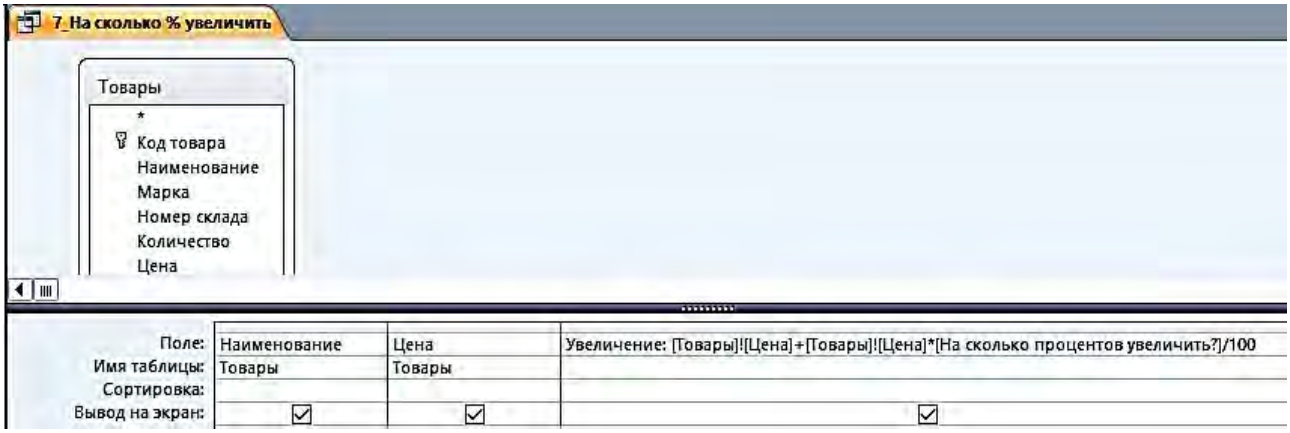


Рис. 2.13. Использование параметра в выражении вычисляемого поля

Задание 8. Скопируйте запрос «**7_На сколько % увеличить**» и переименуйте его в «**8_Проценты**» (рис. 2.14)

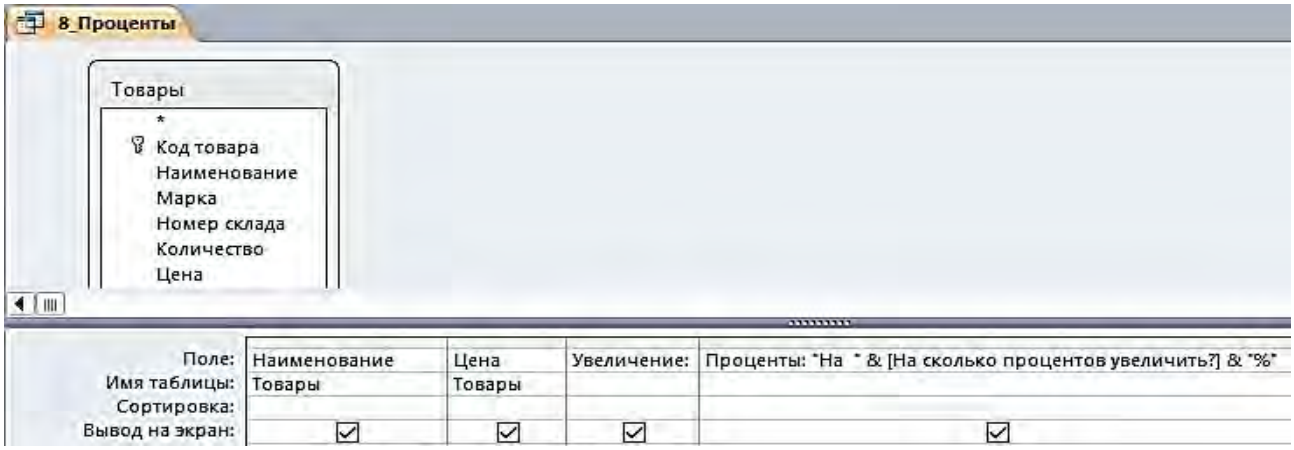


Рис. 2.14. Использование параметра в выражении вычисляемого поля «**Проценты**»

После выполнения предыдущего запроса в таблице отображается результат вычисления с использованием введенного значения параметра. Однако значение параметра при этом не выводится. Для отображения в таблице запроса введенного значения параметра дополните запрос ещё одним вычисляемым полем, в котором запишите выражение:

Проценты: "На " & [На сколько процентов увеличить?] & "%".

Теперь в таблице запроса появится поле «**Проценты»**, в котором будет записано, например, при вводе 35 – **На 35 %** (рис. 2.15).

8_Проценты

Наименование	Цена	Увеличени	Проценты
Тахеометр	319 463,00 ₽	431 275,05 ₽	На 35%
Тахеометр	357 487,00 ₽	482 607,45 ₽	На 35%
Тахеометр	225 000,00 ₽	303 750,00 ₽	На 35%
Тахеометр	240 000,00 ₽	324 000,00 ₽	На 35%
Теодолит	84 193,00 ₽	113 660,55 ₽	На 35%
Теодолит	58 764,00 ₽	79 331,40 ₽	На 35%
Теодолит	50 625,00 ₽	68 343,75 ₽	На 35%
Теодолит	30 000,00 ₽	40 500,00 ₽	На 35%
Нивелир	16 680,00 ₽	22 518,00 ₽	На 35%
Нивелир	12 500,00 ₽	16 875,00 ₽	На 35%

Рис. 2.15. Просмотр запроса «**8_Проценты**» в режиме «**Таблицы**»

Групповые операции в запросах

Групповые операции позволяют выделить группы записей с одинаковыми значениями в указанных полях и вычислить итоговые данные для каждой из групп по др. полям, используя одну из статистических функций. Статистические функции применимы к полям с типом данных **Числовой, Денежный, Дата и время**.

Задание 9. Запрос с функцией **Sum**

Определите суммарное количество и цену каждого из товаров.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «**Товары**».
2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Наименование**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.
3. Перетащите в бланк запроса поля «**Количество**» и «**Цена**», по которым будет подсчитываться суммарное количество каждого из товаров.
4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.
5. В столбцах «**Количество**» и «**Цена**» замените слово **Группировка** на функцию **Sum**. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию (рис. 2.16).

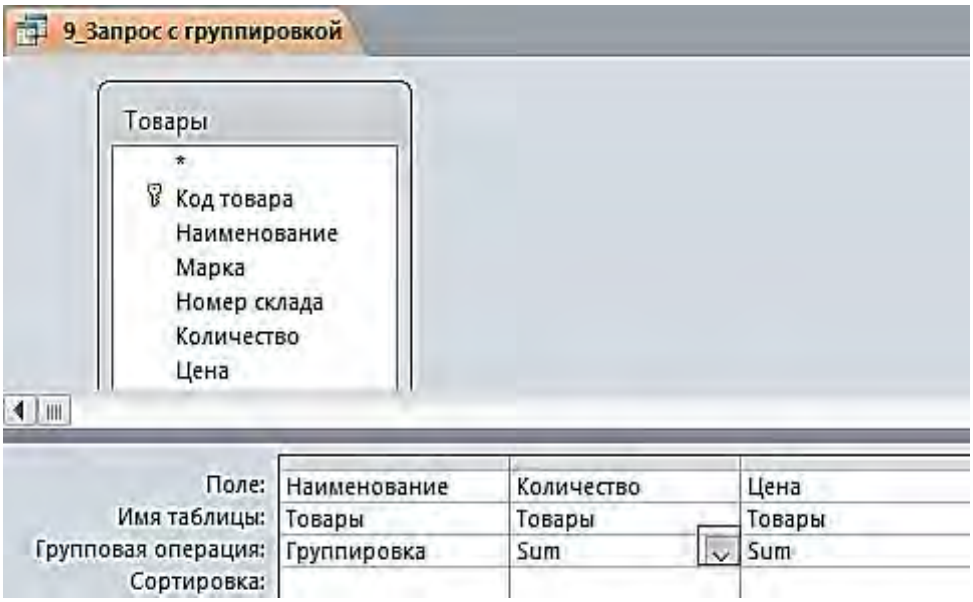


Рис. 2.16. Запрос с группировкой по коду товара и суммированием количества и цены в группе

6. Для отображения результата запроса (рис. 2.17) щелкните по кнопке **Выполнить** в группе **Результаты**.

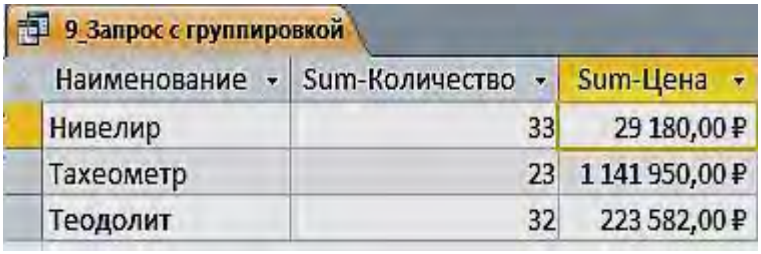


Рис. 2.17. Результат подсчета суммарного количества и цены

Задание 10. Запрос с функцией **Count**

Определите, сколько раз продавался товар по коду фирмы.

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку из таблицы «Продажи».

2. Из списка таблицы перетащите в бланк запроса поле «**Код фирмы**». По этому полю будет производиться группировка записей таблицы.

3. Перетащите в бланк запроса поле «**Количество**», по которому будет происходить подсчет числа товаров с одинаковыми номерами фирм.

4. Выполните команду **Итоги** из группы **Показать или Скрыть**. В бланке запроса появится новая строка **Групповая операция** со значением **Группировка** во всех полях запроса.

5. В столбце «**Количество**» замените слово **Группировка** на функцию Count. Для этого вызовите раскрывающийся список и выберите эту функцию
(рис. 2.18).

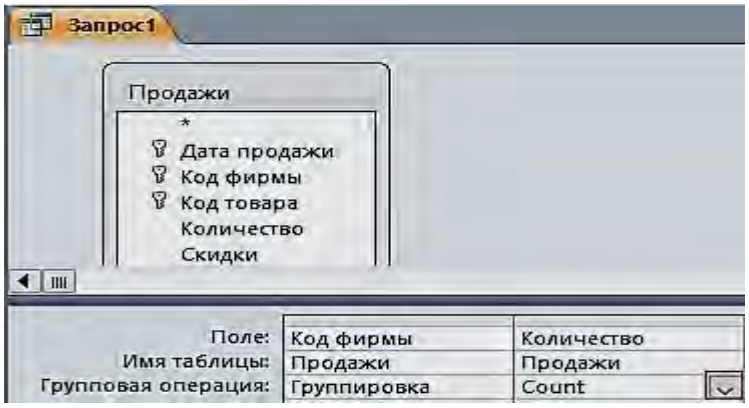


Рис. 2.18. Запрос для подсчета количества товара по коду фирмы

6. Сохраните запрос под именем «**10_Число продаж по коду фирмы**». Результат запроса показан на рис. 2.19.

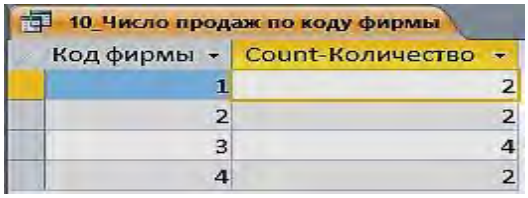


Рис. 2.19. Результат подсчета количества товара по коду фирмы

Задание 11. Запрос с отображением строки итогов по столбцу

Строка итогов используется для быстрого расчета и отображения в столбце таблицы или запроса в режиме таблицы таких значений, как итоговая сумма, среднее, минимальное и максимальное, количество значений.

1. Для добавления строки итогов в таблицу запроса откройте запрос «**1_По наименованию тахеометр»** в режиме таблицы. На вкладке ленты **Главная** в группе **Записи** выполните команду **Итоги**. В таблице отобразится строка **Итог**.

2. В строке **Итог** нажмите кнопку раскрывающегося списка в столбце «**Цена**», для которого требуется выполнить расчет, и выберите в списке **Сумма** (рис. 2.20).

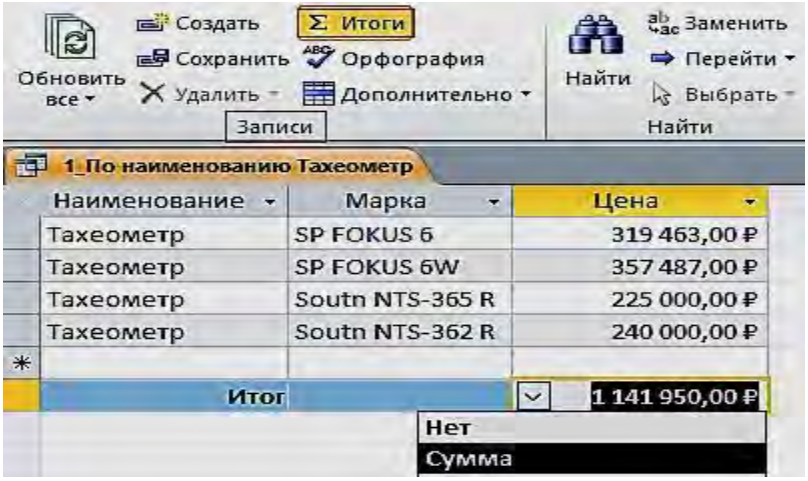


Рис. 2.20. Результат отображения строки итогов с расчетом суммы по столбцу

3. Для того, чтобы скрыть строку итогов, повторно выполните команду **Итоги**.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3
Работа с многотабличными запросами

Многотабличный запрос позволяет сформировать записи результата путем объединения взаимосвязанных записей из таблиц базы данных и выбора из них нужных полей и записей. Многотабличный запрос часто осуществляет объединение данных, которые на этапе проектирования были разделены на множество таблиц, отвечающих требованиям нормализации.

При конструировании многотабличного запроса важнейшим условием является правильное представление о том, как идет объединение записей таблиц при формировании результата.

Рассмотрим технологию конструирования многотабличного запроса на выборку для расчета разности количества товаров и количества проданных товаров.

Задание 1. Запрос с вычисляемым полем «**Остаток**»

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Количество»**, и из таблицы «**Продажи**» поле «**Количество**».

2. Для подсчета разности количества товаров создайте после поля «**Количество**», вычисляемое поле «**Остаток**» (с правой стороны), при помощи построителя (рис. 3.1).

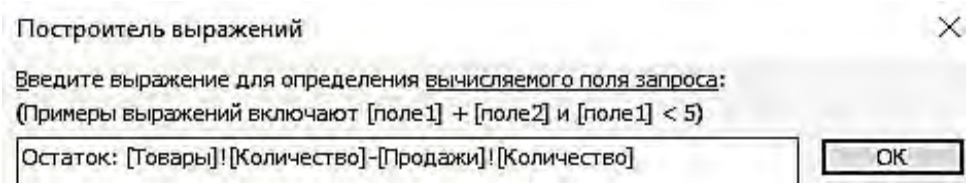


Рис. 3.1. Построитель выражений

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения (рис. 3.2).

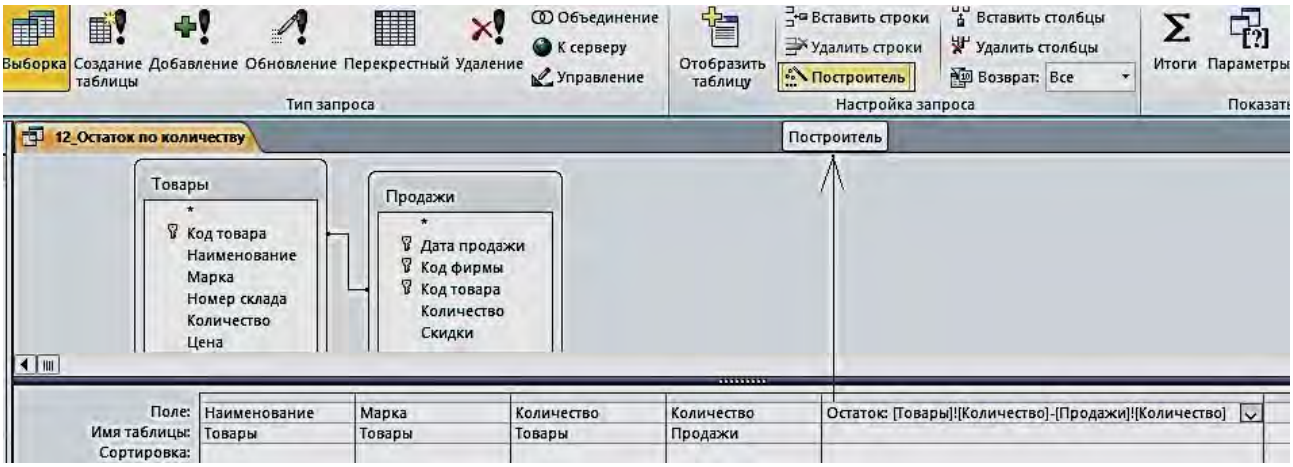


Рис. 3.2. Запрос с вычисляемым полем

4. В левой части окна **Построитель выражений** выберите свою базу данных «**Реализация товаров со складов**», далее выберите таблицу «**Товары**». Справа отобразится список её полей. Выберите поле «**Количество**» и знак минус, двойным щелчком вставляя в выражение. Снова выберите таблицу «**Продажи**» и поле «**Количество**» (рис. 3.3).

12_Остаток по количеству

Наименование	Марка	Товары.Количество	Продажи.Количество	Остаток
Тахеометр	SP FOKUS 6	5	4	1
Тахеометр	SP FOKUS 6W	7	6	1
Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	5	1
Тахеометр	Soutn NTS-362 R	5	4	1
Теодолит	3Т2КП	9	8	1
Теодолит	3Т2КП	9	8	1
Теодолит	4Т30П	8	4	4
Теодолит	VEGA TEO 5	10	9	1
Нивелир	4Н -2КЛ	15	10	5
Нивелир	4Н-3КЛ	18	10	8

Рис. 3.3 Результат запроса «**Остаток по количеству**»

5. Слово «Выражение» удаляйте, оно выдает, синтаксическую ошибку.

Задание 2. Формирование запроса об увеличении цены на 15 % в феврале месяце

1. Создайте в режиме конструктора запрос на выборку для таблиц «**Товары**» и «**Продажи**». Перетащите в бланк запроса из таблицы «**Продажи**» поле «**Дата продажи**», а из таблицы «**Товары**» поля «**Наименование**», «**Марка**», «**Номер склада**», «**Количество**», «**Цена**».

2. Создайте новое поле «**Новая цена**». Для этого создайте после поля Цена, вычисляемое поле «**Новая Цена**» (с правой стороны) при помощи построителя.

3. Вызовите построитель выражений, нажав кнопку **Построитель** в группе **Настройка запроса** ленты «**Конструктор**». Курсор мыши должен быть установлен предварительно в ячейке ввода выражения. В окне «**Построитель выражений**» выбрать «**Элементы выражений**», в нем найти название своей базы данных, затем Таблицы «**Товары**» и в поле «**Категории выражений**» выбрать «**Цена**», а с клавиатуры набрать «*1,05».

4. В поле «**Дата продажи**» введите условие отбора >=01.02.2018 (рис. 3.4).

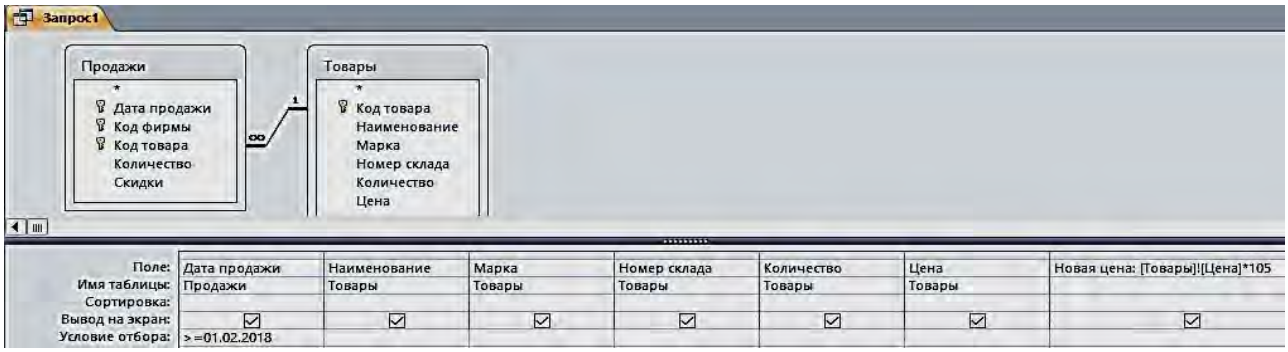


Рис. 3.4. Запрос «**Новая цена**» в режиме конструктора

5. Сохранить запрос с именем «**Новая цена**» (рис. 3.5).

13_Цена в феврале

Дата прода	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена	Новая цена
02.02.2018	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	225 000,00 ₽	23 625 000,00 ₽
15.02.2018	Теодолит	3Т2КП	3	9	84 193,00 ₽	8 840 265,00 ₽
10.02.2018	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	30 000,00 ₽	3 150 000,00 ₽
05.02.2018	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	16 680,00 ₽	1 751 400,00 ₽

Рис. 3.5. Результат запроса «**Новая цена**»

Задание 3. Создание запроса о товарах на складе в г. Екатеринбурге (рис. 3.6, 3.7)

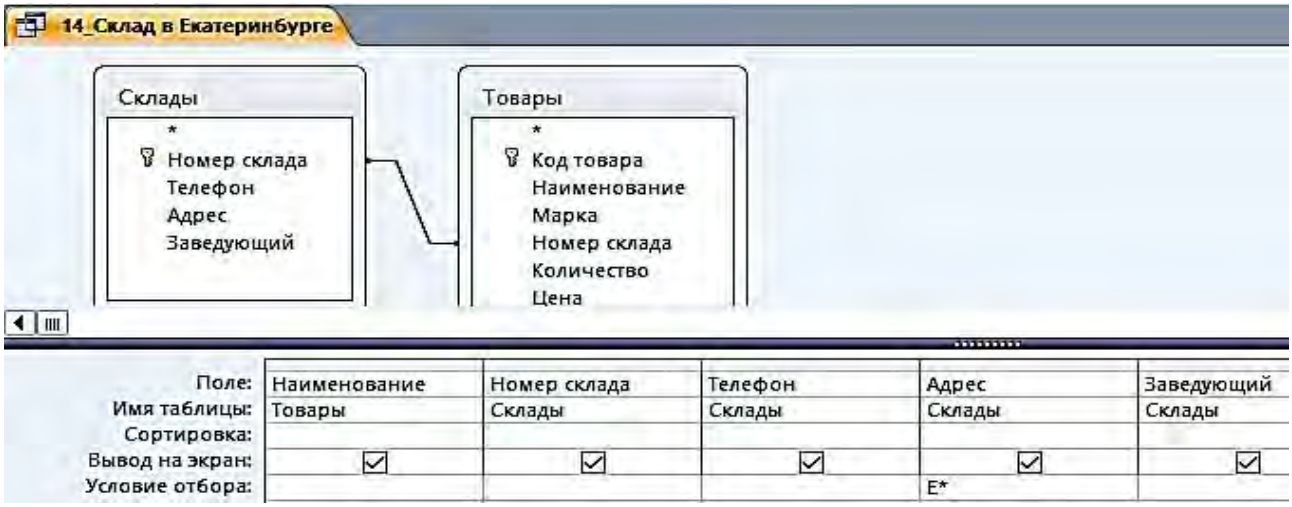


Рис. 3.6. Запрос «**Склад в Екатеринбурге**» в режиме Конструктора

14_Склад в Екатеринбурге

Наименование	Номер склада	Телефон	Адрес	Заведующий
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Тахеометр	1	(343)381-88-88	Екатеринбург, пер. Базовый, 7	Амелина И.В.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Теодолит	3	(343)275-18-22	Екатеринбург, Монтажников, 18а	Куликова А.Н.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.
Нивелир	4	(343)310-22-22	Екатеринбург, Радищева, 4	Ромашенко К.Д.

Рис. 3.7. Результат запроса «**Склад в Екатеринбурге**»

Задание 4. Создание запроса о товарах в феврале, с вычисляемым полем «**Сумма**» и отображения строки итогов с расчетом суммы по этому столбцу (рис. 3.8, 3.9)

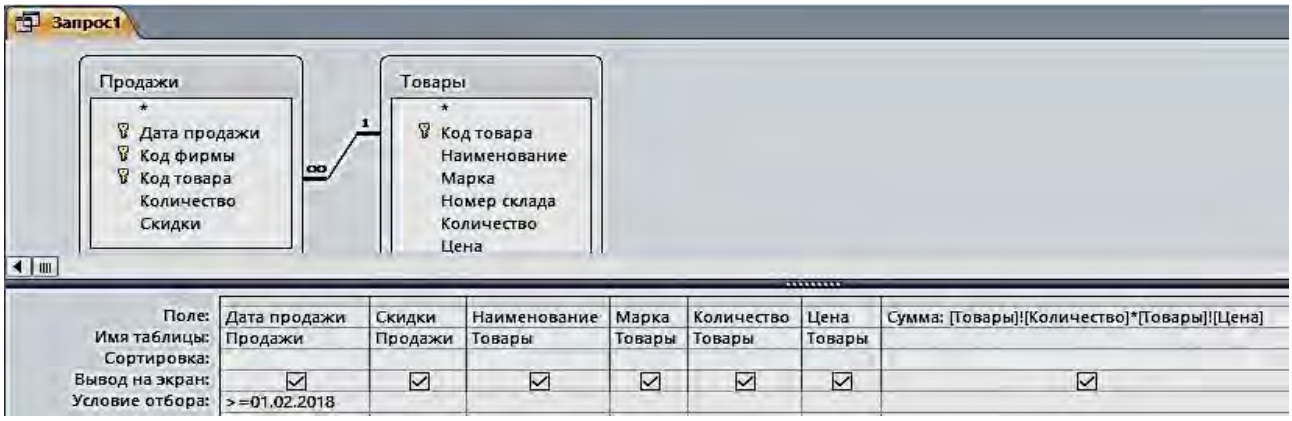


Рис. 3.8. Запрос «**Стоимость**» в режиме Конструктора

15_Стоимость

Дата прода	Скидки	Наименование	Марка	Количество	Цена	Сумма
02.02.2018	5	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	6	225 000,00 ₽	1 350 000,00 ₽
15.02.2018	10	Теодолит	3Т2КП	9	84 193,00 ₽	757 737,00 ₽
10.02.2018	10	Теодолит	VEGA TEO 5	10	30 000,00 ₽	300 000,00 ₽
05.02.2018	10	Нивелир	4Н -2КЛ	15	16 680,00 ₽	250 200,00 ₽
Итог						2 657 937,00 ₽

Нет
Сумма

Рис. 3.9. Результат запроса «**Стоимость**» и итог с расчетом суммы по столбцу

Задание 5. Создание запроса из четырех таблиц (рис. 3.10, рис. 3.11)

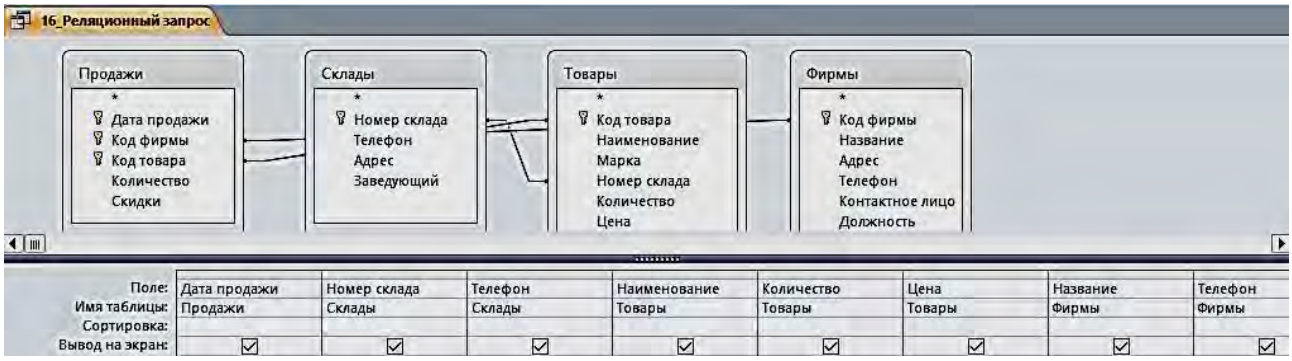


Рис. 3.10. Реляционный запрос в режиме Конструктора

16_Реляционный запрос

Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	12 500,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	357 487,00 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	240 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	319 463,00 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	50 625,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	225 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	16 680,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	30 000,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	84 193,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 3.11. Результат сложного запроса

Запросы на изменение

К запросам на изменение относятся запросы на обновление данных в записях таблицы базы, на добавление и удаление записей из таблицы, а также запросы на создание таблицы из записей, сформированных в нем.

Задание 6. Создать запрос на обновление таблицы «Товары». Увеличьте цену товара на 20 %:

1. Создайте запрос на выборку, путем отбора соответствующих полей. Присвойте ему имя «**17_Обновление**».

2. Откройте этот запрос в режиме Конструктора. Выполните команду **Запрос – Обновление** – Введите в строке «**Обновление**» выражение для новых значений [Цена]*1,2 (рис. 3.12). Закройте запрос. У запроса изменится вид значка. Проверьте правильность его выполнения (рис. 3.13).

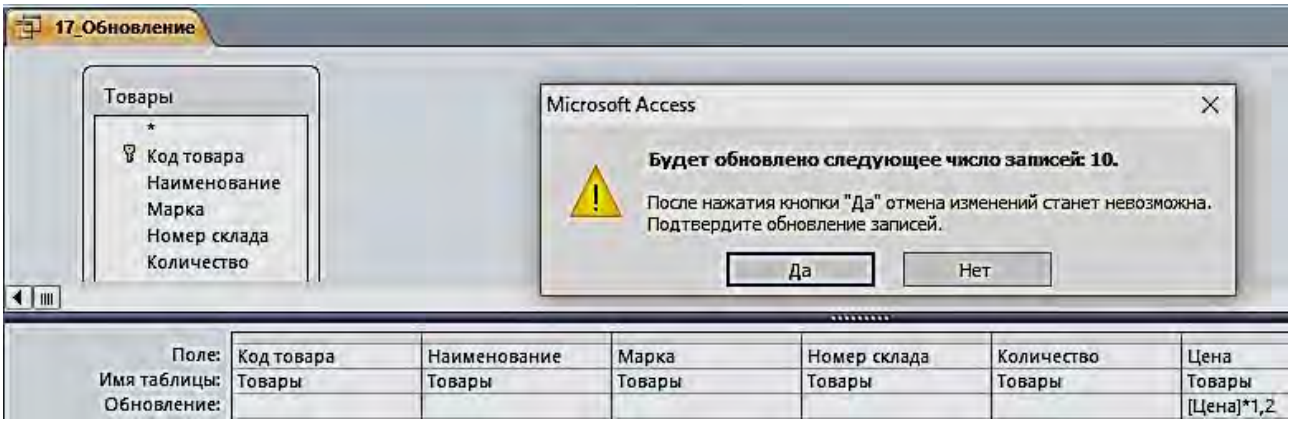


Рис. 3.12. Запрос на обновление в режиме Конструктора

Рис. 3.13. С правой стороны результат обновления таблицы

Цена
319 463,00 ₽
357 487,00 ₽
225 000,00 ₽
240 000,00 ₽
84 193,00 ₽
58 764,00 ₽
50 625,00 ₽
30 000,00 ₽
16 680,00 ₽
12 500,00 ₽

17_Обновление

Цена
383 355,60 ₽
428 984,40 ₽
270 000,00 ₽
288 000,00 ₽
101 031,60 ₽
70 516,80 ₽
60 750,00 ₽
36 000,00 ₽
20 016,00 ₽
15 000,00 ₽

Задание 6. Создать запрос на создание новой таблицы «18_Создание таблицы»:

1. Создайте запрос на выборку по всем таблицам путем отбора нужных полей. Присвойте ему имя и проверьте правильность его выполнения.

2. В области навигации выделите названный запрос и с помощью команды контекстного меню откройте его в режиме Конструктора.

3. Преобразуйте этот запрос на выборку в запрос на создание таблицы, выполнив команду **Создание таблицы** в группе **Тип запроса** на

вкладке Конструктора, или выбрав команду контекстного меню запроса **Тип запроса – Создание таблицы.**

4. В окне **Создание таблицы** введите имя создаваемой таблицы «Объединенная» (рис. 3.14).

5. Для того чтобы просмотреть, какие записи будут помещены в новую таблицу, щелкните по кнопке **Режим** на ленте Конструктора запросов в группе **Результаты**.

6. Выполните запрос. Откроется окно сообщений с запрашиваемым разрешением (рис. 3.15). Подтвердите согласие на создание новой таблицы. После этого таблицу можно увидеть в списке таблиц области навигации (рис. 3.16).

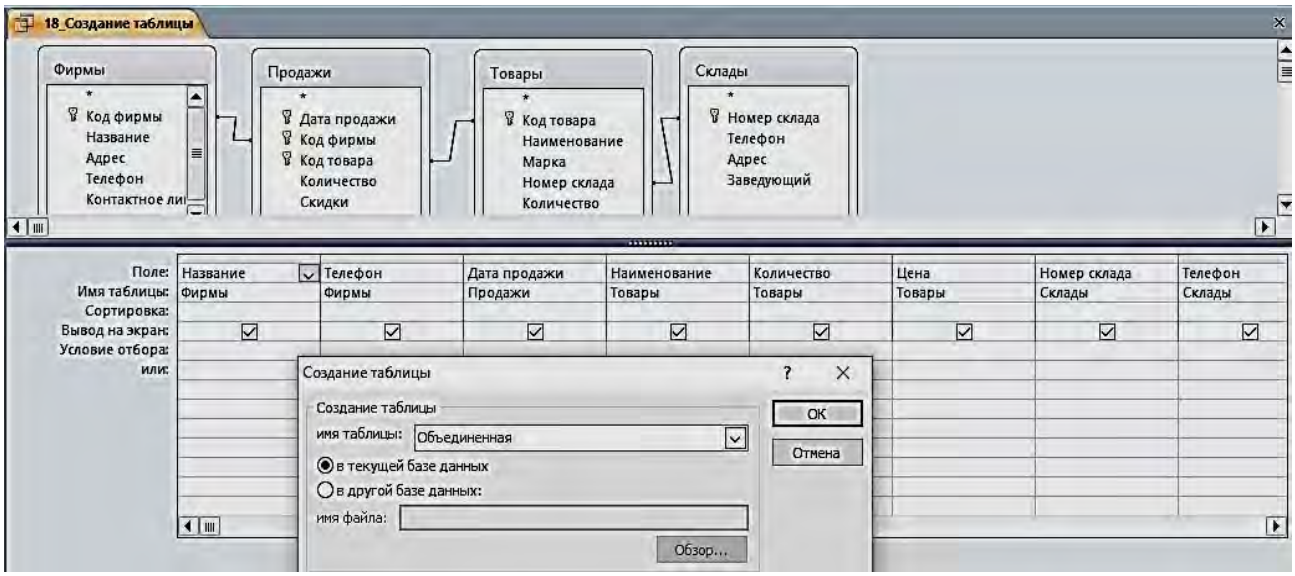


Рис. 3.14. Определение имени таблицы, создаваемой в запросе

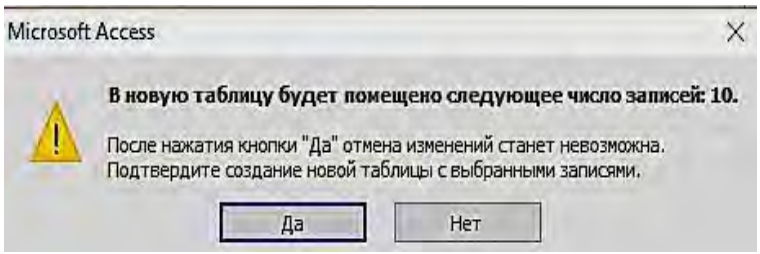


Рис. 3.15. Окно сообщений

Объединенная

Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
ООО "Геомар Недра"	4956180510	19.01.2018	Тахеометр	7	428 984,40 ₽	1	3433818888
ООО "Геомар Недра"	4956180510	27.01.2018	Тахеометр	5	383 355,60 ₽	1	3433818888
ООО "Навгеоком"	3432535355	25.01.2018	Тахеометр	5	288 000,00 ₽	2	3433795162
ООО "Навгеоком"	3432535355	02.02.2018	Тахеометр	6	270 000,00 ₽	2	3433795162
ООО "А-ГЕО"	9040957045	20.01.2018	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	30.01.2018	Теодолит	8	60 750,00 ₽	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	10.02.2018	Теодолит	10	36 000,00 ₽	3	3432751822
ООО "А-ГЕО"	9040957045	15.02.2018	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
ГеоСтройПрибор	4732712144	15.01.2018	Нивелир	18	15 000,00 ₽	4	3433102222
ГеоСтройПрибор	4732712144	05.02.2018	Нивелир	15	20 016,00 ₽	4	3433102222

Рис. 3.16. Результат запроса на создание новой таблицы

Задание для самостоятельной работы

1. По таблице «Товары» сформировать запрос по наименованию товаров на букву Т.
2. По таблице «Товары» сформировать запрос на выборку товаров, цена которых более 100 000 рублей и количество больше или равно 5.
3. По таблице «Продажи» сформировать запрос на выборку товаров, скидки которых равны 5, за период меньше или равный 02 февраля 2018 г.
4. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить цену с НДС, при ставке 18 %.
5. Создать параметрический запрос, в котором выдавалось бы сообщение «**Введите наименование товара**».
6. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, об увеличении цены на 10 % в январе месяце.
7. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, вычислить сумму за январь.
8. По таблице «**Товары**» сформировать запрос с вычисляемым полем, найти увеличение количества нивелиров в 2 раза.
9. Создать новую таблицу, состоящую из таблиц «**Продажи**» и «**Фирмы**», с полями на ваш выбор (поле – количество обязательно).
10. По новой созданной таблице создать запрос на обновление количества товара в 3 раза.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4
Работа с формами

Формы являются основой разработки диалоговых приложений пользователя с базой данных. Работая с формой, пользователь может добавлять, удалять и изменять записи таблиц, получать расчетные данные. Форма состоит из элементов управления, которые отображают поля таблиц и графические элементы, не связанные с полями таблиц. Элементы управления предназначены для разработки макета формы: размещение полей таблиц и запросов, надписей, внедряемых объектов (рисунков, диаграмм), вычисляемых полей, кнопок, выполняющих печать и открывающих др. объекты или задачи.

Однотабличная форма предназначена для загрузки, просмотра и корректировки данных одной таблицы. Источником данных такой формы служит единственная таблица. Она может быть создана одним щелчком мыши с помощью команд автоматического создания формы: **Форма, Разделенная форма** или **Несколько элементов**, размещенных на вкладке **Создание** в группе **Формы** (рис. 4.1).

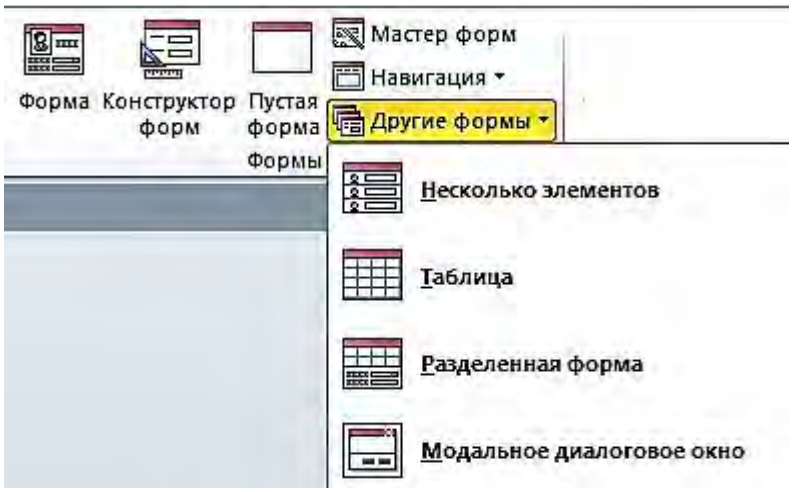


Рис. 4.1. Команды группы формы на вкладке ленты **Создание**

Задание 1. Создать однотабличную форму «**Товары для ввода, просмотра и корректировки данных»** таблицы «**Товары**». Чтобы источником записей формы стала таблица «**Товары»**, выберите её в области навигации и выполните команду форма на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только выбранной таблицы (рис. 4.2).

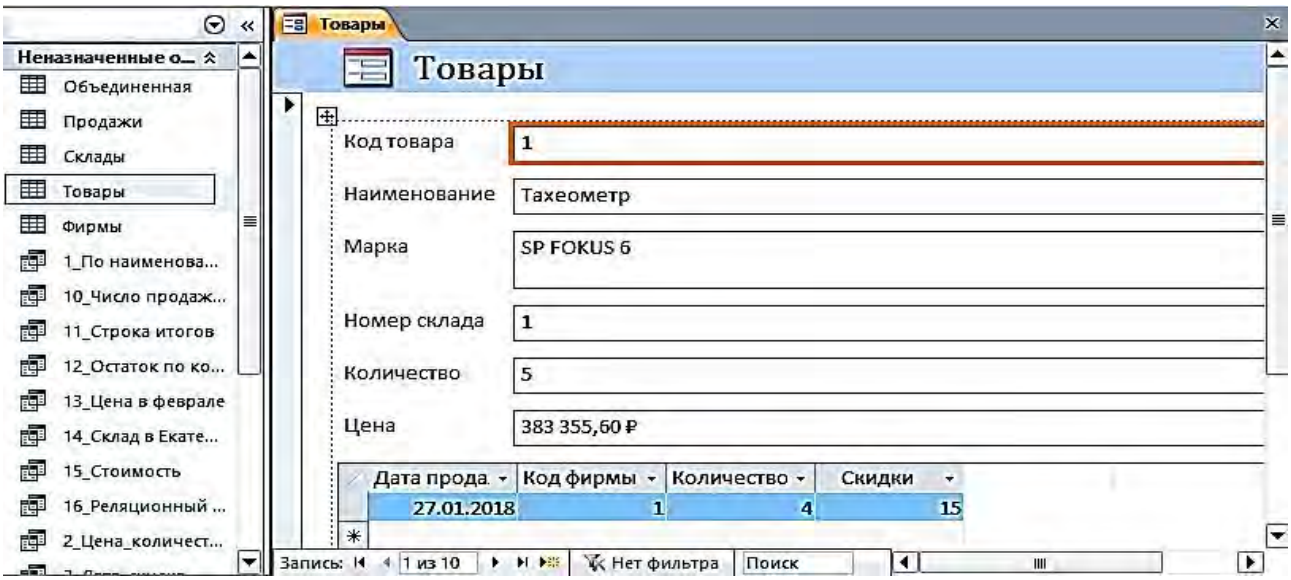


Рис. 4.2. Форма, полученная по команде **Форма**, для работы с таблицей «**Товары**»

Условное форматирование элементов управления

Для изменения внешнего вида элемента управления в форме**,** в зависимости от одного или нескольких условий используйте условное форматирование.

Задание 2. Изменить в форме «**Товары**» цвет денежных значений в поле «**Цена**» на красный, заливку на желтый, шрифт жирный, когда они оказываются выше заданной величины, например, 100 000 руб.

1. Выберите поле Цена, в котором нужно произвести изменения. На вкладке ленты **Формат** в группе **Форматирование элементов управления** выберите команду **Условное форматирование**. Откроется диалоговое окно **Диспетчер правил условного форматирования** (рис. 4.3).

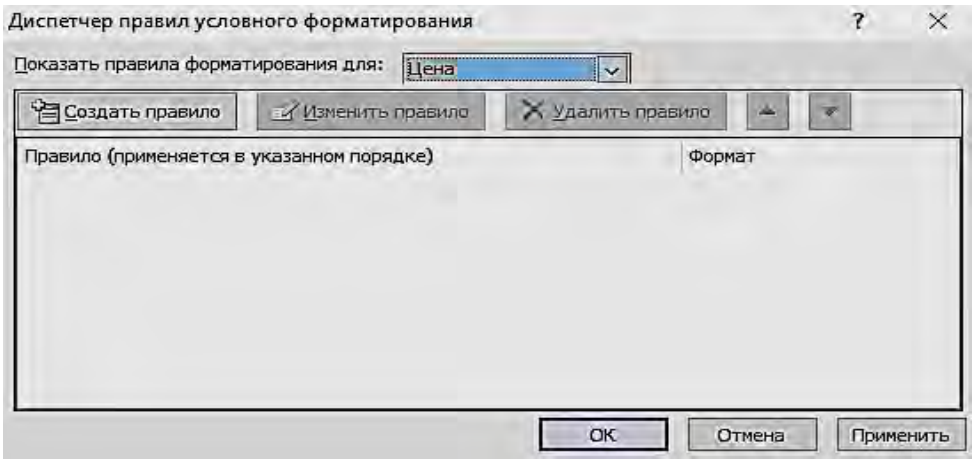


Рис. 4.3. Окно с пустым списком правил форматирования

2. Чтобы создать первое правило условного форматирования щелкните по кнопке **Создать правило**.

3. В окне **Новое правило форматирования** выберите тип правила и сформируйте описание правил, согласно которым будет производиться заданное форматирование поля.

4. В первом поле со списком выберите пункт **Значения поля**, во втором выберите тип сравнения – **больше** и введите постоянное значение в третье поле – 100000, не используя знака денежных единиц.

5. Выберите начертание шрифта, цвет и другие параметры форматирования. Нажмите кнопку ОК (рис. 4.4).

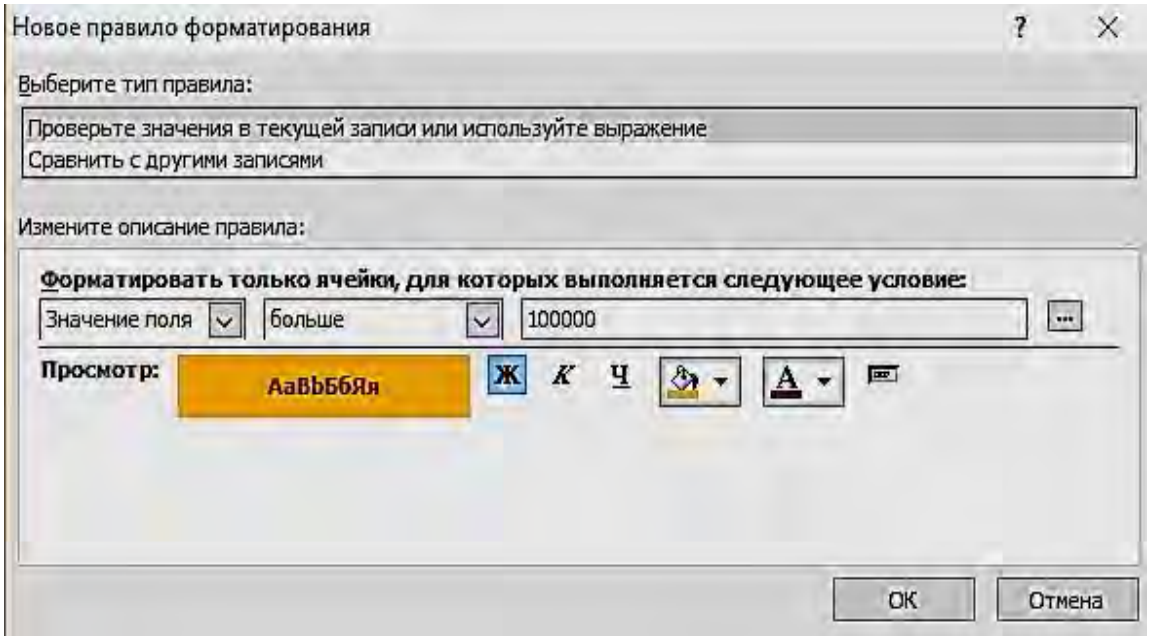


Рис. 4.4. Окно определения условий форматирования

Задание 3. Создать однотабличную форму «**Склады**». Для создания выбрать таблицу «**Склады**», использовать команду **Форма**, автоматически будет создана форма, содержащая встроенную подчиненную таблицу «**Товары**». Источником записей главной формы будет таблица «**Склады**». Такое поведение команды **Форма** вызвано тем, что таблица «**Склады**» имеет подчиненную таблицу «**Товары**», с которой она находиться в отношении 1**:**∞, и эта связь определена в схеме данных (рис. 4.5).

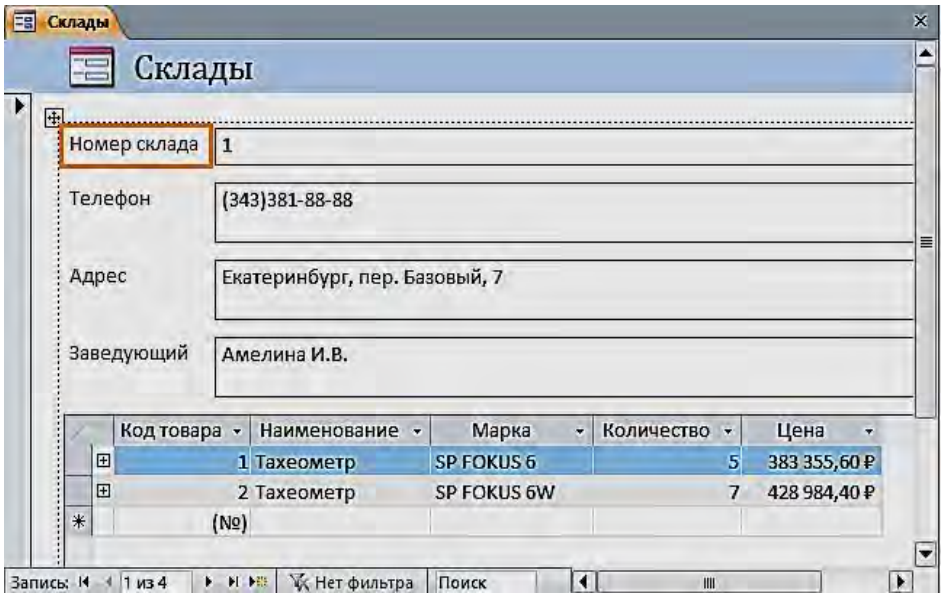


Рис. 4.5. Форма по таблице «**Склады**» с встроенной подчиненной «**Товары**»

Создание разделенной формы

Разделенная форма позволяет синхронно отображать данные одного источника в двух представлениях: в режиме формы и в режиме таблицы.

Задание 4. Создать однотабличную разделенную форму для работы с данными таблицы «**Продажи**». Выберите таблицу «**Продажи**» в области навигации и выполните команду **Разделенная форма** на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе только одной выбранной таблицы. Созданная форма отобразится в режиме макета (рис. 4.6).

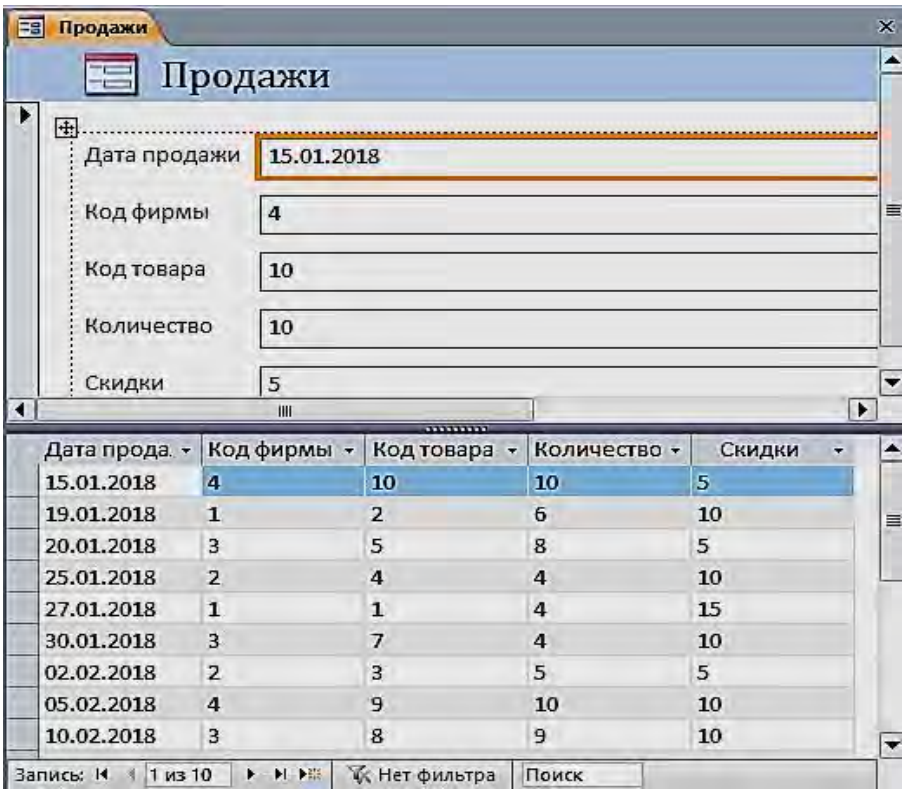


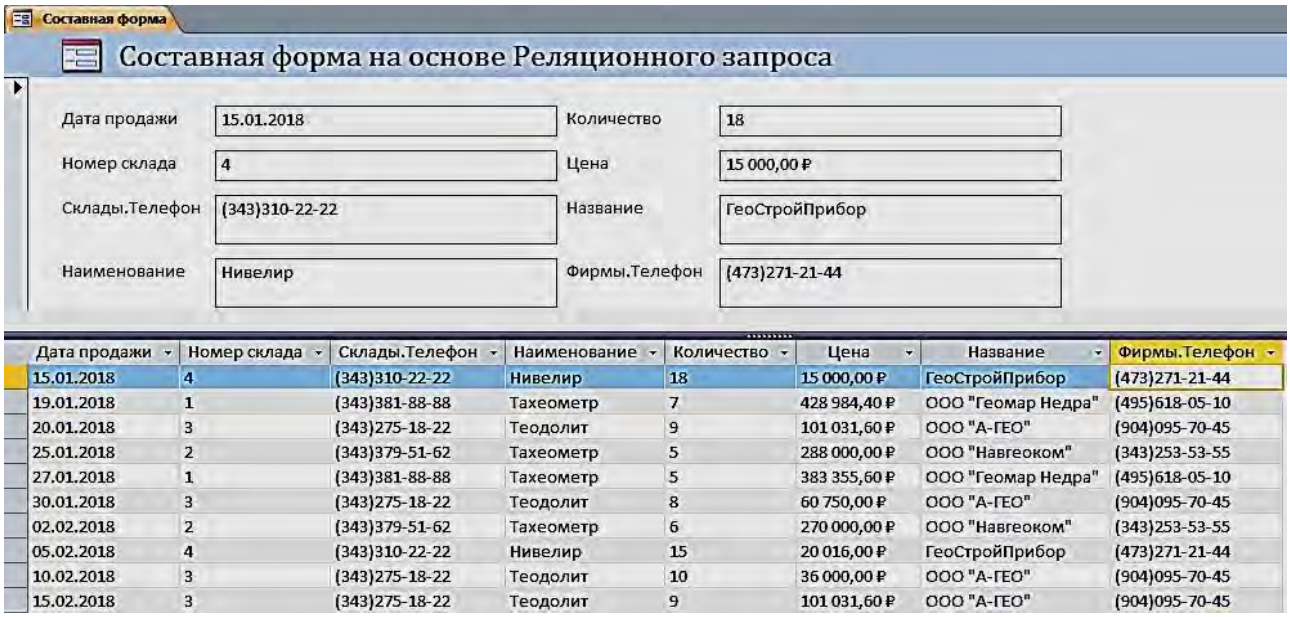
Рис. 4.6. Разделенная форма «**Продажи**»

Многотабличные формы

Многотабличная форма создается для работы с данными нескольких взаимосвязанных таблиц. Источником данных такой формы является многотабличный запрос. При этом форма может быть простой, отображающей одну запись в столбик, или ленточной, отображающей все записи в табличном виде с надписями в заголовке формы. Для такой формы могут быть использованы команды **Форма** или **Несколько элементов**.

Многотабличная форма может быть составной: состоять из главной формы и одной или нескольких подчиненных включаемых форм.

Задание 5. Создать составную форму воспользовавшись реляционным запросом. Выберите запрос «**16_реляционный запрос**» в области навигации и выполните команду **Форма** на вкладке **Создание**. Эта команда обеспечит автоматическое создание формы на основе выбранного запроса (рис. 4.7). В режиме Конструктора можно изменить заголовок.



Дата продажи	Номер склада	Склады.Телефон	Наименование	Количество	Цена	Название	Фирмы.Телефон
15.01.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	18	15 000,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
19.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	7	428 984,40 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
20.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
25.01.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	5	288 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
27.01.2018	1	(343)381-88-88	Тахеометр	5	383 355,60 ₽	ООО "Геомар Недра"	(495)618-05-10
30.01.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	8	60 750,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
02.02.2018	2	(343)379-51-62	Тахеометр	6	270 000,00 ₽	ООО "Навгеоком"	(343)253-53-55
05.02.2018	4	(343)310-22-22	Нивелир	15	20 016,00 ₽	ГеоСтройПрибор	(473)271-21-44
10.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	10	36 000,00 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45
15.02.2018	3	(343)275-18-22	Теодолит	9	101 031,60 ₽	ООО "А-ГЕО"	(904)095-70-45

Рис. 4.7. Составная форма

Создание многотабличной формы с помощью мастера

Основным средством создания многотабличной формы можно считать мастер форм, который, запросив у пользователя сведения о включаемых в форму полях из нескольких взаимосвязанных таблиц и запросов, создает составную или одиночную форму.

Задание 6. С помощью мастера создайте форму для работы с данными о продажах товаров

Для вызова мастера форм выполните на вкладке ленты **Создание** в группе **Формы** команду **Мастер форм**. Отобразится окно мастера **Создания форм**, представленное на рис. 4.8.

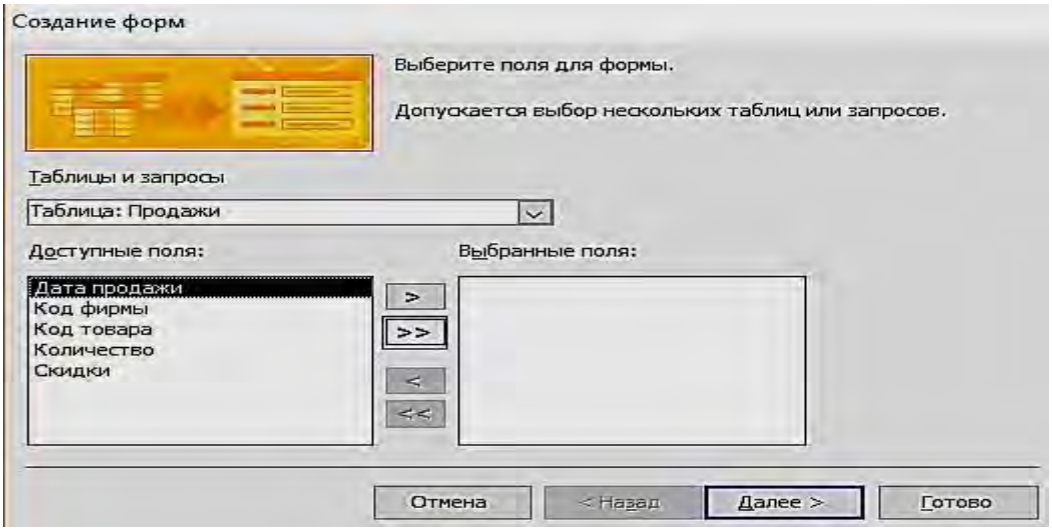


Рис. 4.8. Выбор таблиц и полей для создаваемой формы

Если предварительно в области навигации не была выбрана таблица «**Продажи**», выберите её в раскрывающемся списке **Таблицы и запросы** диалогового окна мастера. Затем отберите из списка **Доступные поля,** в нашем случае все, кроме поля «**Скидки**» (рис. 4.9).

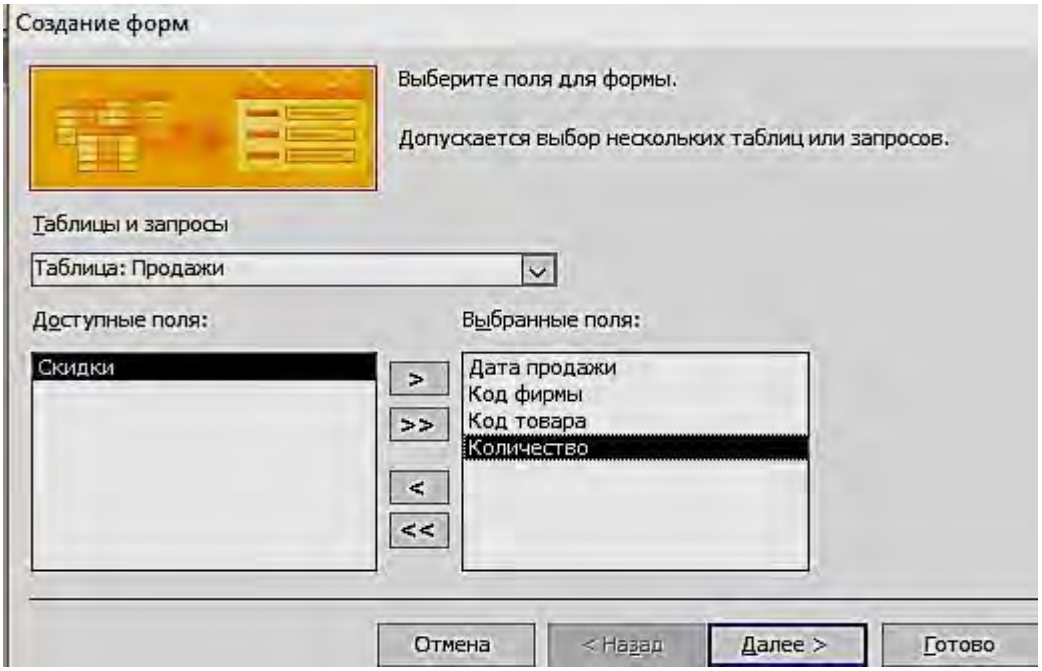


Рис. 4.9. Выбранные поля таблицы «**Продажи**» для создаваемой формы

Переходим к выбору полей из таблицы «**Товары**». Перетаскиваем все поля, кроме поля Код товара. После выбора полей для обеих таблиц и нажатия кнопки Далее в окне создание форм в списке **Выберите тип представления данных** надо выделить имя таблицы Продажи и щелкнуть по кнопке «**Далее**» (рис.
4.10).

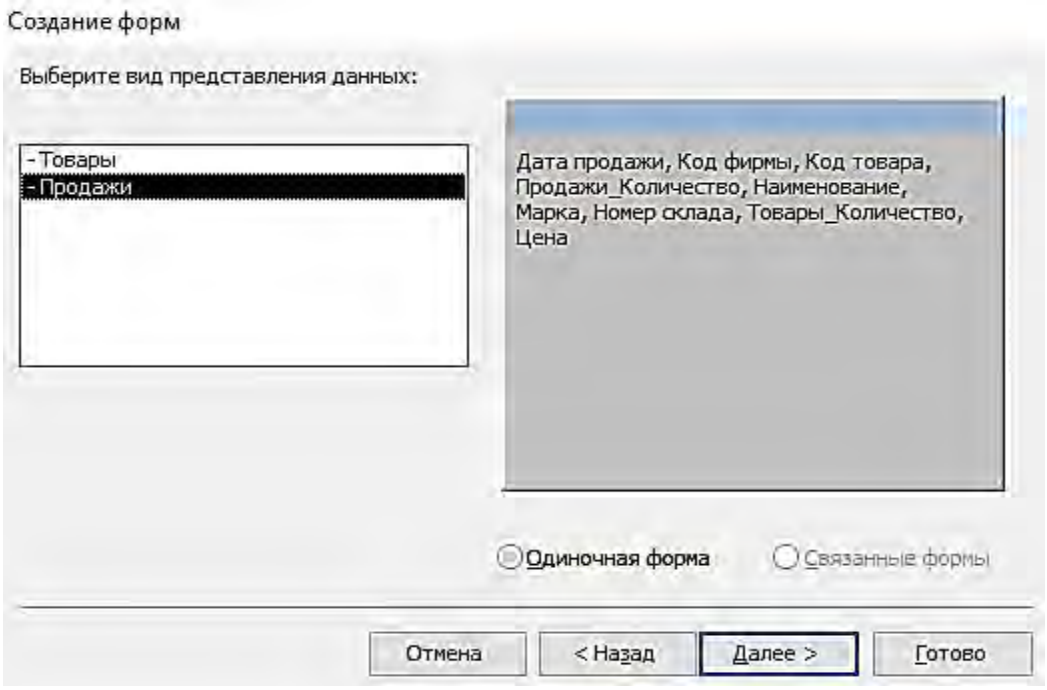


Рис. 4.10. Выбор вида представления данных

В следующем диалоговом окне предоставляется возможность выбрать внешний вид формы и нажать кнопку «**Готово**» (рис. 4.11).

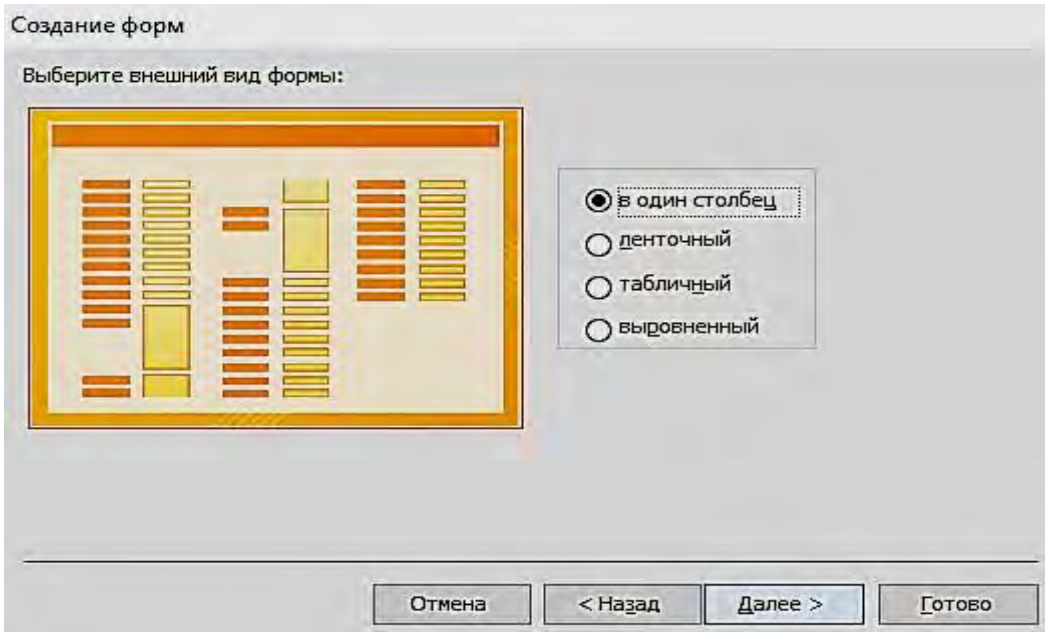


Рис. 4.11. Выбор вида формы в один столбец

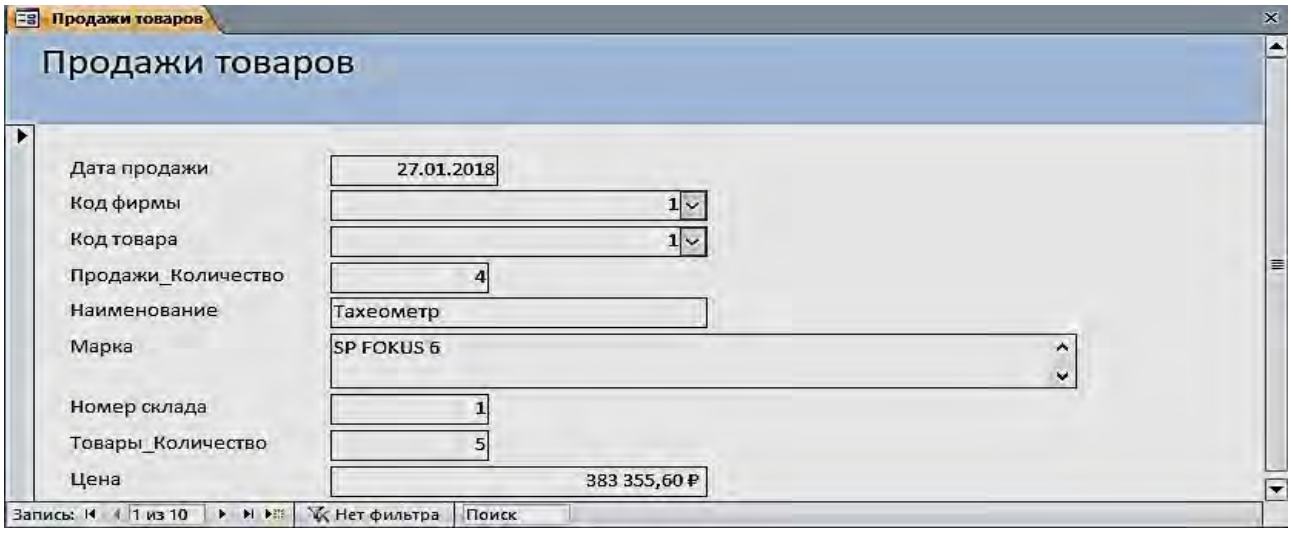


Рис. 4.12. Форма, открытая для просмотра, корректировки и ввода данных

Одиночная многотабличная форма

Одиночную форму, включающую поля из нескольких связанных таблиц, позволяет быстро построить инструмент **Пустая форма.** Выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. Откроется пустая форма в режиме макета и отобразится область **Список полей**. В списке перечислены все таблицы базы данных, и предоставляется возможность открыть список полей каждой из них (рис. 4.13). Чтобы добавить поле в форму, щелкните на нем двойным щелчком или перетащите его в форму. Для отображения каждого поля Access создает в форме соответствующий элемент управления и привязывает его к полю. Кроме того, для элемента управления создается присоединенная надпись.

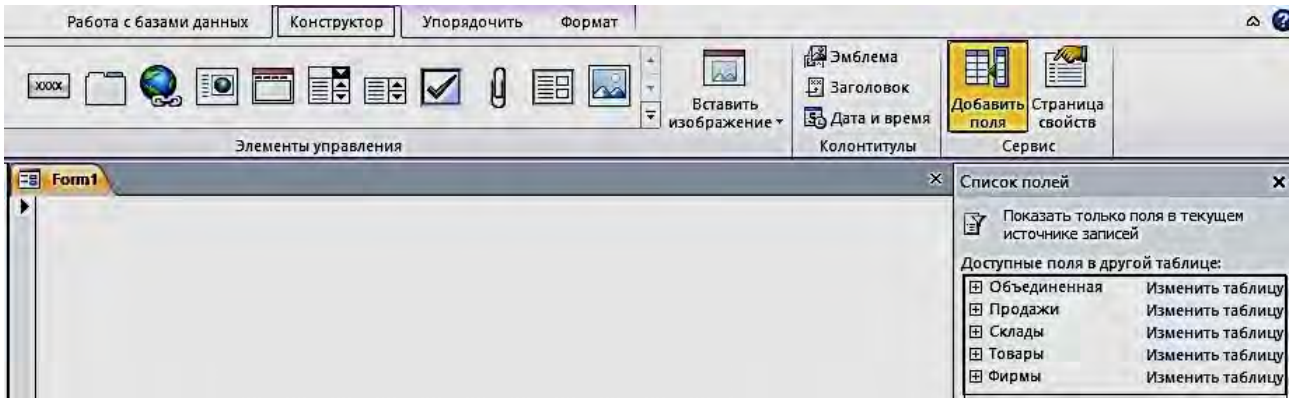


Рис. 4.13. Область **Список полей** при создании одиночной формы

Задание 7. Создать одиночную многотабличную форму для просмотра всех данных базы. Выполните команду **Пустая форма.** В области **Список полей** откройте список полей таблицы «**Продажи**», щелкнув знак «Плюс»

рядом с её именем. Добавьте в форму необходимые поля (Дата продажи, Код фирмы, Код товара, Количество, Скидки). Далее последовательно добавляйте поля из таблицы «**Товары**» (Наименование, Марка, Цена), затем из таблицы «**Склады**» (Номер склада, Телефон, Адрес, Заведующий) и из таблицы «**Фирмы поля**» – (Название, Адрес, Телефон, Контактное лицо, Должность). Сохранить форму под именем «Общие данные».

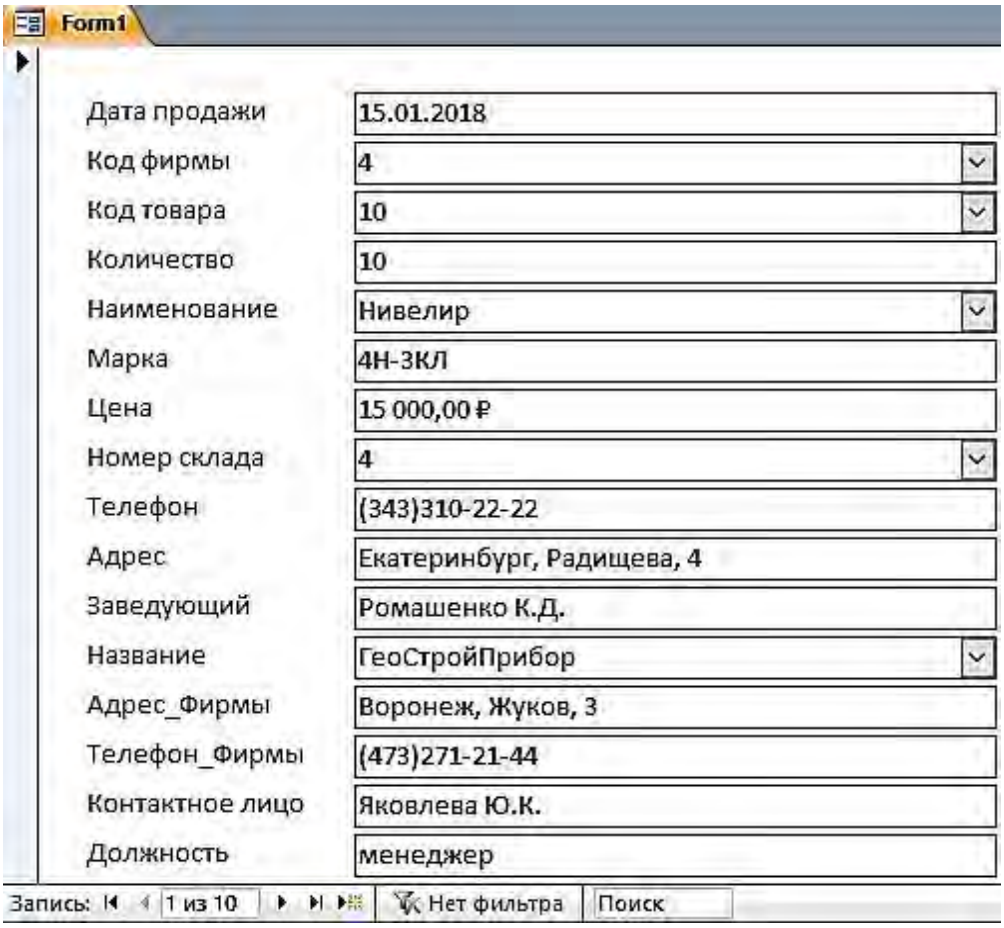


Рис. 4.14. Форма «**Общие данные**», созданная с помощью инструмента **Пустая форма**

Задание 8. Создать одиночную форму с помещенной в неё гистограммой

Для этого откройте таблицу «**Товары**». В группе **Импорт и связи** на вкладке **Внешние данные** выберите на ленте **Экспорт в таблицу Excel** (рис. 4.15).



Товары

Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00р.
10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.15. Окно экспорта таблицы «**Товары**» на лист Excel

Выберите место назначения для экспорта таблицы «**Товары**», для этого нажмите на кнопку **Обзор**, выберите соответствующую папку (рис. 4.16, 4.17).

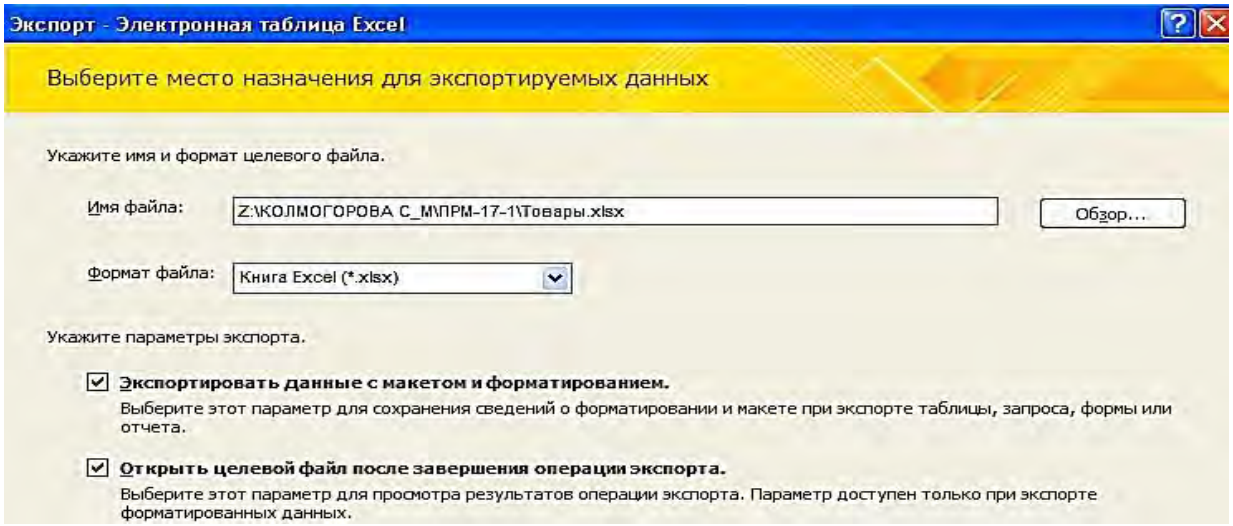


Рис. 4.16. Окно выбора места назначения для экспорта таблицы «**Товары**»

	A	B	C	D	E	F
1	Код товара	Наименование	Марка	Номер склада	Количество	Цена
2	1	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60р.
3	2	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40р.
4	3	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00р.
5	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00р.
6	5	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60р.
7	6	Теодолит	4Т15П	3	5	70 516,80р.
8	7	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00р.
9	8	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00р.
10	9	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00р.
11	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00р.

Рис. 4.17. Таблица «**Товары**» в Excel, экспортируемая из Access

Построение гистограммы по колонкам «**Наименование**» и «**Цена**» (рис. 4.18).

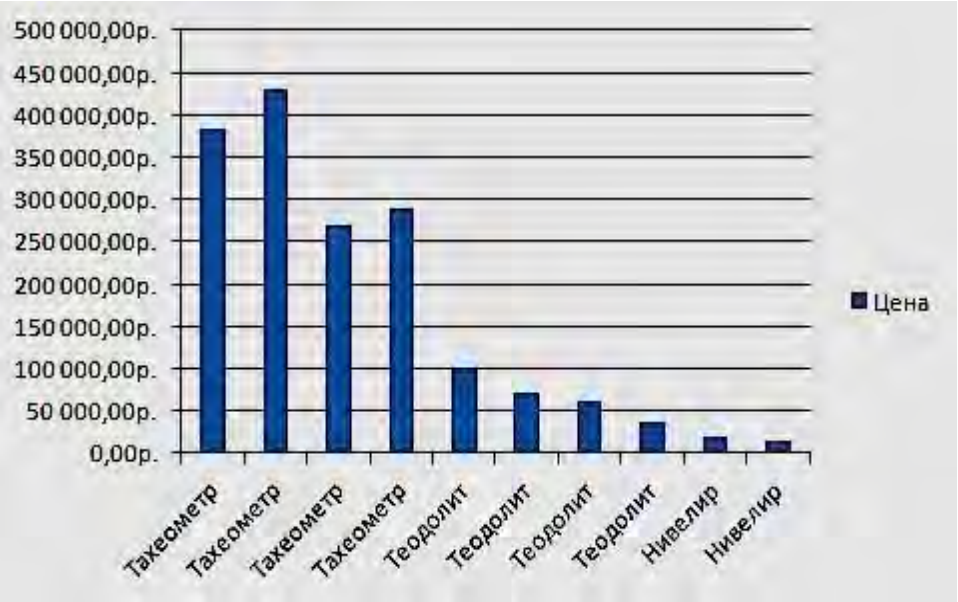


Рис. 4.18. Гистограмма, соответствующая таблице «**Товары**»

Скопируйте гистограмму в Excel. В Access выполните команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**. В режиме «**Конструктор**» произвести вставку гистограммы. Сохранить форму под названием **Гистограмма** (рис. 4.19).

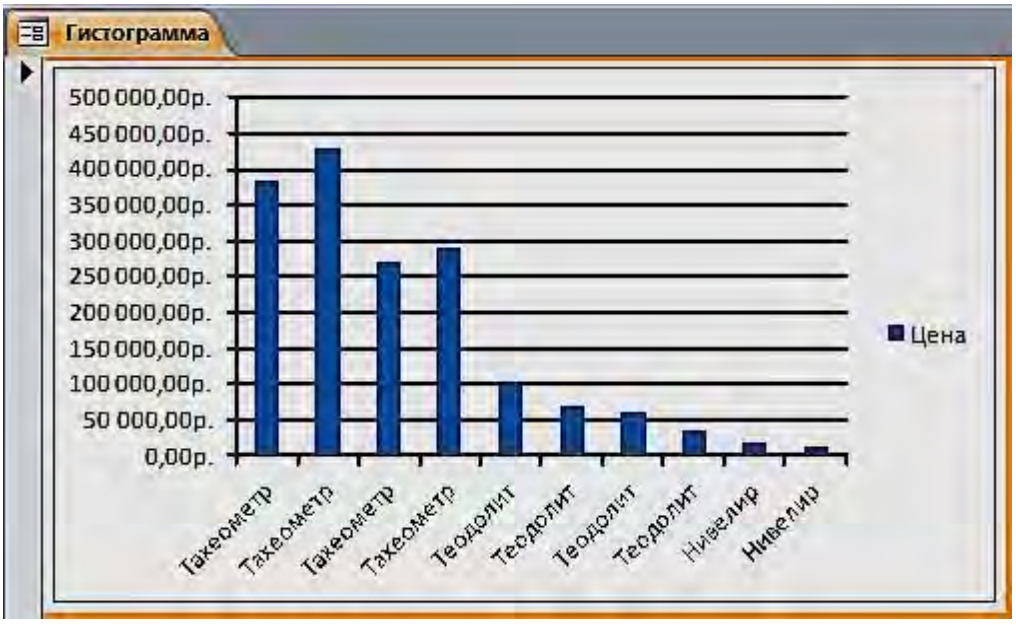


Рис. 4.19. Форма «Гистограмма»

Задание для самостоятельной работы

1. Изменить в форме «**Товары**» цвет денежных значений в поле «**Цена**» на зеленый, заливку на светло-зеленый, начертание шрифта – жирный курсив, когда они оказываются меньше или равны 80000 руб.
2. Создать форму «**Фирмы**» с подчиненной «**Продажи**».

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5
Работа с отчетами

Средства Access по разработке отчетов предназначены для конструирования макета отчета, в соответствии с которым осуществляется вывод данных из определенного источника записей в виде выходного печатного документа.

Отчет может создаваться с помощью Мастера или в режиме Конструктора отчетов.

Задание 1. Выберем в области навигации таблицу «**Фирмы**», данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**.

Access создаст отчет и отобразит его в режиме макета (рис. 5.1). В отчете будут представлены все записи таблицы «**Фирмы**». Размещение полей таблицы – источника записей отчета – в разделах отчета представлено на рис. 5.2.

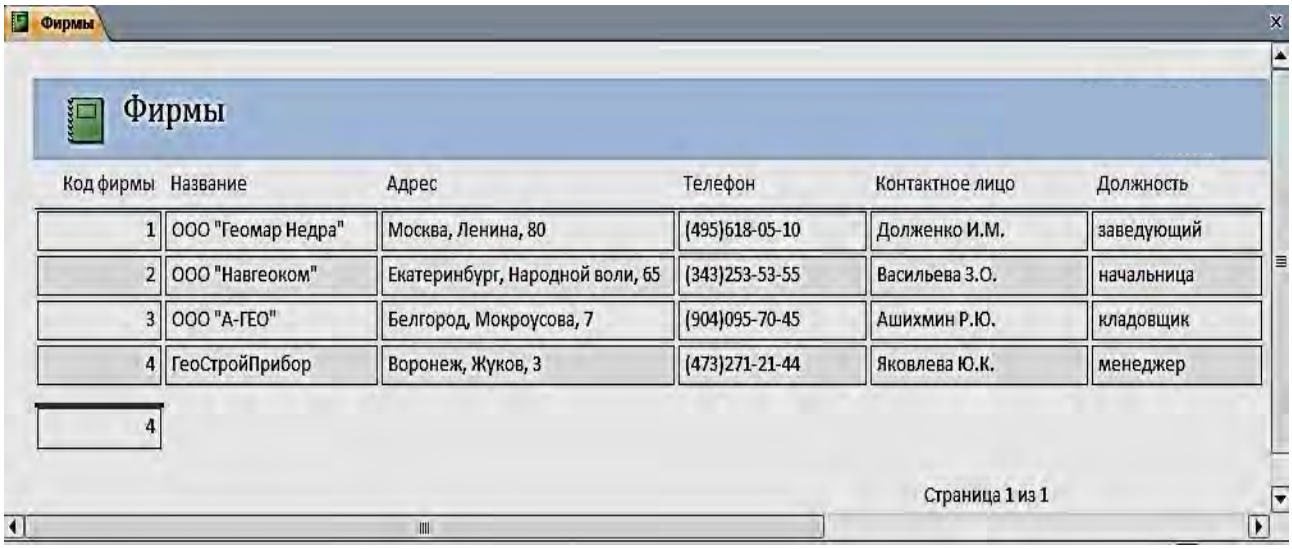


Рис. 5.1. Отчет в режиме «**Макета**»

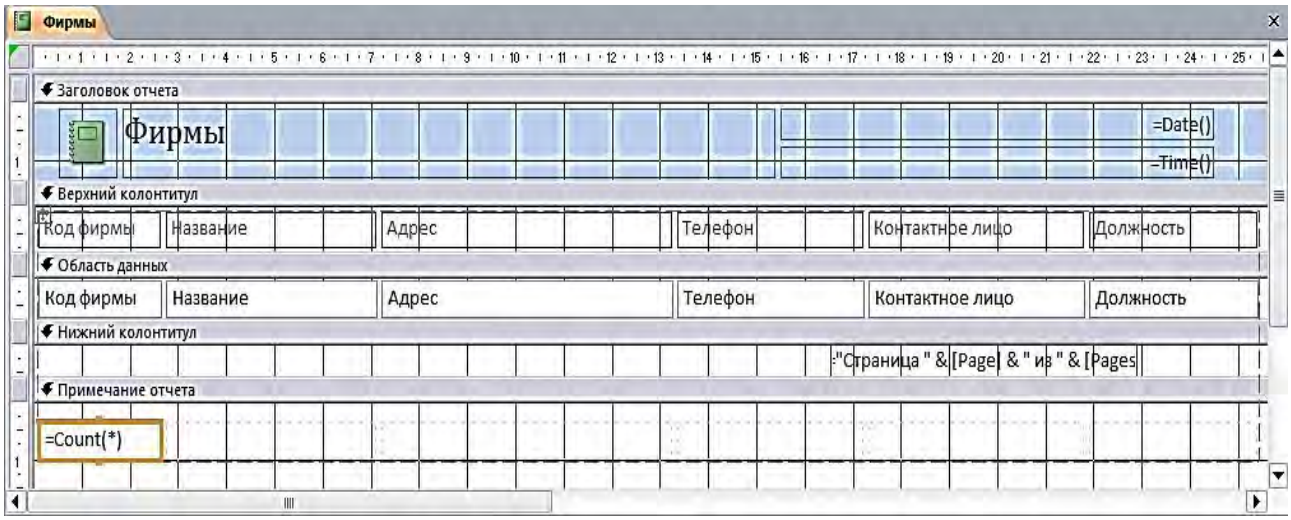


Рис. 5.2. Разделы однотабличного отчета в режиме Конструктора

В режиме макета легко привести созданный отчет в соответствие с заданными требованиями. Измените название отчета на «Контакты». Для этого выполните двойной щелчок на нем и введите новое название. Выделите макет отчета и измените заливку, размер шрифта, выбрав его на вкладке **Главная** в группе **Форматирование текста** или на вкладке **Формат** в группе **Шрифт.** Для изменения параметров страницы выполняйте команды соответствующей вкладки ленты. Пунктирной линией в отчете отмечена граница полей страницы. Отображение этой линии регулируется кнопкой **Показать поля** на вкладке ленты **Параметры страницы.** Для выбора размеров полей страницы может быть использована коллекция, отображаемая при нажатии кнопки **Поля.** На этой же вкладке можно выбрать размер бумаги, ориентацию страницы и ряд др. параметров (рис. 5.3).

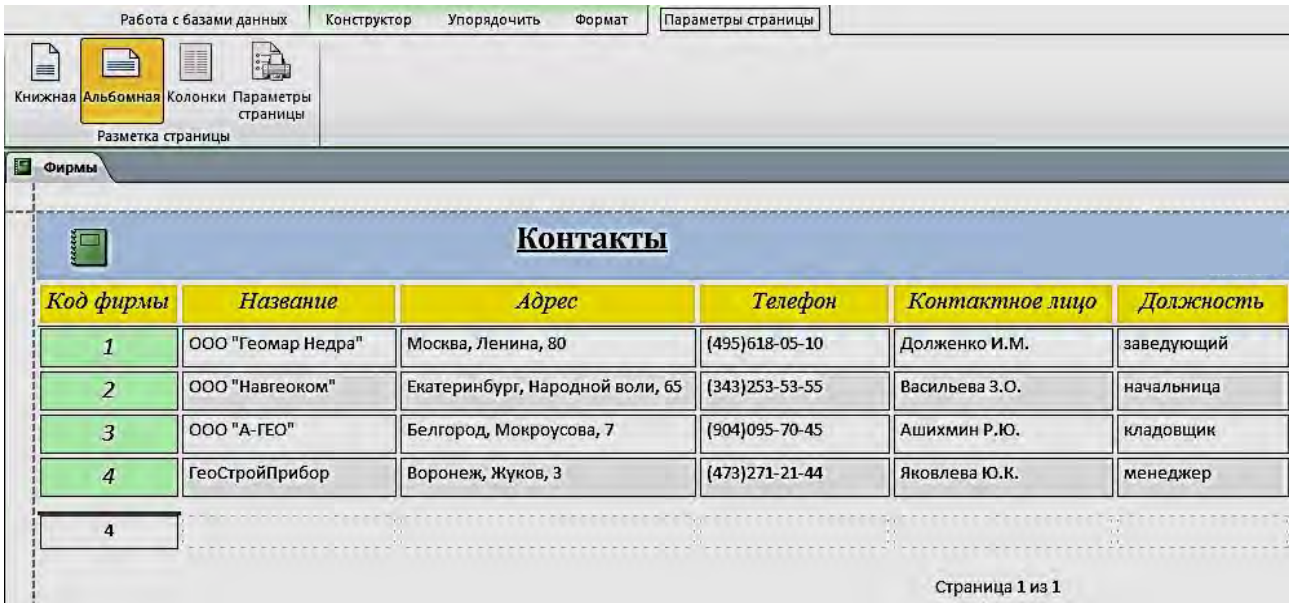


Рис 5.3. Отформатированный отчет в режиме Макета

Задание 2. Выберем в области навигации форму **Продажи товаров**, данные из которой будут источником записей отчета. На вкладке ленты **Создание** в группе **Отчеты** выполнить команду **Отчет**. Для группировки данных по дате продажи выполним команду **Группировка, сортировка и итоги.** Выберем для предлагаемого уровня группировки поле «**Дата продажи**». Откроем список, щелкнув на параметре **по кварталам**, и выберем **по месяцам.** Для закрытия списка щелкните на любом месте за его пределами (рис. 5.4, 5.5).

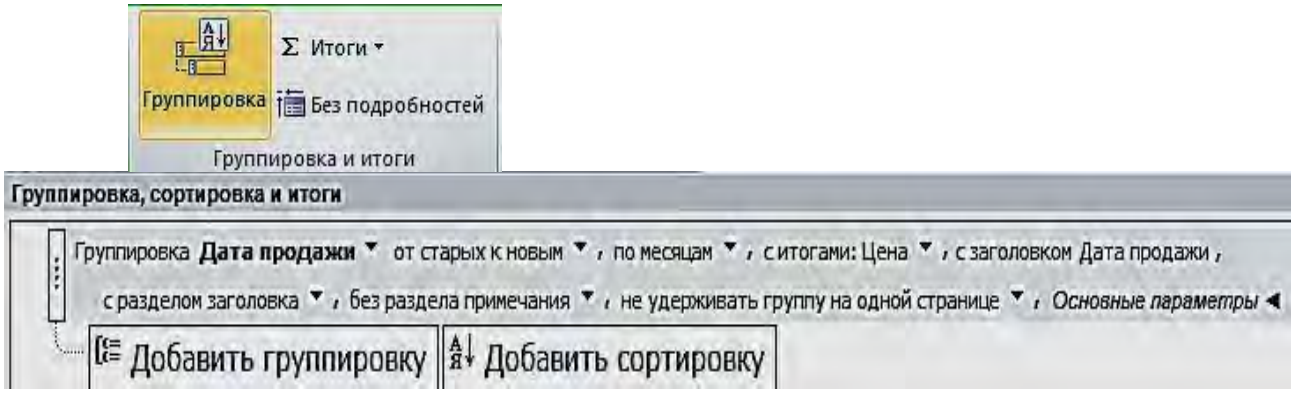
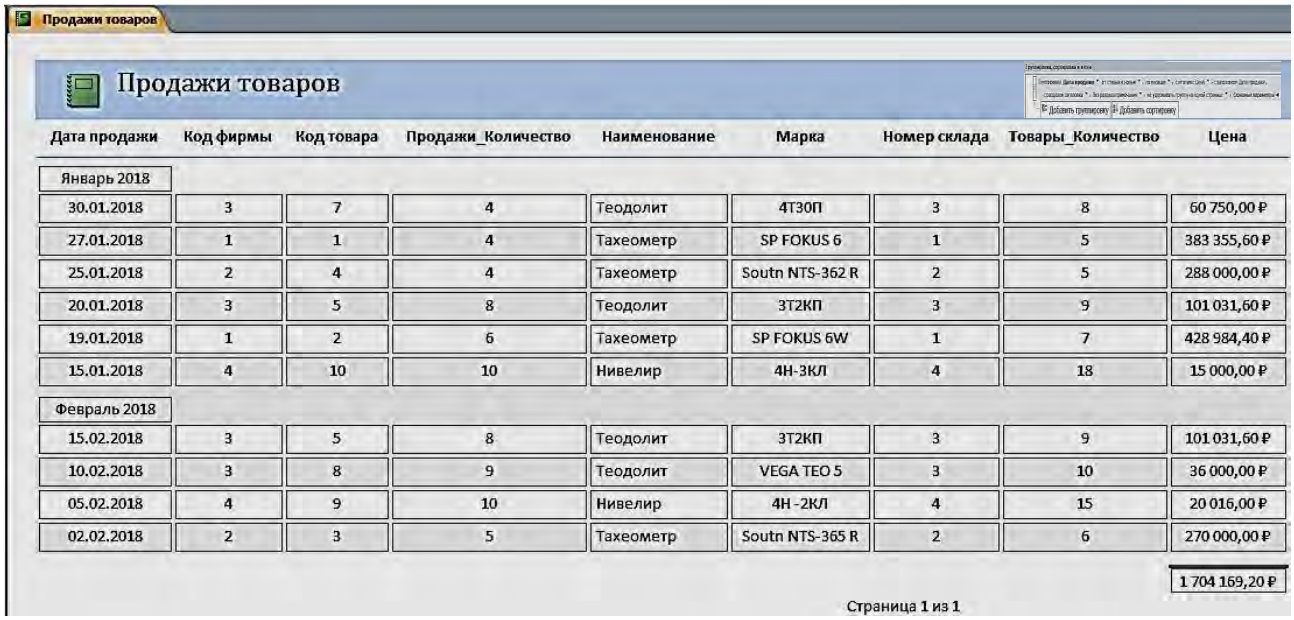


Рис. 5.4. Выбор для поля с датой группировки по месяцам



Дата продажи	Код фирмы	Код товара	Продажи_Количество	Наименование	Марка	Номер склада	Товары_Количество	Цена
Январь 2018								
30.01.2018	3	7	4	Теодолит	4Т30П	3	8	60 750,00 ₽
27.01.2018	1	1	4	Тахеометр	SP FOKUS 6	1	5	383 355,60 ₽
25.01.2018	2	4	4	Тахеометр	Soutn NTS-362 R	2	5	288 000,00 ₽
20.01.2018	3	5	8	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60 ₽
19.01.2018	1	2	6	Тахеометр	SP FOKUS 6W	1	7	428 984,40 ₽
15.01.2018	4	10	10	Нивелир	4Н-3КЛ	4	18	15 000,00 ₽
Февраль 2018								
15.02.2018	3	5	8	Теодолит	3Т2КП	3	9	101 031,60 ₽
10.02.2018	3	8	9	Теодолит	VEGA TEO 5	3	10	36 000,00 ₽
05.02.2018	4	9	10	Нивелир	4Н -2КЛ	4	15	20 016,00 ₽
02.02.2018	2	3	5	Тахеометр	Soutn NTS-365 R	2	6	270 000,00 ₽
								1 704 169,20 ₽

Страница 1 из 1

Рис 5.5. Форма с датой группировки по месяцам

Задание для самостоятельной работы

Создать отчет по таблице «**Объединенная**», изображенного на рис. 5.6.



ОТЧЕТ ПРОДАЖИ

Дата продажи - по месяцам	Название	Фирмы_Телефон	Дата продажи	Наименование	Количество	Цена	Номер склада	Склады_Телефон
Январь 2018								
	ГеоСтройПрибор	4732712144	*15.01.2018*	Нивелир	18	15 000,00 ₽	4	3433102222
	ООО "Геомар Недра"	4956180510	*19.01.2018*	Тахеометр	7	428 984,40 ₽	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*20.01.2018*	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
	ООО "Навгеоком"	3432535355	*25.01.2018*	Тахеометр	5	288 000,00 ₽	2	3433795162
	ООО "Геомар Недра"	4956180510	*27.01.2018*	Тахеометр	5	383 355,60 ₽	1	3433818888
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*30.01.2018*	Теодолит	8	60 750,00 ₽	3	3432751822
Итоги для 'Дата продажи' = 30.01.2018 (6 записей)								
Сумма					52	1 277 121,60 ₽		
Февраль 2018								
	ООО "Навгеоком"	3432535355	*02.02.2018*	Тахеометр	6	270 000,00 ₽	2	3433795162
	ГеоСтройПрибор	4732712144	*05.02.2018*	Нивелир	15	20 016,00 ₽	4	3433102222
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*10.02.2018*	Теодолит	10	36 000,00 ₽	3	3432751822
	ООО "А-ГЕО"	9040957045	*15.02.2018*	Теодолит	9	101 031,60 ₽	3	3432751822
Итоги для 'Дата продажи' = 15.02.2018 (4 записей)								
Сумма					40	427 047,60 ₽		
ИТОГО					92	1 704 169,20 ₽		

Рис. 5.6. Результат отчета

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Создание главной кнопочной формы с использованием макросов

Использования макросов для автоматизации управления реакцией приложения на действия пользователя в формах или отчетах позволяет создавать полноценные интерактивные приложения без написания кода *VBA*.

Макрос (от слова «макрокоманда») – программа, состоящая из последовательности макрокоманд. *Макрокоманда* – это инструкция, ориентированная на выполнение определенного действия над объектами Access и их элементами.

Например, макрокомандой можно открыть форму, отчет, напечатать отчет, запустить на выполнение запрос, применить фильтр, присвоить значение и т. д.

Задание 1. Создать главную форму управления приложением, в которой будут представлены:

- элементы для кнопочных форм запросов и гистограмма;
- макросы для таблиц и отчетов;
- макрос, с помощью которого будет закрыта база данных.

1. Выполним команду **Пустая форма** на вкладке ленты **Создать** в группе **Формы**, режим «**Конструктор**» (рис. 6.1).

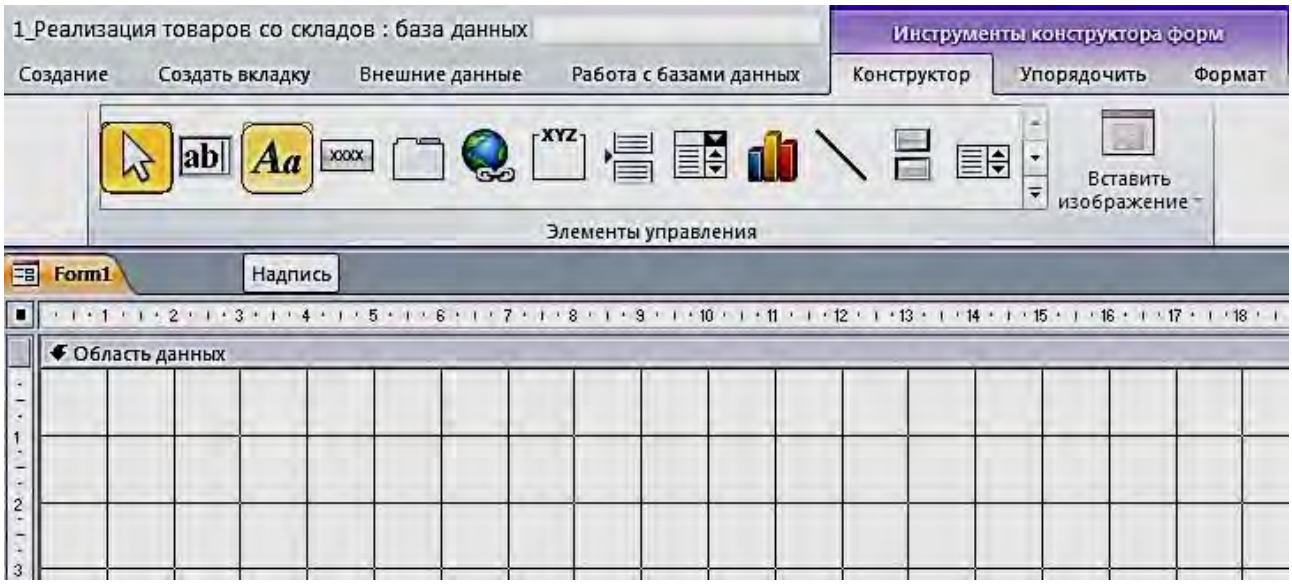


Рис. 6.1. Пустая форма в режиме «**Конструктор**» с элементами управления

2. Расположим в области **Формы** элемент **Надпись**, поместим в него название **Реализация товаров со складов** (рис. 6.2). Форматирование шрифта в надписях и кнопках осуществляется для выделенного объекта, при помощи **Инструмента конструктора форм**, в объекте **Формат**. Сохраним форму под именем «**Главная форма**».

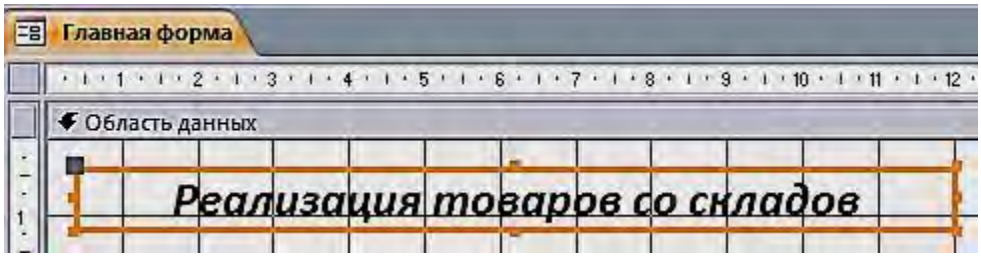


Рис. 6.2. Использование элемента управления **Надпись**

Создание макроса осуществляется в диалоговом режиме и сводится к записи в окне конструктора макроса последовательности макрокоманд, для которых задаются аргументы. Каждому макросу присваивается имя. При выполнении макроса макрокоманды выполняются последовательно в порядке их расположения. При этом используются объекты или данные, указанные в аргументах макрокоманд.

Создание макроса начинается с выполнением команды **Макрос** на вкладке ленты **Создание** в группе **Макросы и код**. В результате выполнения команды открывается окно макроса и каталог макрокоманд (рис. 6.3).

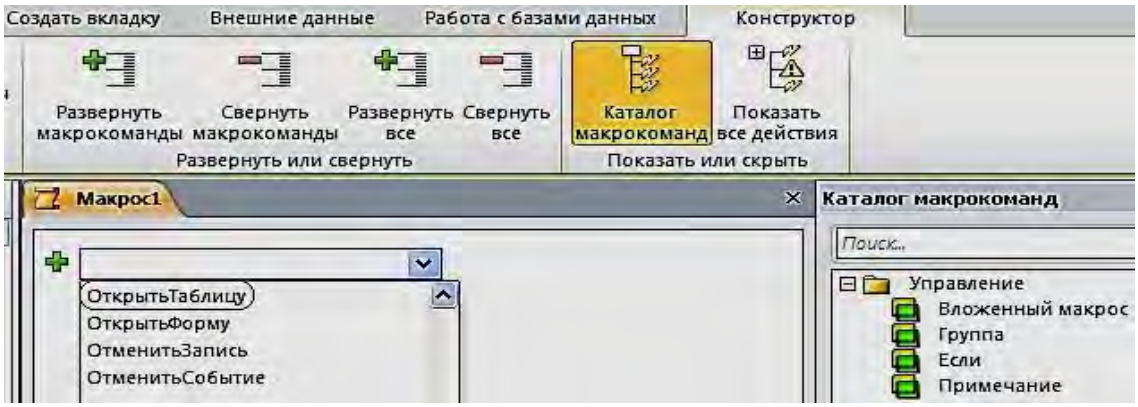


Рис. 6.3. Окно конструирования макроса с Каталогом макрокоманд

3. Создадим первый макрос **Таблицы**, при выполнении которого откроются четыре таблицы: «Продажи», «Склады», «Товары» и «Фирмы». Сохраним его под именем **Таблицы** (рис. 6.4).

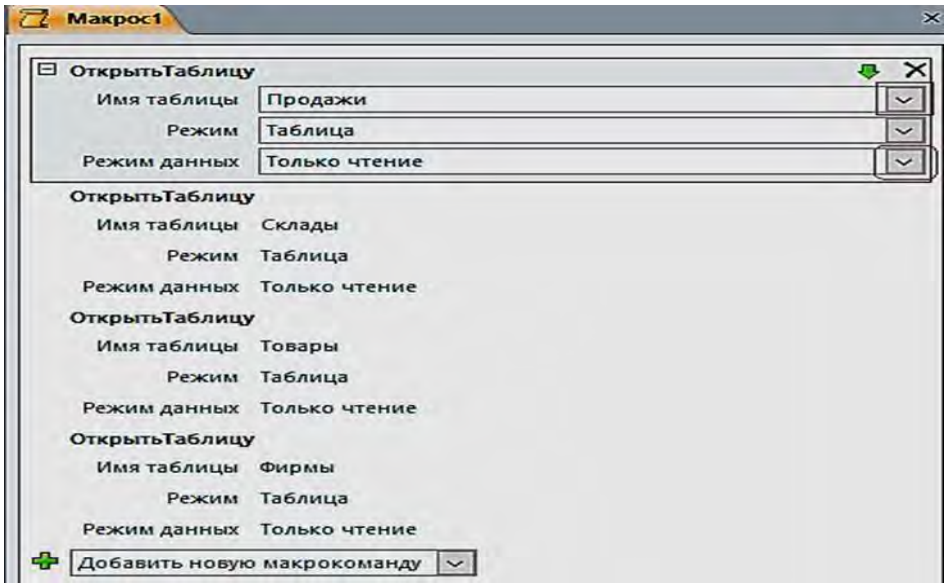


Рис. 6.4. Блок конструирования Макроса «**Таблицы**»

4. Создадим второй макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.5). Сохраним его под именем **Отчет**.

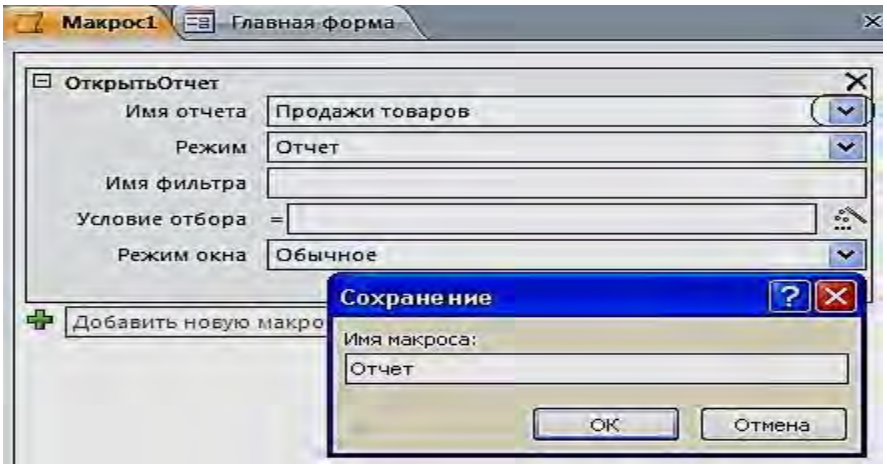


Рис. 6.5. Создание макроса **ОткрытьОтчет**

5. Создадим третий макрос, при выполнении которого откроется отчет «Продажи товаров» (рис. 6.6). Сохраним под именем **Выход**.

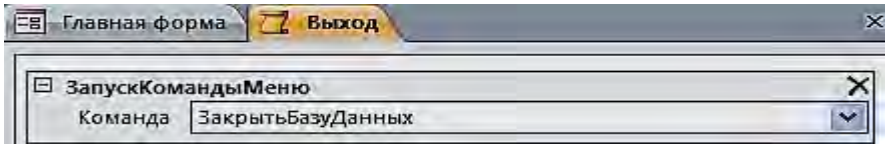


Рис. 6.6. Создание макроса **ЗакрытьБазуДанных**

Создание управляющих кнопок на экране

1. Создадим кнопки: **Таблицы**, **Отчет** и **Выход из БД.** Расположим в области **Главной формы** три кнопки с ранее созданными макросами. Для размещения кнопок предусмотрим, чтобы все действия осуществлялись при нажатой кнопке **«Использовать мастера»**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Разное**, затем – действия: **Выполнить макрос,** нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.7).

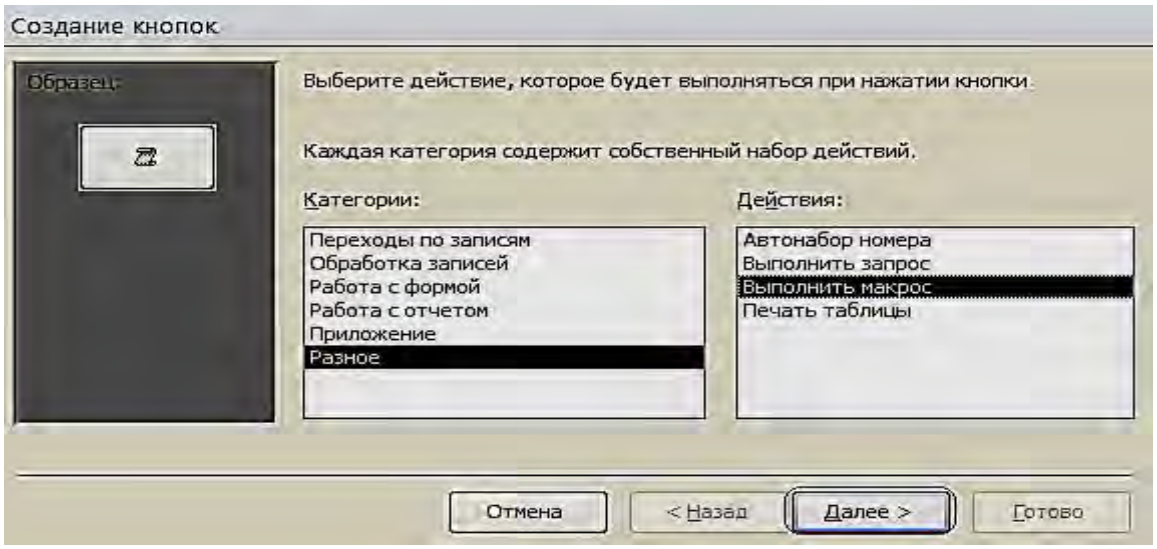


Рис. 6.7. Окно создания кнопок при работе с **Макросами**

2. Выберем соответствующий макрос (рис. 6.8). Разместим текст на кнопке.

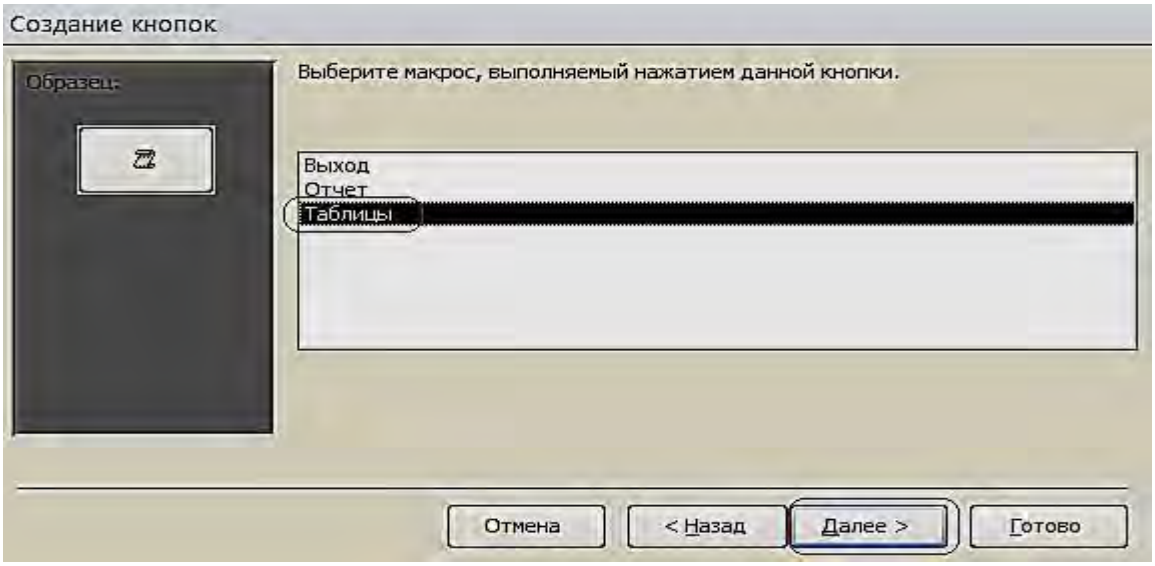


Рис. 6.8. Окно выбора макроса

3. В тексте напишем название **Таблицы** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее** (рис. 6.9).

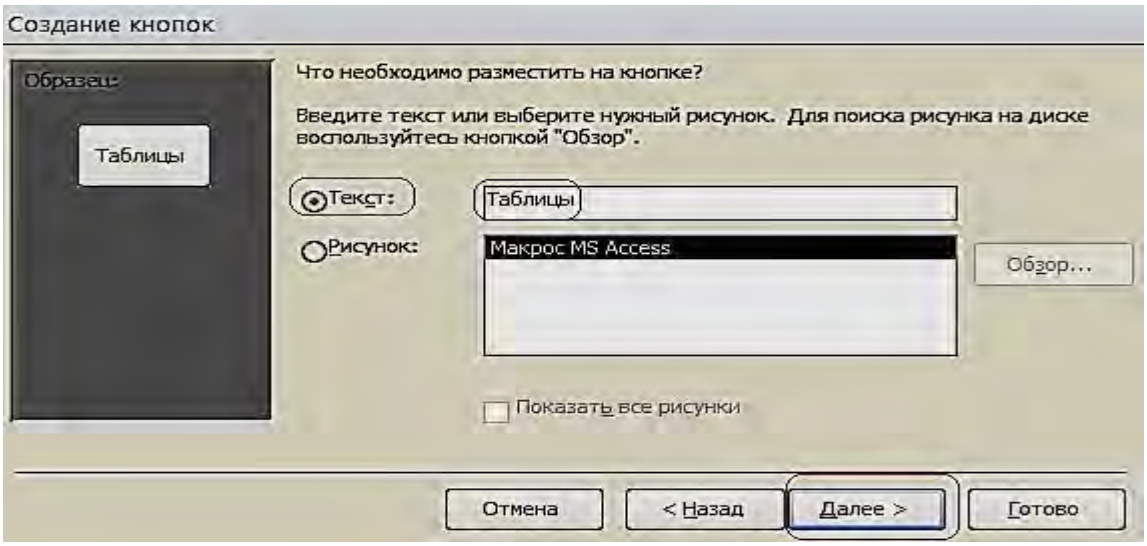


Рис. 6.9. Размещение текста на кнопке

4. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью макросов (рис. 6.10).

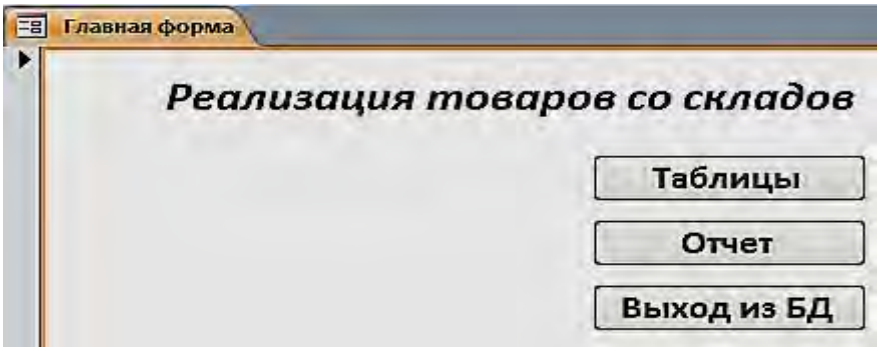


Рис. 6.10. Главная форма в режиме Макета

5. Расположим в области **Главной формы** три кнопки: **Составная форма**, **Общие данные** и **Гистограмма**. Переместим элемент управления **Кнопка** на форму, появится окно для создания кнопок. Выберем категорию: **Работа с формой**, действия: **Открыть форму,** нажмем кнопку **Далее** (рис. 6.11).

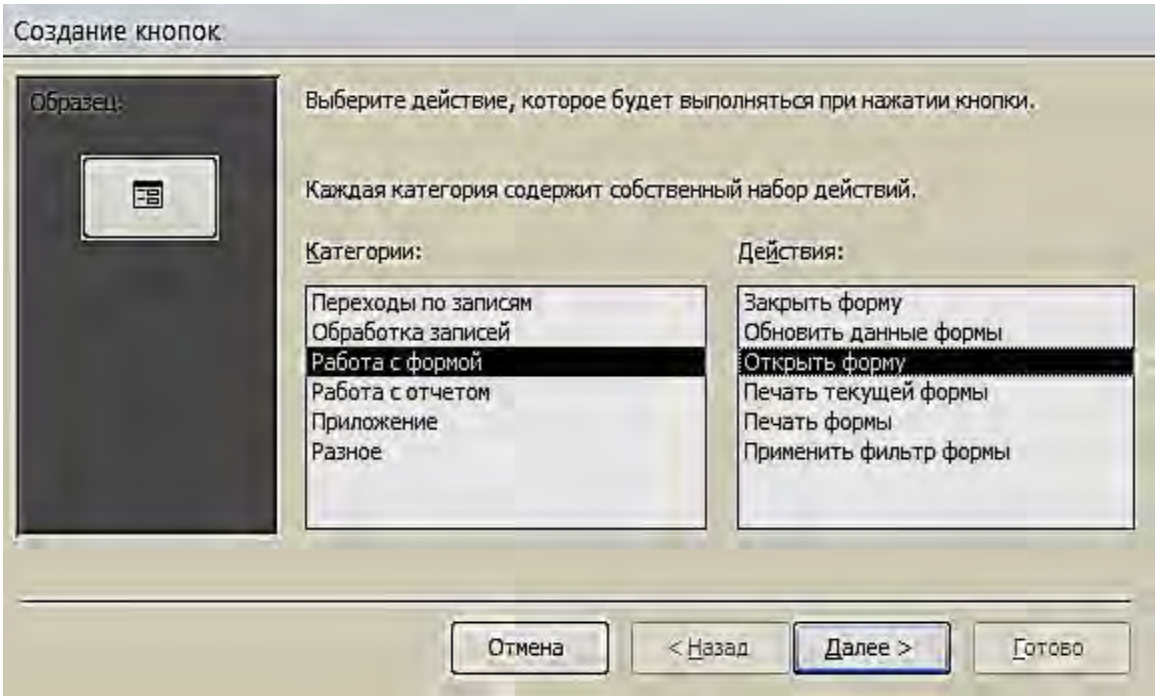


Рис. 6.11. Окно создания кнопок при работе с формами

6. Выберем соответствующую форму (рис. 6.12).

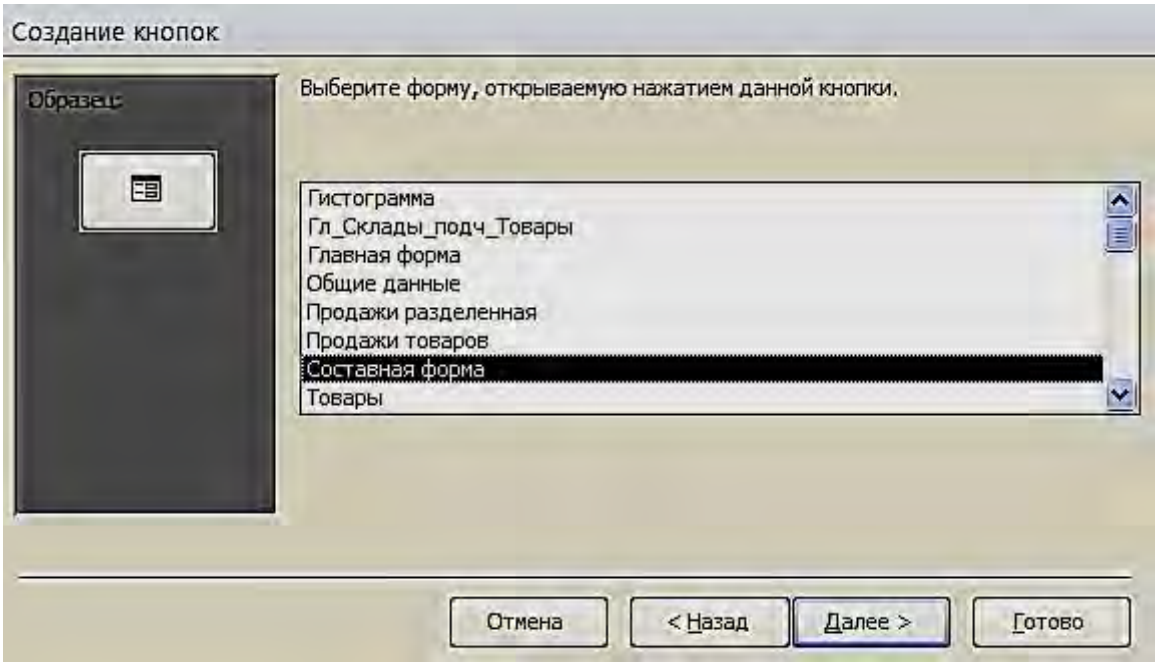


Рис. 6.12. Окно выбора формы

Поместим текст на кнопке (рис. 6.13). В тексте напишем название **Гистограмма** и выполним действия, указанные по кнопке **Далее**. Таким образом, создадим все кнопки, которые будут открываться с помощью Форм.

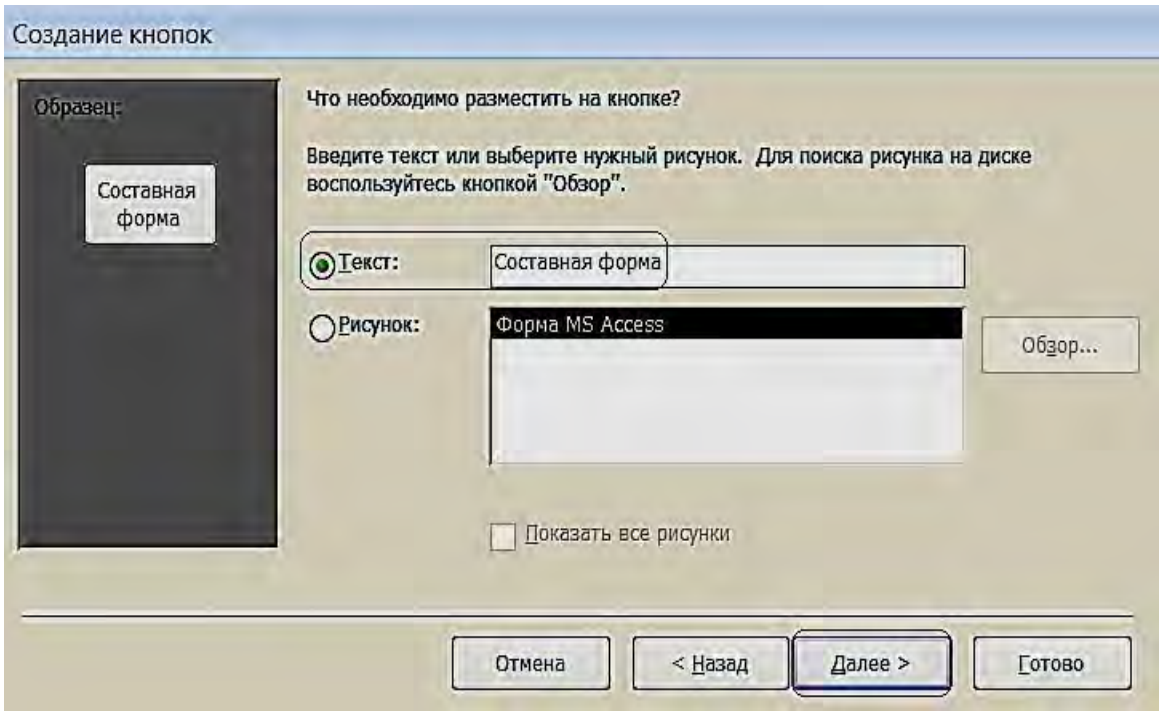


Рис. 6.13. Размещение текста на кнопке

7. Для создания картинки воспользуемся элементом управления «**Рисунок**».

8. По завершению разработки приложения, сохраним и закроем форму. Затем откроем и проверим работоспособность всех её элементов (рис. 6.14).



Рис. 6.14. Управляющая форма в режиме «**Формы**»

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Указания к выполнению работы

- Создать логическую модель базы данных: для заданной предметной области, представленной в виде перечня реквизитов, сформировать таблицы, определить в них ключевые поля, описать имена, типы и свойства полей и создать связи между таблицами.
- Создать формы для ввода данных в таблицы (простая и сложная формы). Заполнить таблицы. Каждая таблица должна содержать не менее 7 строк.
- Создать запросы по пунктам вариантов задания.
- Создать кнопочную форму для вызова созданных объектов.

Варианты заданий

Вариант № 1

Исходные данные:

- ***Рабочие***: табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- ***Цеха:*** наименование цеха, категория производства (основное, управление, вспомогательное).
- ***Движение по службе***: должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик). ○ *Вычислить* общую сумму выплат за месяц по выбранному цеху, а

также среднемесячный заработок этого цеха.

- ○ *Создать* ведомость для начисления заработной платы рабочих этого цеха.

Вариант № 2

Исходные данные:

- ***Сотрудники:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу
- ***Оплата труда:*** должность, оклад
- ***Отделы:*** номер отдела, фамилия сотрудника *Определить:* ○ возраст сотрудников (количество полных лет) при поступлении

на работу и на текущее время; ○ количество сотрудников заданного отдела младше 30 лет; ○ минимальный размер оклада.

- ***Создать таблицу,*** которая содержит сведения о 5-и самых высокооплачиваемых сотрудниках фирмы**.**

Вариант № 3

Исходные данные:

Работники: фамилия, имя, отчество, цех.

- ***Изделия:*** наименование изделия, категория изделия (A, B, C), стоимость изготовления.
- ***Итоги:*** шифр сборщика, количество изготовленных изделий по категориям.

Рассчитать: ○ общее количество изделий каждой категории;

○ общее количество изделий, собранных всеми рабочими заданного цеха;

- *Создать ведомость* для начисления заработной платы рабочих заданного цеха. Определить средний размер заработной платы работников этого цеха.

Вариант № 4

Исходные данные:

- ***Абоненты:*** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- ***Расценки:*** тип заказа (по городу, область, Украина, Европа, …), цена 1 мин. разговора.
- ***Заказ:*** телефон вызова, вызываемый пункт, время в минутах.

○ *Рассчитать* общее количество телефонов, установленных начиная с заданного года по сегодняшний день. Выдавать по вводимой фамилии абонента номер его телефона. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилии задолжников и их телефоны.

Вариант № 5

Исходные данные:

- ***Поставка:*** поставщик, дата поставки, объем поставки.
- ***Игрушки:*** артикул, наименование, цена, нижняя и верхняя возрастные границы.
- ***Чеки: номер чека, дата продажи, сумма.***

- *Определить* стоимость наиболее дорогой игрушки и ее наименование. По введенному значению *A, B* и *X*, выводить названия игрушек, которые по стоимости не превышают *X* и подходят ребенку от *A* до *B* лет. - *Создать таблицу*, которая содержит следующую информацию: наименование игрушек, которые подходят детям от *1* до *3* лет и их цены.

Вариант № 6

Исходные данные:

- ***Студенты:*** фамилия, имя отчество студента; код группы, дата рождения.
- ***Предметы:*** наименование предмета, категория предмета (фундаментальный, профессионально-ориентированный, на выбор), тип аттестации (зачет, экзамен).

Журнал: оценки по 5 экзаменам, признак участия в общественной работе. - *Определить* общее число активистов в списке.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о начислении стипендии студентам заданной группы. Рассчитать размер стипендии по следующему алгоритму: студенту, который получил все оценки «*5*» и активно принимает участие в общественной работе, назначается повышенная стипендия – доплата 50 %; студенту, который получил «*4*» и «*5*», назначается обычная стипендия – ее необходимо задать; студенту, который получил одну оценку «*3*», но активно занимается общественной работой, также назначается обычная стипендия; другим студентам стипендия не назначается.

Вариант № 7

Исходные данные:

- ***Авторы:*** фамилия, имя отчество, название книги.
- ***Книги:*** год издания, количество экземпляров.
- ***Местоположение:*** шифр книги, номер стеллажа, номер шкафа, номер полки. - *Определить* общее количество книг в коллекции, а также число книг заданного года издания. По заданному автору и названию книги выдать информацию о местонахождении книги. - *Создать таблицу*, которая содержит информацию о книгах за-

данного автора, которые находятся в коллекции.

Вариант № 8

Исходные данные:

- ***Группа:*** факультет, шифр группы, фамилия куратора, должность.
- *Студент*. Фамилия студента, шифр группы, номер зачетной книжки, дата рождения, дата поступления.
- ***Результаты сессии:*** оценки по *5*-и экзаменам и результаты сдачи 5 зачетов («З» – зачет, «Н» – незачет). ○ *Вычислить* средний балл, полученный каждым студентом за-

данной группы, и средний балл этой группы по каждому предмету. Определить общее количество задолженностей (по экзаменам и зачетам в сумме) каждого студента заданной группы и общее число студентов-должников той же группы.

○ *Создать таблицу*, которая содержит сведения о неуспевающих студентах: группу, фамилия и количество задолженностей.

Вариант № 9

Исходные данные:

- ***Рейсы:*** номер рейса, пункт назначения, время вылета, время прибытия, стоимость билета.

Самолеты: шифр самолета, марка, количество посадочных мест, срок службы.

- ***Билеты:*** дата вылета, количество свободных мест в самолете.

Определить: ○ номера рейсов и время отправления самолетов в заданный го-

род; ○ по заданному городу и времени отправления наличие свободных мест на рейс; ○ общее количество рейсов через сутки в заданный город. □ *Создать таблицу,* которая содержит номера рейсов и время отправления самолетов в заданный город.

Вариант № 10

Исходные данные:

- ***Поставка:*** артикул обуви (артикул начинается с буквы *Ж* – для женской обуви, *М* – для мужской, *Д* – для детской обуви, например: *Д0321*), наименование, объем поставки.
- ***Обувь:*** цвет, стоимость.
- *Наличие*: размер, количество**.**

Определить:

○ стоимость обуви заданного артикула, и какие размеры есть в

наличии; ○ общее количество пар детской обуви, имеющейся в магазине, и

ее суммарную стоимость.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию обо всех моделях женской обуви.

Вариант № 11

Исходные данные:

- ***Игроки:*** фамилия, имя, отчество, год рождения, название футбольного клуба.
- ***Футбольный клуб:*** название клуба, фамилия директора, фамилия главного тренера.
- ***Результаты:*** шифр игрока, число заброшенных им шайб, число сделанных им голевых передач, заработанное штрафное время. ○ *Вычислить* общее число шайб, забитых хоккеистами каждой ко-

манды, и суммарное штрафное время. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилии шести лучших

игроков, и сумму очков каждого игрока (голы + передачи).

Вариант № 12

Исходные данные:

- ***Студенты:*** фамилия, имя, дата рождения дата поступления.

Выбор дисциплины: код студента, наименование пяти дисциплин (выбираемая дисциплина отмечается символом «*1*», иначе – *пробел*).

- ***Успеваемость:*** средний балл, наличие задолженности.

○ *Вычислить* количество слушателей каждой дисциплины. Определить число слушателей заданной дисциплины, у которых средний балл превышает заданный. ○ *Создать таблицу*, которая содержит фамилию, группу и сред-

ний балл всех слушателей заданной дисциплины. Если число их превысит заданное, то отобрать студентов, которые имеют более высокий средний балл успеваемости.

Вариант № 13

Исходные данные:

- ***Рейсы:*** номер поезда, станция назначения, время отправления, время прибытия, стоимость билета в вагоны каждого вида отдельно.

- ***Поезда:*** количество посадочных мест в купейных вагонах, плацкартных, количество мест в вагоны повышенной комфортности.
- ***Билеты:*** дата отправления, номер поезда, наличие билетов в вагоны каждого вида отдельно.

Определить:

- количество свободных мест в купейные вагоны поезда с заданным номером;
- количество поездов, которые отправляются к заданной станции назначения.

- *Создать таблицу***,** содержащую информацию о поездах, которые отправляются к заданной станции в заданном интервале времени (временной интервал задать двумя значениями, например, *13:00* и *18:30*).

Вариант № 14

Исходные данные:

- ***Сотрудники:*** табельный номер фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу.
- ***Отделы:*** номер отдела, количество сотрудников, фамилия начальника.
- ***Движение по службе***: должность, оклад, тип работы (штатный, совместитель, почасовик).
  - *Рассчитать* стаж работы всех сотрудников; средний стаж работы сотрудников заданного отдела; количество сотрудников с окладом ниже заданного.
  - *Создать таблицу*, которая содержит список сотрудников пенсионного возраста (на сегодняшний день) с указанием стажа работы.
  - *Определить разницу* в стаже работы женщин и мужнин пенсионного возраста.

Вариант № 15

Исходные данные:

- ***Пациенты:*** фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, местожительство (город).
- ***Палата:*** количество мест в палате.
- ***Учет:*** дата поступления, диагноз поступления, уточненный диагноз, дата выписки, если выписался).

Определить: ○ количество иногородних граждан, прибывших в клинику; ○ количество пациентов с заданным диагнозом; ○ количество пациентов пенсионного возраста.

- *Создать таблицу*, которая содержит список пациентов старше заданного возраста с заданным диагнозом.

Вариант № 16

Исходные данные:

- ***Пассажир:*** фамилия, шифр багажа.
- ***Багаж:*** количество вещей, вес.
- ***Учет:*** дата сдачи, время сдачи, номер секции, номер стойки.

Определить: ○ общий средний вес одной вещи;

○ багаж, у которого средний вес одной вещи отличается не больше чем на 0,3 кг от общего среднего веса одной вещи; ○ количество пассажиров, которые имеют больше 2 вещей. □ *Создать таблицу,* содержащую информацию о багаже, вес которого превышает заданный.

Вариант № 17

Исходные данные:

- ***Компания:*** наименование компании, дата создания компании, фамилия директора, номинал акции.
- ***Курс:*** дата, продажа, покупка.
- ***Учет:*** количество проданных акций, количество купленных акций.

Определить: ○ среднее количество проданных и купленных акций; ○ максимальное различие между курсом продажи и покупки акций; ○ суммарное количество акций, проданных всеми фирмами, и общую сумму, на которую они проданы.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование фирмы и стоимость проданных акций.

Вариант № 18

Исходные данные:

- ***Заказчик:*** фамилия, адрес, телефон.
- ***Ремонт:*** номер заказа, наименование оборудования, вид ремонта, стоимость.
- ***Учет:*** фамилия мастера, дата начала ремонта, дата окончания ремонта.

Определить: ○ суммарную стоимость всех заказов; ○ количество заказов на ремонт заданного вида; ○ минимальная стоимость ремонта.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о продолжительности ремонта заказов, оформленных весной: номер заказа, фамилия заказчика, наименование оборудования, продолжительность заказа.

Вариант № 19

Исходные данные:

- ***Абоненты:*** фамилия, имя, отчество, телефон, дата установки.
- ***Расценки:*** код города, стоимость *1* минуты разговора.
- ***Заказ:*** дата разговора, телефон вызова, вызываемый пункт, продолжительность в минутах. *Определить:* ○ максимальную стоимость разговора; ○ суммарную стоимость всех разговоров; ○ общее количество разговоров в город с заданным кодом. □ *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости разговоров, которые состоялись в интервале между двумя заданными датами.

Вариант № 20

Исходные данные:

- ***Товары:*** шифр товара, наименование товара, категория (*A, B, C*), страна-производитель.
- ***Поставка:*** дата поставки, поставщик (наименование фирмы), объем, оптовая цена.
- ***Учет:*** дата продажи, розничная цена, количество проданного товара.

○ По заданному шифру товара выдавать информацию о нем.

Определить: ○ суммарную прибыль от продажи всех товаров;

- наименование товаров, продаваемых по наивысшей и наиболее низкой цене.

- *Создать таблицу*, которая содержит наименование товара и суммарную выручку.

Вариант № 21

Исходные данные:

- ***Продукция***: номер цеха изготовителя, наименование изделия
- ***Стоимость:*** код изделия, себестоимость
- ***Учет:*** дата изготовления, количество изготовленных изделий, цена.

Определить:
- суммарное различие между себестоимостью и ценой всех изготовленных изделий;
- общее количество изделий, изготовленных до заданной даты;
- цену изделия по заданному наименованию.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о товарах, изготовленных в заданном цехе.

Вариант № 22

Исходные данные:

- ***Рабочие:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
- ***Расценки:*** разряд, стоимость одного часа.
- ***Учет:*** дата, количество отработанных часов.

Определить:
- среднее количество часов, отработанных за день;
- максимальную стоимость одного часа;
- по заданной дате количество отработанных часов.

- *Создать таблицу*, которая содержит следующие сведения о работниках заданного цеха:
- фамилия работника;
- суммарная стоимость отработанного им времени.

Вариант № 23

Исходные данные:

- ***Клиенты:*** фамилия, адрес, телефон**.**
- ***Заказ:*** номер заказа, наименование изделия, фамилия мастера.
- ***Учет:*** дата приема, дата выполнения заказа, стоимость заказа.

Определить: ○ количество заказов, выполненных мастером с заданной фа-

милией; ○ стоимость самого дорого

заказа; ○ среднюю стоимость

заказов.

- *Создать таблицу*, которая содержит фамилию клиента, номер заказа и продолжительность его выполнения.

Вариант № 24

Исходные данные:

- ***Импортеры:*** фирма-импортер, страна, наименование товара.
- ***Поставка:*** шифр товара, объем партии в штуках, стоимость *1* штуки в условных единицах.
- ***Учет:*** дата поставки, дата получения, подтверждение приема партии. *Определить:* ○ суммарный объем товаров, импортированных заданной страной;

○ суммарную стоимость партии товара по заданному шифру; ○ минимальную стоимость товара.

- *Создать таблицу,* которая содержит сведения о стоимости товаров, импортированных заданной страной. Таблица должна содержать наименование товара и суммарную стоимость партии.

Вариант № 25

Исходные данные:

- ***Рабочие:*** фамилия, имя, отчество, дата рождения, дата поступления на работу, номер цеха.
- ***Оплата:*** разряд, оплата за изготовление одной качественной детали.
- ***Учет:*** дата, количество изготовленных деталей, количество бракованных деталей. Определить: ○ общее количество бракованных деталей, изготовленных всеми

мастерами заданного цеха; ○ сумму штрафа за каждую бракованную деталь, которая состав-

ляет 20 % от оплаты за качественную работу; ○ фамилию мастера, который изготовил максимальное количе-

ство качественных деталей.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения об оплате труда рабочих. Таблица должна содержать фамилию рабочего, номер цеха и сумму к

выплате с учетом штрафа и налога (налог составляет 15 % от стоимости оплаты).

Вариант № 26

Исходные данные:

- ***Отделение:*** номер отделения, фамилию заведующего, номер корпуса, этаж.
- ***Лечение:*** шифр болезни, продолжительность.
- ***Оплата:*** диагностика, стоимость *1* дня лечения, затраты на лекарство.
- ***Суммарная стоимость:*** отработанного им времени.

Определить:
- по названию болезни затраты на лекарство;
- среднюю стоимость *1* дня лечения;
- рассчитать суммарную стоимость лечения каждой болезни, включая затраты на лекарство.

- *Создать таблицу*, которая содержит сведения о стоимости лечения в заданном отделении.

Вариант № 27

Исходные данные:

- ***Книги:*** наименование книги, фамилия автора, издательство, год издания, тираж.
- ***Магазины:*** шифр книги, номер магазина, цена.
- ***Учет продаж:*** код продажи, продано, остаток.

Определить:
- количество проданных книг в заданном магазине;
- суммарную стоимость всех непроданных книг;
- среднюю цену одной книги.

- *Создать таблицу,* которая содержит суммарную стоимость книг, проданных каждым магазином.

Вариант № 28

Исходные данные:

- ***Детали:*** наименование детали, цех-изготовитель
- ***Изготовление:*** шифр материала, шифр детали, затрата материала на *1* деталь.

- ***Учет:*** дата изготовления, количество изготовленных деталей, количество брака.

Определить: ○ для всех деталей суммарные затраты материала на брак; ○ количество качественных деталей; ○ деталь, на которую тратится более всего материала. □

Создать таблицу, которая содержит шифр детали и процент брака.

Вариант № 29

Исходные данные:

- ***Лекарство:*** название лекарства, категория (антибиотик, жаропонижающее, витамины, противовоспалительное, антидепрессант), дата изготовления, дата истечения срока.
- ***Стоимость:*** шифр лекарства, код аптеки, цена за *1* упаковку.
- ***Продажа:*** количество проданных упаковок, остаток.

Определить: ○ суммарное количество упаковок лекарства, проданных всеми аптеками и принадлежащее заданной категории.

○ стоимость всех непроданных упаковок;

○ среднюю стоимость лекарства.

- *Создать таблицу*, которая содержит информацию о просроченных лекарствах: номер аптеки, название, категория и дату истечения срока.

Вариант № 30

Исходные данные:

- ***Продавцы:*** табельный номер, фамилия, имя, отчество, дата рождения.
- ***Товары:*** шифр товара, тип товара, сложность продажи (средняя, высокая);
- ***Журнал регистрации:*** количество проданных товаров по дням недели (понедельник, вторник, ..., суббота); *Определить:* ○ общее количество товаров, проданных каждым продавцом; ○ фамилия продавца, который продал наибольшее число товаров, и определить день, когда он достиг наивысшей производительности труда.
- *Создать таблицу,* которая содержит следующую информацию: фамилия продавца и общее количество товаров, проданное им за неделю.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. *Бекаревич Ю. Б., Пушкина Н. В*. СПб.: БХВ - Петербург, 2016. 464 с. (Самоучитель Microsoft Access 2013).

2. *Гурвиц Г.* Microsoft Access 2013. Разработка приложений на реальном примере:
М., 2012. 258 с.

3. *Одиночкина С. В.* Разработка баз данных в Microsoft Access 2010, НИУ ИТМО, 2012. 81 с.

Дополнительная литература:

1. *Домострой А.* MS Access 2013. Создание базы данных. Урок 1. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=uCenTUX1QcQ

2. *Домострой А.* MS Access 2013. Таблицы. Урок 2. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=VDuyue8ra2Q

3. *Домострой А.* MS Access 2013. Запросы. Урок 3. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=nSIHUvfBy34

4. *Домострой А.* MS Access 2013. Формы. Урок 4. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=54ZZhSYrz8s

5. *Домострой А.* MS Access 2013. Многотабличные формы. Урок 5. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=ou-1q4Q6NjY

6. *Домострой А.* MS Access 2013. Создание отчетов. Урок 6. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=PrH-S8r0nlE

7. *Домострой А.* MS Access 2013. Главная Кнопочная форма Урок 7. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=Ou0HJtzypOU

8. *Макарова Н. В.* Информатика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2011. 576 с.: ил.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____ В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Б1.О.13 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Одобрена на заседании кафедры

Информатики
(название кафедры)

Зав. кафедрой _____
(подпись)

Дружинин А.В.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 19.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета

Горно-механического
(название факультета)

Председатель _____
(подпись)

Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

Оглавление

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП.....3
Тема 1.1 Введение в предмет. Понятие ППП.....4
Тема 1.2 Структура и основные компоненты ППП.....10
Тема 1.3 Эволюция ППП. Примеры современных ППП.....13
ЧАСТЬ II. ППП MS OFFICE.....22
Тема 2.1 Структура и состав MS Office. Основные приложения 23
Тема 2.2 Введение в офисное программирование.....29
Тема 2.3 Макросы. Использование макрорекордера.....34
Тема 2.4 Среда разработки VBA.....38

ЧАСТЬ I. ПОНЯТИЕ ППП
ТЕМА 1.1 ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ. ПОНЯТИЕ ППП

Цели и задачи дисциплины

- Изучение основных принципов, используемых в разработке интегрированных программных продуктов.
- Изучение структуры, состава и назначения компонентов интегрированного ПО, а также средств организации взаимодействия между компонентами и инструментальных средств расширения функциональности.
- Формирование навыков работы со средствами автоматизации решения прикладных задач.
- Формирование навыков использования встроенных средств разработки.
- Требования к уровню освоения дисциплины
- В результате изучения дисциплины студенты должны:
- знать принципы построения прикладных информационных систем
- уметь использовать современные программные средства для обработки разнородной информации;
- уметь автоматизировать процесс решения прикладных задач с помощью встроенных языков программирования;
- иметь представление о современном состоянии и тенденциях развития рынка прикладного ПО.

Основные понятия и определения

Информационная система (ИС) - организационно упорядоченная совокупность документов (массивов документов) и информационных технологий, в том числе с использованием средств вычислительной техники и связи, реализующих информационные процессы. Информационные системы предназначены для хранения, обработки, поиска, распространения, передачи и представления информации.

Автоматизированная (информационная) система (АС) - совокупность программных и аппаратных средств, предназначенных для хранения и/или управления данными и информацией и производства вычислений и управляемая человеком-оператором (в этом главное отличие автоматизированной системы от автоматической).

Многоуровневое представление ИС - модель представления информационной системы в виде совокупности взаимосвязанных уровней, разделенных по функциональному назначению (рис. 1).



Рис. 1. Многоуровневое представление информационных систем.

Аппаратное обеспечение ИС - комплекс электронных, электрических и механических устройств, входящих в состав информационной системы или сети.

Программное обеспечение (ПО) — совокупность программ и данных, предназначенных для решения определенного круга задач и хранящиеся на машинных носителях.

Программа — последовательность формализованных инструкций, представляющих алгоритм решения некоторой задачи и предназначенная для исполнения устройством управления вычислительной машины. Инструкции программы записываются при помощи машинного кода или специальных языков программирования. В зависимости от контекста термин «программа» может относится к исходным текстам, при помощи которых записывается алгоритм, или к исполняемому машинному коду.

Программист - специалист, занимающийся разработкой и проверкой программ. Различают системных и прикладных программистов.

Пользователь - человек, принимающий участие в управлении объектами и система ми некоторой предметной области и являющийся составным элементом автоматизированной системы.

Прикладное программное обеспечение - программное обеспечение, ориентированное на конечного пользователя и предназначенное для решения пользовательских задач.

Прикладное ПО состоит из:

- отдельных прикладных программ и пакетов прикладных программ, предназначенных для решения различных задач пользователей;
- автоматизированных систем, созданных на основе этих пакетов.

Пакет прикладных программ - комплект программ, предназначенных для решения задач из определенной проблемной области. Обычно применение пакета прикладных программ предполагает наличие специальной документации: лицензионного свидетельства, паспорта, инструкции пользователя и т.п.

Классификация программного обеспечения

Любая классификация подразумевает выбор некоторого группировочного признака (или нескольких), на основании которого и производится отнесение объектов к тому или иному классу. Так, при классификации программного обеспечения по способу распространения можно выделить следующие категории список не полный):

- Commercial Software - коммерческое (с ограниченными лицензией возможностями на использование), разрабатываемое для получения прибыли.
- Freeware - свободное ПО, распространяемое без ограничений на использование, модификацию и распространение.
- Shareware - условно-бесплатное ПО, с частичными ограничениями при работе в ознакомительном режиме (например, определенное количество запусков программы).
- Abandonware - «заброшенное» ПО, поддержка которого непосредственным разработчиком прекращена, но продолжается третьими лицами (например, партнерами или энтузиастами).
- Adware - ПО, в код которого включены рекламные материалы. Такое ПО распространяется бесплатно, но для отключения рекламных блоков необходима оплата.
- Careware - «благотворительное» ПО, оплату за которое разработчик (или распро странитель) просит переводить на благотворительные нужды.

При классификации программного обеспечения по назначению в качестве критерия используют уровень представления ИС, на который ориентирована та или иная программа.
Соответственно выделяют следующие классы ПО:

1. Системное ПО - решает задачи общего управления и поддержания работоспособности системы в целом. К этому классу относят операционные системы, менеджеры загрузки, драйверы устройств, программные кодеки, утилиты и программные средства защиты информации.

2. Инструментальное ПО включает средства разработки (трансляторы, отладчики, интегрированные среды, различные SDK и т.п.) и системы управления базами данных (СУБД).
3. Прикладное ПО - предназначено для решения прикладных задач конечными пользователями.

Прикладное ПО - самый обширный класс программ, в рамках которого возможна дальнейшая классификация, например, по предметным областям. В этом случае группировочным признаком является класс задач, решаемых программой. Приведем несколько примеров:

- Офисные приложения - предназначены для автоматизации офисной деятельности (текстовые редакторы и процессоры, электронные таблицы, редакторы презентаций и т.п.)
- Корпоративные информационные системы - бухгалтерские программы, системы корпоративного управления, системы управления проектами (Project Management), инструменты автоматизации документооборота (EDM-системы) и управления архивами документов (DWM-системы)
- Системы проектирования и производства - системы автоматизированного проектирования (САПР, CAD/CAM-системы), системы управления технологическими (SCADA) и производственными (MES) процессами
- Научное ПО - системы математического и статистического расчета, анализа и моделирования
- Геоинформационные системы (ГИС)
- Системы поддержки принятия решений (СППР)
- Клиенты доступа к сетевым сервисам (электронная почта, веб-браузеры, передача сообщений, чат-каналы, клиенты файлообменных сетей и т.п.)
- Мультимедийное ПО - компьютерные игры, средства просмотра и редактирования аудио- и видеоинформации, графические редакторы и вьюеры, анимационные редакторы и т.п.

С точки зрения конечного пользователя такая классификация оправданна и наглядна, для разработчика же более значимым фактором является структура прикладной программы, в общем случае состоящей из нескольких компонентов. Назначение этих компонентов, связи между ними и способность к взаимодействию определяют интеграцию прикладного ПО. Чем теснее связаны программные компоненты, тем выше степень интеграции.

В зависимости от степени интеграции многочисленные прикладные программные средства можно классифицировать следующим образом[1]:

1. отдельные прикладные программы;
2. библиотеки прикладных программ;
3. пакеты прикладных программ;
4. интегрированные программные системы.

Отдельная прикладная программа пишется, как правило, на некотором высокоуровневом языке программирования (Pascal, Basic и т.п.) и предназначается для решения конкретной прикладной задачи. Такая программа может быть реализована в виде набора модулей, каждый из которых выполняет некоторую самостоятельную функцию (например, модуль пользовательского интерфейса, модуль обработки ошибок, модуль печати и т.п.).
При этом доступ к функциям модулей из внешних программ невозможен.

Библиотека представляет собой набор отдельных программ, каждая из которых решает некоторую прикладную задачу или выполняет определенные вспомогательные функции (управление памятью, обмен с внешними устройствами и т.п.). Библиотеки программ зарекомендовали себя эффективным средством решения вычислительных задач. Они интенсивно используются при решении научных и инженерных задач с помощью ЭВМ.
Условно их можно разделить на библиотеки общего назначения и специализированные библиотеки.

Пакет прикладных программ (ППП) - это комплекс взаимосвязанных программ, ориентированный на решение определенного класса задач. Формально такое определение не исключает из числа пакетов и библиотеки программ, однако у ППП, как отдельной категории, есть ряд особенностей, среди которых: ориентация на решение классов задач, унифицированный интерфейс, наличие языковых средств.

Интегрированная программная система - это комплекс программ, элементами которого являются различные пакеты и библиотеки программ. Примером служат системы автоматизированного проектирования, имеющие в своем составе несколько ППП различного назначения. Часто в подобной системе решаются задачи, относящиеся к различным классам или даже к различным предметным областям.

Понятие пакета прикладных программ

Итак, пакет прикладных программ (ППП) – это комплекс взаимосвязанных программ для решения определенного класса задач из конкретной предметной области. На текущем этапе

[1] Следует отметить отсутствие безусловных границ между перечисленными формами прикладного программного обеспечения

развития информационных технологий именно ППП являются наиболее востребованным видом прикладного ПО. Это связано с упомянутыми ранее особенностями ППП. Рассмотрим их подробней:

- Ориентация на решение класса задач. Одной из главных особенностей является ориентация ППП не на отдельную задачу, а на некоторый класс задач, в том числе и специфичных, из определенной предметной области. Так, например, офисные пакеты ориентированы на офисную деятельность, одна из задач которой - подготовка документов (в общем случае включающих не только текстовую информацию, но и таблицы, диаграммы, изображения). Следовательно, офисный пакет должен реализовывать функции обработки текста, представлять средства обработки табличной информации, средства построения диаграмм разного вида и первичные средства редактирования растровой и векторной графики.
- Наличие языковых средств. Другой особенностью ППП является наличие в его составе специализированных языковых средств, позволяющих расширить число задач, решаемых пакетом или адаптировать пакет под конкретные нужды. Пакет может представлять поддержку нескольких входных языков, поддерживающих различные парадигмы. Поддерживаемые языки могут быть использованы для формализации исходной задачи, описания алгоритма решения и начальных данных, организации доступа к внешним источникам данных, разработки программных модулей, описания модели предметной области, управления процессом решения в диалоговом режиме и других целей. Примерами входных языков ППП являются VBA в пакете MS Office, AutoLISP/VisualLISP в Autodesk AutoCAD, StarBasic в OpenOffice.org
- Единообразие работы с компонентами пакета. Еще одна особенность ППП состоит в наличии специальных системных средств, обеспечивавших унифицированную работу с компонентами. К их числу относятся специализированные банки данных, средства информационного обеспечения, средства взаимодействия пакета с операционной системой, типовой пользовательский интерфейс и т.п.
-

ТЕМА 1.2 СТРУКТУРА И ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ППП

Несмотря на разнообразие конкретных пакетных разработок, их обобщенную внутреннюю структуру можно представить в виде трех взаимосвязанных элементов1 (рис. 2):

1. входной язык (макроязык, язык управления) - представляет средство общения пользователя с пакетом;

2. предметное обеспечение (функциональное наполнение) - реализует особенности конкретной предметной области;
3. системное обеспечение (системное наполнение) - представляет низкоуровневые средства, например, доступ к функциям операционной системы.

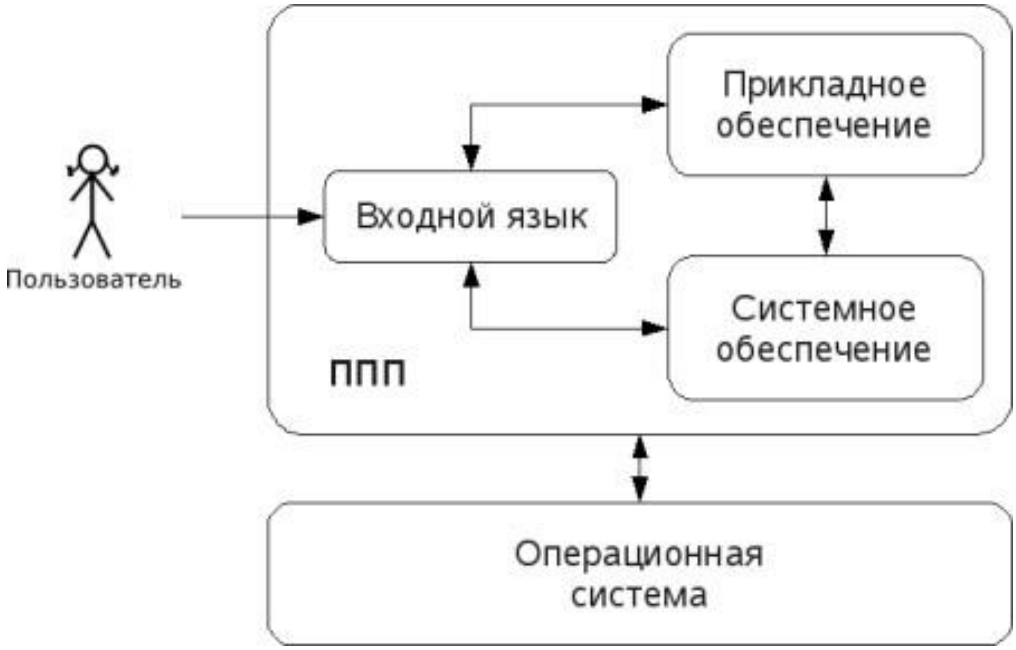


Рис. 2. Структура ППП.

Входной язык - основной инструмент при работе пользователя с пакетом прикладных программ. В качестве входного языка могут использоваться как универсальные (Pascal, Basic и т.п.), так и специализированные, проблемно-ориентированные языки программирования (Cobol - для бизнес-приложений, Lisp - списочные структуры данных, Fortran и MathLAB - математические задачи и т.п.).

Развитый пакет может обладать несколькими входными языками, предназначенными для выполнения различных функций в рамках решаемого класса задач. Так, например, в пакете OpenOffice.org поддерживаются языки StarBasic, Python, JavaScript и Java. StarBasic является основным входным языком, предназначенным для автоматизации работы с пакетом, для этого языка имеется интегрированная среда разработки и встроенный отладчик. Скрипты на языках Python и JavaScript загружаются и исполняются из внешних файлов. На Java (через SDK и функции API OpenOffice) можно создавать модули расширения и полнофункциональные приложения-компоненты.

Входные языки отражают объем и качество предоставляемых пакетом возможностей, а также удобство их использования. Таким образом, именно входной язык является основным показателем возможностей ППП. Однако стоит отметить, что в современных пакетах

обращение пользователя к языковым средствам обычно происходит косвенно, через графический интерфейс.

Предметное обеспечение отражает особенности решаемого класса задач из конкретной предметной области и включает:

- программные модули, реализующие алгоритмы (или их отдельные фрагменты) прикладных задач;
- средства сборки программ из отдельных модулей.

Наиболее распространено в настоящее время оформление программных модулей в виде библиотек, подключаемых статически или динамически. В зависимости от использованного разработчиками подхода к проектированию и реализации ППП такие библиотеки содержат встроенные классы и описания их интерфейсов (при использовании объектно-ориентированного программирования). При использовании парадигмы структурного программирования в библиотечных модулях содержатся процедуры и функции, предназначенные для решения некоторых самостоятельных задач. В обоих случаях библиотеки связаны с другими модулями пакета лишь входной и выходной информацией.

Системное обеспечение представляет собой совокупность низкоуровневых средств (программы, файлы, таблицы и т.д.), обеспечивающих определенную дисциплину работы пользователя при решении прикладных задач и формирующих окружение пакета. К системному обеспечению ППП относят следующие компоненты:

- монитор - программа, управляющая взаимодействием всех компонентов ППП;
- транслятор(ы) с входных языков - для ППП характерно использование интерпретируемых языков;
- средства доступа к данным - драйверы баз данных и/или компоненты, представляющие доступ через унифицированные интерфейсы (ODBC, JDBC, ADO, BDE и т.п.);
- информационно-справочный модуль - предоставляет функции поддержки, среди которых информационные сообщения, встроенная справочная системы и т.п.

различные служебные программы, выполняющие низкоуровневые операции (автосохранение, синхронизация совместно используемых файлов и т.д.)

Приведенная логическая структура ППП достаточна условна и в конкретном ППП может отсутствовать четкое разделение программ на предметное и системное обеспечение. Например, программа планирования вычислений, относящаяся к прикладному обеспечению, может одновременно выполнять и ряд служебных функций (информационное обеспечение, связь с операционной системой и т.п.).

Кроме того, одни и те же программы в одном пакете могут относиться к предметному обеспечению, а в другом - к системному. Так, программы построения диаграмм в рамках специализированного пакета машинной графики естественно отнести к предметному обеспечению. Однако те же программы следует считать вспомогательными и относящимися к системному обеспечению, например, в пакете решения вычислительных задач.

ТЕМА 1.3 ЭВОЛЮЦИЯ ППП. ПРИМЕРЫ СОВРЕМЕННЫХ ППП

Этапы развития ППП

Первые ППП представляли собой простые тематические подборки программ для решения отдельных задач в той или иной прикладной области, обращение к ним выполнялось с помощью средств оболочки ОС или из других программ. Современный пакет является сложной программной системой, включающей специализированные системные и языковые средства. В относительно короткой истории развития вычислительных ППП можно выделить *4 основных поколения* (класса) пакетов. Каждый из этих: классов характеризуется определенными особенностями входящих состав ППП компонентов - входных языков, предметного и системного обеспечения.

Первое поколение

В качестве входных языков ППП первого поколения использовались универсальные языки программирования (Фортран, Алгол-60 и т.п.) или языки управления заданиями соответствующих операционных систем. Проблемная ориентация входных языков достигалась за счет соответствующей мнемоники в идентификаторах. Составление заданий на таком языке практически не отличалось от написания программ на алгоритмическом языке.

Предметное обеспечение первых ППП, как правило, было организовано в форме библиотек программ, т.е. в виде наборов (пакетов) независимых программ на некотором базовом языке программирования (отсюда впервые возник и сам термин «пакет»). Такие ППП иногда называют *пакетами библиотечного типа*, или *пакетами простой структуры*.

В качестве системного обеспечения пакетов первого поколения обычно использовались штатные компоненты программного обеспечения ЭВМ: компиляторы с алгоритмических языков, редакторы текстов, средства организации библиотек программ, архивные системы и т.д. Эти пакеты не требовали сколько-нибудь развитой системной поддержки, и для их функционирования вполне хватало указанных системных средств общего назначения. В большинстве случаев разработчиками таких пакетов были прикладные программисты, которые пытались приспособить универсальные языки программирования к своим нуждам.

Второе поколение

Разработка ППП второго поколения осуществлялась уже с участием системных программистов. Это привело к появлению специализированных входных языков на базе универсальных языков программирования. Проблемная ориентация таких языков достигалась не только за счет использования определенной мнемоники, но также применением соответствующих языковых конструкций, которые упрощали формулировку задачи и делали ее более наглядной. Транслятор с такого языка представлял собой препроцессор (чаще всего макропроцессор) к транслятору соответствующего алгоритмического языка.

В качестве модулей в пакетах этого класса стали использоваться не только программные единицы (т.е. законченные программы на том или ином языке программирования), но и такие объекты, как последовательность операторов языка программирования, совокупность данных, схема счета и др.

Существенные изменения претерпели также принципы организации системного обеспечения ППП. В достаточно развитых пакетах второго поколения уже можно выделить элементы системного обеспечения, характерные для современных пакетов: монитор, трансляторы с входных языков, специализированные банки данных, средства описания модели предметной области и планирования вычислений и др.

Третье поколение

Третий этап развития ППП характеризуется появлением самостоятельных входных языков, ориентированных на пользователей-непрограммистов. Особое внимание в таких ППП уделяется системным компонентам, обеспечивающим простоту и удобство. Это достигается главным образом за счет специализации входных языков и включения в состав пакета средств автоматизированного планирования вычислений.

Четвертое поколение

Четвертый этап характеризуется созданием ППП, эксплуатируемых в интерактивном режиме работы. Основным преимуществом диалогового взаимодействия с ЭВМ является возможность активной обратной связи с пользователем в процессе постановки задачи, ее решения и анализа полученных результатов. Появление и интенсивное развитие различных форм диалогового общения обусловлено прежде всего прогрессом в области технических средств (графическая подсистема ЭВМ и средства мультимедиа, сетевые средства). Развитие аппаратного обеспечения повлекло за собой создание разнообразных программных средств поддержки диалогового режима работы (диалоговые операционные системы, диалоговые пакеты программ различного назначения и т. д.).

Прикладная система состоит из *диалогового монитора* - набора универсальных программ, обеспечивающих ведение диалога и обмен данными, и базы знаний об области. Информация о структуре, целях и форма диалога задает сценарий, в соответствии с который монитор управляет ходом диалога. Носителями процедурных знаний о предметной области являются прикладные модули, реализующие функции собственной системы. Таким образом, создание прикладной системы сводится к настройке диалогового монитора на конкретный диалог, путем заполнения базы знаний. При этом программировать в традиционном смысле этого слова приходится лишь прикладные модули, знания о диалоге вводятся в систему с помощью набора соответствующих средств - редактора сценариев. Логично требовать, чтобы редактор сценариев также представлял собой диалоговую программу, отвечавшую рассмотренным выше требованиям. Благодаря готовому универсальному монитору программист может сосредоточиться на решении чисто прикладных задач, выделение же знаний о диалоге в сценарий обеспечивает в значительной степени необходимая гибкость программного продукта.

Большое внимание в настоящее время уделяется проблеме создания *«интеллектуальных ППП»*. Такой пакет позволяет конечному пользователю лишь сформулировать свою задачу в содержательных терминах, не указывая алгоритма ее решения. Синтез решения и сборка целевой программы производятся автоматически. При этом детали вычислений скрыты от пользователя, и компьютер становится интеллектуальным партнером человека, способным понимать его задачи. Предметное обеспечение подобного ППП представляет собой некоторую базу знаний, содержащую как процедурные, так и описательные знания. Такой способ решения иногда называют концептуальным программированием, характерными особенностями которого является программирование в терминах предметной области использование ЭВМ уже на этапе постановки задач, автоматический синтез программ решения задачи, накопление знаний о решаемых задачах в базе знаний.

Краткий обзор некоторых ППП

Для иллюстрации ранее рассмотренных материалов приведем несколько примеров современных пакетов прикладных программ из различных предметных областей. Учитывая, что постоянно появляются новые версии программных продуктов, здесь будут рассматриваться не возможности конкретных версий, а лишь основные структурные компоненты, входящие в состав того или иного пакета.

Autodesk AutoCAD

Основное назначение ППП AutoCAD - создание чертежей и проектной документации. Современные версии этого пакета представляют существенно большие возможности, среди которых построение трехмерных твердотельных моделей, инженерно-технические расчеты и многое другое.

Первые версии системы AutoCAD, разрабатываемой американской фирмой Autodesk, появились еще в начале 80-х годов двадцатого века, и сразу же привлекли к себе внимание своим оригинальным оформлением и удобством для пользователя. Постоянное развитие системы, учет замечаний, интеграция с новыми продуктами других ведущих фирм сделали AutoCAD мировым лидером на рынке программного обеспечения для автоматизированного проектирования.

Языковые средства

В основе языковых средств ППП AutoCAD - технология Visual LISP, базирующаяся на языке AutoLISP (подмножество языка LISP) и используемая для создания приложений и управления в AutoCAD. Visual LISP представляет полное окружение, включающее:

- Интегрированную среду разработки, облегчающую написание, отладку и сопровождение приложений на AutoLISP
- Доступ к объектам ActiveX и обработчикам событий
- Защиту исходного кода
- Доступ к файловым функциям операционной системы
- Расширенные функции языка LISP для обработки списочных структур данных.

Для разработчиков совместимых приложений в AutoCAD включена поддержка ObjectARX. Это программное окружение представляет объектно-ориентированный интерфейс для приложений на языках C++, C# и VB.NET и обеспечивает прямой доступ к структурам БД, графической подсистеме и встроенным командам пакета.

Кроме того, в AutoCAD имеется поддержка языка Visual Basic for Applications (VBA), что позволяет использовать этот пакет совместно с другими приложениями, в частности, из семейства Microsoft Office.

Предметное обеспечение

К предметному обеспечению пакета в первую очередь относятся функции построения примитивов - различных элементов чертежа. Простые примитивы - это такие объекты как точка, отрезок, круг (окружность) и т.д. К сложным примитивам относятся: полилиния, мультилиния, мультитекст (многострочный текст), размер, выноска, допуск, штриховка,

вхождение блока или внешней ссылки, атрибут, растровое изображение. Кроме того, есть пространственные примитивы, видовые экраны и пр. Операции построения *большей части* примитивов могут быть выполнены через пользовательский интерфейс, *все* - через команды языка.

Высокоуровневые средства представлены расширениями и приложениями AutoCAD для конкретных предметных областей. Например в машиностроении используется Autodesk Mechanical Desktop - предназначенный для сложного трехмерного моделирования, в том числе валов и пружин. Для проектирования деталей из листовых материалов предназначена система Copra Sheet Metal Bender Desktop (разработчик - Data-M Software GmbH). Моделирование динамики работы механизмов может выполняться в системе Dynamic Designer (Mechanical Dynamics). В числе известных архитектурных и строительных приложений можно отметить системы АРКО (АПИО-Центр), СПДС GraphiCS (Consistent Software), ArchiCAD. Для проектирования промышленных объектов может использоваться система PLANT-4D (CEA Technology). Это лишь некоторые из областей использования AutoCAD.

Системное обеспечение

Среди системного обеспечения следует отметить основной формат файлов AutoCAD .dwg, который стал стандартом «де факто» для прочих САПР.

К системному же обеспечению относятся типовые и специализированные библиотеки деталей и шаблонов, использование которых позволяет существенно ускорить процесс проектирования. Здесь же упомянем требования отраслевых и государственных стандартов, которым должны соответствовать чертежи и спецификации.

Конфигурация и настройки различных режимов AutoCAD устанавливаются через т.н. системные переменные. Изменяя их значения можно задавать пути к файлам, точность вычислений, формат вывода и многое другое.

Adobe Flash

Adobe (ранее Macromedia) Flash - это технология и инструментарий разработки интерактивного содержания с большими функциональными возможностями для цифровых, веб- и мобильных платформ. Она позволяет создавать компактные, масштабируемые анимированные приложения (ролики), которые можно использовать как отдельно, так и встраивая в различное окружение (в частности, в веб-страницы). Эти возможности обеспечиваются следующими компонентами технологии: языком Action Script, векторным форматом .swf и видеоформатом .flv, всевозможными flash-плейерами для просмотра и редакторами для создания.

Рассмотрим интегрированную среду Adobe Flash как основное средство создания flash-приложений. При этом отметим, что языковые и системные средства относятся не только к этому пакету, а к технологии в целом.

Язык ActionScript

ActionScript — объектно-ориентированный язык программирования, который добавляет интерактивность, обработку данных и многое другое в содержимое Flash-приложений. Синтаксис ActionScript основан на спецификации ECMAScript (сюда же относятся языки JavaScript и JScript). Библиотека классов ActionScript, написанная на C++, представляет доступ к графическим примитивам, фильтрам, принтерам, геометрическим функциям и пр.

ActionScript как язык появился с выходом 5 версии Adobe (тогда еще Macromedia) Flash, которая стала первой программируемой на ActionScript средой. Первый релиз языка назывался ActionScript 1.0. Flash 6 (MX). В 2004 году Macromedia представила новую версию ActionScript 2.0 вместе с выходом Flash 7 (MX 2004), в которой было введено строгое определение типов, основанное на классах программирование: наследование, интерфейсы и т. д. Также Macromedia была выпущена модификация языка Flash Lite для программирования под мобильные телефоны. ActionScript 2.0 является не более чем надстройкой над ActionScript 1.0, то есть на этапе компиляции ActionScript 2.0 осуществляет некую проверку и превращает классы, методы ActionScript 2.0 в прежние прототипы и функции ActionScript 1.0.

В 2005 году вышел ActionScript 3.0 в среде программирования Adobe Flex, а позже в Adobe Flash 9.

ActionScript 3.0 (текущая версия на момент подготовки этого материала) представляет, по сравнению с ActionScript 2.0 качественное изменение, он использует новую виртуальную машину AVM 2.0 и дает взамен прежнего формального синтаксиса классов настоящее классовое (class-based) Объектно-ориентированное программирование. ActionScript 3.0 существенно производительней предыдущих версий и по скорости приблизился к таким языкам программирования, как Java и C++.

С помощью ActionScript можно создавать интерактивные мультимедиа-приложения, игры, веб-сайты и многое другое.

Системное обеспечение

ActionScript исполняется виртуальной машиной (ActionScript Virtual Machine), которая является составной частью Flash Player. ActionScript компилируется в байткод, который включается в SWF-файл.

SWF-файлы исполняются Flash Player-ом. Flash Player существует в виде плагина к веб-браузеру, а также как самостоятельное исполняемое приложение. Во втором случае возможно создание исполняемых exe-файлов, когда swf-файл включается во Flash Player.

Для создания и просмотра видеофайлов в формате flv используются программные кодеки, поддерживающие этот формат.

Прикладное обеспечение

К прикладному обеспечению в рамках технологии Flash относятся средства создания роликов в форматах .swf, .flv и .exe. Основным инструментом является среда среда Adode Flash, включающая различные средства для создания и редактирования мультимедийного содержания, в т.ч. видео- и аудиофайлов, интегрированную среду разработки на ActionScript и множество дополнительных функций упрощения процесса создания роликов.

Пакет MatLab

MatLab (сокращение от англ. «Matrix Laboratory») — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений, и язык программирования, используемый в этом пакете. По данным фирмы-разработчика, более 1000000 инженерных и научных работников используют этот пакет, который работает на большинстве современных операционных систем, включая GNU/Linux, Mac OS, Solaris и Microsoft Windows.

Язык MatLab

MATLAB как язык программирования был разработан Кливом Моулером (англ. Cleve Moler) в конце 1970-х годов. Целью разработки служила задача использования программных математических библиотек Linpack и EISPACK без необходимости изучения языка Фортран. Акцент был сделан на матричные алгоритмы.

Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов — функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не компилируются в машинный код, а сохраняются в виде текстовых файлов. Существует также возможность сохранять так называемые pre-parsed программы — функции и скрипты, приведенные в вид, удобный для машинного исполнения и, как следствие, более быстрые по сравнению с обычными.

Системное обеспечение

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и

интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Имеются интерфейсы для получения доступа к внешним данным, клиентам и серверам, общающимся через технологии Component Object Model (COM) или Dynamic Data Exchange (DDE), а также периферийным устройствам, которые взаимодействуют напрямую с MATLAB. Многие из этих возможностей известны под названием MATLAB API.

Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.

Для MATLAB имеется возможность создавать специальные наборы инструментов (англ. toolbox), расширяющие его функциональность. Наборы инструментов представляют собой коллекции функций, написанных на языке MATLAB для решения определенного класса задач.

Прикладное обеспечение

MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нем имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер.

MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности:

- Матрицы и линейная алгебра — алгебра матриц, линейные уравнения, собственные значения и вектора, сингулярности, факторизация матриц и другие.
- Многочлены и интерполяция — корни многочленов, операции над многочленами и их дифференцирование, интерполяция и экстраполяция кривых и другие.
- Математическая статистика и анализ данных — статистические функции, статистическая регрессия, цифровая фильтрация, быстрое преобразование Фурье и другие.
- Обработка данных — набор специальных функций, включая построение графиков, оптимизацию, поиск нулей, численное интегрирование (в квадратурах) и другие.
- Дифференциальные уравнения — решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, уравнений с ограничениями, уравнений в частных производных и другие.
- Разреженные матрицы — специальный класс данных пакета MATLAB, использующийся в специализированных приложениях.

В составе пакета имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трехмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов, функции для создания алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений.

ЧАСТЬ II. ППП MS OFFICE

ТЕМА 2.1 СТРУКТУРА И СОСТАВ MS OFFICE. ОСНОВНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Структура MS Office и назначение компонентов

ППП Microsoft Office - это совокупность программных средств автоматизации офисной деятельности. В состав пакета входит множество приложений, каждое из которых предназначено для выполнения определенных функций и может быть использовано автономно и независимо от остальных. Весь набор офисных приложений можно разделить на *основные* и *дополнительные*.

Основные компоненты Microsoft Office

Список и назначение основных компонентов, входящих в состав Microsoft Office приведен в таб. 1.

Таблица 1. Основные компоненты Microsoft Office

Название приложения	Функциональное назначение приложения
Microsoft Word	Текстовый процессор
Microsoft Excel	Табличный процессор
Microsoft PowerPoint	Система подготовки презентаций
Outlook	Система управления персональной информацией
Microsoft Access	Система управления базами данных
Microsoft Binder	Система управления подшивками
Microsoft FrontPage	Система управления Web-узлами
Microsoft PhotoDraw	Графический редактор
Microsoft Publisher	Настольная издательская система
Microsoft Project	Система управления проектами
Microsoft Team Manager	Система управления персоналом

Дополнительные компоненты MS Office

Кроме основных компонентов, в семейство Microsoft Office входит большое количество вспомогательных приложений, которые устанавливаются (или не устанавливаются) вместе с основными. Ими можно воспользоваться из основных приложений или вызвать независимо. В таб. 2 перечислены некоторые из вспомогательных приложений.

Таблица 2. Некоторые вспомогательные приложения Microsoft Office

Название приложения	**Функциональное назначение приложения**
Microsoft Query	Интерпретатор запросов к внешним базам данных
Microsoft Organization Chart	Программа рисования блок-схем
Microsoft WordArt	Программа создания фигурных текстов
Microsoft Equation	Редактор математических формул
Microsoft Map	Программа отображения данных на географических картах
Microsoft Graph	Программа построения диаграмм
Microsoft Photo Editor	Графический редактор
Microsoft Draw	Средство рисования
Microsoft Find Fast	Служба индексации документов
Microsoft Extended Finder	Средство поиска документов в папках файловой системы и электронной почты
Microsoft Script Editor	Редактор сценариев
Microsoft ClipArt	Коллекция картинок и клипов
Панель Microsoft Office	Средство быстрого доступа к приложениям Office

Кроме основных и вспомогательных приложений, могут быть установлены и использованы различные расширения (надстройки). Их можно условно разделить на три группы:

1. *Самостоятельные приложения*, разработанные фирмой Microsoft, которые являются компонентами семейства Microsoft Office, но формально не входят в состав пакета. Примерами являются приложения Microsoft Project и Microsoft Team Manager.
2. *Надстройки* над компонентами Microsoft Office, разработанные фирмой Microsoft и представляющие собой дополнительные функции. Как правило, надстройки оформляются не в виде готовых к выполнению программ, а в виде документов

специального типа: шаблонов, рабочих книг, библиотек динамической компоновки (DLL) и т.п.

3. *Приложения третьих фирм*, разработанные для пользователей Microsoft Office. В этот класс попадают как продукты сторонних фирм, так и собственные разработки пользователей. Сюда можно отнести средства распознавания текстов (OCR), автоматического перевода текста, средства управления большими массивами документов (перечисленные задачи не реализованы или слабо развиты в самом пакете MS
   Office).

Приведенный перечень основных компонентов носит условный характер, поскольку состав пакета зависит от следующих факторов:

1. *Устанавливаемый комплект (или редакция) пакета*. Пакет выпускается в нескольких редакциях, и состав приложений в разных редакциях различен.
2. *Источник установки. Установка* может быть выполнена с компакт-диска или с сетевого сервера. Наборы файлов, которые устанавливаются на компьютер, существенно различаются.
3. *Операционная система*. Microsoft Office может работать под управлением различных ОС: MS Windows и Mac OS. Эти операционные системы могут иметь разные версии и модификации, что также влияет на состав устанавливаемых компонентов.
4. *Наличие на компьютере в момент установки предшествующих версий*. Некоторые компоненты старых версий автоматически включаются в состав обновляемой версии Microsoft Office (если они уже установлены на компьютере).
5. *Параметры, заданные при установке*. В случае так называемой выборочной (т.е. по выбору пользователя) установки, можно указать несколько десятков независимых параметров, влияющих на состав пакета.

Несмотря на большое число различных приложений в составе пакета, все они в совокупности образуют единое целое. Для каждого из приложений MS Office характерно наличие следующих отличительных признаков:

1. совместимость по данным;
2. унифицированный интерфейс;
3. единые средства программирования.

Документы Microsoft Office

Единица данных самого верхнего уровня структуризации в Microsoft Office называется **документом**.

Документы классифицируются по типам в зависимости от того, какого сорта информация в них хранится. Как правило, документы разных типов обрабатываются разными приложениями Microsoft Office. Основные типы документов, с которыми работают программы Microsoft Office, перечислены в таб. 3.

Таблица 3. Основные типы документов Microsoft Office

Название	Расширение	Приложение	Краткое описание
Документ	.doc	Word	Основной тип документов Word. Содержит форматированный текст, т.е. текст с дополнительной информацией о шрифтах, отступах, интервалах и т.п., а также рисунки, таблицы и другие элементы
Рабочая книга	.xls	Excel	Основной тип документов Excel. Содержит данные различных типов: формулы, диаграммы и макросы
База данных	.mdb	Access	Основной тип документов Access. Содержит как собственно базу данных, то есть совокупность таблиц, так и соответствующие запросы, макросы, модули, формы и отчеты
Презентация	.ppt	PowerPoint	Основной тип документов PowerPoint. Содержит презентацию, состоящую из набора слайдов, заметок выступающего, раздаточных материалов и другой информации
Публикация	.pub	Publisher	Основной тип документов Publisher. Как и Word, содержит форматированный текст, рисунки, таблицы и т.п.
План проекта	.mpp	Project	Основной тип документов Project. Содержит календарный план проекта, описание задач, ресурсов и их взаимосвязи

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующий вывод: входящие в состав пакета MS Office приложения способны тесно взаимодействовать при решении прикладных задач; они создают единую информационную среду и позволяют обмениваться объектами. Документы Microsoft Office являются частными примерами объектов. Поэтому Microsoft Office является *документо-ориентированным пакетом* (средой).

Программная среда

Основным средством разработки приложений в MS Office является комплексное решение на основе языка Visual Basic, а именно - Visual Basic for Application (VBA). Эта технология включает макрорекордер, интерпретатор Visual Basic, интегрированную среду разработки с встроенным отладчиком, библиотеки времени выполнения (runtime library) и библиотеки типов, представляющие объекты пакета. Эти средства позволяют расширять функциональность пакета и адаптировать его к решению специализированных задач.

Интерфейс MS Office

Приложения Microsoft Office имеют унифицированный интерфейс, суть которого заключается в следующем: сходные функции имеют одинаковое обозначение (название команды или значок на кнопке), а несходные функции имеют различные обозначения.

В большей степени унификация коснулась интерфейсов таких приложений, как Microsoft Word, Microsoft Excel и Microsoft PowerPoint.

Одним из достоинств пакета Microsoft Office является последовательное использование графического интерфейса пользователя (Graphical User Interface, GUI), представляемого операционной системой и различных элементов управления. Как правило, отдельные элементы группируются в более крупные конструкции, такие как окна, панели инструментов, меню. Рассмотрим характеристику каждой из этих групп.

Оконный интерфейс

Оконный интерфейс - такой способ организации пользовательского интерфейса программы, когда каждая интегральная часть располагается в *окне* — собственном субэкранном пространстве, находящемся в произвольном месте «над» основным экраном. Несколько окон одновременно располагающихся на экране могут перекрываться, находясь
«выше» или «ниже» друг относительно друг

В MS Office использует окна четырех типов:

- окно приложения;
- окно документа; • диалоговое окно;
- форма.

Панели инструментов

Панели инструментов - это элементы пользовательского интерфейса, на которых могут располагаются такие элементы управления, как кнопки быстрого вызова и

раскрывающиеся списки. Панели инструментов разных приложений могут содержать кнопки, сходные по функциям и внешнему виду, что упрощает освоение интерфейса Microsoft Office.

Панели инструментов могут быть:

- пристыкованными вдоль границы окна приложения;
- плавающими, т.е. находится в любой части окна приложения;
- представленными в отдельных окнах; в этом случае форму и размеры панели инструментов можно менять произвольно.

Меню

Меню представляет доступ к иерархическим спискам доступных команд. Результатом выбора команды из меню может быть:

- непосредственное выполнение некоторого действия;
- раскрытие еще одного меню;
- раскрытие диалогового окна или формы.

Меню интерфейса Microsoft Office, кроме строки меню любого приложения, можно разделить (по способу перехода к ним) на раскрывающиеся и контекстные (или всплывающие).

Элементы управления

Элементы управления - это объекты оконного интерфейса, реализующие типовые операции с интерфейсом: щелчок мышью, выбор из списка, выбор вариантов, прокрутка и т.п. К элементам управления относятся следующие: кнопки, текстовые поля (или поля ввода), флажки, переключатели, списки и раскрывающиеся списки, полосы прокрутки, палитры, счетчики и прочие, специфичные для некоторых приложений или условий.

ТЕМА 2.2 ВВЕДЕНИЕ В ОФИСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Офисное программирование — это процесс разработки приложений, предназначенных для автоматизации офисной деятельности с использованием специализированных пакетов (MS Office, OpenOffice.org или подобных).

Офисное программирование имеет ряд особенностей, отличающих его от программирования в общем смысле:

- цели разработки;
- область применения;
- макроязык;

- среда разработки;
- поддержка объектно-ориентированного программирования.

Рассмотрим эти особенности на примере MS Office.

Цели разработки

В офисной среде *программный проект неразрывно связан с документом*, хранится как часть документа и не может существовать независимо от него. *Документ, а не программа, является целью разработки.*

Стандартные возможности среды по работе с документами велики. Однако возможность изменить типовой документ, снабдив его дополнительными функциями – это одна из важнейших задач офисного программирования. Для ее решения офисная среда представляет совокупность библиотек классов, которые составляют каркас (Framework) текстовых документов, электронных таблиц, презентаций, баз данных и приложений на основе этих документов. Всякий раз, когда создается новый документ, его каркас составляют объекты библиотек, заданные по умолчанию. Этот каркас можно существенно изменить, добавив в документ новые свойства. Расширение каркаса не требует от программиста значительных усилий – достаточно включить в него необходимые библиотеки классов.

Область применения

Область применения офисного программирования широка – от настройки отдельных документов до решения задач автоматизации офисной деятельности масштаба предприятия, в т.ч. ориентированных на совместную работу в глобальной сети.

Visual Basic for Application

Visual Basic для приложений (Visual Basic for Application, VBA) – это инструмент разработки приложений, который позволяет создавать программные продукты, решающие практически все задачи, встречающиеся в среде Windows. Эти продукты можно использовать, например, для оформления документов (подготовки текстов) или анализа данных таблиц (электронных таблиц). VBA – уникальное приложение, поскольку оно встраивается в другое приложение и расширяет его функциональные возможности.

Visual Basic for Application (VBA) - стандартный макроязык пакета Microsoft Office, предназначенный для расширения функциональных возможностей приложения в котором используется.

С помощью VBA можно:

- создать собственное диалоговое окно и придать ему требуемый внешний вид;

- создать макросы, расширяющие функциональные возможности приложения, в которое встроен VBA;
- изменить меню приложения Microsoft Office;
- управлять другим приложением Microsoft Office или принадлежащими ему данными;
- объединить данные из нескольких приложений Microsoft Office в одном документе;
- автоматически создавать или изменять страницы Web, совместно используя приложения Microsoft Office и VBA.

Для разработчика доступны следующие инструменты и средства, которые используются при создании проекта VBA:

- отладка приложений без предварительной компиляции;
- средства Win32 API;
- SQL и объекты доступа к данным для управления данными и извлечения их из внешних источников данных, таких как Microsoft SQL Server;
- построение и проверка элементов интерфейса непосредственно в среде разработки VBA (Integrated Development Environment, IDE);
- связывание программ и процедур с событиями, которые возникают в приложениях VBA.

Среда разработки

Среда приложений Office ориентирована в первую очередь на пользователей, а не на программистов и в ней можно создавать документы без всякого программирования. Поэтому программист обычно начинает работать с документами не на пустом месте, а с их заготовками, созданными пользователями, т.е. и сам программист может выступать в роли пользователя. Средства совместной работы над документами Office обеспечивают одновременную работу программистов и пользователей.

Среда MS Office предлагает два способа создания программ, отличающихся подходом к процессу: использование макрорекордера и ручное кодирование (на языке VBA). Эти подходы ориентированы на разные категории: непосредственно пользователей и программистов соответственно.

Макрорекордер (MacroRecorder) – это программный инструмент, записывающий действия пользователя при работе с документами и приложениями, с сохранением записи в виде макроса -исходного кода на языке VBA. При вызове сохраненного макроса воспроизводится вся сохраненная последовательность действий.

Макрорекордер представляет возможность создания программного проекта или, по крайней мере, его отдельных компонентов автоматически, без программирования. Для записи и воспроизведения макроса не требуется специальных знаний, поэтому пользователь может самостоятельно создавать программы (макросы), в общем случае даже не представляя себе, как они работают.

Для программиста макрорекордер полезен тем, что позволяет создавать фрагменты программы автоматически, тем самым увеличивая скорость разработки и уменьшая время отладки.

Интегрированная среда разработки на VBA (Visual Basic Environment, VBA) - встроенное в MS Office средство для написания, тестирования и отладки приложений на VBA. Среда VBA представляет все возможности для создания законченных офисных приложений, включая средства визуального проектирования пользовательского интерфейса. VBA ориентирована на использование программистами для разработки офисных приложений (это отнюдь не означает, что пользователи не могут применять VBA).

Поддержка ООП

Разработка приложений для MS Office тесно связана с парадигмой объектно-ориентированного программирования. Все документы (более того, сами компоненты пакета) в MS Office - суть объекты, наделенные собственными наборами свойств (характеристик объекта), методов (подпрограмм управления свойствами) и событий (подпрограмм, обрабатывающих изменения состояния объекта в результате некоторых действий). Соответственно, для обеспечения более полной интеграции с пакетом, входной язык (VBA) также поддерживает ООП.

Все объекты приложения MS Office образуют иерархическую структуру, которая определяет связь между ними и способ доступа. Такая структура называется объектной моделью (object model). За рамки объектной модели выходят, но также могут использоваться в офисных приложениях, внешние объекты, поддерживающие технологии DDE, OLE/ActiveX и ряд других.

В объектно-ориентированную концепцию удачно вписывается технология *визуального программирования*. Все отображаемые элементы графического интерфейса, такие как формы, элементы управления, меню и панели инструментов являются объектами, наделенными набором свойств и методов и способными реагировать на события (например, щелчки мыши, нажатия клавиш и т.п.). При визуальном подходе не

требуется программного задания (хотя это и возможно) их основных свойств (например, ширина или высота, цвет фона и т.п.). Эти свойства можно задать при помощи мыши (например, ширину и высоту формы путем операции "перетаскивания" маркеров) или установить их в окне свойств (название формы, цвет фона формы и т. д.). Таким образом, визуальное программирование делает проектирование интерфейса программы более наглядным и быстрым. При этом сохраняется возможность управлять всеми объектами и программно.

Преимущества офисного программирования

Преимущества, которые получает конечный пользователь, использующий программируемые офисные документы:

- Пользователь получает документы, обладающие новыми функциями и способные решать задачи, характерные для проблемной области пользователя.
- Пользователь находится в единой офисной среде независимо от того, с каким документом он работает в данный момент и какой программист разрабатывал этот документ.
- Большинство доступных при работе с документами функций являются общими для всех документов, поскольку их предоставляет сама офисная среда. Единый стиль интерфейса разных документов облегчает работу с ними.
- Пользователь сам, не будучи программистом, способен создавать простые виды программируемых офисных документов, постепенно совершенствуясь в этой деятельности.

Преимущества, которые получает программист, работающий в Office:

- В распоряжении программиста находится мощная интегрированная среда. Для него эта среда представлена в виде совокупности хорошо организованных объектов, доступных в языке программирования и по принципу работы ничем не отличающихся от встроенных объектов языка или объектов, создаваемых самим программистом.
- Большинство повседневных задач становятся для него простыми, – чтобы их решить, зачастую достаточно стандартных средств.
- Там, где стандартных средств не хватает, где у документа должны появиться новые функциональные возможности, где необходимо создать документ по заказу, вступает в силу язык программирования – VBA, существенная особенность которого – возможность работы с объектами любого из приложений Office.

- Офисное программирование позволяет применять на практике идеи компонентного программирования. Компонентный подход предполагает взаимодействие компонентов, создаваемых в разных программных средах, на разных языках, на разных платформах и находящихся на разных машинах. Работа с компонентами (DLL, ActiveX, AddIns, ComAddIns) является неотъемлемой частью офисного программирования.

ТЕМА 2.3 МАКРОСЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАКРОРЕКОРДЕРА

Макросы

Независимо от используемых операционной системы и программных приложений MS Office пользователь часто выполняет одни и те же последовательности команд для многих рутинных задач. Вместо повторения последовательности команд каждый раз, когда необходимо выполнить какую-либо задачу, можно создать макрос (macro), который вместо пользователя будет выполнять эту последовательность. Термин macro произошел от греческого слова, означающего расширенный или растянутый.

Макрос – это программа (в контексте офисного программирования - созданная автоматически), состоящая из списка команд, которые должны быть выполнены приложением.

Основными преимуществами использования макросов являются:

- повышение точности и скорости работы, поскольку компьютеры лучше приспособлены для выполнения повторяющихся задач, чем человек;
- при выполнении макросов обычно нет необходимости в присутствии человека-оператора; в случае, если макрос очень длинный и выполняет операции, требующие значительного времени (например, поиск в базе данных и сортировка), пользователь может переключиться на другое приложение.

Макрос служит для объединения нескольких различных действий в одну процедуру, которую можно легко вызвать. Этот список команд состоит в основном из макрокоманд, которые тесно связаны с приложением, в котором создается макрос – т.е. с командами Word, Excel или других приложений Microsoft Office.

Можно выделить *три основные разновидности макросов*:

1. *Командные макросы* – это наиболее распространенные макросы, обычно состоящие из операторов, эквивалентным тем или иным командам меню или параметрам диалоговых окон. Основным предназначением такого макроса является

выполнение действий, аналогичных командам меню – т.е. изменение окружения и основных объектов приложения.

2. *Пользовательские функции* – работают аналогично встроенным функциям приложения. Отличие этих функций от командных макросов состоит в том, что они используют значения передаваемых им аргументов, производят некоторые вычисления и возвращают результат в точку вызова, но не изменяют среды приложения.
3. *Макрофункции* – представляют сочетание командных макросов и пользовательских функций. Они могут использовать аргументы и возвращать результат, подобно пользовательским функциям, а также могут изменять среду приложения, как и командные макросы. Чаще всего эти макросы вызываются из других макросов, и активно используются для модульного программирования.

Поддержка макросов позволяет порой обойтись вообще безо всякого программирования: достаточно включить автоматическую запись выполняемых пользователем действий и в результате получить готовый макрос, а затем назначить ему кнопку на панели инструментов или новую команду меню, которые будут использоваться для вызова. Простые макросы удается создавать, не написав вручную ни одной строки программного кода.

Для разработки же серьезных приложений приходится программировать.

Таким образом, различают 2 способа разработки макроса:

- автоматическое создание, с использованием макрорекордера;
- написание макроса "с нуля", используя язык программирования VBA.

Отметим, что возможен и комбинированный подход: фрагменты будущей программы записываются автоматически, а затем они корректируются и дополняются "рукописным" кодом.

Для записи макросов из приложений Microsoft Office используется **макрорекордер**. Это встроенный инструмент, который фиксирует все действия пользователя, включая ошибки и неправильные запуски. При выполнении макроса интерпретируется каждая записанная макрорекордером команда точно в такой последовательности, в которой пользователь выполнял их во время записи.

Для **записи макроса** в приложении Microsoft Office можно использовать меню "Сервис/Макрос/Начать запись" или выбрать кнопку "Записать макрос" на панели инструментов Visual Basic. До начала записи нужно указать имя макроса и определить, где он будет храниться и как будет доступен. Затем выполнить действия, которые требуется

сохранить в макросе. Для завершения записи нужно на панели инструментов "Остановка записи" щелкнуть кнопку "Остановить запись".

Для **выполнения макроса** необходимо:

1. Установить курсор в место вставки выполнения макроса.
2. Выбрать пункт меню "Сервис/Макрос/Макросы".
3. В появившемся диалоговом окне "Макрос" выбрать имя нужного макроса и выбрать "Выполнить".

Чтобы **просмотреть код** записанного макроса, надо выбрать меню "Сервис/Макрос/Макросы". В появившемся диалоговом окне выбрать имя нужного макроса и щелкнуть кнопку "Изменить". Исходный код указанного макроса будет загружен в окно редактора Visual Basic.

Структура записанного макроса

Макросы, создаваемые макрорекордером MS Office, сохраняются в специальной части файла данных, называемой *модулем*. Модуль VBA содержит исходный код программы на языке VBA. Фактически макрос является подпрограммой (а точнее, процедурой) VBA. Записанный макрос имеет строго определенную структуру. Ниже представлен исходный код простого макроса, созданного в Microsoft Word.

Листинг 1. Пример макроса

```
Sub Hello()
' Макрос изменяет размер, начертание шрифта, выравнивание абзаца и
' выводит надпись в активный документ MS Word
'
        Selection.Font.Size = 24
        Selection.Font.Bold = wdToggle
        Selection.ParagraphFormat.Alignment = wdAlignParagraphCenter
        Selection.TypeText Text:="Hello, World!"
End Sub
```

В общем виде структуру кода макроса можно представить следующим образом[2]:

```
Sub имяМакроса ()
' текст комментария
        Оператор1
```

[2] Локализованные версии пакета MS Office позволяют использовать в макросах символы национальных алфавитов (например, в идентификаторах). Однако не следует пользоваться этой сомнительной возможностью во избежании сложностей с отладкой и портированием приложений на VBA.

```
    Оператор2 ...
    ОператорN
End Sub
```

Каждый макрос VBA начинается с ключевого слова Sub, за которым следует имя макроса. Строку, содержащую ключевое слово Sub и имя макроса, называют *строкой объявления (declaration)* макроса. За именем макроса всегда следуют пустые круглые скобки (т.к. макрос является процедурой VBA без параметров).

За строкой объявления макроса следуют строки комментариев. *Комментарий (comment)* – это строка в макросе VBA, которая не содержит инструкций, являющихся частью этого макроса. Каждая строка комментария начинается с символа апострофа ('). Комментарии содержат имя макроса и текст, который был введен пользователем в текстовое поле "Описание" ("Description") диалогового окна "Запись макроса" ("Record Macro") в момент записи этого макроса.

Сразу за объявлением макроса следует *тело макроса (body)*. Каждая строка в теле макроса состоит из одного или более операторов VBA. *Оператор VBA (statement)* – это последовательность ключевых слов и других символов, которые вместе составляют одну полную инструкцию для VBA. Макрос VBA состоит из одного или нескольких операторов.

Конец макроса выделяется ключевой строкой End Sub, завершающей тело макроса.

ТЕМА 2.4 СРЕДА РАЗРАБОТКИ VBA

Visual Basic for Application (VBA) – это система программирования, которая используется как единое средство программирования во всех приложениях Microsoft Office. Всякая система программирования включает в себя, по меньшей мере, три составные части:

1. Язык (или языки) программирования.
2. Среду разработки, т.е. набор инструментов для написания программ, редактирования, отладки и т.п.
3. Библиотеку (или библиотеки) стандартных программ, т.е. набор готовых программ (процедур, функций, объектов и т.д.), которые можно использовать как готовые элементы при построении новых программ.

Для создания офисных приложений в MS Office имеется *интегрированная среда разработки* (Integrated Development Environment, *IDE*) с унифицированным интерфейсом. VBA IDE – это набор инструментов разработки программного обеспечения, таких как

редактор Visual Basic (Visual Basic Editor, VBA), средства отладки, средства управления проектом и т.д.

Вызов VBA IDE из любого приложения выполняется через комбинацию клавиш Alt+F11 или меню "Сервис/Макрос/Редактор Visual Basic".

Структура VBA

VBA – это стандартное интерфейсное окно, содержащее меню, панели инструментов, другие окна и элементы, которые применяются при создании проектов VBA. Общий вид окна редактора Visual Basic представлен на рис. 3.

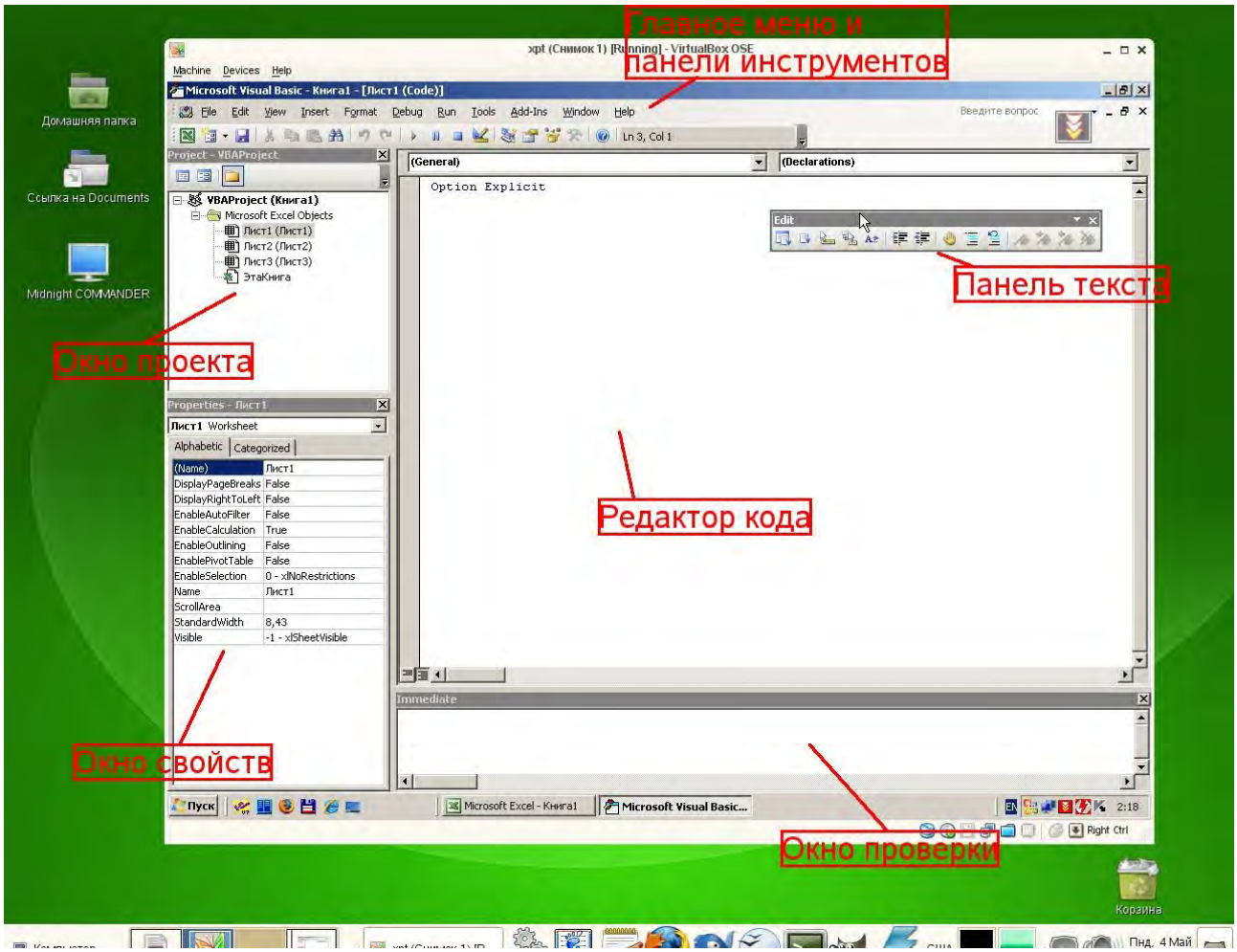


Рисунок 3. Окно редактора Visual Basic

Основными (открывающимися по умолчанию) являются три окна: окно проекта, окно свойств и окно редактирования кода. Краткое описание этих и некоторых других компонентов VBA приведено в таб. 4. Все они доступны через команды, представленные в меню "Вид".

Таблица 4. Назначение компонентов VBA

Наименование окна	**Описание**
Project (Проект)	Предназначено для отображения всех открытых проектов, а также их составляющих: модулей, форм и ссылок на другие проекты
Toolbox (Панель элементов)	Содержит элементы управления для конструирования форм
UserForm	Используется для создания форм путем размещения на них элементов
Наименование окна	**Описание**
	управления
Code (Программа)	Предназначено для просмотра, написания и редактирования программы на языке VBA. Поскольку среда разработки является многооконной, то для каждого модуля проекта можно открыть отдельное окно
Properties (Свойства)	Отображает свойства выделенных объектов. В этом окне можно задавать новые значения свойств формы и элементов управления
Object Browser (Просмотр объектов)	Отображает классы, свойства, методы, события и константы различных библиотек объектов. Используется для быстрого получения информации об объектах
Immediate (Проверка)	Предназначено для быстрого выполнения вводимых в него инструкций. В данном окне также выводятся результаты выполнения вводимых инструкций
Locals (Локальные переменные)	Автоматически показывает все переменные данной процедуры
Watches (Контрольные значения)	Применяется при отладке программ для просмотра значений выражений

Характеристики компонентов VBA

Окно проекта (Project)

Проект – это совокупность всех программных модулей, связанных с документом Microsoft Office. Окно *Project (Проект)* предназначено для быстрого получения информации о различных составляющих проекта.

Проект может содержать модули следующих видов:

- *Объекты основного приложения*. Проекты VBA выполняются совместно с другими приложениями. Приложение, в котором разрабатывается и выполняется проект VBA, называется основным.

- *Модули форм*. В VBA имеется возможность создавать пользовательские формы, предназначенные для ввода или вывода данных, а также процедуры обработки событий, возникающие в этих формах.
- *Модули кода*. Модульность - один из основных принципов парадигмы структурного программирования. Каждый модуль, как правило, содержит подпрограммы, сход-

  ные по назначению. Небольшие модули проще отлаживать и использовать повторно. В частности, в VBA имеются средства импорта/экспорта готового кода.
- *Модули классов*. VBA позволяет создавать и использовать собственные объекты. Описание объектов включается в модули класса. Каждый модуль класса содержит полную информацию об одном типе объекта.

С помощью окна проекта можно добавить или удалить какой-либо объект из проекта. Модули кода добавляются в проект командой "Вставить/Модуль". Формы создаются командой "Вставить/UserForm", а модули класса командой "Вставить/Модуль класса".

Окно проекта можно использовать также для быстрой навигации по формам проекта и программному коду. Для этого необходимо выбрать в контекстном меню соответственно команды "Объект" или "Программа".

Окно свойств (Properties)

Список свойств выделенного объекта выводится в окне Properties (Свойства). Для того чтобы выделить объект, необходимо с помощью окна проекта выбрать форму и перейти в режим конструктора, используя команду "View Object". Свойства объекта можно упорядочить в алфавитном порядке (Alphabetic (По алфавиту)) или по категориям (Categorized (По категориям)), выбрав соответствующую вкладку. Предусмотрена также возможность получения быстрой справки по какому-либо свойству объекта. Для этого достаточно установить курсор на нужное свойство и нажать клавишу F1.

Окно просмотра объектов(Object Browser)

Окно Object Browser (Просмотр объектов) предназначено для просмотра объектов, доступных при создании программы. Точнее, в этом окне отображаются не сами объекты, а структура соответствующего класса объектов. Окно просмотра объектов может использоваться для поиска метода или свойства объекта.

Окно Code (Окно редактирования кода)

Окно Code (Программа) представляет собой текстовый редактор, предназначенный для написания и редактирования кода процедур приложения. Это окно появляется на экране, например, при создании нового модуля. Код внутри модуля организован в виде отдельных разделов для каждого объекта, программируемого в модуле. Переключение между разделами выполняется путем выбора значений из списка "Object" ("Объект"), который находится в левом верхнем углу окна. Каждый раздел может содержать несколько процедур, которые можно выбрать из списка "Procedure" ("Процедура") в правом верхнем углу.

Интеллектуальные возможности редактора кода:

1. При написании кода пользователю предлагается список компонентов, логически завершающих вводимую пользователем инструкцию.
2. На экране автоматически отображаются сведения о процедурах, функциях, свойствах и методах после набора их имени.
3. Автоматически проверяется синтаксис набранной строки кода сразу после нажатия клавиши Enter. В результате проверки выполняется выделение определенных фрагментов текста:
    - красным цветом – синтаксические ошибки; • синим цветом – зарезервированные ключевые слова;
    - зеленым цветом – комментарии.
4. Если курсор расположить на ключевом слове VBA, имени процедуры, функции, свойства или метода и нажать клавишу F1, то на экране появится окно со справочной информацией об этой функции.

Окно редактирования форм (UserForm)

Для создания диалоговых окон, разрабатываемых приложений VBA, используются формы. Редактор форм является одним из основных средств визуального программирования. При добавлении формы в проект (команда "Insert" – "UserForm" ("Вставить" – "UserForm")) на экран выводится незаполненная форма с панелью инструментов Toolbox (Панель элементов).

Используя панель инструментов Toolbox (Панель элементов) из незаполненной формы конструируется требуемое для приложения диалоговое окно. Размеры формы и размещаемых на ней элементов управления можно изменять. Также окно редактирования форм поддерживает операции буфера обмена. Кроме того, команды меню "Format"

("Формат") автоматизируют и облегчают процесс выравнивания элементов управления как по их взаимному местоположению, так и по размерам.

Окна отладочной информации

Окно Immediate (Проверка) позволяет ввести инструкцию и выполнить ее. При этом инструкция должна быть записана в одну строку, директивы которой будут выполнены после нажатия клавиши Enter. Данное окно можно использовать для быстрой проверки действий, выполняемой той или иной инструкцией. Это позволяет не запускать всю процедуру, что удобно при отладке программ.

Окно Locals (Локальные переменные) автоматически отображает все объявленные переменные текущей процедуры и их значения.

Окно Watches (Контрольные значения) применяется при отладке программ для просмотра значений выражений.

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета

«___» _____ 2018 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издание УГГУ Екатеринбург, 2018

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от «07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018
©Уральский государственный горный университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА 4
1.1. Основные понятия статики 4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия 9
1.3. Произвольная плоская система сил 16
1.4. Равновесие систем тел 26
1.5. Произвольная пространственная система сил 34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения 44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА 55
2.1. Криволинейное движение точки 55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела 62
вокруг неподвижной оси 62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела 73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела 84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки 100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки 114
4.2. Колебания материальной точки 124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки 134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ 146
5.1. Теорема о движении центра масс системы 146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы
относительно оси 148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы 153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию
движений твёрдого тела 162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ 177
6.1. Принцип Даламбера для системы 177
6.2. Принцип возможных перемещений 182
6.3. Общее уравнение динамики 189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода 201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ 220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1 220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2 226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3 231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4 233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5 236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6 241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 249

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил.**

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной,** или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

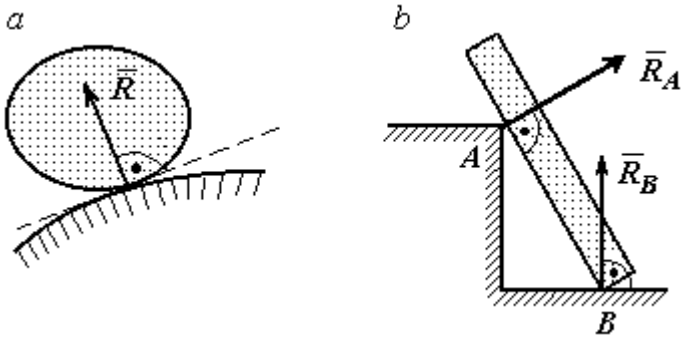


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормалям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

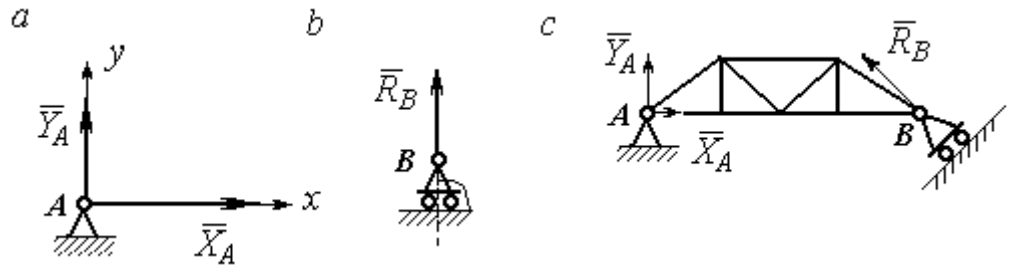


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

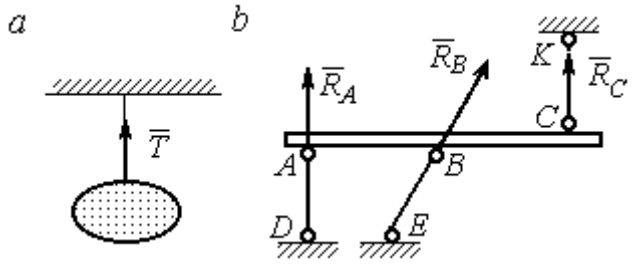


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира A разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

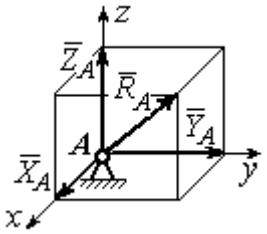


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

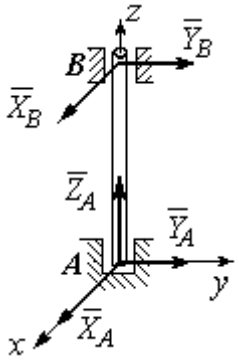


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника *B* разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям. Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник *A*). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, *a*, на ось *x*: $F_x = F\cos\alpha$, $Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi$, $P_x = P\cos 90^\circ = 0$.

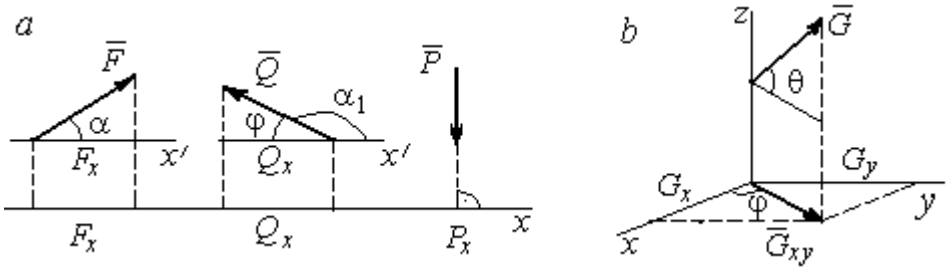


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
a – проекция силы на ось; *b* – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, *b* вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость *xy*. По величине $G_{xy} = G\cos\theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz: $G_x = G_{xy}\cos\varphi = G\cos\theta\cos\varphi$, $G_y = G_{xy}\sin\varphi = G\cos\theta\sin\varphi$, $G_z = G\sin\theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120°$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

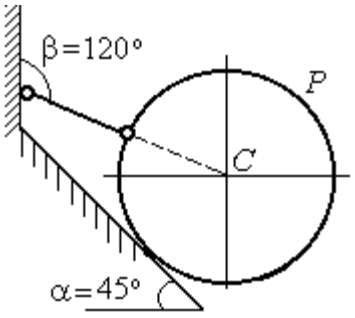


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0.$$

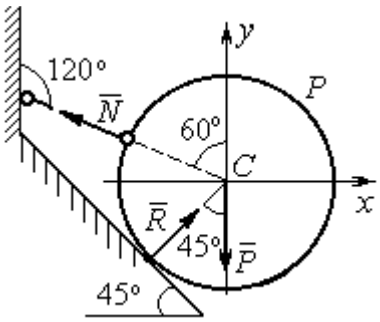


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N\cos 30^\circ + R\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N\cos 60^\circ + R\cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14{,}64$ кН, $R = 17{,}93$ кН.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней *AC* и *BC*, скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень *BC* горизонтален, стержень *AC* составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру *C* прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10$ кН и $G_2 = 12$ кН. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок *D* так, что угол наклона участка троса *CD* к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней *BC* и *AC*.

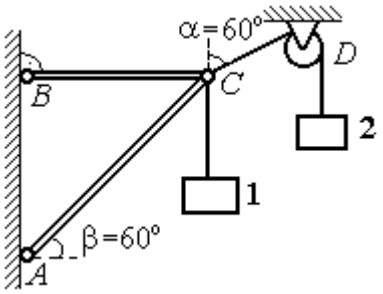


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла *C*, в котором закреплены стержни и тросы. На узел *C* действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней *BC* и *AC* (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xCy, как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2\cos 60^\circ - T_2\cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2\cos 30^\circ + T_1 - T_2\cos 60^\circ = 0.$$

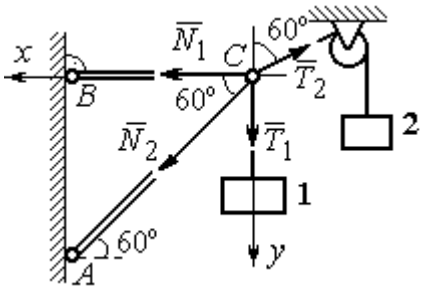


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел *C* при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12{,}7$ кН, $N_2 = -4{,}62$ кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня *AC* направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном *ABC* посредством каната, перекинутого через блоки *B* и *D* (рис. 1.11). Блок *B* установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней *AB* и *BC*, блок *D* укреплён так, что участок троса *DB* составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни *AB* и *BC* соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз *P*, переброшен через блок *E* и на отрезке *BE* составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока *B*, определить усилия в стержнях *AB* и *BC* при равновесии груза.

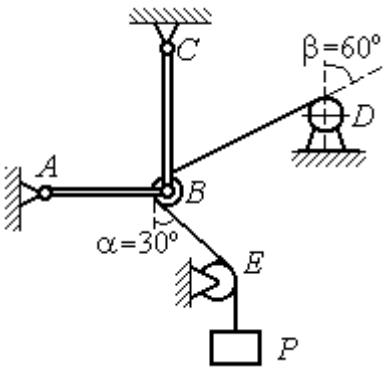


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

Решение

Рассмотрим равновесие блока *B* вместе с отрезками нити *BE* и *BD*. Освободим блок *B* от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити *BD*, приложенная в точке *D*, численно равная весу груза *P*, реакция $\vec{T}'$ нити *BE*, приложенная в точке *E* и также численно равная весу груза *P* и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

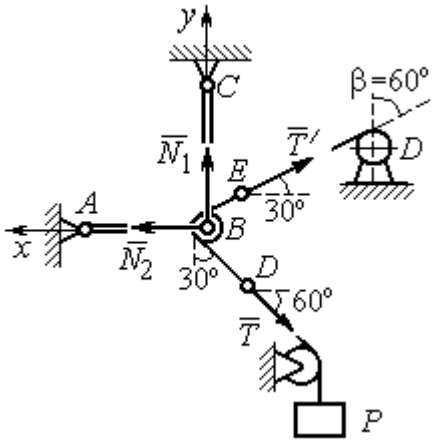


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок *B*, при его равновесии

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T'\cos 30^\circ - T\cos 60^\circ = 0;\ \sum F_{ky} = N_1 + T'\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P$ = 20 кН, получим: N_1 = 7,32 кН, N_2 = 27,32 кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса *CBDP*, натянутого грузом весом *P* = 50 Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса *CB*, *BD*, *DP* и натяжения оттяжек *BA* и *DE*, если угол отклонения оттяжки *BC* от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса *BD* от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

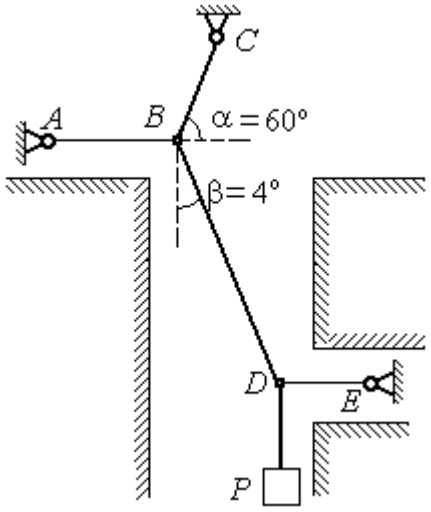


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла *D*, в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки *DE* и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP, равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат *xDy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *D:*

$$\sum F_{kx} = S\cos 86^\circ - T_E = 0\,; \;\; \sum F_{ky} = S\cos 4^\circ - T_P = 0\,.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке *DP* $T_P = P =$ 50 Н, находим натяжение S на среднем участке отвеса: $S = \dfrac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50{,}12$ Н. Из первого уравнения находим натяжение $T_E = S\cos 86^\circ = 3{,}49$ Н.

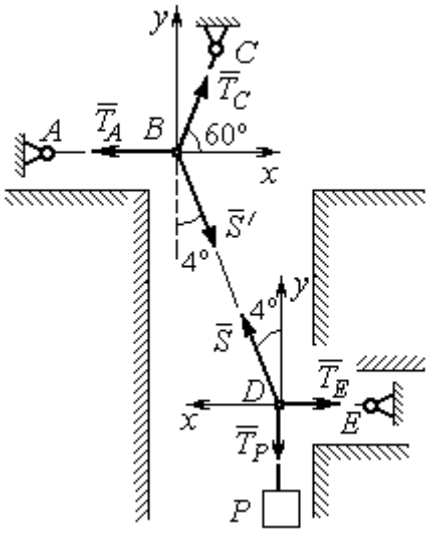


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах *B* и *D* при равновесии отвеса

Теперь рассмотрим равновесие узла *B*, на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки *BA*, реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса *BC* и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$, а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *B:*

$$\sum F_{kx} = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ - T_A = 0\,; \quad \sum F_{ky} = T_C\cos 30^\circ - S'\cos 4^\circ = 0\,.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке *BC* и натяжение T_A оттяжки *BA*: $T_C = \dfrac{S'\cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57{,}73$ Н; $T_A = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ = 32{,}36$ Н.

Задача 5. Груз *P* = 20 кН удерживается двумя стержнями *AC*, *AD* одинаковой длины и цепью *AB*, скреплённых в точке *A*, так, что плоскость треугольника *ADC* горизонтальна (рис. 1.15). Цепь *BA* отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние *CE* = *ED.* Трос закреплён одним концом в точке *A*, а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок *K* так, что отрезок

троса AK находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

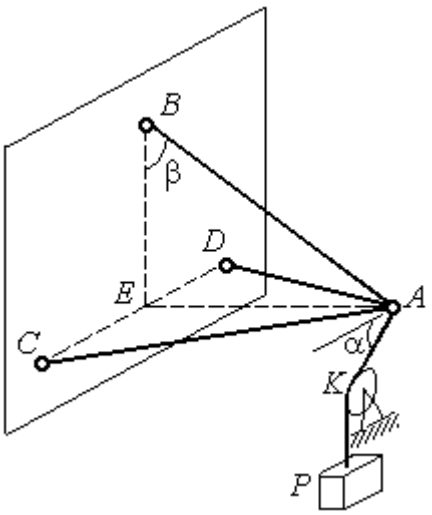


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла A. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии AK и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

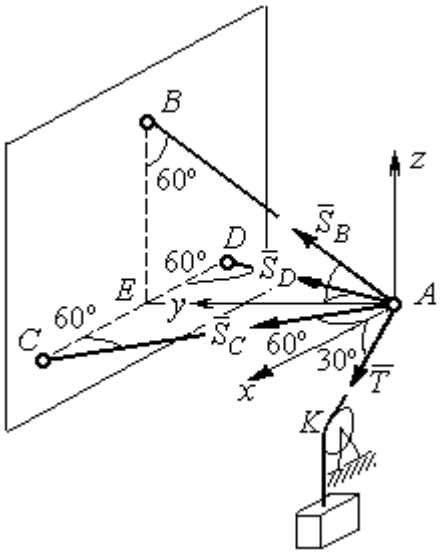


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел A, при его равновесии

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел A действует пространственная сходящаяся система сил.

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27{,}32$ кН; $S_D = 7{,}32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор DB и DA и растяжки DC, соединённых в точке D. В точке D к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

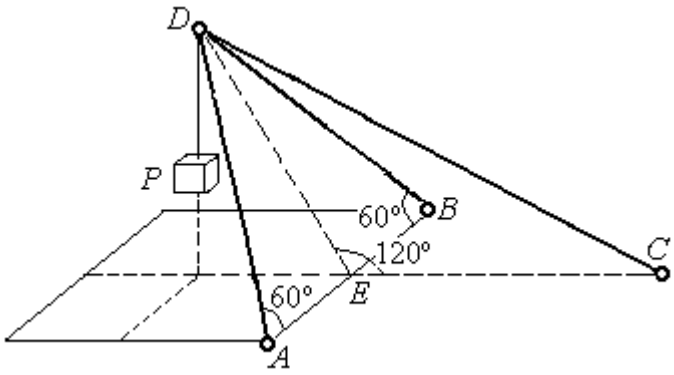


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла D. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

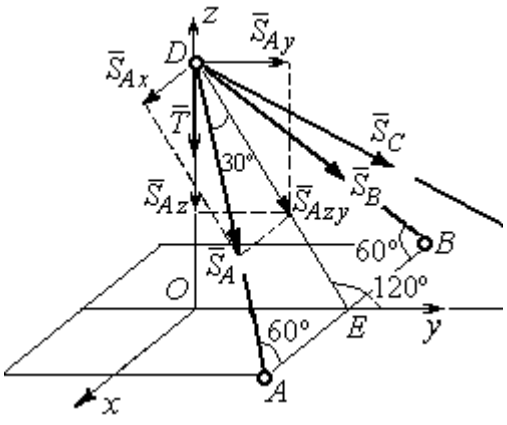


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел D, при его равновесии

На узел D действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz, а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz. На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A \cos 60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy} \cos 60^\circ = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy} \cos 30^\circ = -S_A \cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C \cos 30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C \cos 60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_B \cos 30^\circ \cos 60^\circ + S_C \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = - S_A \cos^2 30^\circ - S_B \cos^2 30^\circ - S_C \cos 60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил.**

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, *а*): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы.** Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O* равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

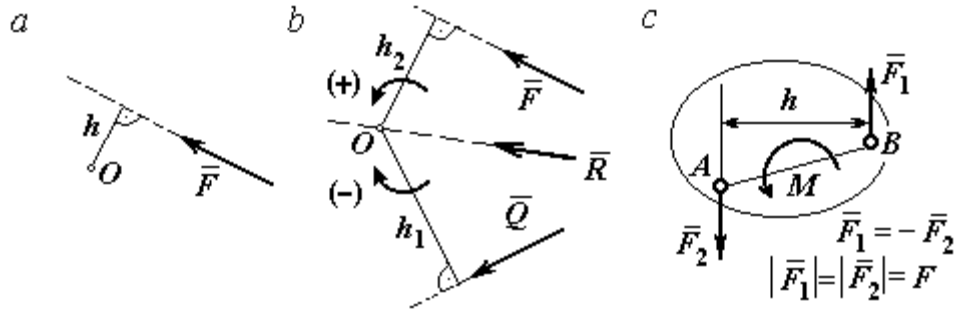


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо *h* и момент *M*: $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. *M* на рис. 1.19, *c*).

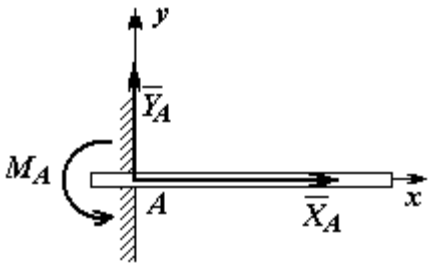


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно центра *O*. Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

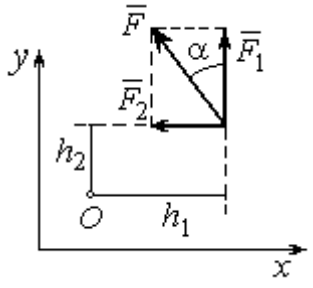


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределенными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью *q*. Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

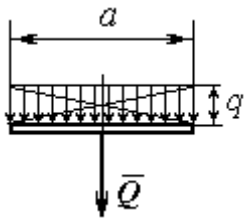


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка AB весом P = 100 кН прикреплена к стене шарниром A (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке B, перекинутого через блок D и несущего груз Q. Участок троса DB образует с вертикалью угол 30°. В точке C к балке подвешен груз G весом G = 200 кН. Определить вес груза Q, удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира A, пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0{,}25BA$.

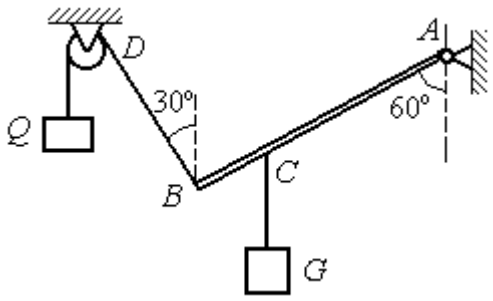


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка AB. На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка AB, реакция шарнира A, представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз *Q*, и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз *G*. Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0\,;\ \sum F_{ky} = 0\,;\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0\,.$$

Выберем систему координат *xAy,* как показано на рис. 1.24.

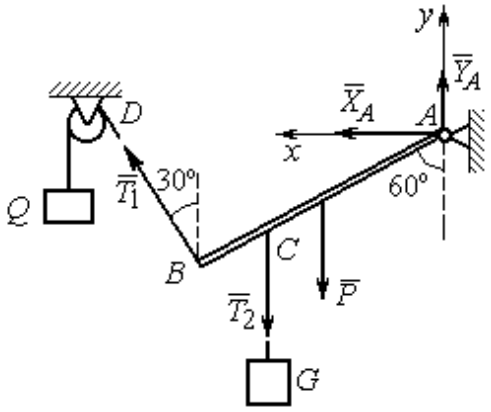


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1\cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку *A* и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра *A* имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1\ell + T_2\frac{3}{4}\ell\cos 30^\circ + P\frac{1}{2}\ell\cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз *Q*, по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз *G*, численно равна весу груза *G*: $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q\cdot 0{,}5 = 0,\ \ Y_A + Q\cdot 0{,}866 - 300 = 0,\ \ -Q + 173{,}2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173{,}2$ кН, $X_A = -86{,}6$ кН, $Y_A = 150{,}01$ кН.

Задача 8. Рама *ACE* (рис. 1.25, *a*) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке *AB* нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке *E* под прямым углом к отрезку *CE* рамы прикреплен трос, перекинутый через блок и несущий груз $P = 20$ кН.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы *ACE*. Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.25, *b*.

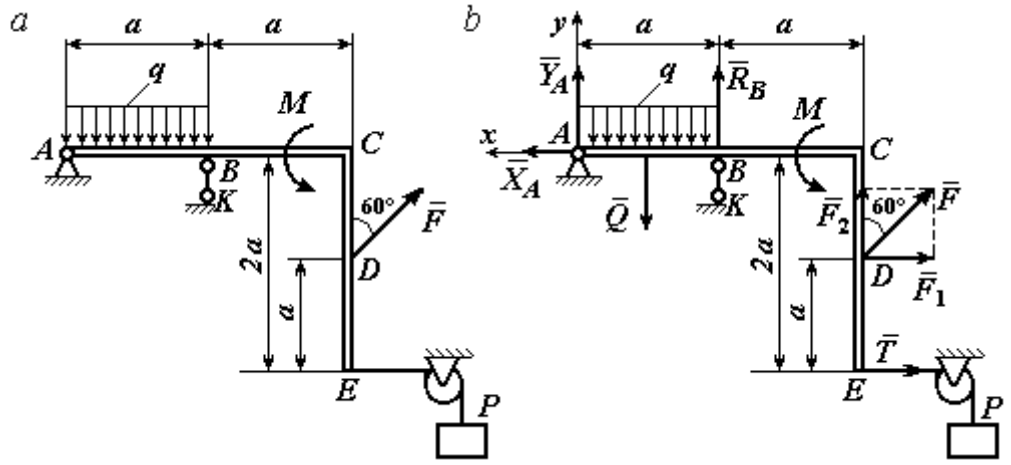


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
a – конструкция и нагрузка рамы; *b* – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси *Ax* и вертикальной *Ay*. Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Действие груза *P* на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, *b* показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры *BK* выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы *ACE* действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M$) ~ 0. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *Ax*, *Ay*, первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0. \qquad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира *A*, проходят через центр *A*, плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, *b*). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы *F* на оси координат: $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра *A* равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра *A*: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0{,}5a + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0. \qquad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B. Решая эту систему, найдем: X_A= 28,66 кН; Y_A= 59,66 кН; R_B = – 60,66 кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры *A* – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама *ABCED* (рис. 1.26) в точке *A* закреплена жёсткой заделкой. В точке *E* к раме прикреплена нить, составляющая угол 60º к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом *P* = 15 кН. На раму действуют: пара сил с моментом M = 12 кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю *F* = 10 кН, приложенная в точке *C* под углом 30° к горизонтальному участку рамы *BE*, и равномерно распределенная на отрезке *BC* нагрузка интенсивностью *q* = 2 кН/м. В точке *D* под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

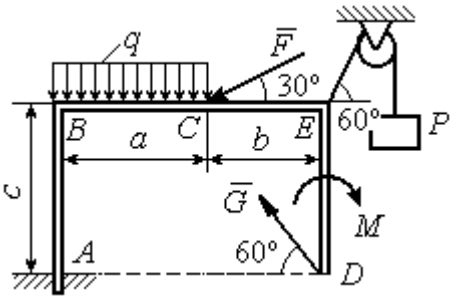


Рис. 1.26. Конструкция рамы

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке *A*, если размеры рамы: *a* = 2 м, *b* = 1 м, *c* = 5 м.

Решение

Объектом равновесия является рама *ABCED.* Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке *A* и нить, натянутая грузом *P.* Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке *A* в виде силы, которую представим двумя ее составляющими $-\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке *E*, направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

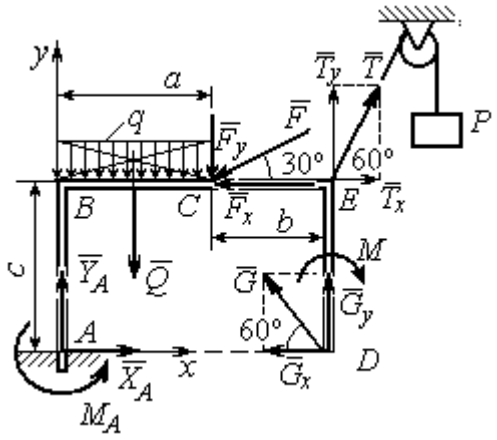


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия для такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ - G\cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F\cos 60^\circ + T\cos 30^\circ + G\cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F\cos 30^\circ$, $F_y = F\cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра *A* равно *c* (как длина перпендикуляра, проведённого из центра *A* на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние *a*. По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a .$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G\cos 30^\circ \cdot (a+b)$; $M_A(\vec{T}) = -T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

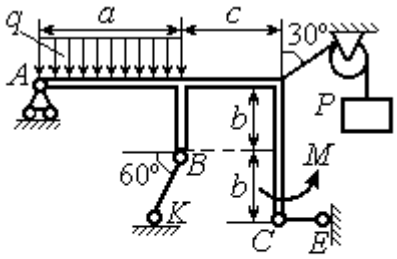
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a - T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b) +$$

$$+ G\cos 30^\circ \cdot (a+b) - Q\frac{a}{2} - M + M_A = 0. \qquad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A, откуда найдём значения реакций: X_A= 11,16 кН; Y_A= –21,31 кН; M_A = –70,73 Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ = 24,05 кН.

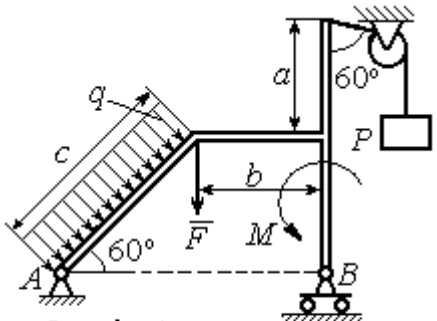
Упражнения

Упражнение 1.1



a = 3 м, b = 1 м, c = 2 м,
P = 15 кН, M = 3 кНм, q = 5 кН/м.
Найти реакцию стержней BK, CE
и реакцию шарнира A

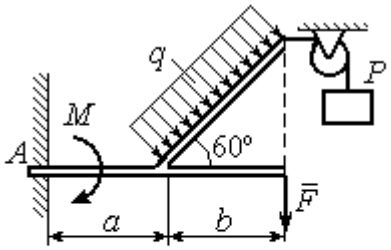
Упражнение 1.2



a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м,
M = 3 кНм, q = 3 кН/м,
P = 2 кН, F = 4 кН.
Найти реакцию шарниров A и B

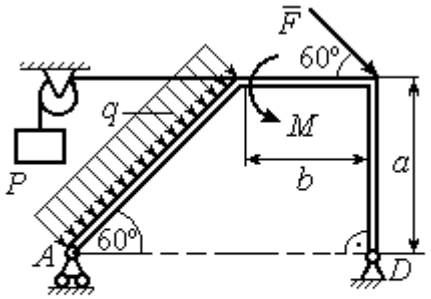
Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3



$a = 1$ м, $b = 2$ м, $F = 2$ кН,
$P = 3$кН, $M = 3$ кН·м,
$q = 2$ кН/м
Найти реакцию жесткой заделки

Упражнение 1.4



$a = 3$ м, $b = 1$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН,
$M = 3$ кН·м, $q = 2$ кН/м.
Найти реакцию шарниров A и D

Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. **При этом реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом Q = 100 кН опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB. На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30º к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом $G = 80$ кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60º к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B, а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P. Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P, удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

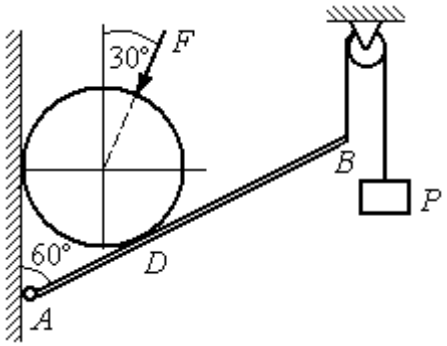


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

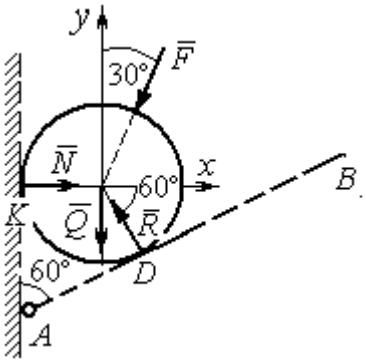


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

$$\sum F_{kx} = -F\cos 60^\circ - R\cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F\cos 30^\circ + R\cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A, (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P, и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

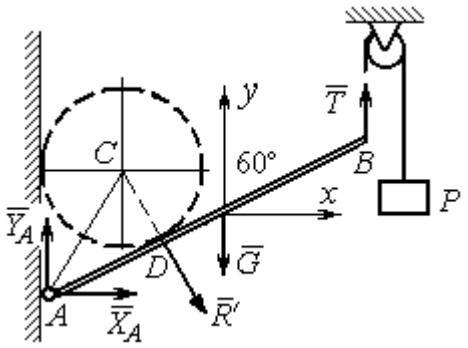


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку A центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R'\cos 60^\circ = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R'\cos 30^\circ - G + T = 0, \tag{1.9}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + T\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{1.10}$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки AB уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165{,}47$ кН; $N = 107{,}74$ кН; $P = 95{,}26$ кН; $X_A = -82{,}73$ кН; $Y_A = 128{,}03$ кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

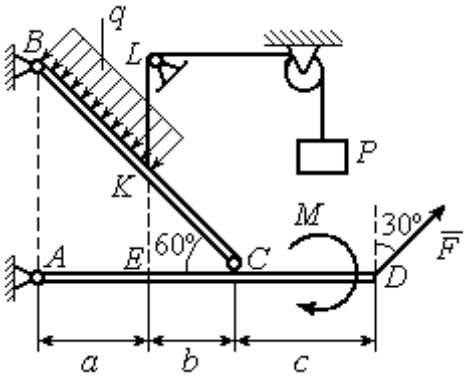


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки AD, прикрепленной к вертикальной стене в точке A, и откоса BC, соединённого с балкой AD в точке C под углом 60º и прикреплённого к вертикальной стене в точке B (рис. 1.33). Все соедине-

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке D под углом 30º к вертикали и равная по модулю F =10 кН, пара сил с моментом M = 8 кН·м и равномерно распределенная на отрезке BK нагрузка интенсивностью q = 3 кН/м. В точке K к балке BC прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом P = 5 кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров A, B и C, если a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м, а на отрезке KL нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки BC и балки AD. Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

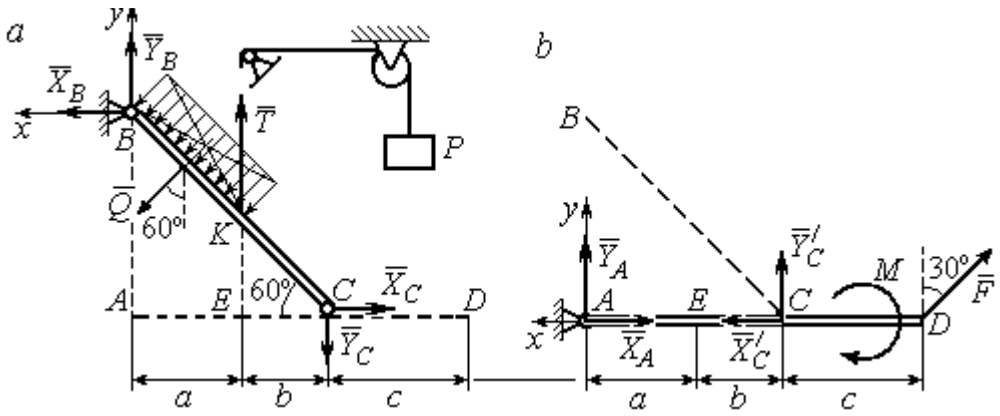


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кронштейна:
a - силы, действующие на балку *BC*; *b* - силы, действующие на балку *AD*

На рис. 1.34, *a* показаны реакции внешних и внутренних связей балки BC: реакция $\vec{R}_B$ шарнира B, реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T = P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира C. Реакции шарниров B и C представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка BK (см. рис. 1.34, *a*) и численно равной $Q = q \cdot BK = q \cdot \dfrac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил ($\vec{Q}$, $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}$), действующая на балку *BC*, является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.34, *a*, и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \tag{1.11}$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \tag{1.12}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \tag{1.13}$$

где $AB = (a+b)\mathrm{tg}60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки *AD* (рис. 1.34, *b*).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира *A* и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира *C*. Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, *b* реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат *xAy* как показано на рис. 1.34, *b*, и составим уравнения равновесия балки *AD*, вычисляя моменты сил относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \tag{1.14}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \tag{1.15}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \tag{1.16}$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

$$X_A = 5{,}99 \text{ кН}, \; Y_A = 5{,}99 \text{ кН}, \; X_C = 10{,}99 \text{ кН}, \; Y_C = -14{,}65 \text{ кН};$$

$$X_B = 0{,}6 \text{ кН}, \; Y_B = -13{,}65 \text{ кН},$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8{,}47 \text{ кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18{,}31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13{,}65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка AB с горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине LC балки AB, а в точке E опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил с моментом $M = 5$ кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если параметр a, определяющий размеры конструкции, равен $a = 2$ м.

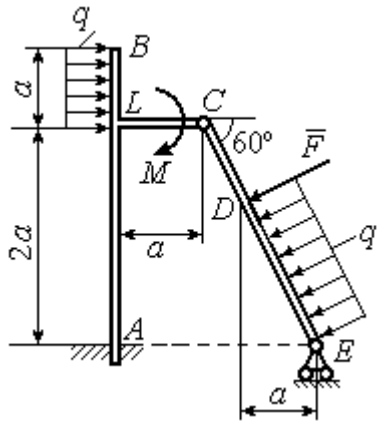


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

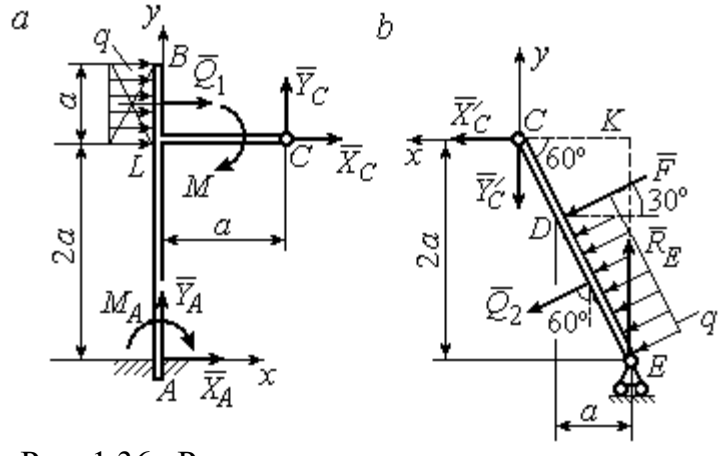


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку AB;
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

Разделим систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок ABC и EC отдельно.

Рассмотрим балку ABC (рис. 1.36, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, численно равной $Q_1 = qa = 4$ кН. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом M и реакции связей – жёсткой заделки в точке A и шарнира C.

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_{A}. Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a,* и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \tag{1.17}$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \tag{1.18}$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \dfrac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8\,\text{кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b,* и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \tag{1.19}$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a\,\text{tg}30^\circ = 0. \tag{1.21}$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

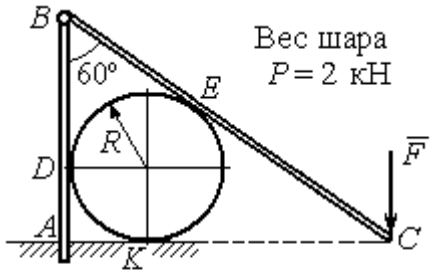
$$X_A = 11{,}59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2{,}76 \text{ кН}; \quad M_A = 42{,}87 \text{ кН·м};$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2{,}76 \text{ кН}; \quad R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91$ кН; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83$ кН.

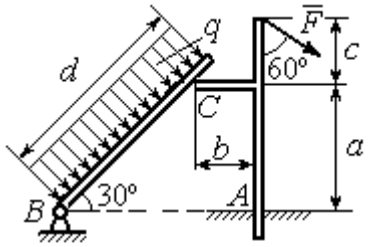
Упражнения

Упражнение 1.5



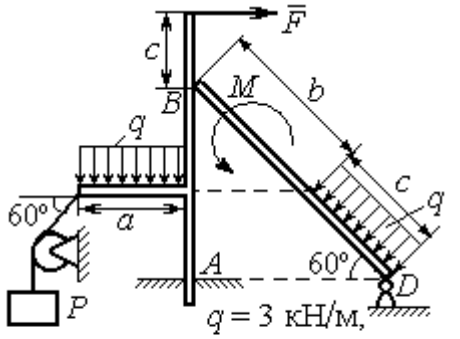
$R = 1$ м, $F = 8$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B, реакцию опоры шара в точках D, K, E

Упражнение 1.6



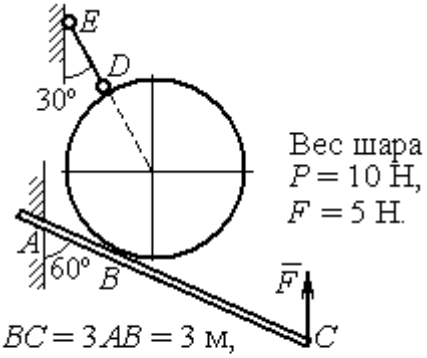
$a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $d = 5$ м,
$q = 3$ кН/м, $F = 4$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Упражнение 1.7



$q = 3$ кН/м,
$F = 4$ кН, $P = 3$ кН, $M = 2$ кН·м,
$a = 2$м, $b = 3$м, $c = 1$м
Найти реакцию заделки A, шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



$BC = 3AB = 3$ м,
Найти реакцию жесткой заделки A, реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси z:

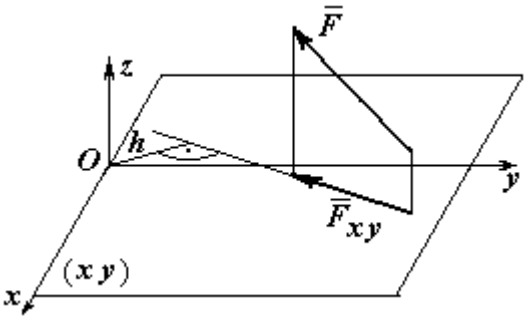


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy, перпендикулярной оси z; $\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость xy; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O. Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, ...$

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплен в подпятнике C и подшипнике K. Вал имеет шкив B радиуса R и шкив D радиуса r.

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*.

Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива *D* по касательной в точке *L* параллельно плоскости *zCx*, так что радиус шкива *D*, проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30º.

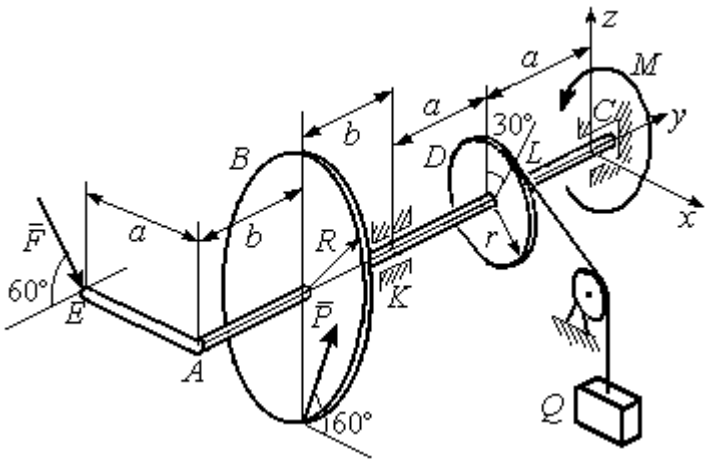


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива *B*, параллельна плоскости *zCx* и составляет угол 60° с направлением оси *Cx*. Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м.

Решение

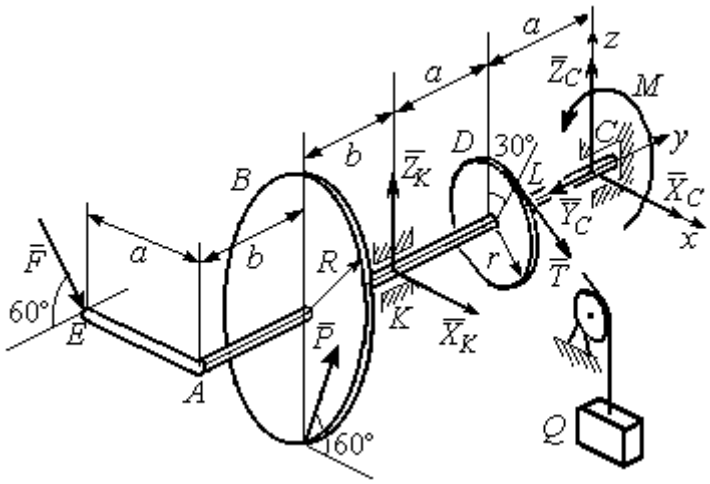


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника *C* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника *K* лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *L* и по модулю равна весу груза *Q*.

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

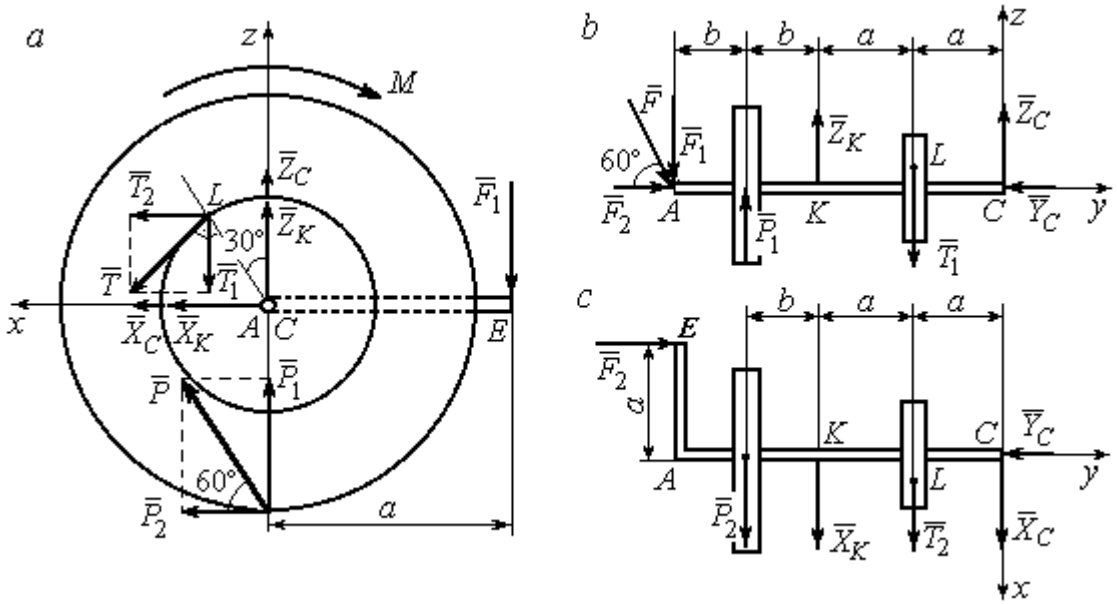


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*

На рис. 1.41, *a* показаны проекции вала и всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций сил относительно точки *C*, получим значения моментов этих сил относительно оси *y*. При вычислении моментов сил относительно оси *x* достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (рис. 1.41, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси *z* (рис. 1.41, *c*).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P\cos 30^\circ$;

$P_2 = P\cos 60^\circ$; $T_1 = T\cos 60^\circ$; $T_2 = T\cos 30^\circ$; $F_1 = F\cos 30^\circ$; $F_2 = F\cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P\cos 60^\circ + X_K + T\cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F\cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P\cos 30^\circ + Z_K - T\cos 60^\circ + Z_C - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T\cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P\cos 30^\circ \cdot (2a + b) +$$

$$+ F\cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F\cos 30^\circ \cdot a - P\cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T\cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P\cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F\cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8{,}09 \text{ кН}, \; Y_C = 1 \text{ кН}, \; Z_C = 4{,}65 \text{ кН}, \; Z_K = 2{,}92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10{,}02 \text{ кН}, \; T = 18{,}6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9{,}4 \text{ кН}, \; R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10{,}44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза *Q* равен реакции нити *T*.

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира *A*, подшипника *B* и удерживается в вертикальном положении стержнем *CO*, лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10$ кН, приложенная на верхней стороне плиты в точке *H* под углом 30º к линии *EC*, и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5$ кН, приложенная в точке *D* параллельно стороне *AB*.

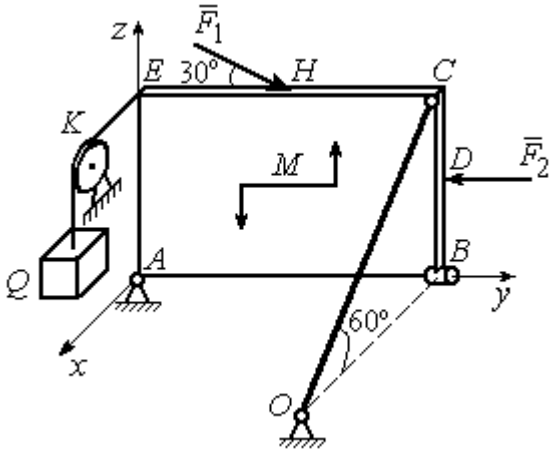


Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K, подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира A, подшипника B и реакцию стержня CO, если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир A, нить, натянутая грузом Q, подшипник B и невесомый стержень CO.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси Ax и равна весу груза $T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси Ay, и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня CO направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

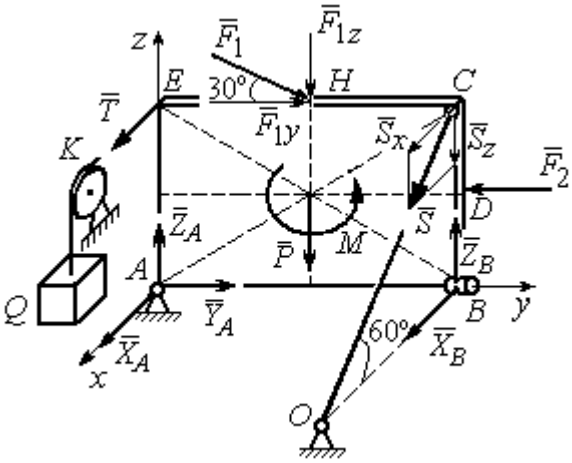


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1\cos 60^\circ - P + Z_B - S\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -F_1\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - F_1\cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0{,}5 \cdot AB +$$

$$+ F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S\cos 30^\circ \cdot AB + M = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S\cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S\cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17{,}53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12{,}89$ кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга *ACEB* весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках *A* и *B* цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60º (рис. 1.44). На фрамуге в точке *H* закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок *K*, несёт груз *Q*. При этом линия верёвки *HK* параллельна прямой *ED*. На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке *C* перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

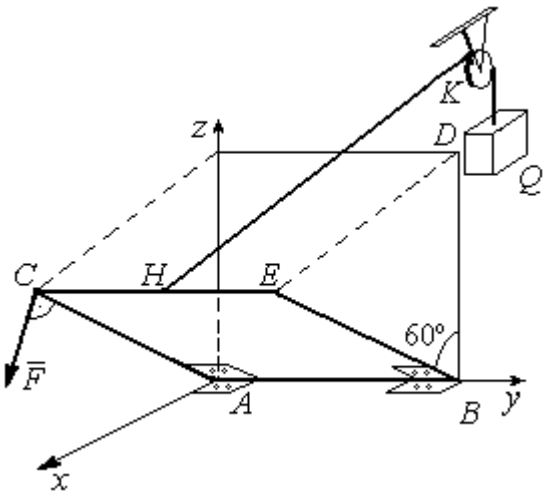


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза *Q*, необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров *A* и *B*, если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги *ABCE*. Изображаем внешние активные силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира *A* и *B* (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом *Q*. Выберем систему координат *Axyz*, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров *A* и *B* раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось *Ay*), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

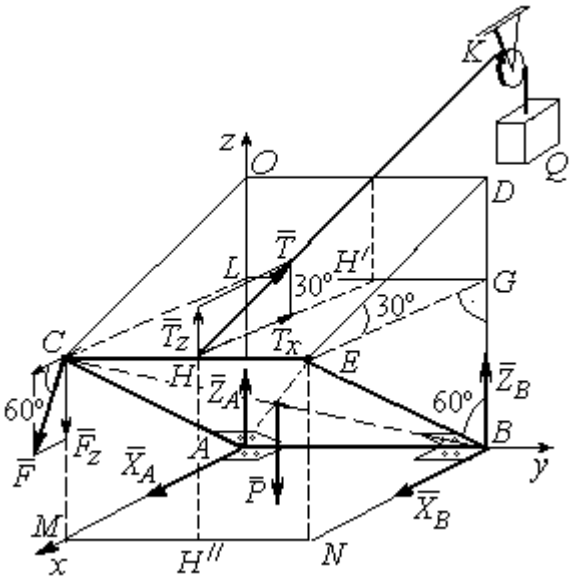


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси *Ax* определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость *zAy* относительно точки *A* – пересечения оси *Ax* и перпендикулярной ей плоскости *zAy* (см. рис. 1.46, *a*). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси *Az* достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость *xAy* относительно точки *A* (см. рис. 1.46, *b*).

Значения моментов сил относительно оси Ay получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость zAx относительно точки A (см. рис. 1.46, *c*).

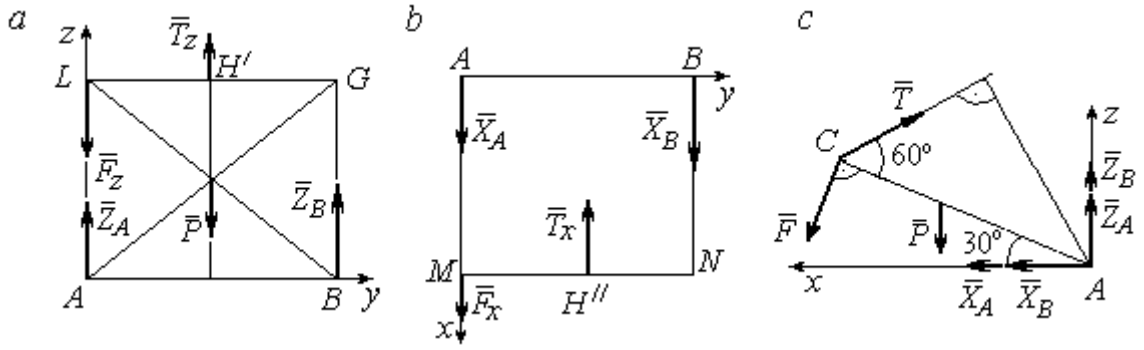


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:
a – проекция на плоскость *zAy* со стороны положительного направления оси *x*;
b – проекция на плоскость *xAy* со стороны положительного направления оси *z*; *c* – проекция на плоскость *zAx* со стороны положительного направления оси *y*

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T_z \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB =$$

$$= T\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0{,}5 \cdot AC\cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC\sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0{,}5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T\cos 30^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18{,}22 \text{ Н},\ Z_B = 14{,}41 \text{ Н},\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23{,}31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10{,}83 \text{ Н},\ Z_A = 27{,}41 \text{ Н},\ R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29{,}47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42{,}37$ Н.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал *AD* (рис. 1.47) закреплен в подпятнике *A* и подшипнике *C*. Вал имеет шкив радиуса r и рукоять *DH*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *DH* образует угол 30º к направлению оси *Ax*. Колено вала расположено в горизонтальной плоскости *xAy*. Нить, удерживающая груз *Q*, намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ приложена в верхней точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси *Ay* и находится в плоскости *zAy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке *H* рукояти параллельно оси *Az*. Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке *K* стойки колена вала под углом 60º к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом *M* создаёт вращение вала вокруг оси *Ay*.

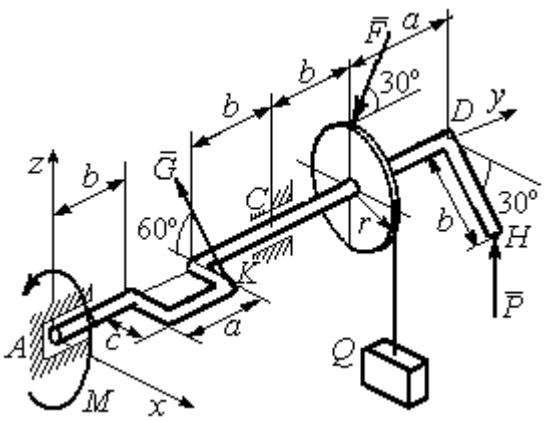


Рис. 1.47. Равновесие вала

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН; $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м; $c = 0{,}2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *A* и подшипник *C*.

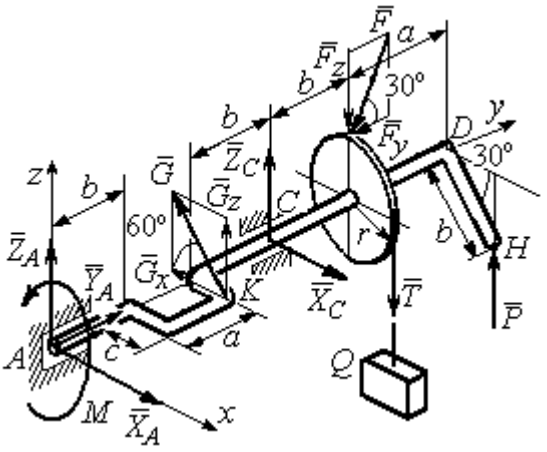


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей Ax, Az. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G\cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G\cos 30^\circ + Z_C - F\cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r -$$

$$- T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb\cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G\cos 30^\circ$; $G_x = G\cos 60^\circ$; $F_z = F\cos 60^\circ$; $F_y = F\cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

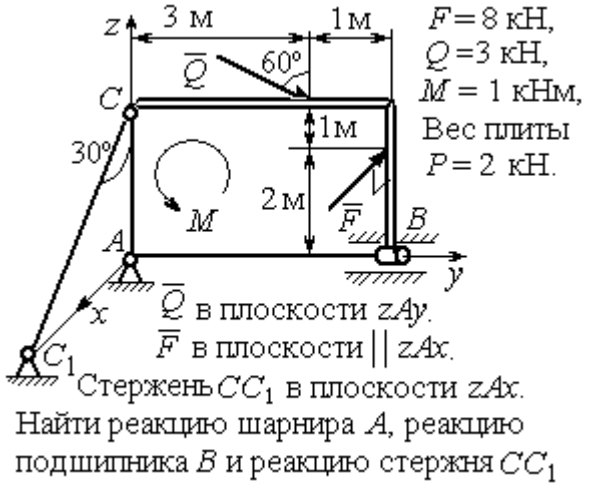
$$X_C = 2{,}25 \text{ кН}; \; Z_C = 13{,}57 \text{ кН}; \; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15{,}58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0{,}39 \text{ кН}; \; Y_A = 10{,}39 \text{ кН}; \; X_A = 0{,}75 \text{ кН}; \; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10{,}42 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25{,}03$ кН.

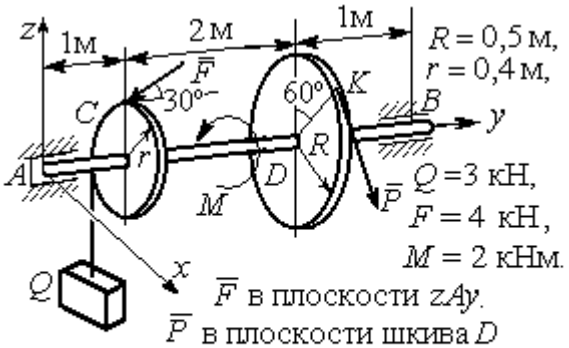
Упражнения

Упражнение 1.9



Найти реакцию шарнира A, реакцию подшипника B и реакцию стержня CC_1

Упражнение 1.10



Найти реакцию подпятника A, подшипника B и уравновешивающую силу P

Упражнение 1.11



Упражнение 1.12

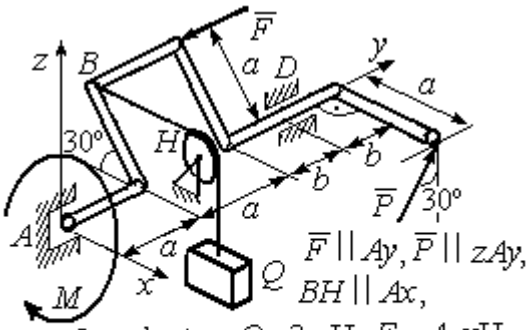


Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

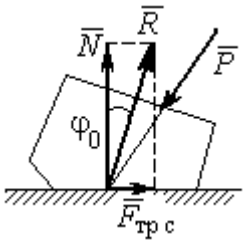


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**. Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$ смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

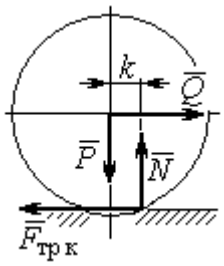


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$. Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q, а к другому, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом P. Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30º к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P, при которых груз Q может начать скольжение по плоскости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0{,}4$.

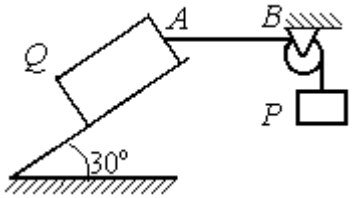


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P. На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\min}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, *а*). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравновешивающего груза P имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз Q начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза P, направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *a*).

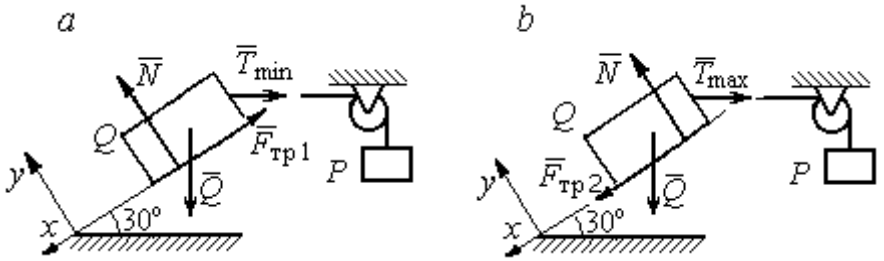


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
a – минимальный вес уравновешивающего груза;
b – максимальный вес уравновешивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\min}\cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\min}\cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7{,}21$ Н. Минимальное значение веса уравновешивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7{,}21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза Q при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза P. На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, *b*).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза P больше максимального вызывает движение груза Q вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *b*). Уравнения равновесия груза Q:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\max}\cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\max}\cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза P: $P_{\max} = T_{\max} = 63{,}54$ Н.

Таким образом, груз Q будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравновешивающего груза находится в пределах $8{,}87 < P < 48{,}87$ Н.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса r = 0,5 м, весом P = 50 Н удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец которой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом Q (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_{\text{к}}$ = 0,02 м. Наклонная плоскость составляет угол 30º с горизонтом.

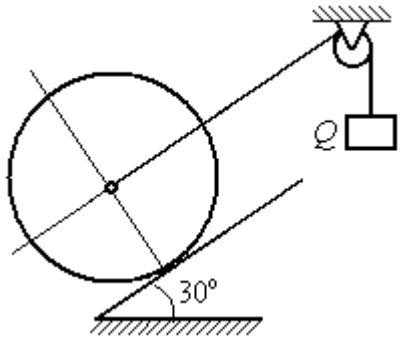


Рис. 1.54. Равновесие катка

Определить наименьшую и наибольшую величину веса Q, при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения $f_{\text{с}}$, при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза Q. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

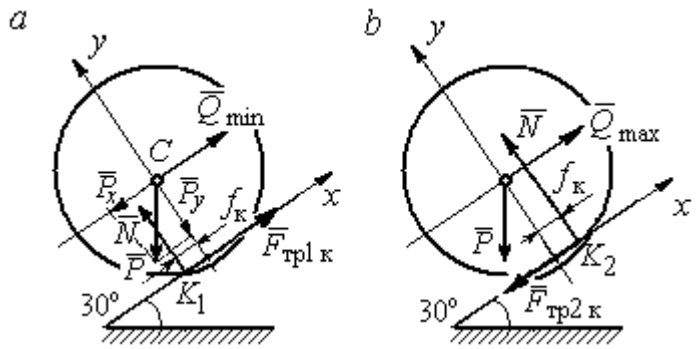


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:
a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1, слева от нормального к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P\cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P\cos 30^\circ \cdot f_к = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7{,}68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43{,}3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17{,}32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр2 к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр2 к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P\cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42{,}32$ Н; $N = 43{,}3$ Н; $F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7{,}68 \le Q \le 42{,}32$ Н.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр с}}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр с}} > F_{\text{тр к}}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр с}} = f_{\text{с}} N = 43{,}3 f_{\text{с}}$, где $f_{\text{с}}$ – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр к}} = F_{\text{тр1 к}} = F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43{,}3 f > 17{,}32$, откуда $f > 0{,}4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0{,}5$ м и $r = 0{,}2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединённого цепью CD с концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0{,}4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n, удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m, составляет 30º.

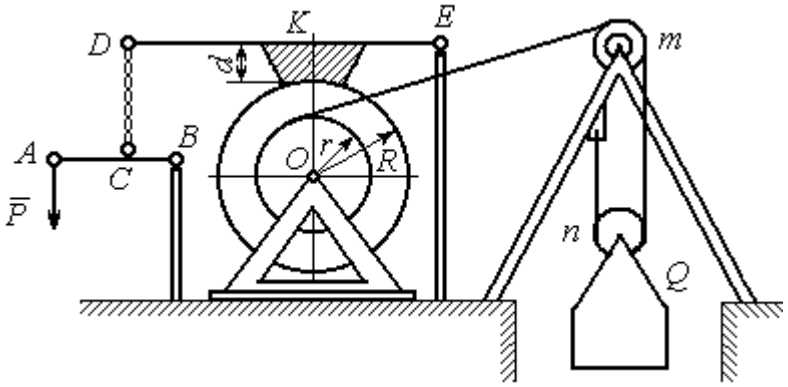


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

Определить величину силы $\vec{P}$, уравновешивающей груз Q, и реакции шарниров O и E, если вес ворота G = 140 Н, высота тормозной колодки $d = 0{,}1$ м, расстояния AB = 1 м, BC = 0,1 м; $ED = 1{,}2$ м; $EK = 0{,}6$ м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, *а*). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n.

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \qquad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{бл}$ – радиус блока *n*. Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0{,}5Q = 500$ Н.

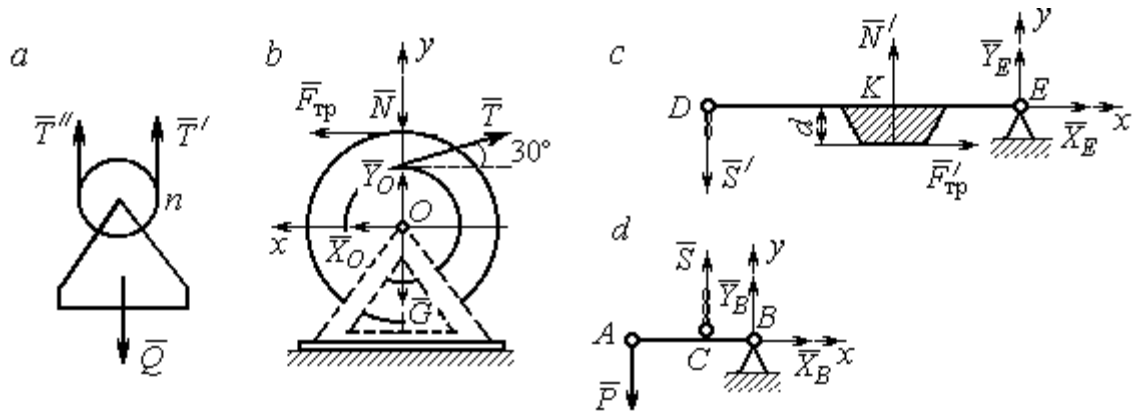


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
a – равновесие груза; *b* – силы, действующие на барабан; *c* – силы, действующие на тормозной рычаг *DE*; *d* – силы, действующие на рычаг *AB*

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира *O*, представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, *b*).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{G}$, $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{тр}$) ~ 0. Составим уравнение моментов относительно точки *O*:

$$-Tr + F_{тр}R = 0,$$ откуда с учётом $T = T'$ $F_{тр} = 200$ Н.

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{тр} = fN$, тогда $N = \dfrac{F_{тр}}{f} = 500$ Н.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, *b*:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{тр} - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T\cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира *O*:

$$X_O = 233 \text{ Н};\ Y_O = 390 \text{ Н};\ R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454{,}3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага *DE* (см. рис. 1.57, *c*).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке *D* на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира *E*, разложенная на составляющие $\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$ вдоль осей *x*, *y*. Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \qquad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200$ Н, $N' = N = 500$ Н, определим усилие S', с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира *E*:

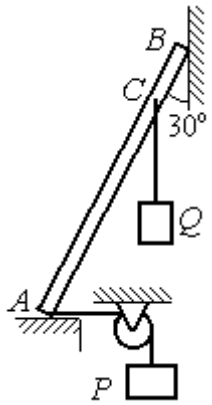
$$S' = 233{,}33 \text{ Н};\ X_E = -200 \text{ Н};\ Y_E = -266{,}67 \text{ Н};\ R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333{,}34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравновешивания груза *Q*, найдём рассматривая равновесие рычага *AB* (см. рис. 1.57, *d*) . На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира *B*, показанная на рис. 1.57, *d* составляющими $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки *B*: $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдем $P = 23{,}3$ Н.

Упражнения

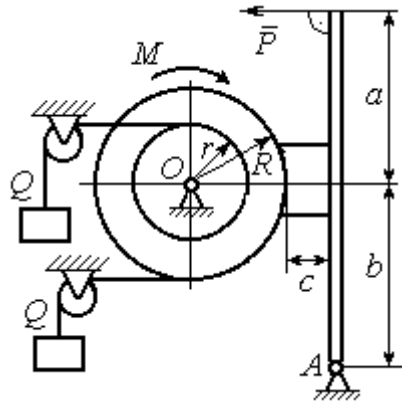
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0{,}2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30°. В точке C к стержню подвешен груз Q. Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P. В каких границах можно изменять вес груза P, не нарушая равновесия стержня?

$AB = 3$ м, $AC = 2$ м, $Q = 200$ Н.

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r. На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q. К шкиву приложена пара сил с моментом M. Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0{,}4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравновешивающую шкив. Найти реакцию шарнира A.

$a = b = 1$ м; $c = 0{,}1$ м; $Q = 100$ Н; $M = 120$ Н·м;
$R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}2$ м.

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

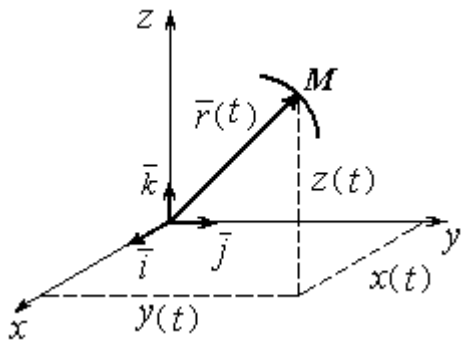


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x, V_y, V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки**,** или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x, a_y, a_z проекций вектора ускорения на координ-

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$; $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

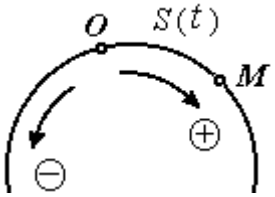


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось *n*):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

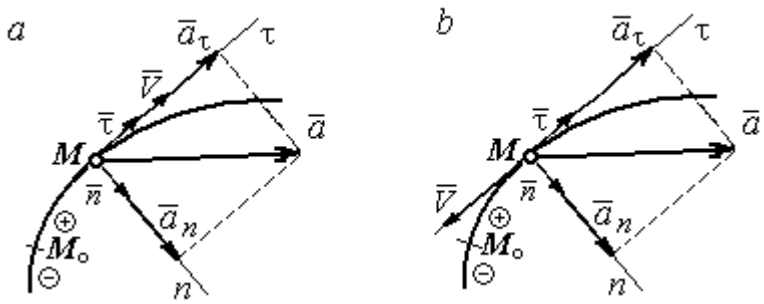


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau,\ a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \dfrac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где *x*, *y* – в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени t_1 = 0,25 с, t_2 = 0,75 с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

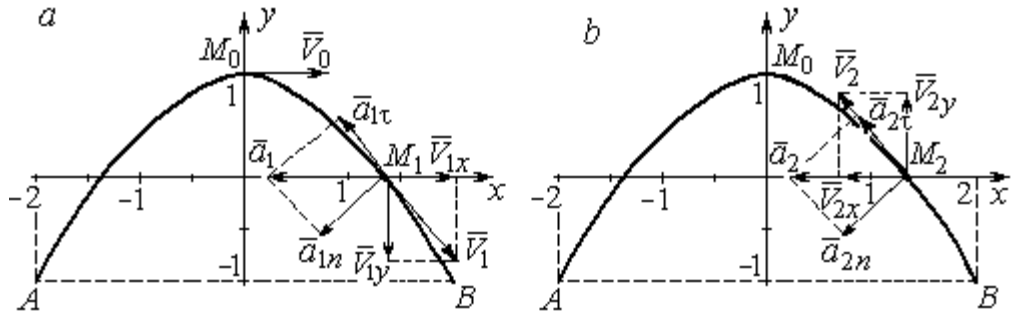


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к *B*;
b – ускоренное движение точки на участке от *B* к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени t_1 = 0,25 с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1:

$$x_1 = x(0{,}25) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0{,}25) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi\cos\pi t; \; V_y(t) = \dot{y} = -2\pi\sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0{,}25) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0{,}25) = -2\pi\sin\frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x}, a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin\pi t;\ a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0{,}25) = -2\pi^2 \sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\ a_{1y} = a_y(0{,}25) = -4\pi^2 \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2\sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0{,}25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, *а*.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, *а*). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0{,}75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1:

$$x_2 = x(0{,}75) = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см};\ y_2 = y(0{,}75) = \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0{,}75) = 2\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с};\ V_{2y} = V_y(0{,}75) = -2\pi\sin 2\pi\frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0{,}75) = -2\pi^2 \sin\frac{3\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\ a_{2y} = a_y(0{,}75) = -4\pi^2 \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0{,}75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени t_2 = 0,75 с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 (t_0 = 0) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения *B* на траектории (t_B = 0,5 с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 (t_{M_0} = 1 с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса *R* = 1 км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0, где поезд выходит на закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты *S*. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

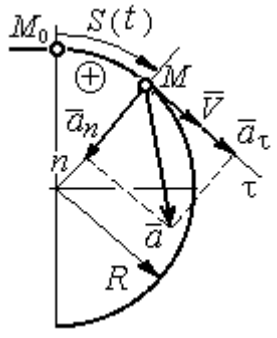


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: a_τ = const. Так как $a_\tau = \dfrac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 =$ = 54 км/ч = 15 м/с. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: C_1 = 15 м/с; C_2 = 0.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t .$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь S = 500 м. Подставляя это условие во второе уравнение, получим a_τ = 7 м/с^2. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения V_τ = 85 м/с. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса R = 1000 м в момент времени t = 10 с равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R}$ = 7,23 м/с^2. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ = 10,06 м/с^2. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса R = 80 м. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной V_0 = 18 км/ч до конечной V_1 = 9 км/ч.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь S = 60 м.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_\tau = 5 + a_\tau t\,; \quad S = 5t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2{,}5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м. Получим систему:

$$-2{,}5 = a_\tau t_1\,; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_\tau t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_\tau = -0{,}16$ м/с^2.

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0{,}31$ м/с^2.

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_\tau^2} = 0{,}35$ м/с^2. В конце движения нормальное ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}08$ м/с^2. Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_\tau^2} = 0{,}18$ м/с^2.

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой прямолинейный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ, при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: ω_z = const. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: ε_z = const. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела **(**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

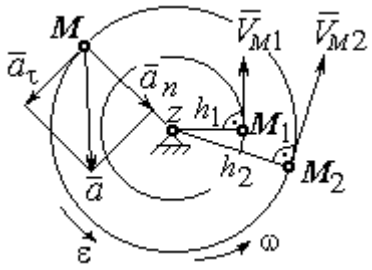


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от этих точек до оси вращения: $\dfrac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \dfrac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

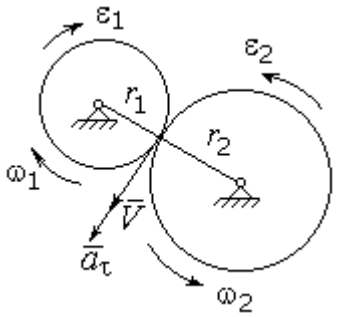


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси *z* происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2$ мин = 120 с; $\varphi_1 = 3600$ об $= 7200\pi$ рад. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

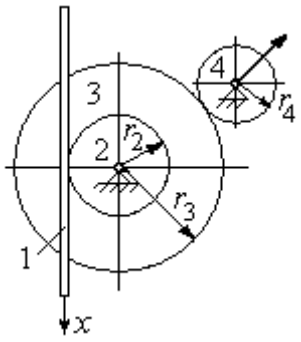


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси x (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось x $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2: $\omega_{2z} = \dfrac{V_{1x}}{r_2} = \dfrac{4\pi\cos\pi t}{6} = \dfrac{2\pi}{3}\cos\pi t$ рад/с. Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одного тела другому: $\dfrac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \dfrac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \dfrac{V_{1x} r_3}{r_2 r_4} = \dfrac{5\pi}{3}\cos\pi t$ с$^{-1}$. Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

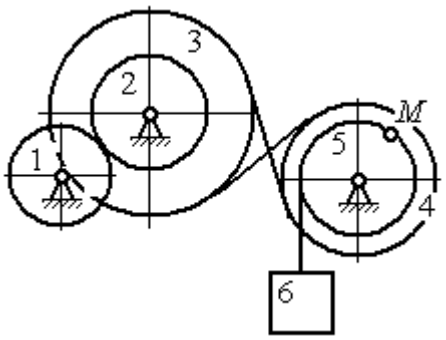


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1.

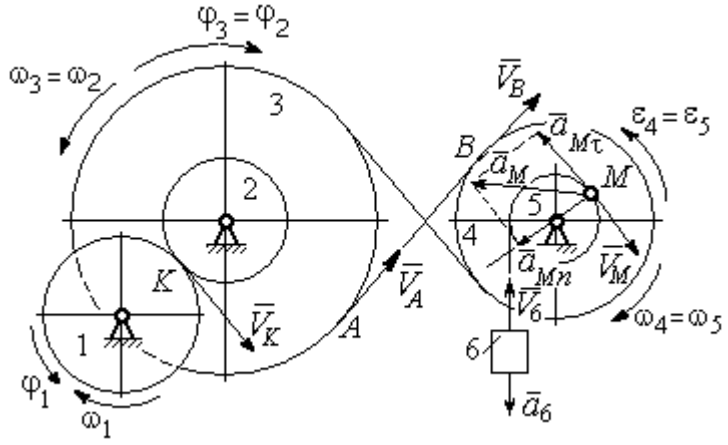


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1. Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1.

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта *K*. Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2=\frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3=\omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2.

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки *A*, где ремень сходит со шкива 3, и до точки *B*, где ремень набегает на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек *A* и *B* равны: $V_A=V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3=\omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3=\omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4=\frac{\omega_3 r_3}{r_4}=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5=\omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4.

Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M=\omega_5 r_5$. В момент времени $t_1=1$ с $\omega_5=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}=5$ рад/с и $V_M=20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке *M* и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки *M*: $V_6=V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1=1$с груз поднимается со скоростью $V_6=20$ см/с.

Определим ускорение точки *M*. Вектор ускорения точки *M* равен сумме векторов: $\vec{a}_M=\vec{a}_M^{\tau}+\vec{a}_M^{n}$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5: $\omega_{5z} = \dfrac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25$ рад/с. Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20$ рад/с^2. Так как в момент времени $t_1 = 1$ с знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5$ рад/с $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$ $\varepsilon_{5z} = +20$ рад/с^2), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5.

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_5 = 5$ рад/с и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^{\,n} = 100$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^{\,n}$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128{,}06$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^{\,n}$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos\pi t + \sin\pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси *x*. Положительное направление движения задаётся направлением оси *x* (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi\sin\pi t + \pi\cos\pi t$.

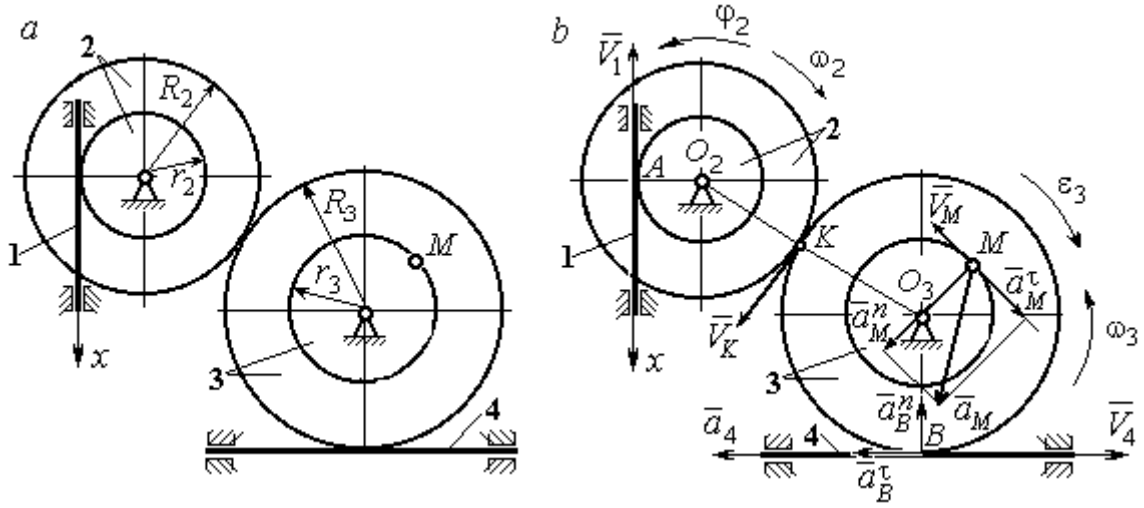


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей
и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_2.

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке *K*. Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_3.

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки *M* в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки *B* касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки *M*. Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}; \varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис 2.11, *b* направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3.

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^{\tau} = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^{\tau} = 2\pi^2$ см/с^2. Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^{\tau}$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, *b*).

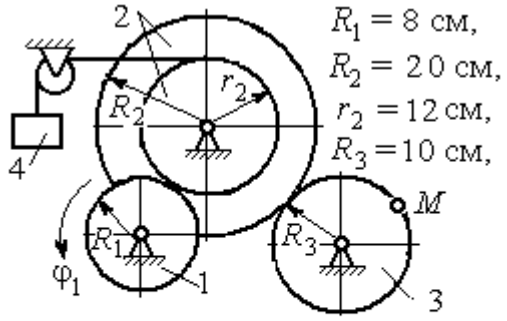
Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M: $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^{\tau})^2} = \pi^2\sqrt{5}$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^{\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с^2. Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B.

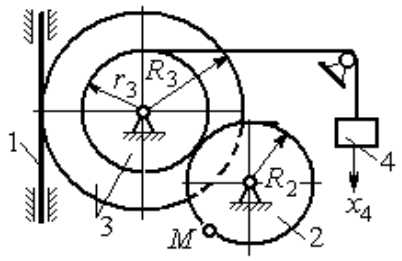
Упражнения

Упражнение 2.1



$\varphi_1 = 3t + 2\sin\frac{\pi t}{2}$ рад,
Найти скорость и ускорение точки M и груза 4 в момент $t = 1$ с

Упражнение 2.2



$R_2 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $r_3 = 0{,}3$ м,
$x_4 = t - 1 - \sin\frac{\pi t}{3} + \cos\frac{\pi t}{3}$ м.
Найти скорость и ускорение точки M и звена 1 в момент $t = t_1 = 3$ с.

Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

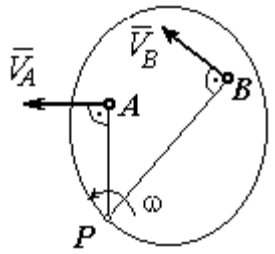
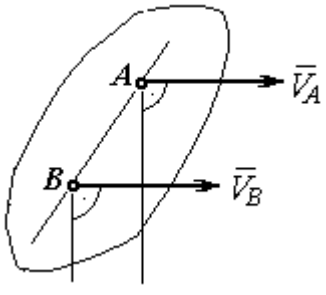
Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

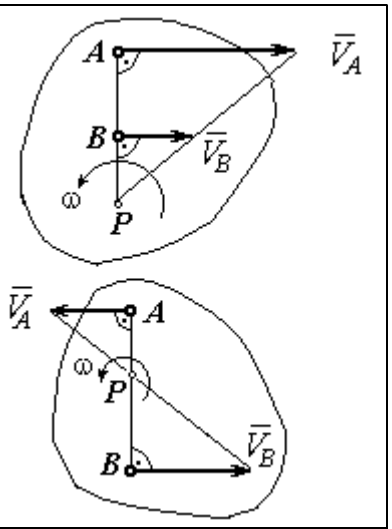
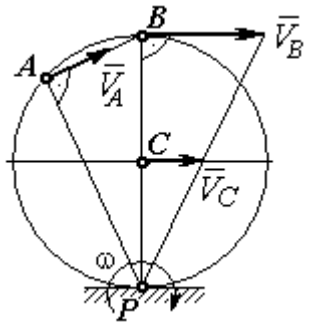
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A\cos\alpha = V_M\cos\beta$, где α, β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа. Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC, коромысла AB и штока AD, если O_1C = 20 см, $OB = 2 \cdot OA$ = 40 см, AD = 60 см.

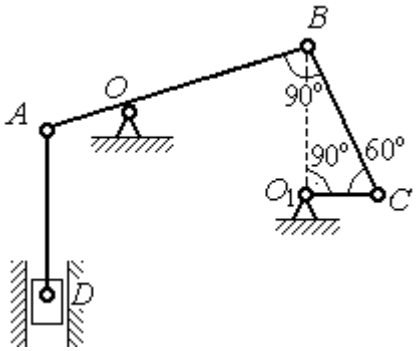


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C, в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O, параллельно оси вращения кривошипа. Скорость точки B направлена перпендикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

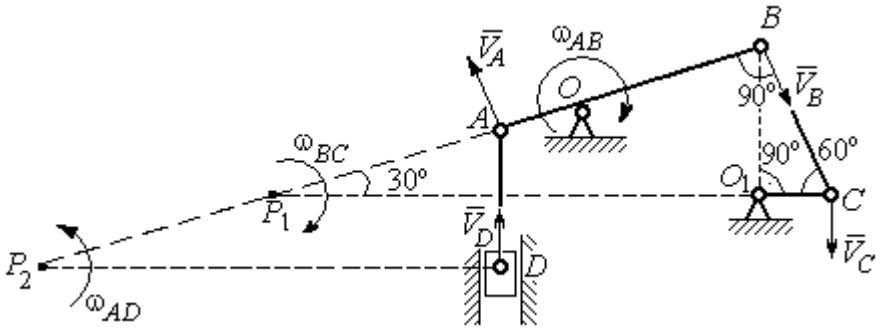


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_1} = 0{,}5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC. Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB}.

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B: $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD. Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD}.

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA, вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплён шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

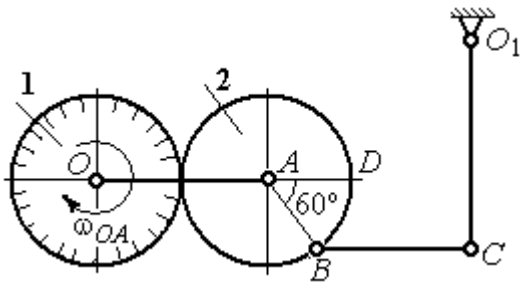


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC, коромысла CO_1, а также скорости точек A, B, C, D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2.

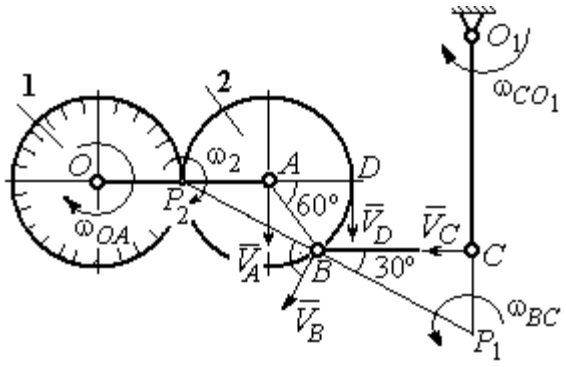


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D: $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1. Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1, которая будет мгновенным центром скоростей шатуна BC. Расстояние $P_1B = \dfrac{BC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = \dfrac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость точки C: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \dfrac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC.

Угловая скорость коромысла CO_1: $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = \dfrac{9}{4\sqrt{3}}$ рад/с.

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип OA длиной OA = 25 см вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью ω_{OA} = 3,6 рад/с. На конец A кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса r_1 = 45 см, соосным с кривошипом OA и вращающимся с угловой скоростью ω_1 = 1 рад/с. Шатун BC, шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке B, приводит в движение кривошип CO_1. Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1, скорости точек A, B, C в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна BC = 100 см, длина кривошипа CO_1 = 50 см.

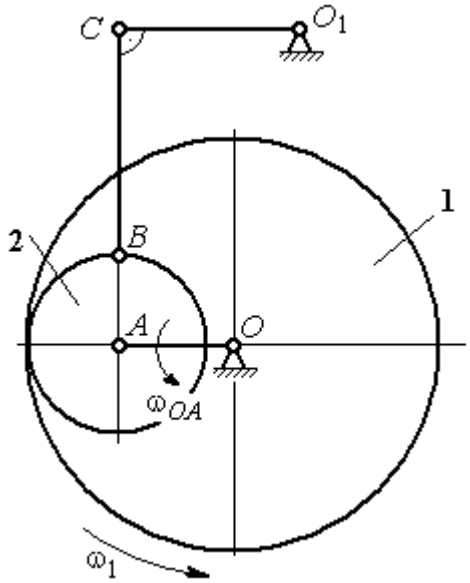


Рис. 2.17. Планетарный механизм

Решение

Найдём скорости точек A и D

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу OD колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки A и D, и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек A и D Расстояние P_2D от центра скоростей до точки D находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда P_2D = 20 см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \dfrac{V_D}{P_2 D} = 2{,}25$ рад/с. Направление угловой скорости ω_2 показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой ω_2.

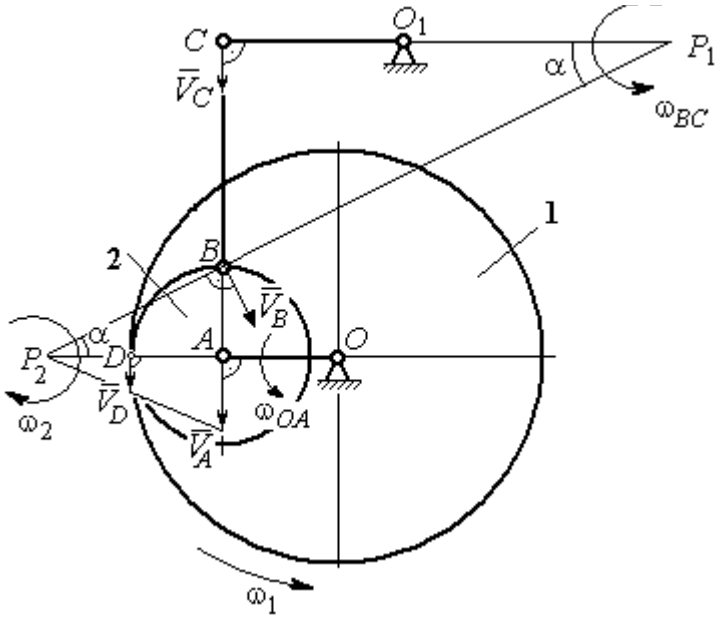


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Скорость точки *B,* которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу CO_1 и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка P_1 пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна *BC.* Расстояние P_1B найдём из треугольника P_1BC: $P_1B = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha = \dfrac{AB}{P_2B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда $P_1B = 100\sqrt{5}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = 0{,}45$ рад/с. Скорость точки *C* шатуна *BC* найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек *C* и *B* на линию, проходящую через эти точки Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos\alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа CO_1 $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = 1{,}8$ рад/с.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA}. На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2. Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC, закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C. Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A, B, C и угловые скорости шатуна BC, шестерни 2 и колеса 3, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с; $r_1 = 4$ см; $r_2 = r_3 = 8$ см.

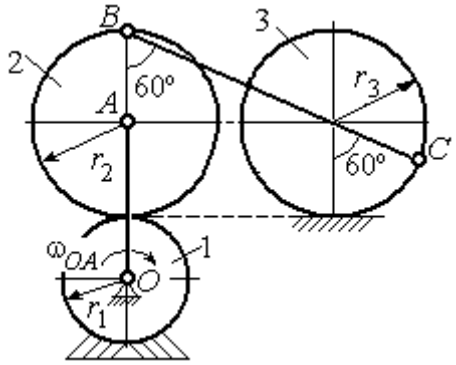


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 6$ рад/с.

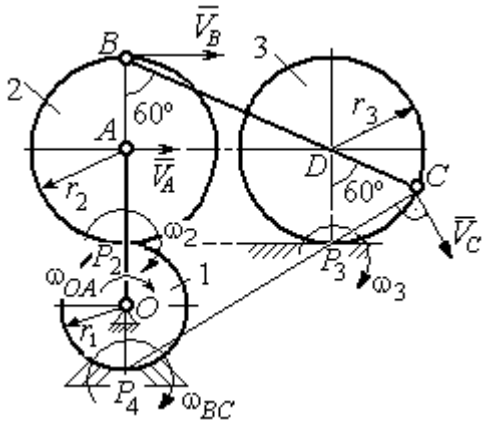


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 96$ см/с.

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C. По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC, вращаясь вокруг неподвижной оси O, приводит в движение два шатуна CD и CE, присоединённых к кривошипу в точке C. Шатун CE прикреплён в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплён ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

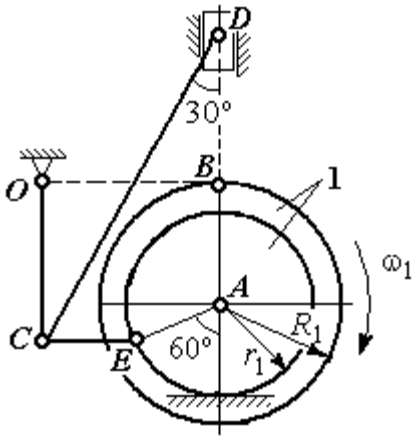


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A, E, C, D и угловые скорости диска 1, шатунов CE, CD и кривошипа CO, если известна скорость точки B на ободе диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки *B* диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

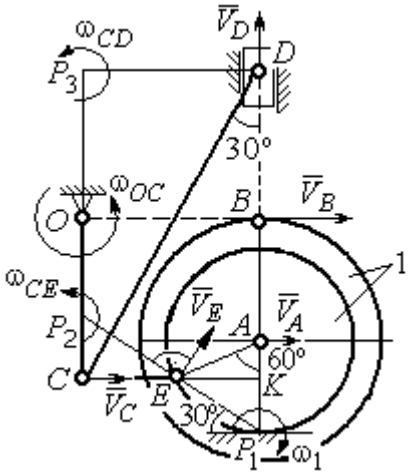


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{BP_1} = 2$ рад/с. Скорость точки *A* $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4$ см/с. Скорость точки *E* $V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны, соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун *CE* совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки *C* шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу *OC* и направлен вдоль *CE* в сторону точки *E*. Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна *CE* находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

Расстояние $EP_2 = \dfrac{EC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см. Угловая скорость шатуна *CE* $\omega_{CE} = \dfrac{V_E}{EP_2} = 0{,}86$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки *E*, на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой ω_{CE}. Скорость точки *C* шатуна *CE* $V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \dfrac{V_E}{2} = 2$ см/с.

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \dfrac{V_C}{OC} = 0{,}5$ рад/с.

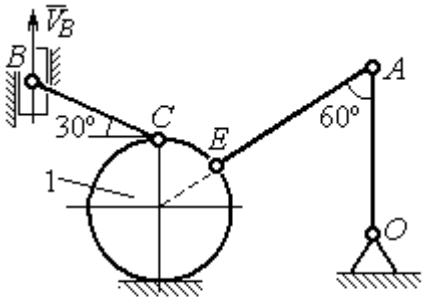
Для шатуна CD известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки D. Мгновенный центр скоростей шатуна CD находится в точке P_3, полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ)\operatorname{ctg} 30^\circ = 9{,}92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна CD: $\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}21$ рад/с.

Скорость ползуна D: $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD}(CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1{,}2$ см/с.

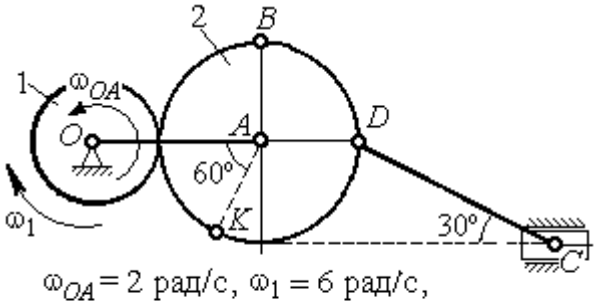
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
$BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
Найти: $\omega_{OA}, \omega_{AE}, \omega_{CB}, \omega_1, V_C, V_A, V_E$

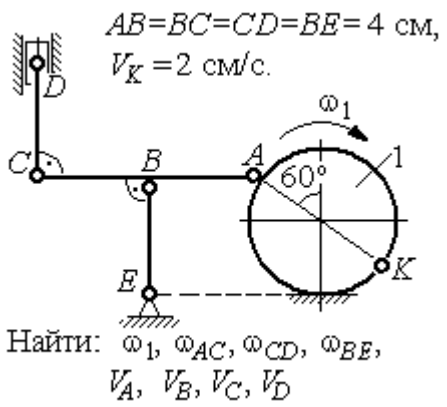
Упражнение 2.4



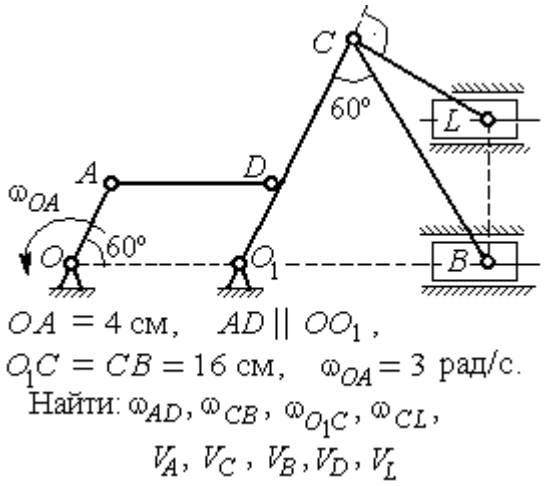
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
$r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
Найти: $\omega_2, \omega_{DC}, V_B, V_K, V_D, V_C$

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

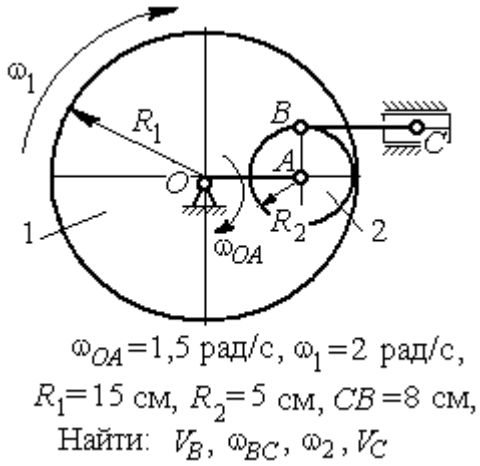
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

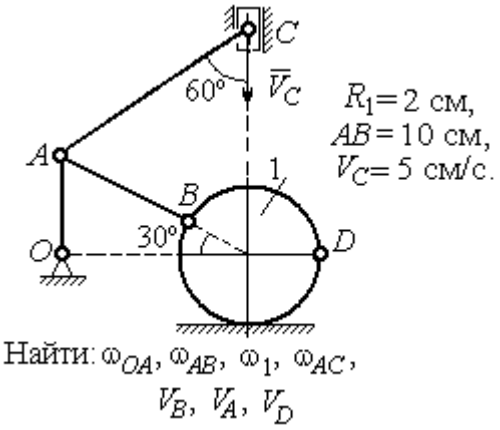


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A* (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, *a*), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, *b*). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки *M* определяются по формулам: $a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM$; $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки *M* до полюса *A*.

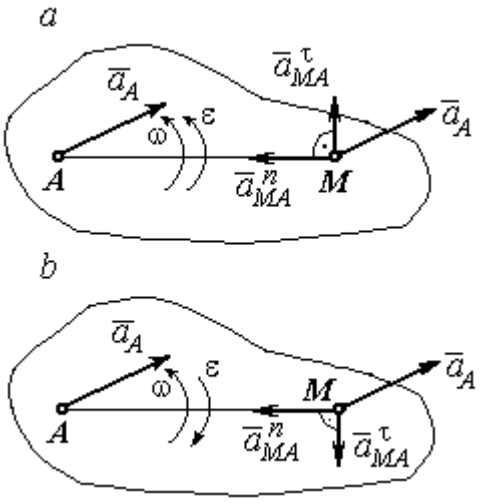


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса *A* и точки *M*, то для определения ускорения точки *M* используется векторное равенство $\vec{a}^{\,\tau}_M + \vec{a}^{\,n}_M = \vec{a}^{\,\tau}_A + \vec{a}^{\,n}_A + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA}$, где $\vec{a}^{\,\tau}_M$, $\vec{a}^{\,n}_M$, $\vec{a}^{\,\tau}_A$, $\vec{a}^{\,n}_A$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* и полюса *A* при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень *D* гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом *OABD*. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка *L* рычага имеет скорость $V_L = 0{,}6$ м/с и ускорение $a_L = 0{,}5$ м/с^2. Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0{,}6$ м, длина звена $AB = 0{,}4$ м. Определить скорость и ускорение поршня *D*, угловую скорость и ускорение звена *AB*.

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL: $\omega_{OL} = \dfrac{V_L}{OL} = \dfrac{2}{3}$ рад/с.

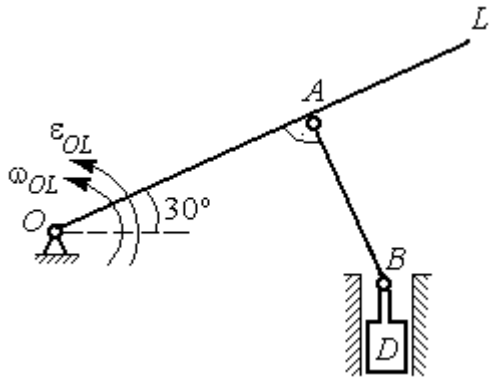


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^{\,\tau} + \vec{a}_L^{\,n}$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0{,}4$ м/с^2. Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^{\tau} = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0{,}3 \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_{OL} = \frac{a_L^{\tau}}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0{,}4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ - определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB. Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0{,}4\sqrt{3}$ м.

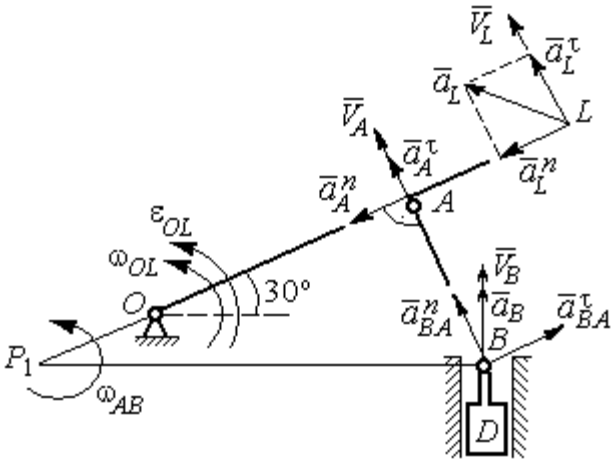


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{P_1A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A. Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O, ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A}$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a^{n}_{A} = \omega^{2}_{OL} \cdot OA = 0{,}27 \text{ см/с}^2;\ a^{n}_{BA} = \omega^{2}_{AB} \cdot AB = 0{,}13 \text{ см/с}^2;$$

$$a^{\tau}_{A} = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x, y, где ось x проходит вдоль линии звена AB, ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

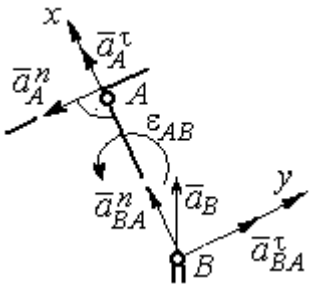


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a^{\tau}_{A} + a^{n}_{BA};\ \ a_B \cdot \cos 60^\circ = -a^{n}_{A} + a^{\tau}_{BA}.$$

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B: $a_B = 0{,}38$ см/с^2 и величину касательного ускорения: $a^{\tau}_{BA} = 0{,}46$ см/с^2. Угловое ускорение стержня AB $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 1{,}15$ рад/с^2. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B: $a_D = a_B = 0{,}38$ см/с^2.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0{,}6$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

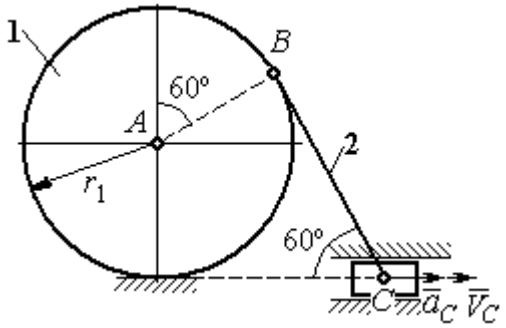


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C: $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с^2.

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B. Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

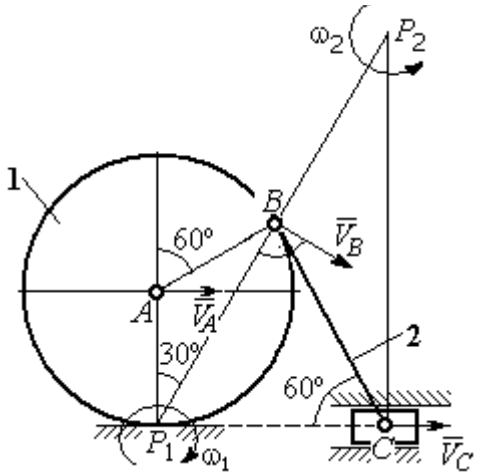


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов: $P_1B = r_1\sqrt{3} = 1{,}04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C: $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1{,}8$ м.

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{P_2C}$ = 5рад/с. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки *B* найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B$ = 5,2 м/с.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{P_1B}$ = 5 рад/с. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A$ = 3 м/с.

Найдём ускорение точки *A*.

Примем точку *B* за полюс и выразим ускорение точки *A* через полюс *B*: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса *B*; $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$, $\vec{a}^{\,n}_{AB}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *A* при вращении диска 1 вокруг полюса *B* (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$ точки *A* выбраны в предположении ускоренного движения диска.

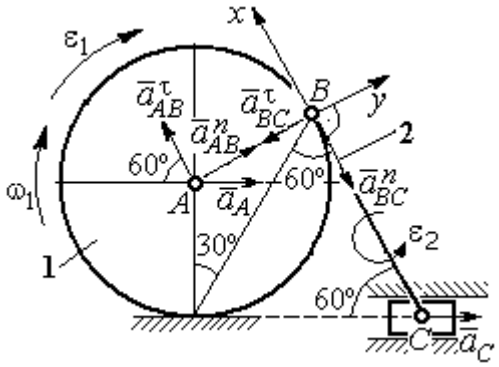


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса *B* выразим через полюс *C*: $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса *C*; $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$, $\vec{a}^{\,n}_{BC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *B* при вращении шатуна 2 вокруг полюса *C*. Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$ точки *B* выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки *A* выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB} + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC} + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускорение a^{τ}_{AB} точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a^{\tau}_{AB} = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a^n_{AB} = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2;\ a^n_{BC} = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BC} = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние P_2C от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x, y, выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x\text{: } -a_A \cos 60^\circ = a^{\tau}_{AB} - a^n_{BC} - a_C \cos 60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y\text{: } a_A \cos 30^\circ = a^n_{AB} - a^{\tau}_{BC} + a_C \cos 30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a^{\tau}_{AB} = a_A$, найдём ускорение точки A: a_A = 18,67 м/с^2. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^{\tau} = 2{,}29$ м/с^2. Угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\left|a_{BC}^{\tau}\right|}{BC} = 2{,}2$ рад/с^2. Из того, что касательное ускорение a_{BC}^{τ} положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^{\tau}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2, насаженная в центре на кривошип OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}4$ м, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2. Длина стержня $BC = 1$ м.

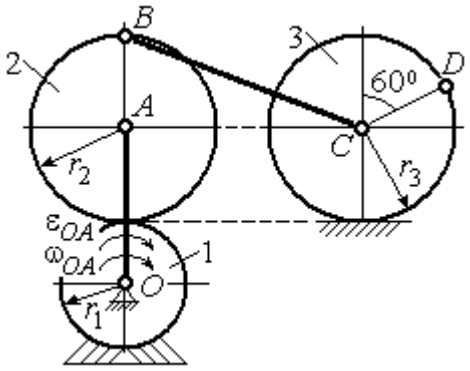


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость его точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2{,}4$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} =$ 6 рад/с. Скорость точки B шестерни 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 =$ 4,8 м/с.

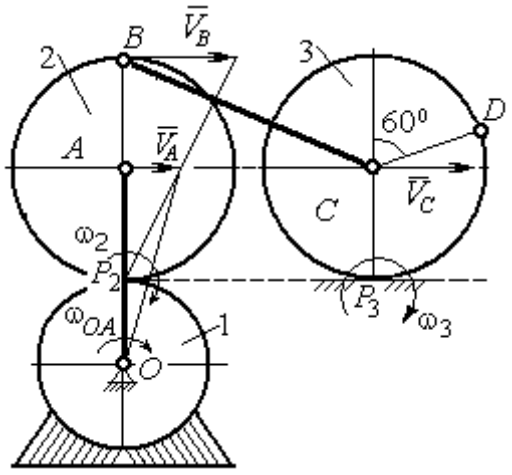


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение. При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня BC одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B =$ 4,8 м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} =$ 12 рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки C, направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс B. Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении

стержня BC вокруг полюса B. Вектор $\vec{a}^{n}_{CB}$ направлен вдоль стержня от точки C к полюсу B, вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ перпендикулярен стержню BC. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC, показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB}.

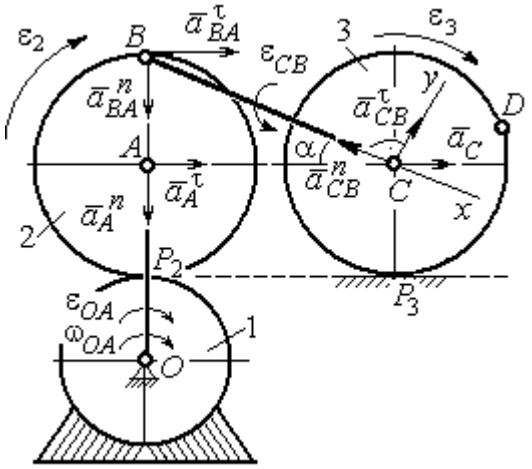


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A, вектор $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярен линии BA. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA. Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A. Вектор $\vec{a}^{n}_{A}$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}^{\tau}_{A}$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{CB} + \vec{a}^{\tau}_{CB}.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9{,}6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14{,}4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, получим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3$ рад/с^2 и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1{,}2$ м/с^2.

Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C. Получим систему уравнений:

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin\alpha = -a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha - a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC, $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C: $a_C = 12{,}83$ м/с^2, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B: $a_{CB}^\tau = 33{,}95$ м/с^2. Величина углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \frac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 33{,}95$ рад/с^2. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как движение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равенство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32{,}07$ рад/с^2.

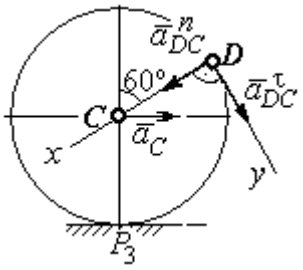


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Выразим ускорение точки D через полюс C, ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{DC} + \vec{a}^\tau_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C; $\vec{a}^n_{DC}$, $\vec{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Модули ускорений

$$a_C = 12{,}83 \text{ м/с}^2;\ a^n_{DC} = \omega_3^2 DC = 57{,}6 \text{ м/с}^2;\ a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 DC = 12{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a^n_{DC};\quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a^\tau_{DC}.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46{,}49$ м/с^2; $a_{Dy} = 19{,}25$ м/с^2.

Величина ускорения точки D: $a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 50{,}32$ м/с^2.

Заметим, что для определения ускорения точки D невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки D через

ускорения полюсов C, B и A, так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx}, a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ}.

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип OA, вращающийся вокруг неподвижной оси O, шестерню 1 радиуса r_1, насаженную на кривошип в точке A и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун BC, присоединённый одним концом в точке B к шестерне, а другим – в точке C к коромыслу CO_1. В положении, указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1, если ω_{OA} = 2 рад/с; ε_{OA} = 4 рад/с^2; OA = 0,8 м; r_1 = 0,4 м; AB = 0,2 м; BC = 0,6 м. Для этого же положения определить ускорение точки C.

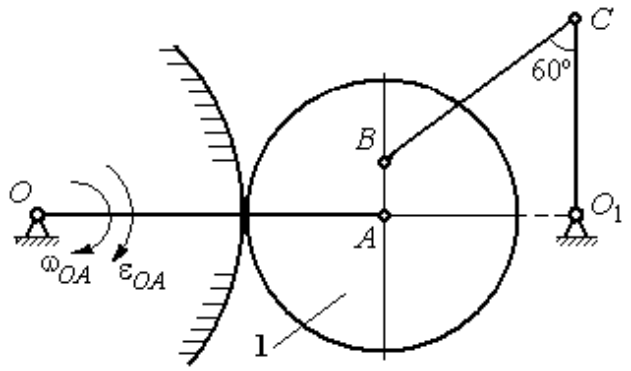


Рис. 2.36. Механизм качалки

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки A кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$ = 1,6 м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1}$ = 4 рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1.

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B P_1B = 0,45 м. Скорость точки B: $V_B = \omega_1 \cdot P_1B$ = 1,8 м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2, лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C, является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC\cos 30^\circ = 0{,}52$ м; $\cos\alpha = \dfrac{AP_1}{BP_1} = 0{,}89$; $P_2B = \dfrac{BK}{\cos\alpha} = 0{,}58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_2} = 3{,}1$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC}.

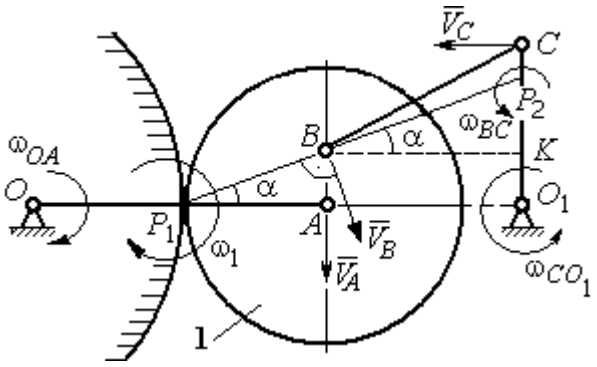


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Расстояние $P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin\alpha = 0{,}04$ м. Скорость точки C шатуна BC: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0{,}12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0{,}5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{CO_1} = 0{,}24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC, выразим ускорение точки C через полюс B: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B.

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A.

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA, а точка C – коромыслу CO_1, вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих точек можно представить в виде сумм векторов:

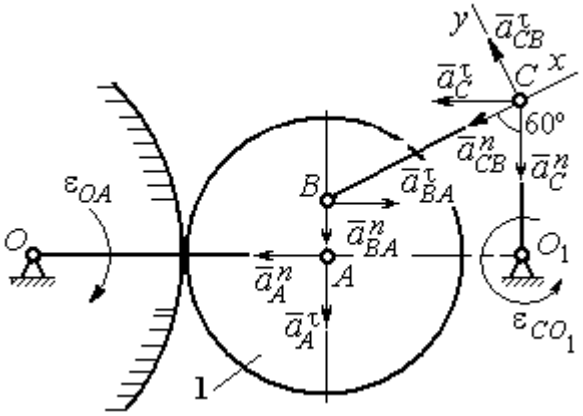


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},\ \vec{a}_C = \vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau},$$

где $\vec{a}_A^{\,n}$, $\vec{a}_A^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O; $\vec{a}_C^{\,n}$, $\vec{a}_C^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1.

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau} = \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau}.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0{,}03 \text{ м/с}^2;\ \ a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5{,}77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ \ a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференцируем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A^\tau}{r_1} = 8$ рад/с^2.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1{,}6$ м/с^2.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ и $\vec{a}^{\tau}_{C}$. Выберем ось x вдоль шатуна BC, как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a^{n}_{C}\cos 60^{\circ} - \vec{a}^{\tau}_{C}\cos 30^{\circ} = -a^{n}_{CB} - a^{n}_{BA}\cos 60^{\circ} + a^{\tau}_{BA}\cos 30^{\circ} - a^{n}_{A}\cos 30^{\circ} - a^{\tau}_{A}\cos 60^{\circ},$$

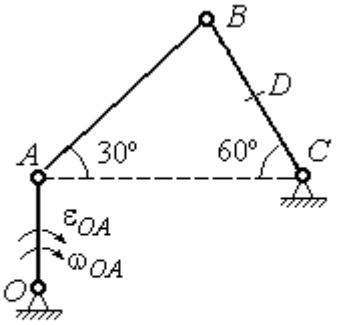
откуда найдём ускорение a^{τ}_{C} = 11,94 м/с^2. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{\left|a^{\tau}_{C}\right|}{CO_1} = 23{,}88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a^{τ}_{C} свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}^{\tau}_{C}$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки C (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

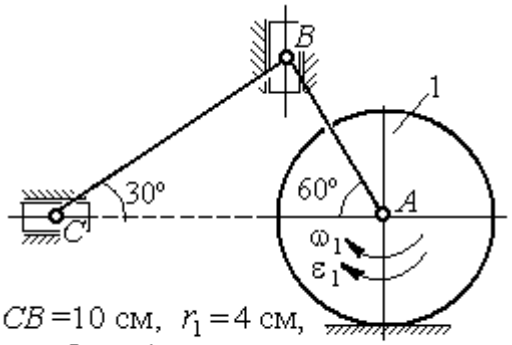
Упражнения

Упражнения 2.9



$OA = 4$ см, $BD = DC = 4$ см,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки D

Упражнения 2.10



$CB = 10$ см, $r_1 = 4$ см,
$\omega_1 = 3$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки C

Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной.**

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным.**

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса:** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_{\text{к}}$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_{\text{к}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_{\text{к}}| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

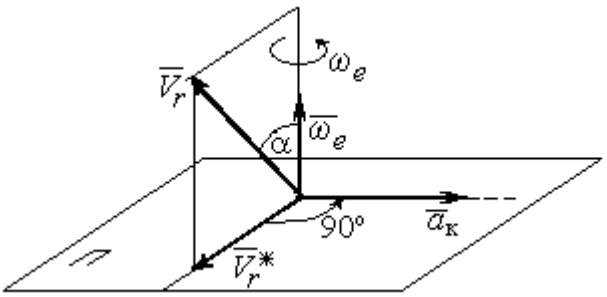


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость *П*, перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости *П* вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_{\text{к}} = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу *AB* с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке *A* и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат *xOy*, если радиус $OA = 0{,}5$ м, радиус кривизны канала в точке *A* $\rho = 0{,}8$ м, угол между нормалью *n* к кривой *AB* в точке *A* и радиусом *OA* $\alpha = 30^\circ$.

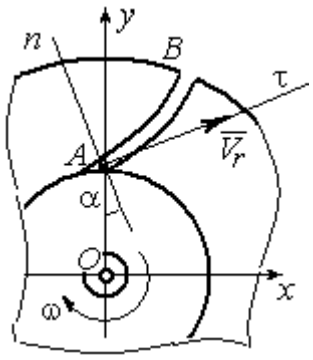


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки *A* компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу *OA* и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой *AB* (стенки канала) в точке *A*.

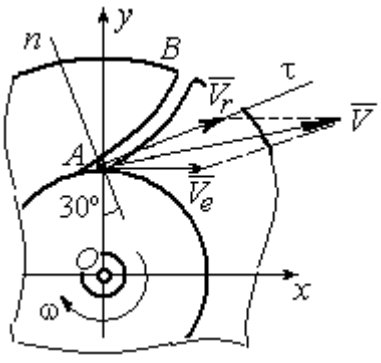


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси *x*, *y*. Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8{,}46 \text{ м/с}; \; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8{,}69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{к}}.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

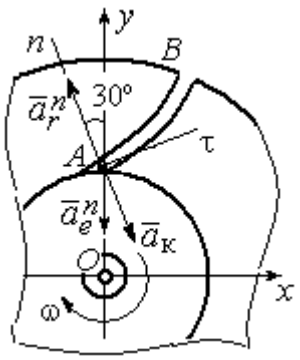


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки *A* вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$, где $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке А выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 0,\ a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2;\ a_e^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2;\ a_{\text{к}} = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат *xOy*. Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_к \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_к \cos 30^\circ = -101{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106{,}28$ м/с^2.

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворота крана (рис. 3.5) груз *A* перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан *B* радиуса $r_1 = 0{,}5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0{,}5$ рад/с^2.

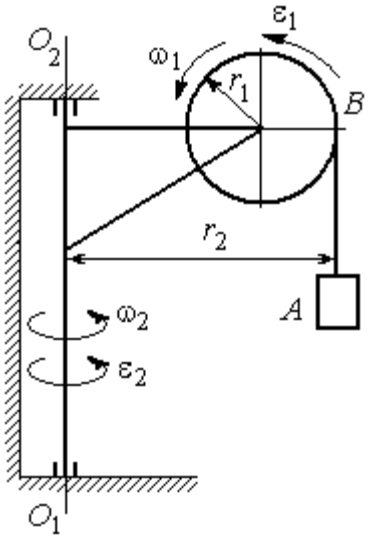


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза *A* на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана *B* из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3$ рад/с. Скорость подъёма груза *A* в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1) r_1 = 1{,}5$ м/с. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$. При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0{,}5$ рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2: $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

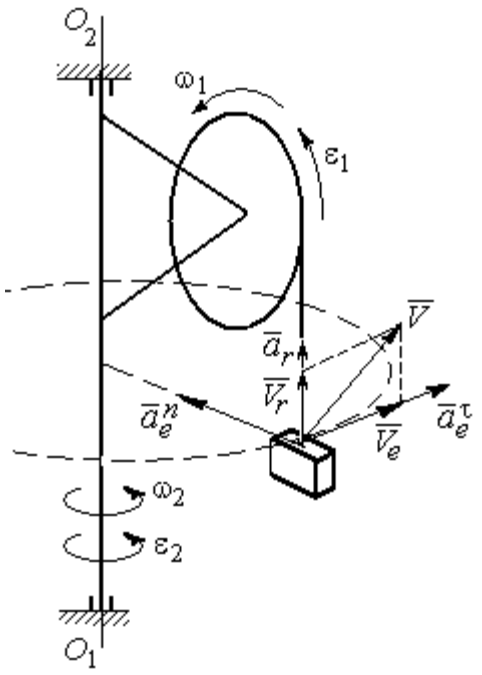


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5{,}22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_\text{к} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_\text{к}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$, $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$, $\vec{a}_\text{к}$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1{,}5$ м/с^2. Направление вектора $\vec{a}_r^{\,\tau}$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2$ = 2,5 м/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2$ = 5 м/с^2. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса $a_к$ равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_к = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (\vec{a}_e^\tau)^2 + (\vec{a}_r)^2}$ = 5,79 м/с^2.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ.

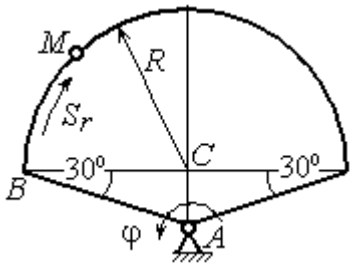


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M. Уравнение движения точки: $\breve{BM} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска R = 9 см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1 с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A, относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки M на окружности определяется центральным углом: $\alpha = \dfrac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1.

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\varphi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с. Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\varphi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\varphi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла φ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e.

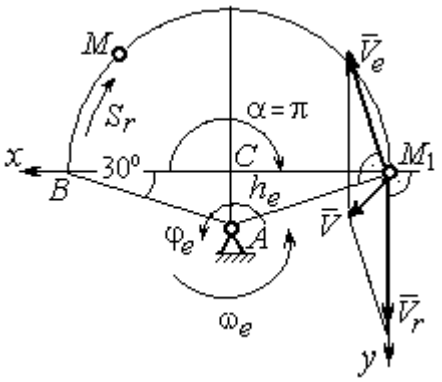


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = = \omega_e AM_1 = \dfrac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10{,}39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56{,}5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат M_1x, M_1y, как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e\cos 60^\circ = 5{,}2 \text{ см/с}, \; V_y = -V_e\cos 30^\circ + V_r = 47{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47{,}8$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_\text{к}$.

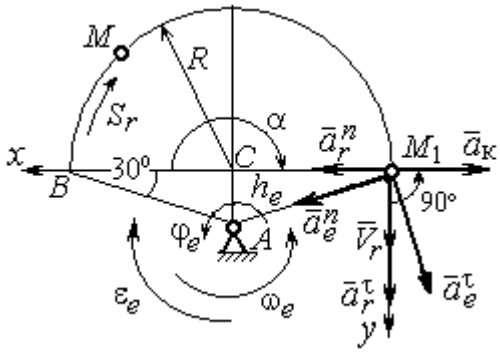


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n}$, где $\vec{a}_e^{\,\tau}$ и $\vec{a}_e^{\,n}$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_\text{к}$.

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1.

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56{,}5$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,\tau}$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно 355,3 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,n}$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e| = 4$ рад/с^2. Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e. Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с^2. Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega V_r =$ $=113{,}1$ см/с^2. По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y, как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 230{,}4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2, проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ. Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30º к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t-1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r. Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

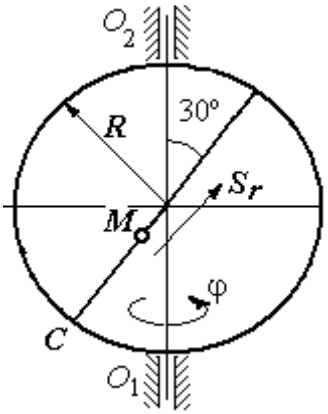


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r, пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1.

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω.

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1. Очевидно, $KM_1 = 0{,}5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, *a*).

(На рис. 3.11, *a* символ ⊙ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ ⊕ – «от нас».)

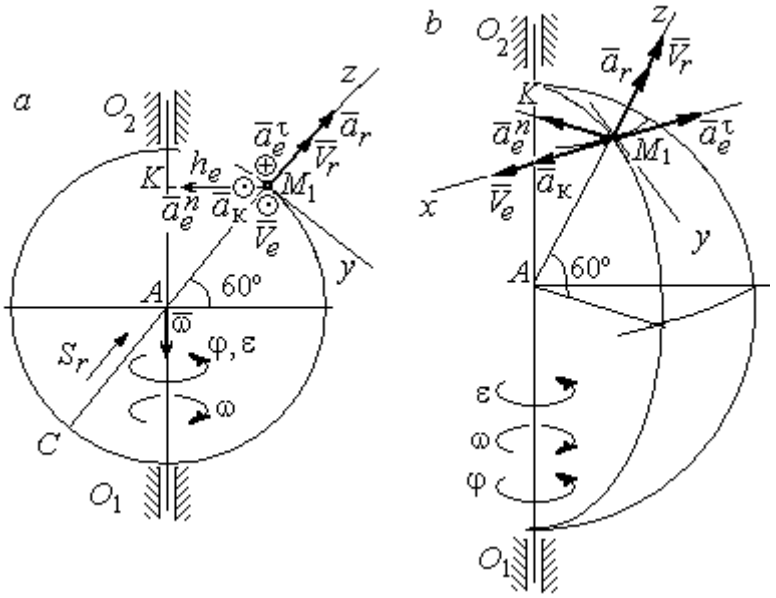


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
a – плоская модель движения;
b – пространственная модель движения

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|8(4t - 1)\right|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24{,}33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}$.

Относительное ускорение точки $a_r = \left|\ddot{S}_r\right| = 32$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = \left|\dot{\omega}\right| = \left|4t - 4\pi\sin\pi t\right|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon = 4$ рад/с^2. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4$ рад/с^2) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε. Модуль переносного касательного ускорения a_e^{τ} определяется по формуле $a_e^{\tau} = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{\tau} = 8$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_e^{\tau}$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^{n} рассчитывается по формуле $a_e^{n} = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{n} = 8$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^{n}$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150º. Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1$ с $a_{\text{к}} = 2\left|\omega\right\|V_r\left|\sin 150^\circ = 48\right.$ см/с^2. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, *а* это будет проекция на линию KM_1. Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, *а* вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x, M_1y и M_1z, как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, *а* ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

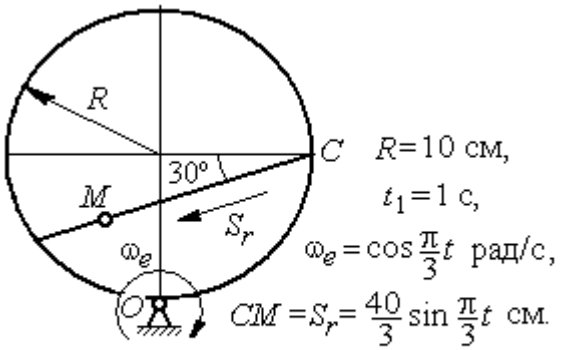
$$a_x = -a_e^{\tau} + a_{\text{к}} = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49{,}32$ см/с^2.

Упражнения

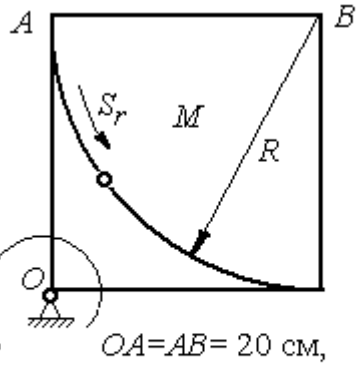
Упражнение 3.1



$R = 10$ см,
$t_1 = 1$ с,
$\omega_e = \cos\frac{\pi}{3}t$ рад/с,
$CM = S_r = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3}t$ см.

Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



$OA = AB = 20$ см,
$\overset{\smile}{AM} = S_r = 5\pi t^2$ см, $\varphi_e = t^2 - 5t$ рад.
Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1$ с

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ldots,\ \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\ ,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}\ ,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\ .$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\ ;\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}\ ;\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}\ ,$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\ ;\ \ m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}\ ;\ \ m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}\ ,$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}\ ;\ \ m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}\ ;\ 0 = \sum F_{kb}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0, направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f. Дойдя до края стола в точке B, частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h. На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

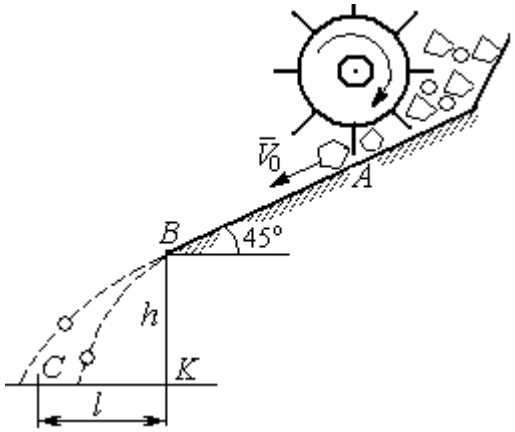


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1{,}2$ м, угол наклона $\alpha = 45°$, высота точки отрыва $BK = h = 1{,}5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0{,}4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат *xAy*, направив ось *x* вдоль линии движения, а ось *y* – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

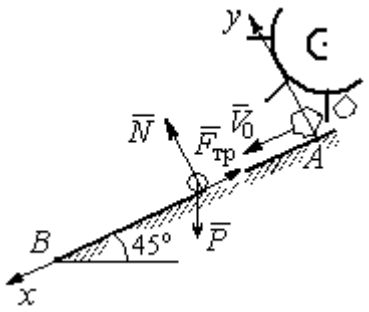


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси *y* частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения, которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1-f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0{,}4: \ \frac{dV_x}{dt} = 4{,}18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4{,}18t + C_1$; $x = 2{,}09t^2 + C_1 t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке *AB* сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4{,}18t + 1$; $x = 2{,}09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола B в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4{,}18t_B + 1$, $S = 2{,}09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8{,}36S}$. При длине стола S = 1,2 м скорость отрыва V_B = 3,32 м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B, направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g.$$

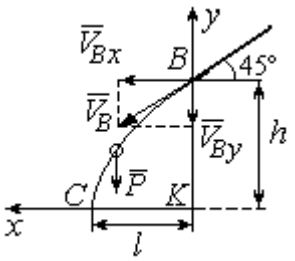


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3;\ x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4. определяются из начальных условий движения: при t = 0 , $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось x, $V_{Bx} = V_B\cos45^\circ$ = 2,35 м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: C_4 = 0, C_3 = 2,35. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2{,}35t$.

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y. Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y: при t = 0 , $y(0) = h$ = 1,5 м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B\cos45^\circ = -2{,}35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось y. Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2{,}35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4{,}91t^2 - 2{,}35t + 1{,}5$.

В момент $t = t_{\text{п}}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2{,}35t_{\text{п}},\ 0 = -4{,}91t_{\text{п}}^2 - 2{,}35t_{\text{п}} + 1{,}5.$$

Исключая в системе время $t_{\text{п}}$, выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1{,}12\ell - 1{,}68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0{,}85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0{,}4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0{,}4$) – недолетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0{,}5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k, при котором скорость точки за первую секунду от начала движения увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

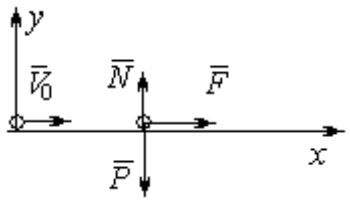


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось *x* положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс *x* у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\frac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \frac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = 10t - k\frac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\frac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\frac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента *k*, получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \frac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51{,}86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой m = 1 кг, находясь на высоте h_1 = 2 м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью V_0 = 4 м/с (рис. 4.5, *a*). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0{,}5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматривается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H, на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

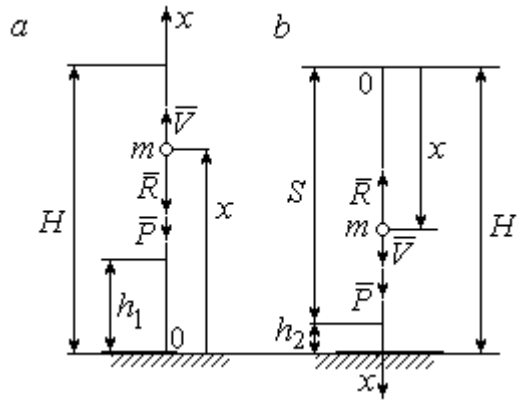


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
a – движение точки вверх;
b – движение точки вниз

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось x, вдоль которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x: $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось x: $P_x = -P = -mg$; $R_x = -0{,}5mV^2$. Полагая $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$, получим уравнение движения точки в виде: $\dfrac{dV}{dt} = -(g + 0{,}5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx}=\frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g+0{,}5V^2}=-2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g+0{,}5V^2)=-x+C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C=h_1+\ln(g+0{,}5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x=h_1+\ln\left(\frac{g+0{,}5V_0^2}{g+0{,}5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x=H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H, получим: $H=h_1+\ln\left(1+\frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2{,}6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки: $m\frac{dV}{dt}=P_x+R_x = mg-0{,}5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду: $\frac{dV^2}{g-0{,}5V^2}=2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g-0{,}5V^2)=-x+C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1=\ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением $x = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V^2}\right)$.

Расстояние S, которое пролетела точка с высоты H, приобретя скорость, V_0: $S = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V_0^2}\right)$. Высота h_2 этого положения от уровня Земли: $h_2 = H - S$ (см. рис. 4.5, *b*). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2{,}6$ м высота $h_2 = 0{,}91$ м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1 на высоте h. Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

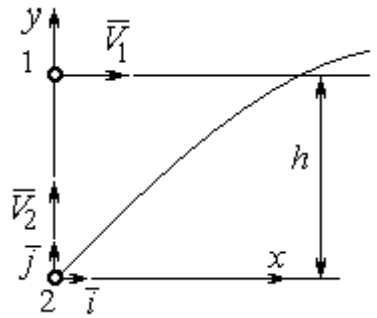


Рис. 4.6. Схема встречного движения точек

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y, точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2. В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представлена в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ системы координат xy: $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где p, q – const. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y: $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

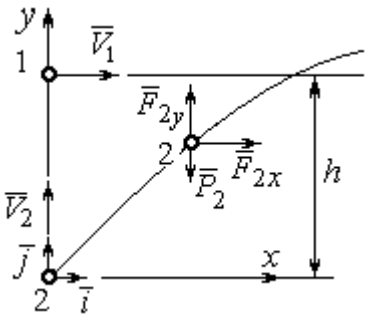


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

Уравнения движения точки в проекциях на оси xy имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p,\ m_2\ddot{y} = q - m_2 g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y: $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y: $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2 t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1 t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \qquad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2 t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1 m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы m = 2 кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения f = 0,4. На тело действует сила $F = kt + 0{,}5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь S = 2 м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы m = 1 кг, находящуюся на высоте H = 10 м над уровнем Земли, бросили под углом φ = 30° к горизонту с начальной скоростью V_0. Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту h =7 м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.** В случае гармонического возмущения $Q = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,\ \omega^2 = \frac{c}{m},\ h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае возникновения резонанса ($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

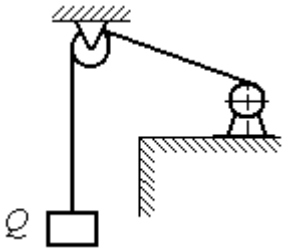


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* (точка *O*) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox* имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем неоднородное дифференциальное уравнение колебаний:

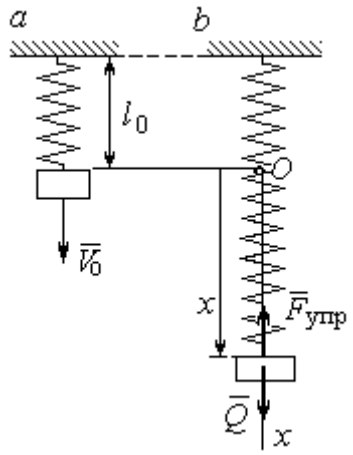


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:
a – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0{,}69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0{,}71$ м. Окончательно, движение груза после защемления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0{,}69\cos 14{,}14t + 0{,}71\sin 14{,}14t + 0{,}69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1{,}68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134{,}4$ кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60º. Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

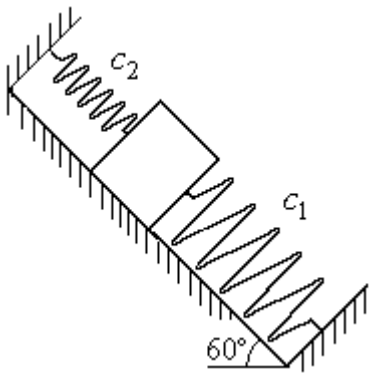


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0{,}12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикреплённого к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_э = c_1 + c_2$ = 900 Н/м (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза x выберем в положении его статического равновесия (точка O) (см. рис. 4.11).

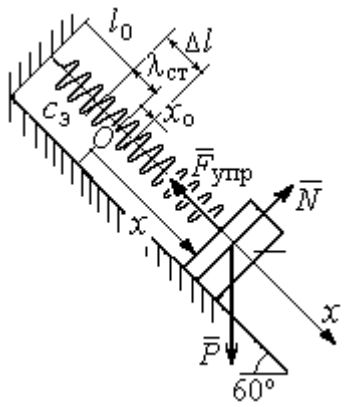


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox: $m\ddot{x} = P_x - F_{упр\,x}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox: $F_{упр\,x} = -c_э \Delta\ell$, где $\Delta\ell = (x + \lambda_{ст})$ – удлинение пружины, включающее её растяжение $\lambda_{ст}$ относительно положения нерастянутой пружины и растяжение x относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{ст}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P\cos 30^\circ - F_{упр} = 0{,}87mg - c_э\lambda_{ст} = 0.$$

Находим $\lambda_{ст} = \dfrac{0{,}87mg}{c_э} = 0{,}085$ м.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0{,}87mg = c_э\lambda_{ст}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_э x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 10$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{ст} = 0{,}035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0{,}035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2 \sin\omega_2 t + C_2\omega_2 \cos\omega_2 t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0{,}035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0{,}035$ м. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины c = 350 Н/м. Груз массой m = 5 кг падает с высоты h = 0,3 м.

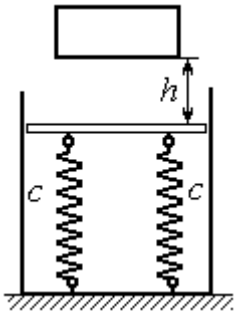


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

Решение

Заменим две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_э = 2c$ = 700 Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, c предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{упр}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, *c*), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния (см. рис. 4.13, *a*) составляет величину: $\Delta\ell = x + \lambda_{ст}$. Величина $\lambda_{ст}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, *b*): $P - F_{упр\,ст} = P - c_э\lambda_{ст} = 0$.

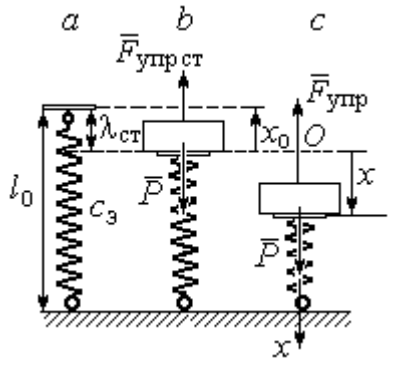


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
a – недеформированная пружина;
b – положение статического равновесия груза; *c* – произвольное положение

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} + c_э x = 0$ или $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}}$ = 11,83 рад/с – угловая частота колебаний.

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{ст} = -\dfrac{mg}{c_э} = -0{,}07$ м.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая s = 0,3, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: V = 2,43 м/с. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V$ = 2,43 м/с.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0{,}07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0{,}2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0{,}07\cos 11{,}83t + 0{,}2\sin 11{,}83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0{,}28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c. К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A. В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза m = 1 кг, жесткость пружины c = 10 Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a\sin pt$ см, где амплитуда a = 0,02 м, частота колебаний платформы p = 7 рад/с.

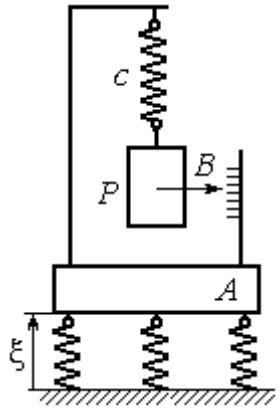


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x, связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x+\lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия груза, определяемое из условия $P-c\lambda_{ст}=0$. Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины. В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме: $\Delta\ell=(x+\lambda_{ст}+\xi)$.

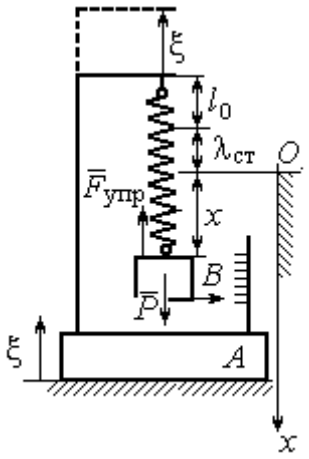


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*: $m\ddot{x}=P_x+F_{упр\,x}$, где проекции $P_x=P$, $F_{упр\,x}=-c\Delta\ell=-c(x+\lambda_{ст}+\xi)$. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P-c\lambda_{ст}=0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x}+\omega^2x=-h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=3{,}16$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h=\dfrac{ca}{m}$ = 0,2 м/с^2;

p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 7 рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x=x_1+x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения $\ddot{x}_1+\omega^2x_1=0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний: $\ddot{x}_2+\omega^2x_2=-h\sin pt$.

Решив однородное уравнение, находим: $x_1=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b\sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2\sin pt + \omega^2 b\sin pt = -h\sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \dfrac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2}\sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим C_1= 0. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \dfrac{hp}{p^2 - \omega^2}\cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\dfrac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0{,}01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t - 0{,}02\sin 7t = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}03\sin 7t.$$

Упражнения

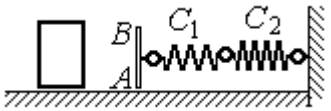


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы m = 0,5 кг, получив начальную скорость V_0 = 6 м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью C_1 = 120 и C_2 = 40 Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если k = 0,5 Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы m =1 кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости C = 160 Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость V = 4 м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

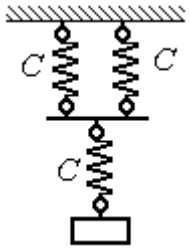


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется скалярная величина $A(\vec{F}) = FS\cos\alpha$, где F – модуль силы; S – конечное перемещение точки приложения силы; α – угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

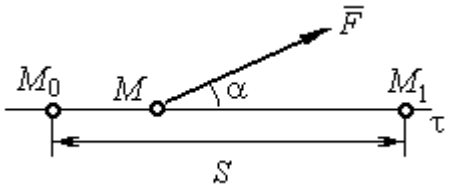


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

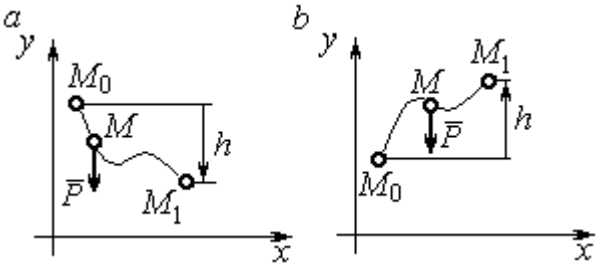


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние *h* определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1. При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью V_0 = 6 м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s$, где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть V = 0. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_0^2}{2} = \left(P - F_{\text{тр}}\right)s$, откуда находим требуемую для остановки груза силу трения: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}}$ = 5,81 кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов R = 1 м и r = 0,5 м (рис. 4.20). Линия OO_1, соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик весом P = 10 Н. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом α = 60°, шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки B со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге радиуса r определяется углом $\beta = 90°$ относительно линии центров.

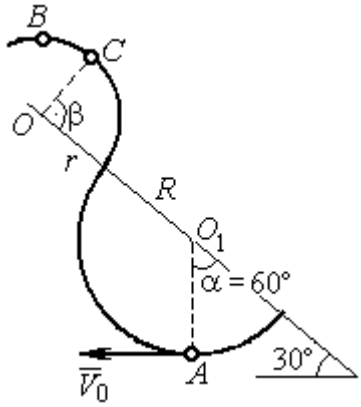


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и потому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её из начального положения A в положение B имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

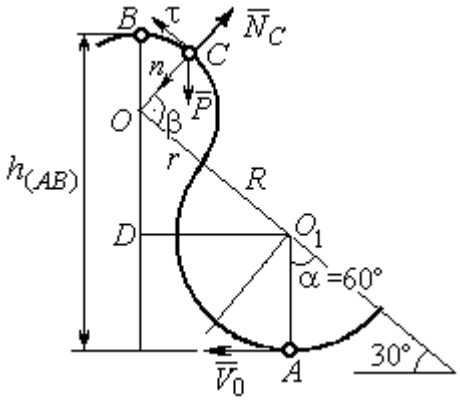


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек B и A, $h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r)$ (см. рис. 4.21); V_A, V_B – скорость шарика в точках A и B, причём $V_A = V_0$, $V_B = 0{,}5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда $V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7{,}67$ м/с.

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарику, в момент, когда он находится в точке *C*. Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn. Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *C* в положение *B*. Получим равенство $\dfrac{mV_B^2}{2} - \dfrac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения *C* в положение *B*. С учётом известных значений $V_B = 0{,}5V_0 =$ 3,84 м/с и $h_{(CB)} = r\cos 30^\circ =$ 0,43 м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} =$ 4,82 м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} =$ – 38,7 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой *AB* и гладкой дуги окружности радиуса *r* = 0,8 м, сопряжённых в точке *B* так, что прямая *AB* является касательной к окружности в точке *B* (рис. 4.22). Положение точки *B* на дуге задаётся углом 30º относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой $m = 0{,}5$ кг начинает движение из точки *A* со скоростью $V_0 = 0{,}2$ м/с.

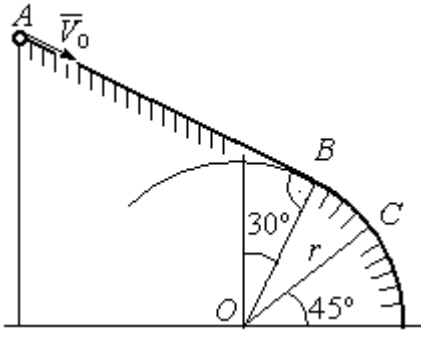


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины *S* должен быть желоб *AB*,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке C, определяемой углом 45º относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой AB шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0{,}4$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C. Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C. Реакция опоры $N_C = P\cos 45^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r}$.

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg\cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2{,}36$ м/с.

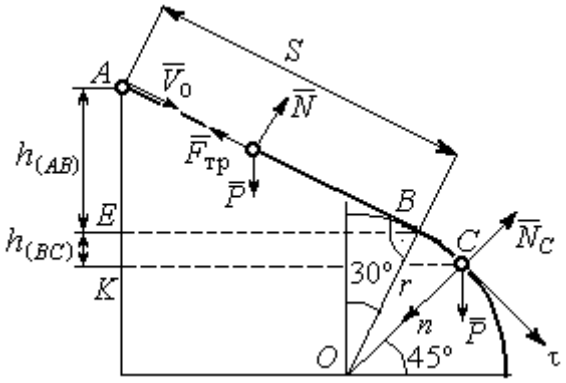


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки $\dfrac{mV_C^2}{2} - \dfrac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{\text{тр}}S$, где S – длина участка AB; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB, составим проекцию уравнения движения шарика на ось y, перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB:

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в неподвижной точке O (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении A, при котором линия OA составляет с вертикалью угол $60°$. В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1, расположенной на середине длины нити, и дальше навивается на неё.

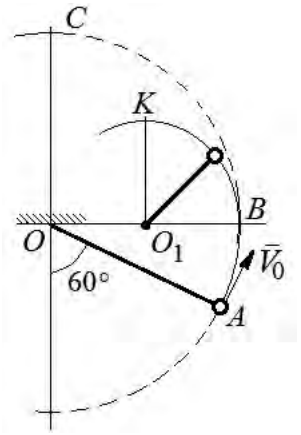


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A, чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K. На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $n K \tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0{,}5l$ с центром O_1 (рис. 4.25, *a*). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид: $m\dfrac{V_K^2}{r} = P + N_K$, где V_K – скорость

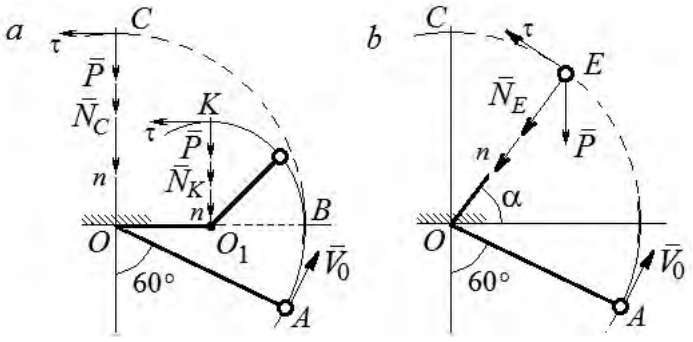


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
a – нить навивается на препятствие;
b – свободное движение

груза в точке K; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза; $r = 0{,}5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m\dfrac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \dfrac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K. Имеем равенство $\dfrac{mV_K^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек A и K; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, *a*). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}gl}$.

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки *K*. Однако, натяжение нити в точке *K* обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения *A* с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, *b*). Построим в точке *E* оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке *K*. Уравнение движения груза в проекции на ось *En* имеет вид: $m\frac{V_E^2}{l} = P\sin\alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке *E*; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке *E* составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения *A* в положение *E*. Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек *A* и *E*; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l\sin\alpha$ (см. рис. 4.25, *b*). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl\sin\alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке *E* натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl\sin\alpha$. Приравнивая выражения, получим $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B. Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l. Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой m = 0,5 кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса R = 0,6 м и прямолинейного участка BD, сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60°. Начальная скорость шарика V_0 = 5 м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью c = 100 Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

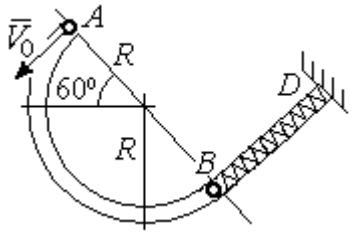


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B. Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B. Получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}$, где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B, $h_{(AB)} = 2R\sin 60^\circ = 1{,}04$ м (рис. 4.27).

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B: $V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6{,}74$ м/с.

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки BD. На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарику (см. рис. 4.27).

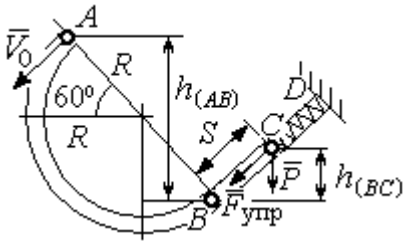


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC. На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на отрезке BC, имеем уравнение $\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{упр}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2}$,

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C; $h_{(BC)} = S\sin 30^\circ = 0{,}5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6{,}74$ м/с, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0{,}05S - 0{,}23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0{,}45$ м.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ, с начальной скоростью V_0. Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R, сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

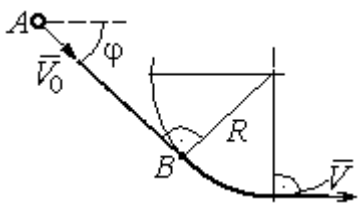


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт - сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью C = 100 Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0{,}3$ м, выталкивает шарик массой $m = 0{,}5$ кг, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB, окружности радиуса R = 1 м, затем – по горизонтальному участку BD. Определить давление шарика на трубку в точке C. Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD, если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0{,}4$.

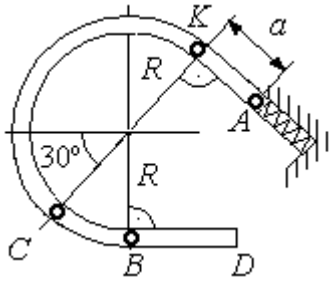


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C, координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k \ , \quad my_C = \sum m_k y_k \ , \ mz_C = \sum m_k z_k \ ,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды *ABCD*, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 m_1 = 15 кг, груза 2 m_2 = 20 кг, пирамиды m = 50 кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

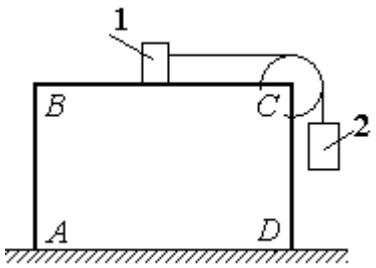


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока *C* и пирамиды *ABCD*.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат *Axy*, как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось *Ax,* имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

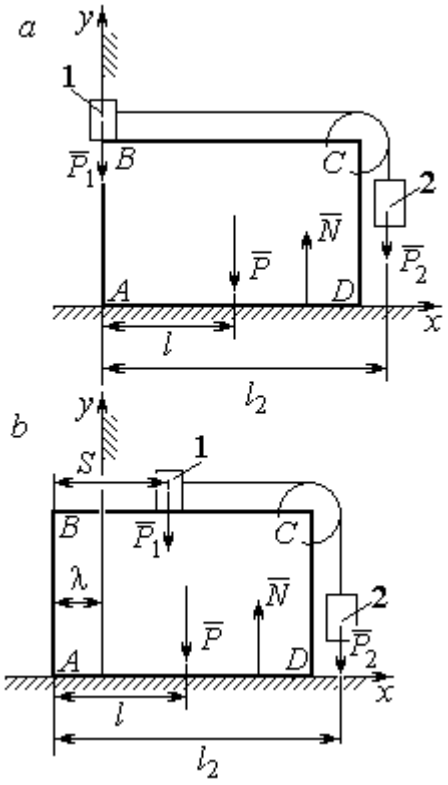


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: *a* – начальное положение; *b* – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние *S*

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, *a* не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси *Ax* остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, *a*.

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

за 2 на оси Ax); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, *a*). Тогда начальная координата центра масс системы: $x_{C0} = \dfrac{m_2 l_2 + ml}{(m_1 + m_2 + m)}$.

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние *S*, и положение призмы показано на рис. 5.2, *b*. На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние *S* призма *ABCD* сместилась влево на расстояние λ. Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнивая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды $\lambda = \dfrac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}$. Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0{,}18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом *R*, массой *m* относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска: $J_z = \dfrac{1}{2}mR^2$. **Для неоднородных тел момент инерции** относительно оси *z* вычисляется по формуле: $J_z = mi_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси *z* называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*, кинетический момент: $L_z = J_z\omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси**. Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же оси: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R. Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z. На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60$ Н·м. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t$ Н·м, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 50$ кг, $m_3 = 20$ кг. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}4$ м; $i_z = 0{,}5$ м.

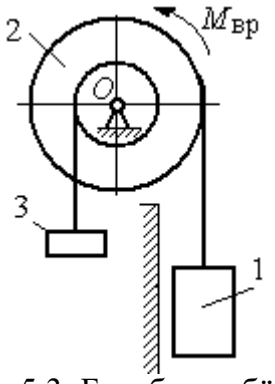


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c. Направления векторов сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси *y*, вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

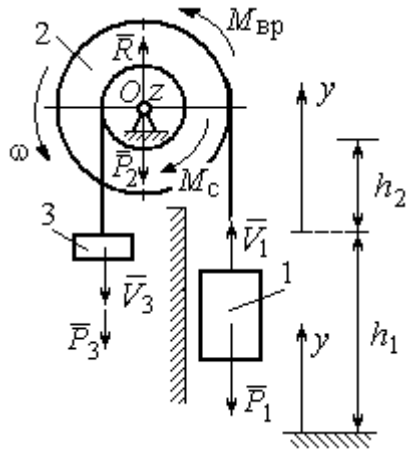


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*, проходящей через центр *O*: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$. Кинетический момент системы относительно оси *z* равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*: $L_z^{бар} = J_z\omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси *z*, $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси *z*: $L_z^{гр} = M_z(m_1\vec{V}_1) = m_1V_1R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3\vec{V}_3) = m_3V_3r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2\omega + m_1V_1R + m_3V_3r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ - и подставим их в выражение кинетического момента. Получим $L_z = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\omega = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{V_1}{R}$.

Суммарный момент внешних сил относительно оси *z*

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r\right)R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0{,}58 + 0{,}35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0{,}58t + 0{,}175t^2; \quad y(t) = 0{,}29t^2 + 0{,}058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1{,}62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1{,}86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(-M_c - P_1 R + P_3 r\right)R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6{,}61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь уравнение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6{,}61$. Интегрируя его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути $\frac{V_1^2}{2} = -6{,}61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1. Из начальных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1{,}86$ м/с, получим: $C_3 = 1{,}73$.

Максимальную высоту h_2, на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6{,}61h_2 + 1{,}73$, откуда $h_2 = 0{,}26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1{,}88$ м.

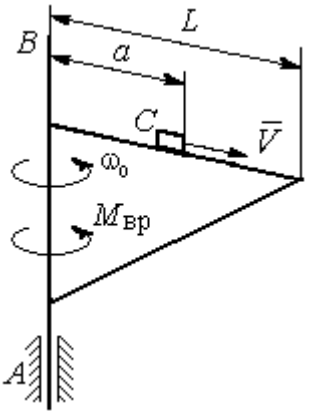


Рис. 5.5. Поворотный кран

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0{,}5$ м/с. Длина стрелы

L = 10 м, масса тележки с грузом m_1 = 100 кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза J = 1800 кг·м^2. Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{вр}$ = 400 Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью ω_0 = 2 рад/с, а тележка находилась на расстоянии a = 1 м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с грузом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{вр}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z, направленной вдоль линии AB.

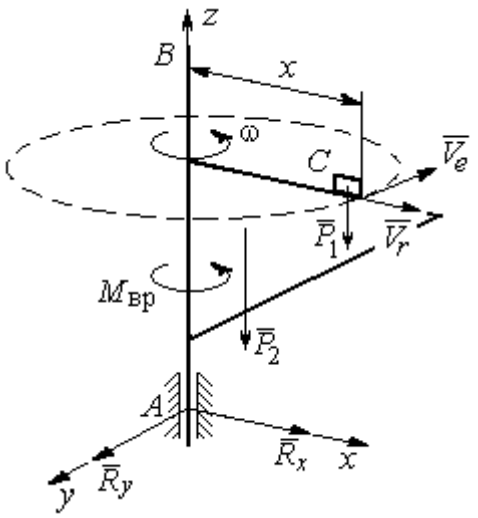


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{вр}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{вр}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{кран} + L_z^{груз}$. Кинетический момент крана как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси *z*. Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1\vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1\vec{V}_e + m_1\vec{V}_r) = M_z(m_1\vec{V}_e) = m_1V_ex = m_1\omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = \left(J + m_1x^2\right)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = \left(J + m_1a^2\right)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $\left(J + m_1x^2\right)\omega - \left(J + m_1a^2\right)\omega_0 = M_{\text{вр}}t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \dfrac{M_{\text{вр}}t + \left(J + m_1a^2\right)\omega_0}{\left(J + m_1x^2\right)}$. Момент времени $t_{\text{к}}$, когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $Vt_{\text{к}} = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_{\text{к}}) = 0{,}93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении $T = \dfrac{1}{2}mV_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \dfrac{1}{2}J_z\omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси *z*; ω – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

раллельном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FS\cos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом** M при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом *OA* (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип *OA* вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными *m* и *r,* и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

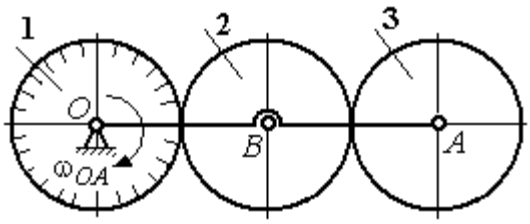


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма *T* равна сумме энергий колёс 2 и 3: $T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

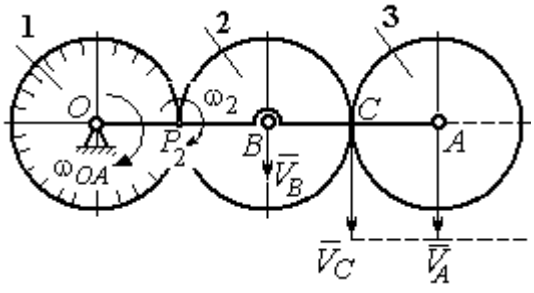


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA.

Скорость точки B, лежащей на кривошипе OA: $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C, считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA} r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA} r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA} r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвиж-

ной оси O_1. Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R. Их общий вес равен Q, а общий радиус инерции относительно оси z, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: P_1 = 40 Н, Q = 60 Н, F = 50 Н, M = 45 Н·м, R = 0,8 м, r = 0,6 м, i_z = 0,4 м.

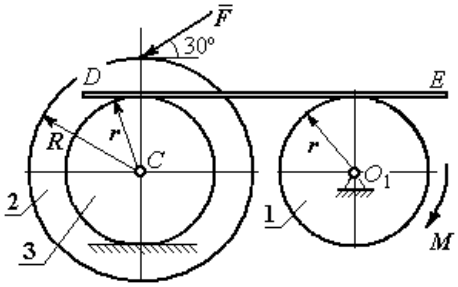


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

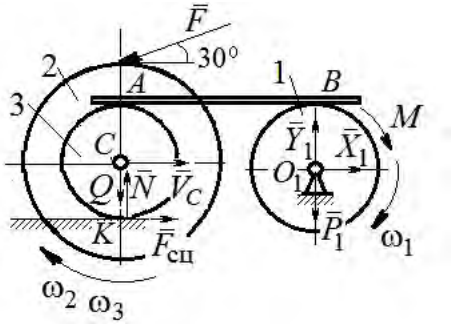


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1, ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, двигается плоскопараллельно. Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где m – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, J_{zC} – момент инерции фигуры относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g}\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M\omega_1 = M\frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90°.

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F})\vec{\omega}_2 =$$

$$= -F(r+R)\omega_2 \cos 30° = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30°.$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра K, противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + M\frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы $\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]$ и приравниваем суммарной мощности внешних сил. Получим:

$$\frac{1}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2{,}88$ м/с^2. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \dfrac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \dfrac{2a_C}{r} = 9{,}6$ рад/с^2.

Задача 59. Каток радиуса *r*, весом *P* закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы *F* = 2*P*. В начальном положении центр катка имел скорость V_0.

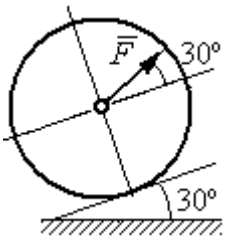


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

На какое расстояние *S* переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние *S* вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F\cos 30° S$ и сила тяжести: $A(\vec{P}) = -Ph$, где *h* – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

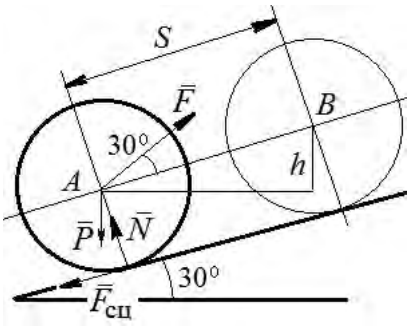


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

Кинетическая энергия катка $T = \dfrac{1}{2}mV_A^2 + \dfrac{1}{2}J_{zA}\omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \dfrac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \dfrac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, получим энергию катка в виде: $T = \dfrac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S: $\dfrac{3}{4} m V_B^2 - \dfrac{3}{4} m V_A^2 = F\cos 30° S - Ph$, где $V_A = V_0$ $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S\sin 30°$.

Найдём искомое перемещение: $S = \dfrac{9V_0^2}{4g\left(2\cos 30° - \sin 30°\right)}$.

Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l, на другом конце которого привязан груз массы m_2. Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

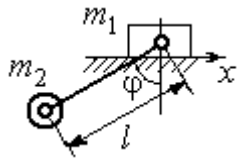


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

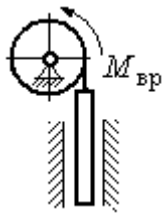


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{ВР} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

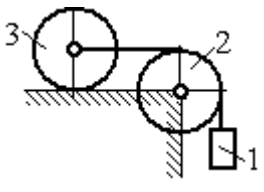


Рис. 5.15. Схема движения системы

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3, радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h, если к катку 3 приложен момент M.

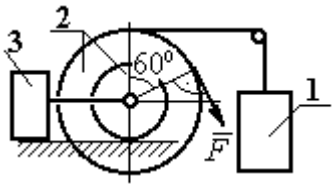


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твердого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F^e_{kz}$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}$, $ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}$, $ma_{Cz} = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции внешних сил.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \dfrac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$ или алгебраическим уравнением: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F_{kx}^{e};\ ma_{Cy} = \sum F_{ky}^{e};\ J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}_k^{e}),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела; F_{kx}^{e}, F_{ky}^{e} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0{,}8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

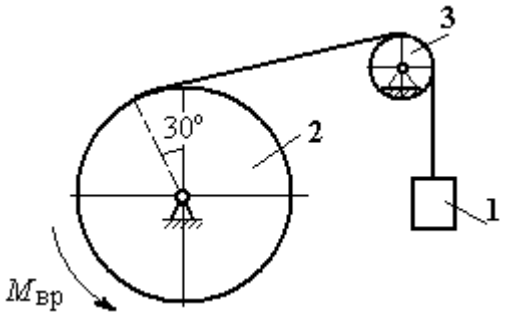


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось *x* по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось *x*: $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

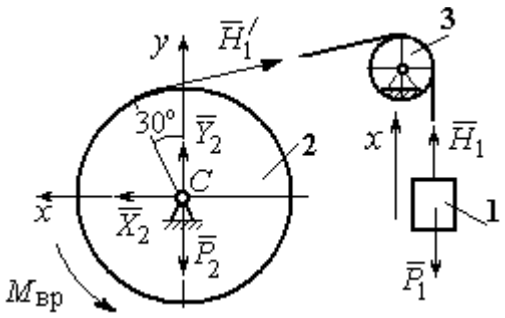


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z: $J_z\varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1'r$, где момент инерции барабана $J_z = \dfrac{m_2 r^2}{2}$.

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напишем уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \;\; m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим a_1= 1,82 м/с^2, H_1 = 581,8 Н. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1'\cos 30^\circ = 0, \; m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1'\cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503{,}84$ Н, $Y_2 = -94{,}7$ Н, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512{,}66$ Н.

Задача 60. Барабан весом G, радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30°, опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M.

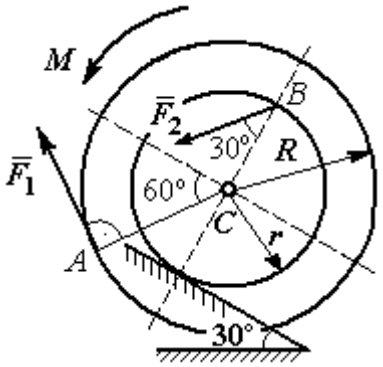


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравновешивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: R = 0,6 м, r = 0,2 м, G = 100 Н, F_1 = 60 Н, F_2 = 25 Н, радиус инерции барабана i_z = 0,4 м.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления барабана с поверхностью. Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

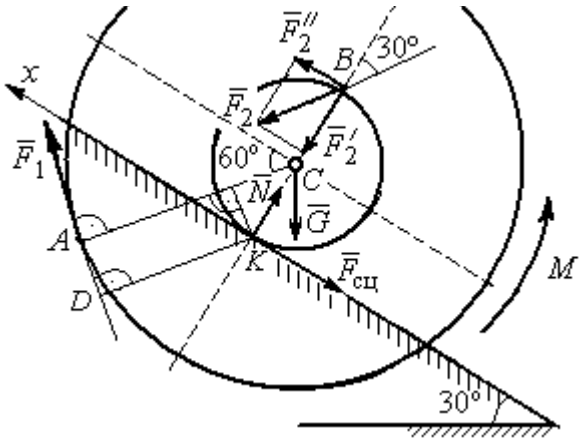


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Для определения момента M, приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки *K*. Точка *K* выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2\cos 30°$, $F_2'' = F_2\sin 30°$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки *K*: $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2\sin 30° \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки *K*:

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r\cos 30°).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r\cos 30°) + F_2\sin 30° \cdot 2r - Gr\sin 30° + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину уравновешивающего момента $M = 30{,}61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента *M*, удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1{,}2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось *x*, направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1\cos 30° + F_2\cos 60° - G\cos 60° - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси z в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1 R + F_2 r\cos 60° + F_{\text{сц}} r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) = -F_1\left(\frac{R}{r} - \cos 30°\right) + 2F_2\cos 60° - G\cos 60° + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0{,}6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0{,}3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x.

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r} = 3$ рад/с^2.

Задача 61. Механизм (рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы

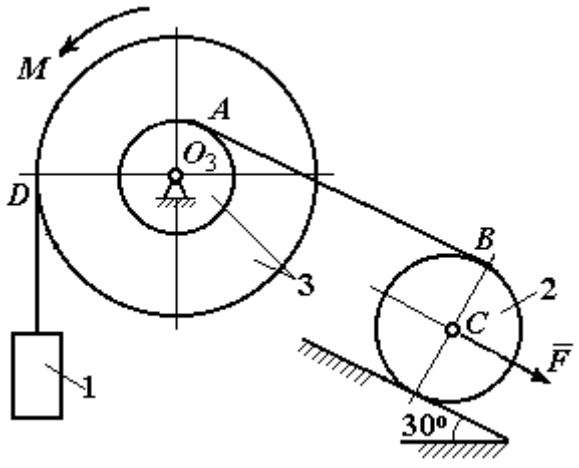


Рис. 5.21. Конструкция механической системы

$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M, приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30º происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2. Радиусы ступеней барабана 3: R_3, r_3, радиус инерции барабана i_3.

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

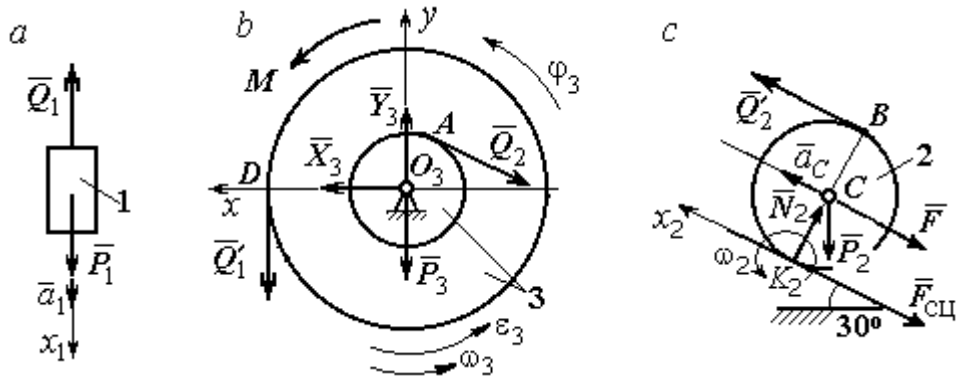


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1, ускорением a_1. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, *a*). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1 .$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс O_3. На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$), пара сил с моментом *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1'R_3 + M - Q_2r_3 = Q_1'3r + Pr - Q_2r,$$

Момент инерции барабана относительно оси *z*: $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \dfrac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2\cos 60^\circ = Q_2' - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C\varepsilon_2 = Q_2'R_2 + F_{\text{сц}}R_2 = Q_2'2r + F_{\text{сц}}2r, \quad J_C = \frac{m_2R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см. рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK_2} = \dfrac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{R_2} = \dfrac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки A к скорости точки B (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \dfrac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ получим систему:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1; \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

откуда находим: $a_C = 0{,}09g$, $Q_1 = 0{,}92P$, $Q_2 = 2{,}14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, *b*), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0{,}92P$ и $Q_2 = 2{,}14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1, радиусом r_1, ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1 g r_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, походящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

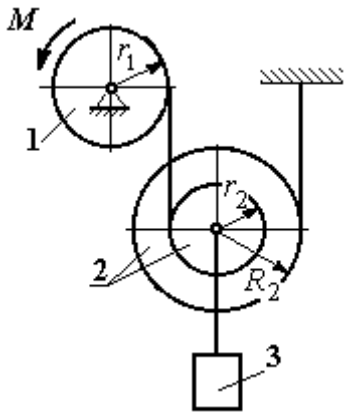


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

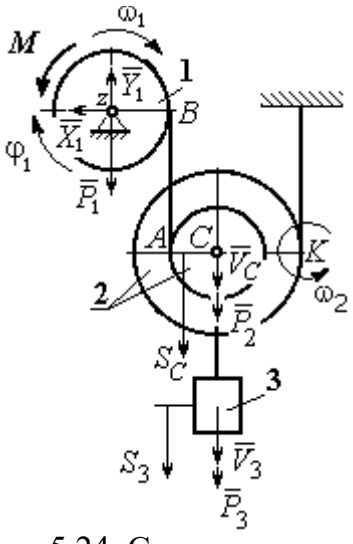


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z. Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \dfrac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где CK – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A. Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2}\left[\frac{m_1}{2}\left(1 + \frac{r_2}{R_2}\right)^2 + m_2\left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2}\right) + m_3\right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M. Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3 S_3 + P_2 S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$ следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M\frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 .$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3 .$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3 \frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с^2.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3. Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x: $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где H_3 –реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

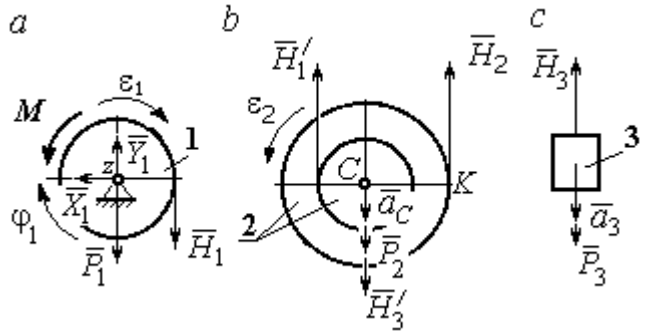


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси *z*. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом *M* и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции диска 1 относительно оси *z*, $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, *b*) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \;\; J_{2C}\varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2 .$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, *c*). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3 ,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \dfrac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}_3'$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8}m_1 a_3 = H_1 - m_1 g;\ \ 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1;\ \ 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \dfrac{120}{209}g$ м/с^2, $H_3 = \dfrac{178}{209}m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P, радиуса r. Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r. Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

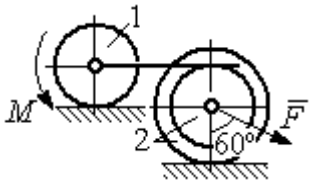


Рис. 5.26. Система катков

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса r, затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2{,}5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреплён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

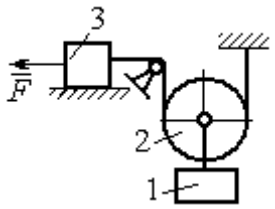


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r. Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

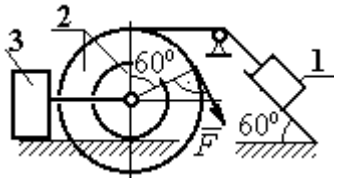


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

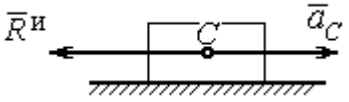


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

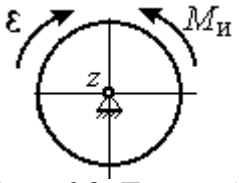


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

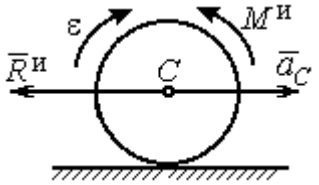


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0,\ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ –внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{и}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра *O*.

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы m_1 = 10 кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60º с горизонтом, и посредством нити, переброшенной через блок 2, укреплённый в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы m_3 = 5 кг (рис. 6.4). Клин *ABC* массы m_4 = 15 кг стоит гранью *AC* на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ *E*.

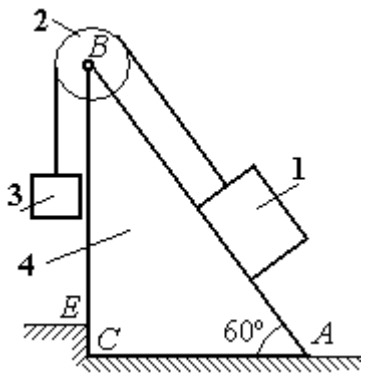


Рис. 6.4. Клин с грузами

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина *ABC*, блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира *B* блока 2 для данной системы являются внутренними.

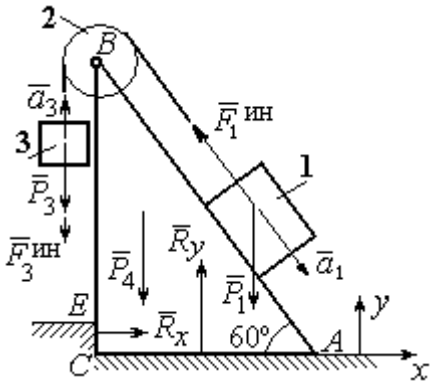


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_3^{ин} = 0$.

Выберем оси *xy,* как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось *x*. Получим: $R_x - F_1^{ин}\cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a*, *b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы: силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{ин}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось *x*, расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{ин} = 0$, где $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

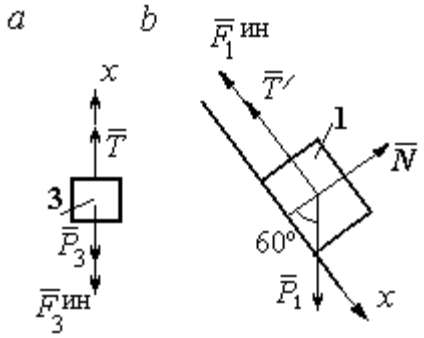


Рис. 6.6. Равновесие грузов

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{ин}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось *x*, выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим: $a_1 = a_3 = \dfrac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}$. Тогда давление клина на уступ:

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ .$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём R_x = 11,97 Н.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3. Лебёдка установлена на горизонтальной балке *AB*, которая закреплена в точке *A* на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке *B*. Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

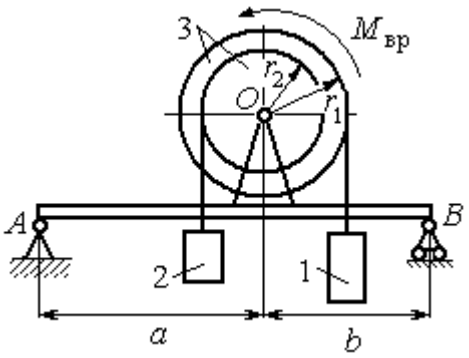


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана r_1 = 0,8 м, r_2 = 0,2 м, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3 =0,6 м, масса груза 1 m_1 = 100 кг, противовеса 2 m_2 =30 кг, масса барабана m_1 = 50 кг, величина вращающего момента $M_{\text{вр}}$ = 1050 Н·м, расстояния от крайних точек балки *A* и *B* до линии вертикального диаметра барабана *a* = 2 м, *b* = 1 м.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{\text{вр}}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O. Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

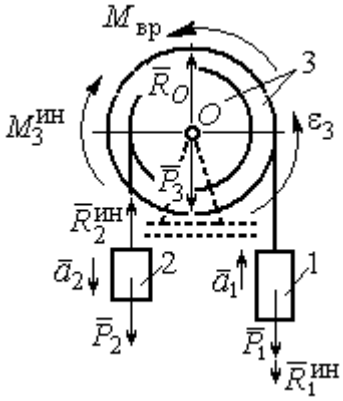


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0;\ \ M_{\text{вр}} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}} r_2 + P_2 r_2 - P_1 r_1 - R_1^{\text{ин}} r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\varepsilon_3$, $J_{3O} = m_3 i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{r_1}$ и $a_2 = \dfrac{r_2}{r_1} a_1$, найдём ускорение груза 1: $a_1 = \dfrac{r_1(M_{\text{вр}} + P_2 r_2 - P_1 r_1)}{m_3 i_3^2 + m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}$. Подставляя данные задачи, получим a_1 = 3,49 м/с^2.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$=349 Н; $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$ = 26,17 Н.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O:

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088{,}63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O, реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B. Составим уравнения равновесия балки:

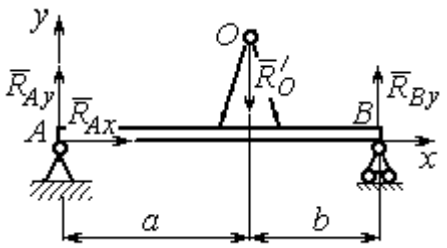


Рис. 6.9. Равновесие балки

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0,\ \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a+b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём реакции опор балки: $R_{By} = R_O \dfrac{a}{a+b} = 1392{,}42$ Н; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696{,}21$ Н.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419{,}18$ Н, $R_{Ay} = 346{,}62$ Н.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m. Массой нити и блока пренебречь.

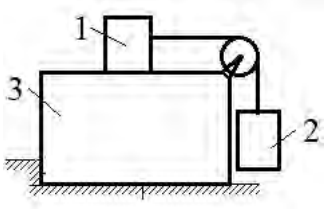


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1, нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1.

Какой вращающий момент M, постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P, прикреплённый в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

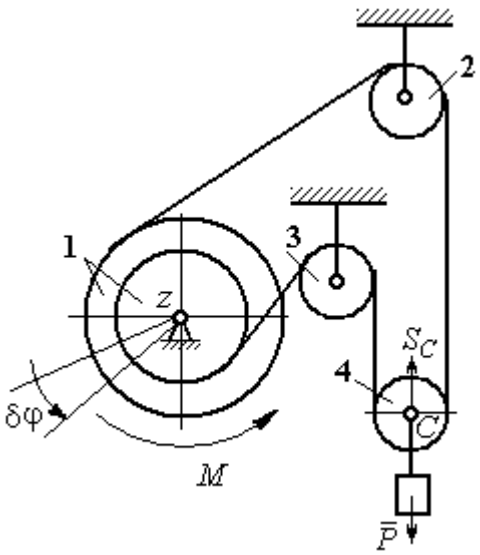


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M. По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C. Предположим, в механизме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки *K*. Здесь скорость точки *A* блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки *B* – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию $\frac{V_B}{V_A}=\frac{BK}{AK}=\frac{r_4+CK}{r_4-CK}$, где r_4 – радиус блока 4 (см. рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек *A* и *B* $V_A=\omega_1 r_1$, $V_B=\omega_1 R_1$, найдём расстояние: $CK=\frac{(R_1-r_1)r_4}{R_1+r_1}$.

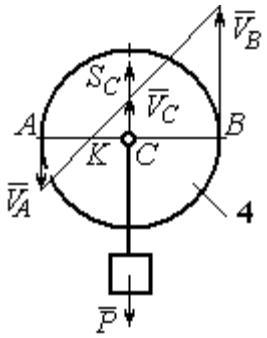


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_B}{r_4+CK}=\frac{\omega_1(R_1+r_1)}{2r_4}$. Скорость его центра: $V_C=\omega_4\cdot CK=\frac{\omega_1(R_1-r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки *C* и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме: $dS_C=d\varphi_1\frac{(R_1-r_1)}{2}$. Поскольку действительное перемещение является одним из возможных (т. е. $ds=\delta s$, $d\varphi=\delta\varphi$), получим связь между возможными перемещениями барабана 1 и груза: $\delta S_C=\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}$.

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных перемещений, представим его в окончательном виде: $M\delta\varphi_1-P\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}=0$, откуда найдём значение уравновешивающего момента: $M=\frac{P(R_1-r_1)}{2}$.

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r, и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30º к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

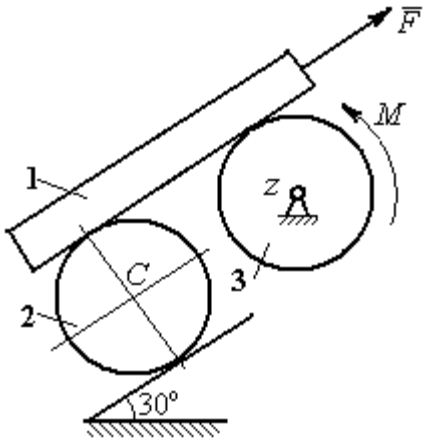


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F, параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между брусом и катком, брусом и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{сц}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

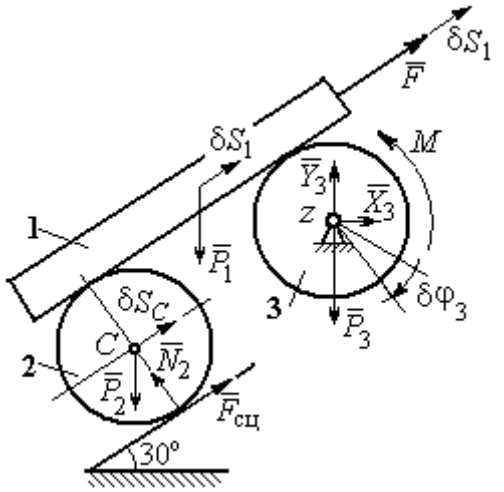


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние δS_C, а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1. Допустим, скорость бруса равна V_1. Тогда $V_C = \dfrac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \dfrac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом *M*, приложенных к блоку 2. Каток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов *r* и *R* = 2*r* с общей массой 3*m*. Масса груза 1 равна *m*. При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

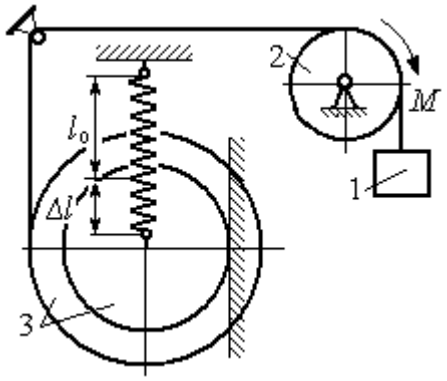


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

Какой величины уравновешивающий момент *M* приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

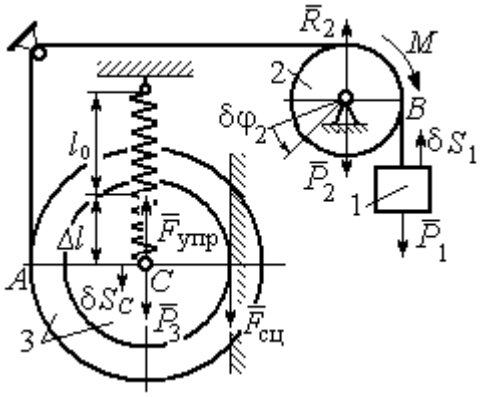


Рис. 6.16. Расчётная схема уравновешивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C, направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1. Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C. Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C. Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \dfrac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_A}{r} = \frac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r}\delta S_C = 3\delta S_C;\ \ \delta\varphi_2 = \frac{R+r}{r^2}\delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3\delta S_C - c\Delta l\delta S_C + M\frac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравновешивающего момента $M = \frac{1}{3}mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой F, приложенной к внешнему рычагу, и силой Q, сжимающей деталь A вдоль центральной оси.

Длины рычагов a, b, c, d показаны на рис. 6.17.

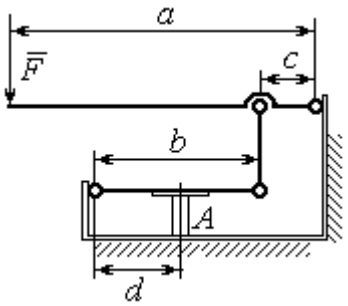


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными валы (рис. 6.18).

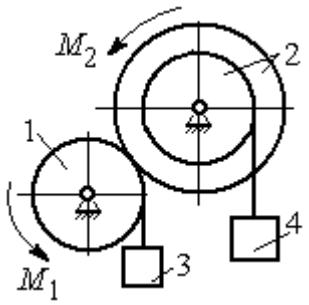


Рис. 6.18. Схема уравновешивания валов

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скреплённых на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравновешивающего момента M_2, приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса P.

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M. Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с, если P_1 = 10 Н; P_2 = 20 Н; P_3 = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_{2C} = 0,6 м.

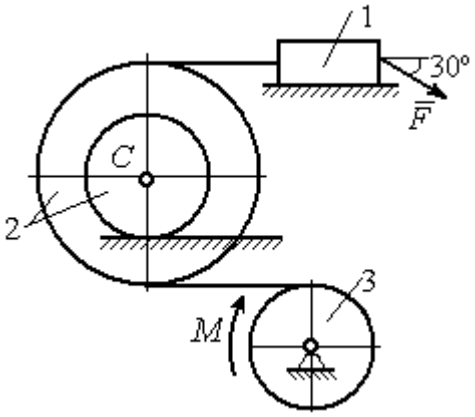


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$ и реакция шарнира O блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

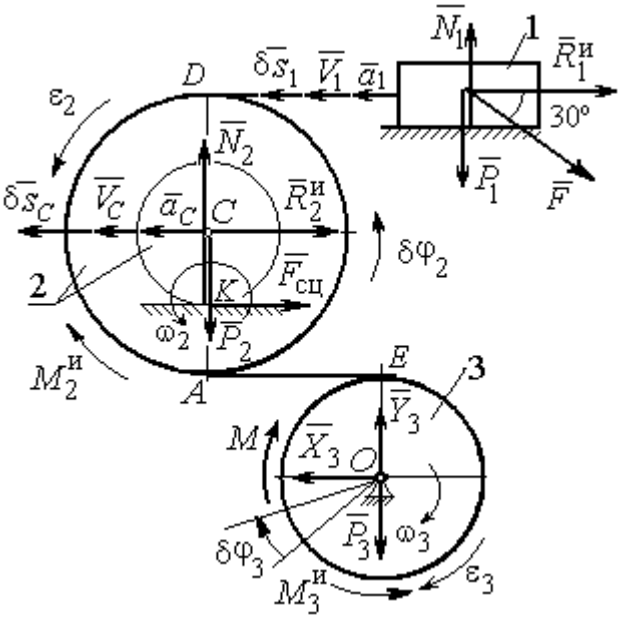


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении поворота, создаваемого моментом M. Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2, а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{\text{и}}$, $\vec{R}_2^{\text{и}}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{\text{и}}$, $\vec{M}_3^{\text{и}}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3.

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 (R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2} .$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_E}{R_3} = V_C \dfrac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2 (R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} .$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0;\ \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0;\ \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) =$$

$$= M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C,\ \ R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = -R_1^{\text{и}}\delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = -R_2^{\text{и}}\delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1(R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C -$$

$$-\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C = -52{,}75\, a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0{,}02 + 0{,}45t.$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0{,}02 + 0{,}45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0{,}01t^2 + 0{,}075t^3.$$

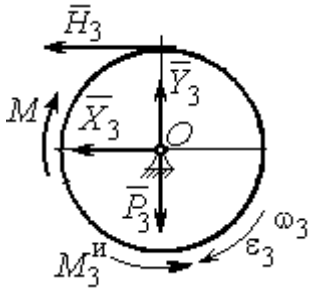


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21). Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения: $M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, откуда найдём реакцию нити: $H_3 = \dfrac{M}{R_3} - \dfrac{M_3^{\text{и}}}{R_3}$. Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0{,}7$ Н·м и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1$ с, $M(1) = 9$ Н·м найдём реакцию нити $H_3(1) = 20{,}75$ Н.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0,\ Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с: $X_3 = -20{,}75$ Н, $Y_3 = 15$ Н. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25{,}6$ Н.

Задача 69. Груз 2 весом P_2, поднимаемый лебёдкой (рис. 6 22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3. Нерастяжимая нить одним концом прицеплена к грузу 1 весом P_1, лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок B, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

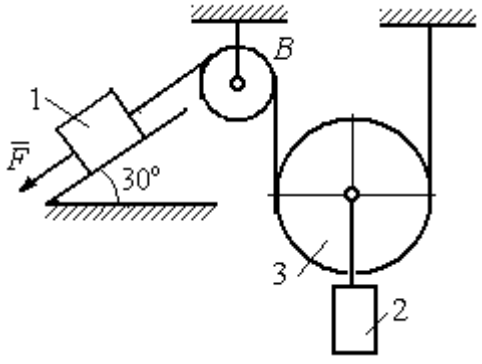


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока *B* и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1. Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

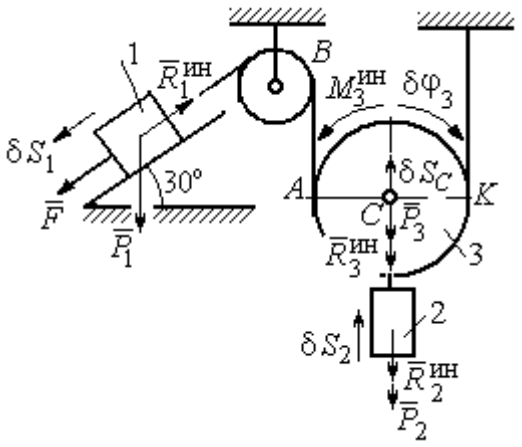


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1. В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C, а сам блок повернулся на угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1 \delta S_1 \cos 60° - P_2 \delta S_2 - P_3 \delta S_C -$$

$$- R_1^{\text{ин}} \delta S_1 - R_2^{\text{ин}} \delta S_C - R_3^{\text{ин}} \delta S_C - M_3^{\text{ин}} \delta \varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{ин}} = \dfrac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta \varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_A}{AK} = \dfrac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta \varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \dfrac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \dfrac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \dfrac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\dfrac{1}{2} P \delta S_1 = \dfrac{17}{8g} P a_1 \delta S_1$. Отсюда $a_1 = \dfrac{4}{17} g = 0{,}23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \dfrac{a_1}{2} = 0{,}12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0{,}12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0{,}06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

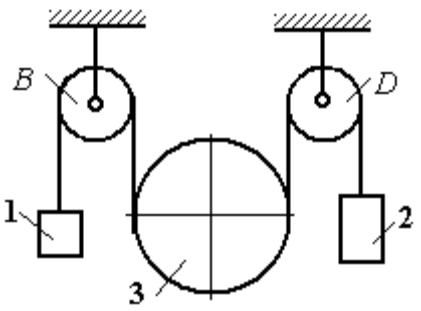


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D. Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо составлять для каждого из независимых перемещений.

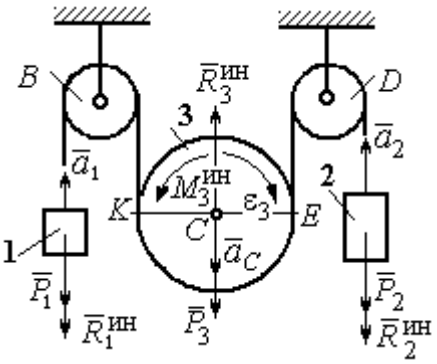


Рис.6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ε_3, направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{ин} = m_1 a_1$, $R_2^{ин} = m_2 a_2$, $R_3^{ин} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{ин} = J_{3C}\varepsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \dfrac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку K за полюс. Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}^{\,n}_{EK} + \vec{a}^{\,\tau}_{EK}$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K; $\vec{a}^{\,n}_{EK}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{EK}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$. Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a^{\tau}_{EK}$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

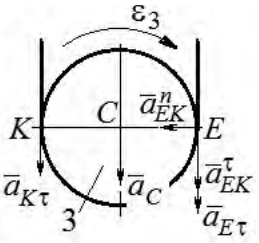


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a^{\tau}_{EK} = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \dfrac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \dfrac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a^{\tau}_{CK} = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D. Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2.

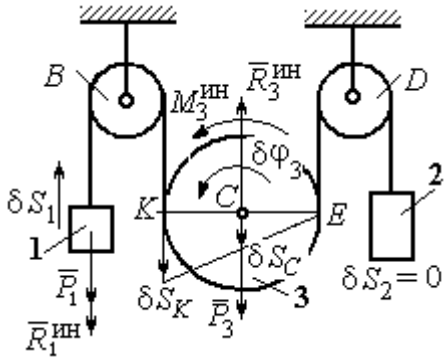


Рис.6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1, а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \dfrac{V_K}{2r} = \dfrac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \dfrac{1}{2}V_1$. Тогда элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \dfrac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) + \sum \delta A\left(\vec{R}_k^{\text{ин}}\right) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C}\varepsilon_3\delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3 a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

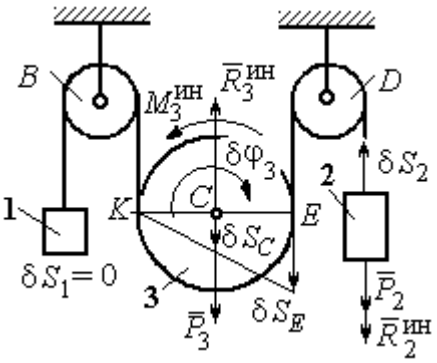


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{ин}$, $\vec{R}_3^{ин}$ и пара сил с моментом $M_3^{ин}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{ин}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{ин}\delta s_C - M_3^{ин}\delta\varphi_3 = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{a_2-a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3 a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2, получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2. Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса r и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов r и $R = 2r$, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень, двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{\text{вр}} = mgr\sin\omega t$.

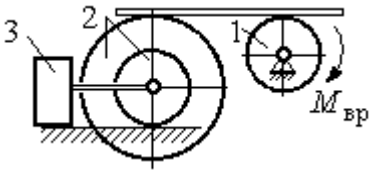


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1{,}5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t+1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны P, вес барабана 2 равен $2P$, радиусы ступенек барабана r и $2r$, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

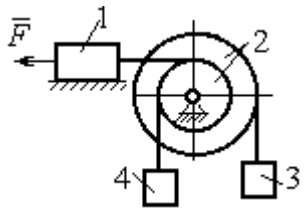


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые **вариациями обобщенных координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s$.

Величина Q_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1,2,...,s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы m_5 = 50 кг.

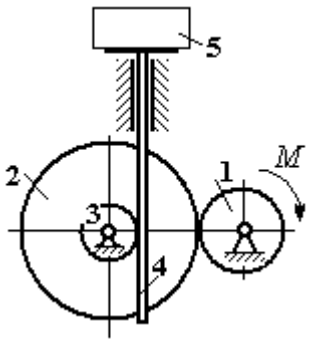


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс r_1 = 5 см, r_2 = 12 см, r_3 = 6 см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс m_1 = 0,8 кг, m_2 = 1,6 кг, m_3 = 0,6 кг, масса зубчатой рейки m_4 = 1 кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость V_5 = 1 м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату *x*, отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты *x* имеет вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1=\frac{J_1\omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1=\frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно: $T_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}$, $T_3=\frac{J_3\omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2, J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2=\frac{m_2 r_2^2}{2}$, $J_3=\frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5=V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5: $T_4=\frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5=\frac{m_5 V_4^2}{2}$.

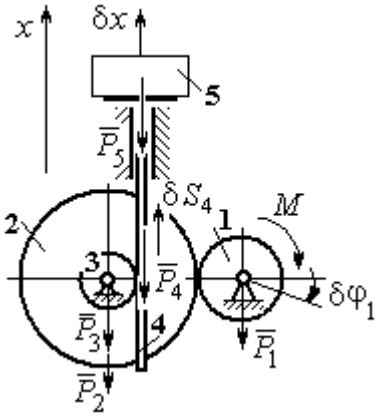


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \dfrac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$ следует $\omega_1 = \dfrac{\omega_2 r_2}{r_1} = \dfrac{V_4 r_2}{r_1 r_3}$.

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 =$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{4}\left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}\right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} =$$

$$= \left[\frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5\right]\frac{V_4^2}{2} = 28{,}05\, V_4^2 = 28{,}05\, \dot{x}^2 .$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4, а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta\varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta\varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta\varphi_1 = \dfrac{r_2}{r_1 r_3}\delta x$. В результате сумма работ сил на возможном перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3}\right)\delta x$. Отсюда обобщённая сила Q_x, соответствующая координате x: $Q_x = -(m_5 + m_4)g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3} = -500{,}31 + 40M$.

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56{,}1\,\ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение движения имеет вид: $56{,}1\,\ddot{x} = -500{,}31+40M$ или $\ddot{x} = -8{,}92+0{,}71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8{,}92+0{,}71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13{,}27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c. Радиусы ступеней блока r и $R = 1{,}5r$, радиус катка 3 равен r. Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M. Качение катка по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

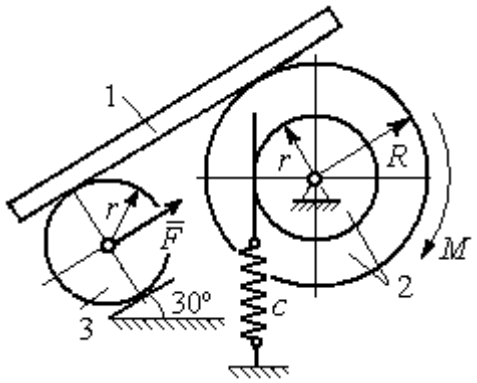


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x.

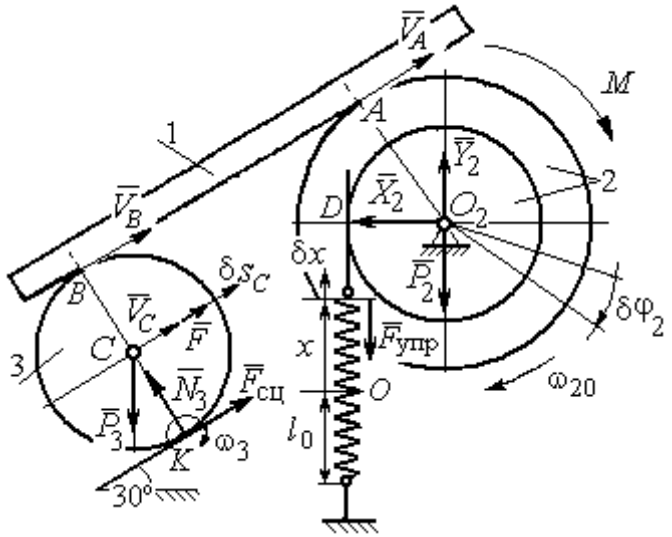


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z, $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C, ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2, ω_3, а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \dfrac{V_D}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки A блока 2: $V_A = \omega_2 R = \dfrac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек A и B равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \dfrac{V_B}{2r} = \dfrac{V_A}{2r} = \dfrac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \dfrac{V_B}{2} = \dfrac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r}\right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r}\right)^2\right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние $\delta s_C = \dfrac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом M, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M: $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\dfrac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C\cos 120^\circ = -P_3\dfrac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F: $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\dfrac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180° = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\dfrac{17}{8} - \dfrac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{2P}{g}\left(2 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ и, подставляя их в общий вид уравнений Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10{,}2x = 4{,}34 \text{ (здесь } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2\text{).}$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10{,}2}$ = 3,19 рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0{,}42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3{,}19t + C_2 \cos 3{,}19t + 0{,}42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0{,}5$ рад/с, то при $r = 0{,}2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3{,}19 C_1 \cos 3{,}19t - 3{,}19 C_2 \sin 3{,}19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}03 \sin 3{,}19t - 0{,}42 \cos 3{,}19t + 0{,}42$ м. Уравнение колебательного движения блока 2: $\varphi_2 = \dfrac{x}{r} = 0{,}15 \sin 3{,}19t - 2{,}1 \cos 3{,}19t + 2{,}1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r. Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

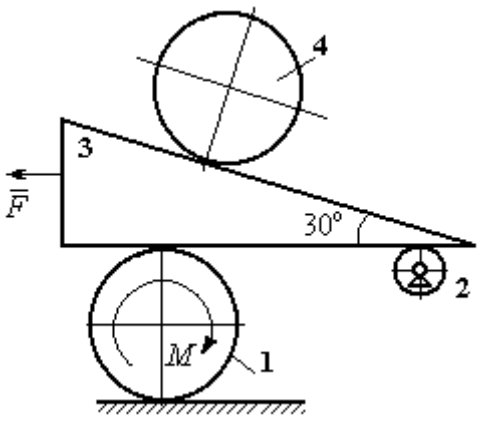


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30º. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

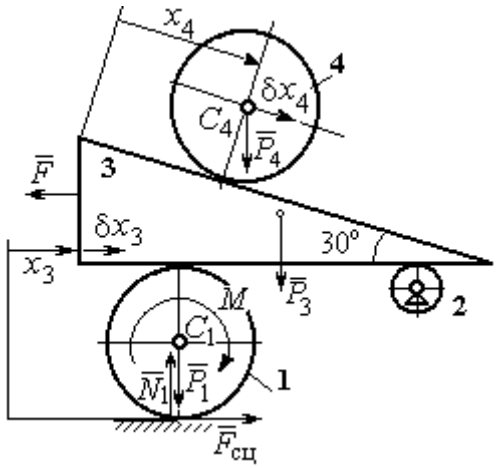


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщённых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$; J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}$.

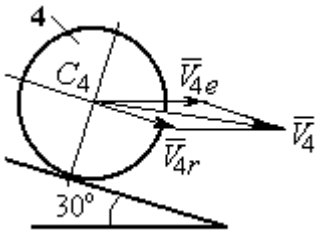


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

При расчёте кинетической энергии катка 4 по формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ .$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении $\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}$.

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

$$= \frac{P}{2g}\left(\frac{27}{8}\dot{x}_3^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_4^2 + \dot{x}_3\dot{x}_4\sqrt{3}\right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M, приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r}\right)\delta x_3 .$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4\delta x_4\cos 60^\circ = \frac{1}{2}P\delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4: $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) = \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3;\ \ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6{,}75\ddot{x}_3 + 1{,}73\ddot{x}_4 = g\,; \quad 3\ddot{x}_4 + 1{,}73\ddot{x}_3 = g\,.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0{,}07g,\ \ddot{x}_4 = 0{,}29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0{,}035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0{,}145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины *c*. Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен *r*. Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса *R*. К блоку 3 приложена пара сил с моментом *M*. Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

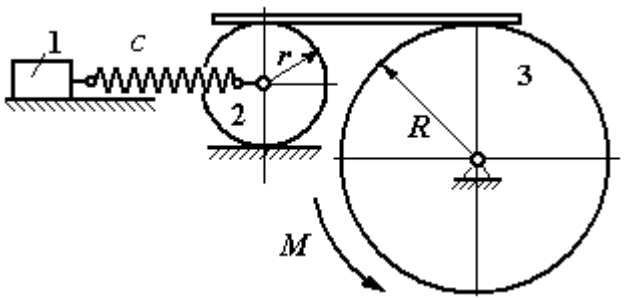


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0.

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно P_1 = 10 Н, P_2 = 20 Н, P_3 = 30 Н, M = 5 Н·м, R = 24 см, c = 207 Н/м, Δl_0 = 5 см.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

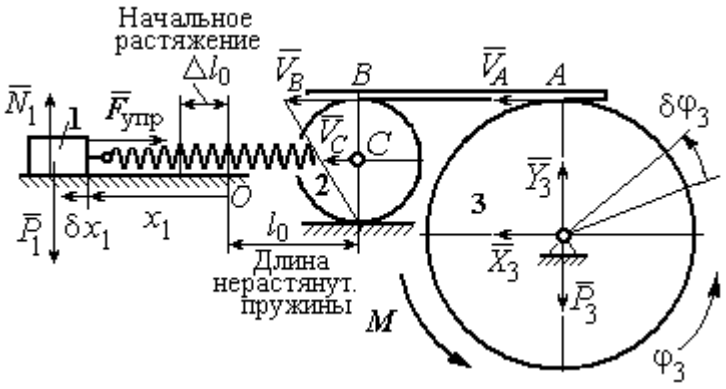


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2} V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q_\varphi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x, Q_φ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и φ_3.

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4} m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3: $T_3 = \frac{1}{2} J_{3z} \omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Окончательно $T_3 = \frac{1}{4} m_3 \dot{\varphi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R)^2 + \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{\varphi}_3 R + \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{3}{16} m_2 + \frac{1}{4} m_3\right) \dot{\varphi}_3^2 R^2.$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta\varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1: $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x, соответствующая координате x_1: $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta\varphi_3$: $\delta\varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка *C* движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом *M*, приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta\varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\dot{\varphi}_3;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2}m_1R\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\dot{\varphi}_3R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\ddot{\varphi}_3;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = \frac{1}{2}m_1R\ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\ddot{\varphi}_3R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\varphi}_3$:

$$1{,}02\ddot{x}_1 + 0{,}12\ddot{\varphi}_3 = -207x_1;\ \ 0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительных колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4{,}35.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0{,}02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1\sin 15t + C_2\cos 15t - 0{,}02.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0{,}05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0{,}05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0{,}07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15\cos 15t - C_2 15\sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0{,}07\cos 15t - 0{,}02 \text{ м}.$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим: $\ddot{\varphi}_3 = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\dfrac{d\omega_3}{dt} = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33{,}33t + 0{,}84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения блока 3: $\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + C_3 t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0{,}056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + 0{,}056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0{,}06\cos 15t - 0{,}01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r, движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P / r$, прикреплённой одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

Найти закон движения груза 2 и максимальное растяжение пружины, если движение системы началось из состояния покоя при недеформированной пружине.

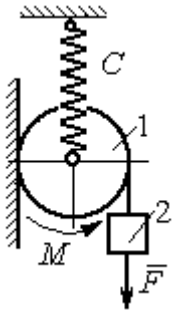


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков B и D пренебречь.

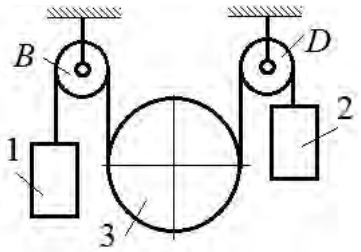


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса r весом P катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передаёт движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса r и веса P, который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

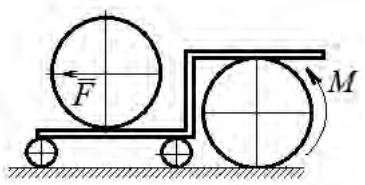


Рис. 6 42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

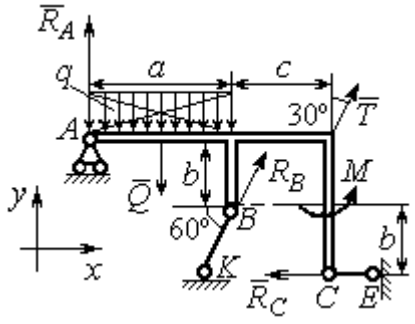


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$T = 15$ кН, $Q = 15$ кН.

$$R_B\cos60^\circ + T\cos60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B\cos30^\circ + T\cos30^\circ = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{a}{2} + R_B\cos30^\circ\cdot a + R_B\cos60^\circ\cdot b + T\cos30^\circ\cdot(a+c) + M - R_C\cdot 2b = 0.$$

$R_B = -3{,}8$ кН, $R_C = 5{,}6$ кН, $R_A = 5{,}3$ кН.

1.2

$Q = 9$ кН. $T = 2$ кН.

$$X_A + T\cos30^\circ + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos60^\circ + R_B - T\cos60^\circ - F = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{c}{2} + R_B(b + c\cos60^\circ) - Fc\cos60^\circ + M - T\cos60^\circ(b + c\cos60^\circ) - T\cos30^\circ(a + c\sin60^\circ) = 0.$$

$R_B = 10{,}02$ кН, $X_A = -9{,}53$ кН, $Y_A = -0{,}52$ кН.

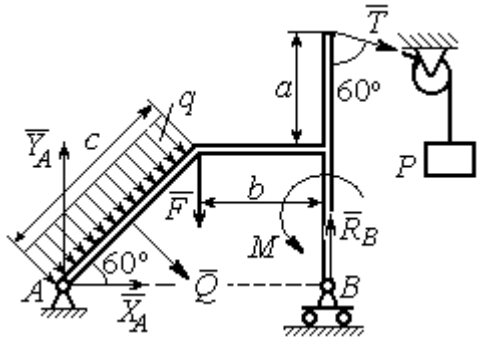


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

1.3

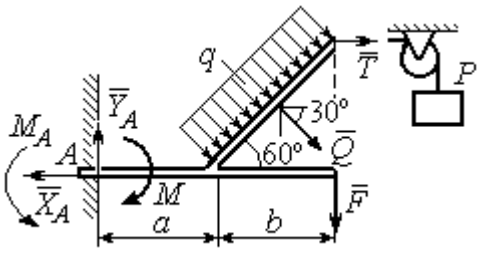


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$Q = 8$ кН. $T = 3$ кН.

$$-X_A + T + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos60° - F = 0;$$

$$-T2b\cos30° - F(a+b) + M_A - M - Q\cos60°\left(a + \frac{b}{2}\right) - Q\cos30^\circ\left(b\cos30^\circ\right) = 0.$$

$M_A = 18{,}61$ кН·м, $X_A = 9{,}93$ кН, $Y_A = 6$ кН.

1.4

$Q = 6{,}93$ кН, $T = 2$ кН.

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - Fa\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

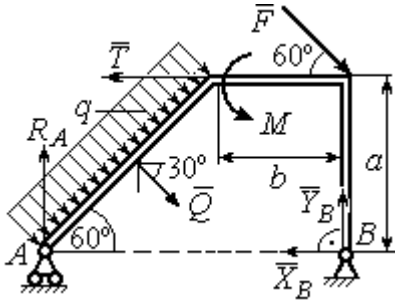


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

$R_A = 0{,}72$ кН, $X_B = -5{,}5$ кН, $Y_B = 5{,}34$ кН.

1.5

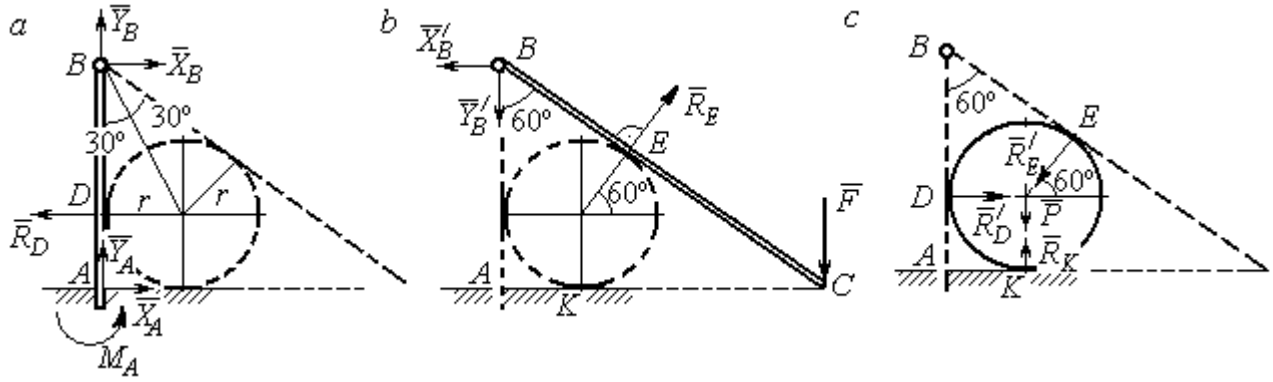


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BC*; *c* – равновесие шара

$X_B = X'_B$, $Y_B = Y'_B$, $R_D = R'_D$, $R_E = R'_E$.

Балка *AB*. $AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg}30^\circ = 2{,}73$ м.

$$X_A - R_D + X_B = 0, \quad Y_A + Y_B = 0, \quad M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка *BC*. $BE = BD = 1{,}73$ м. $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4{,}73$ м.

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, \quad RE\sin 60\circ - Y'B - F = 0, \quad R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, \quad R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$R_E = 21{,}87$ кН, $Y_B = 10{,}94$ кН, $X_B = 10{,}94$ кН, $R_D = 10{,}94$ кН;

$R_K = 20{,}94$ кН, $X_A = 0$, $Y_A = -10{,}94$ кН, $M_A = 18{,}93$ кН·м.

1.6

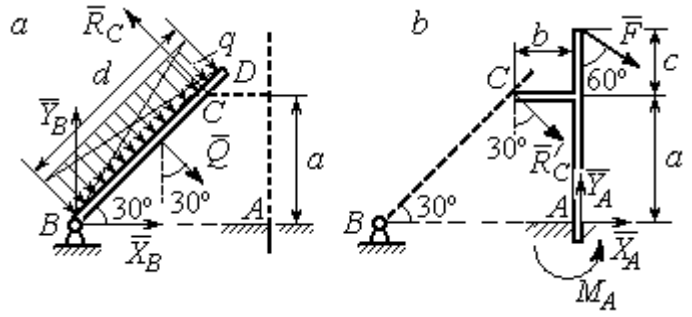


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
a – равновесие балки *BD*; *b* – равновесие балки *AC*

Балка *BD*. $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q\cos 60^\circ - R_C\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q\cos 30^\circ + R_C\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q\frac{d}{2} + R_C\, 2a = 0.$$

Балка *AC*. $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0,\ Y_A - R'_C\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C\cos 60^\circ \cdot a + R'_C\cos 30^\circ \cdot b - F\cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0{,}61 \text{ кН},\ \ Y_B = 8{,}3 \text{ кН},\ R_C = 9{,}37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8{,}15 \text{ кН},\ \ Y_A = 10{,}11 \text{ кН},\ \ M_A = 11{,}65 \text{ кН·м}.$$

1.7

Балка *AB*. $Q_1 = 6$ кН.

$T = P = 3$ кН.

$$X_A + R_B - T\cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_1\frac{a}{2} +$$

$$+ T\cos 30^\circ a + T\cos 60^\circ c\cos 30^\circ -$$

$$- F\left[c + (b + c)\cos 30^\circ\right] = 0.$$

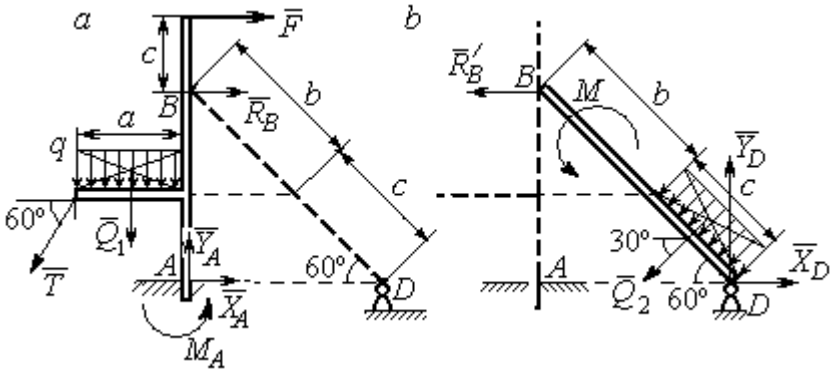


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BD*

Балка *DB*. $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2\cos 30^\circ = 0,\ \ Y_D - Q_2\cos 60^\circ = 0,\ M + R'_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_2\frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1{,}49 \text{ кН},\ Y_A = 8{,}6 \text{ кН},\ M_A = 8{,}86 \text{ кН},\ R_B = -1{,}01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1{,}59 \text{ кН},\ \ Y_D = 1{,}5 \text{ кН}.$$

1.8

Шар.

$$R_B\cos60^\circ - R_D\cos60^\circ = 0;$$

$$R_B\cos30^\circ + R_D\cos30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B\cos60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B\cos30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC\cos30^\circ = 0.$$

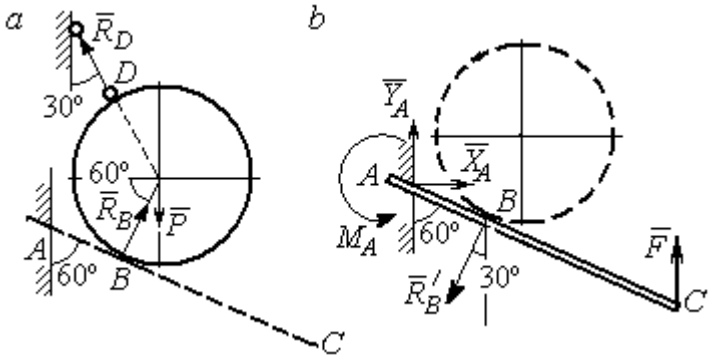


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
a – равновесие шара; *b* – равновесие балки *AC*

$X_A = 2{,}89$ кН, $Y_A = 0$ кН, $M_A = -11{,}55$ кН·м, $R_B = 5{,}77$ кН, $R_D = 5{,}77$ кН.

1.9

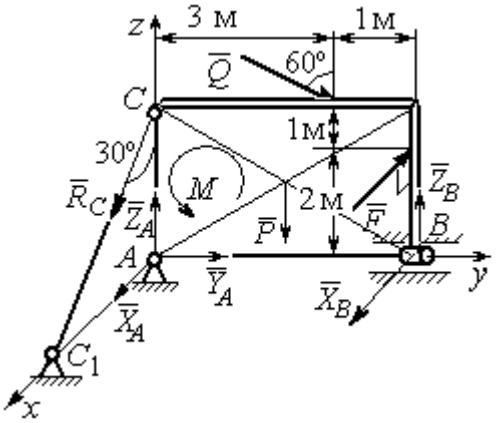


Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C\cos60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C\cos30^\circ - Q\cos60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q\cos60^\circ \cdot 3 - Q\cos30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C\cos60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0,\ -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}34$ кН, $Y_A = 2{,}6$ кН;

$Z_A = 8{,}92$ кН, $R_C = 10{,}67$ кН;

$X_B = 8$ кН, $Z_B = 3{,}82$ кН.

1.10

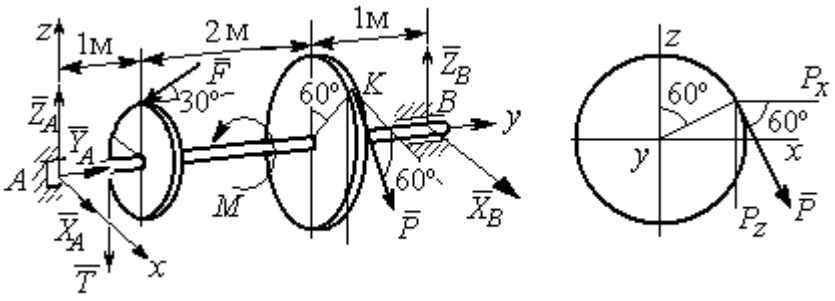


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$T = Q = 3$ кН.

$$X_A + P\cos 60^\circ + X_B = 0,\ \ Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T\cdot 1 - F\cos 60^\circ \cdot 1 + F\cos 30^\circ \cdot r - P\cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0,\ \ -P\cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}6$ кН, $Y_A = 3{,}46$ кН, $Z_A = 5{,}48$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 2{,}4$ кН, $Z_B = 5{,}06$ кН.

1.11

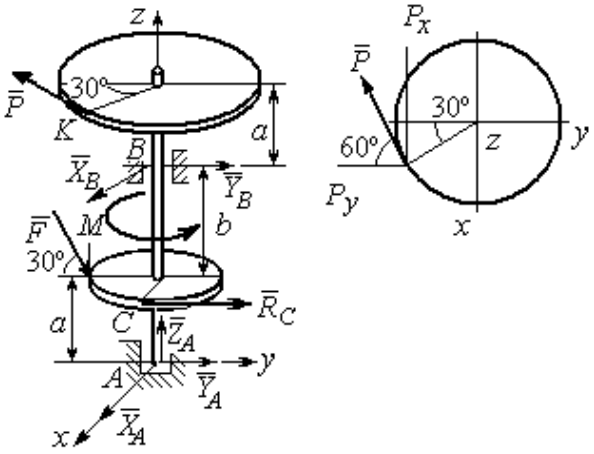


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$R_C = Q = 3$ кН.

$$X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos 60^\circ + R_C + F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos 60^\circ(2a+b) - R_C a - -$$

$$F\cos 30^\circ \cdot a + F\cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$X_A = -1{,}85$ кН, $Y_A = -5{,}64$ кН, $Z_A = 2$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 7{,}39$ кН, $Y_B = 2{,}38$кН.

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + T + X_D = 0;\ Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Fa\sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$Ta\sin 30^\circ - Pa\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + Pa\cos 60^\circ + Fa\cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0{,}8 \text{ кН},\quad Y_A = 2{,}56 \text{ кН},\ \ Z_A = 1{,}3 \text{ кН};$$

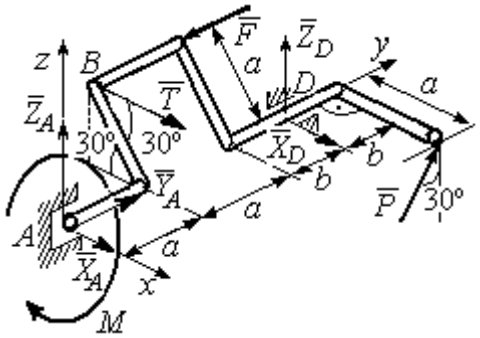


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2{,}89 \text{ кН},\ X_D = 0{,}76 \text{ кН},\ Z_D = -3{,}80 \text{ кН}.$$

1.13

Минимальный вес груза P:

$$T_{\min} + F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0$$

Максимальный вес груза P:

$$T_{\max} - F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

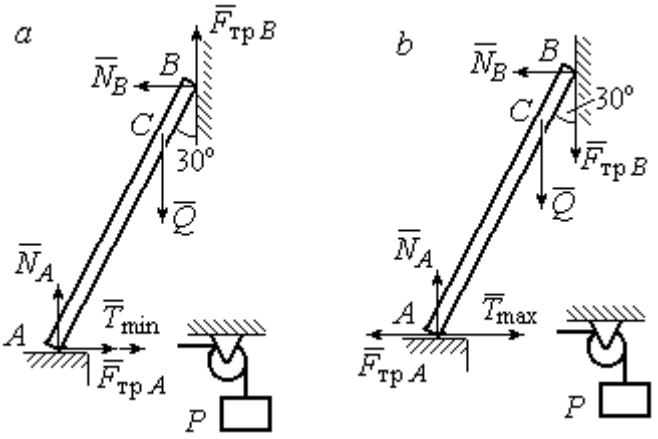


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
a – расчёт минимального веса груза;
b – расчёт максимального веса груза

$$-F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,A} = f N_A,\ F_{\text{тр}\,B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31.77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130{,}51 \text{ Н}.$$

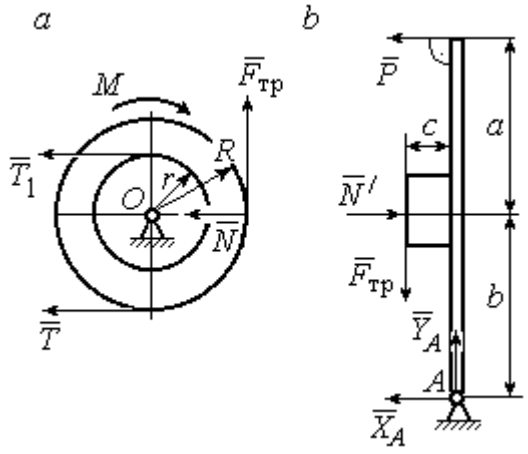


Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:
a – равновесие шкива; *b* – равновесие рычага

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266{,}67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666{,}67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a+b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346{,}67 \text{ Н},\ Y_A = 266{,}67 \text{ Н}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2},\ \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с}.$$

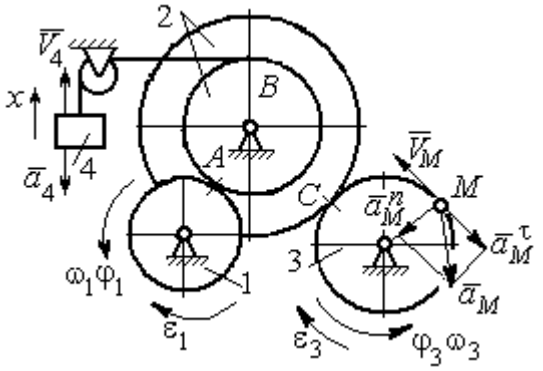


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z}\frac{R_1}{r_2}\frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)\frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с}.$$

$$V_M(1) = \omega_3(1)R_3 = 40 \text{ см/с}.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3}\sin\frac{\pi t}{2},\quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6{,}58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau,\ a_M^n(1) = \omega_3^2(1)R_3 = 160 \text{ см/с}^2,\ a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1)R_3 = 65{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z}R_1 = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)8;\ V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с}.$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2\sin\frac{\pi t}{2},\ \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2;\ a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39{,}48 \text{ см/с}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2{,}05 \text{ м/с},\ V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3}\left(1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6{,}83 \text{ рад/с};\ \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3}\left(\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}\right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3{,}65 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

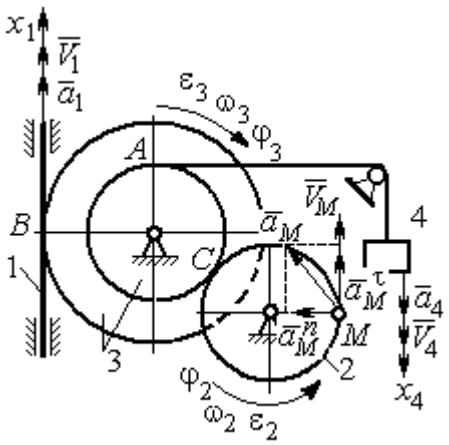


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \omega_2=\omega_3\frac{r_3}{R_2}=10{,}25\ \text{рад/с};\ V_M=\omega_2 R_2=2{,}05\ \text{м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_3\frac{r_3}{R_2}=5{,}47\ \text{рад/с}^2.$$

$$a_M^n=\omega_2^2 R_2=20{,}4\ \text{м/с}^2;\ \ a_M^\tau=\varepsilon_2 R_2=1{,}09\ \text{м/с}^2.$$

$$a_M=\sqrt{\left(a_M^n\right)^2+\left(a_M^\tau\right)^2}=20{,}43\ \text{м/с}^2.$$

$$V_1=\omega_3 R_3=2{,}73\ \text{м/с};\ a_1=\dot V_1=\dot\omega_3 R_3=\varepsilon_3 R_3=2{,}19\ \text{м/с}^2.$$

2.3

$$BP_2=BC\cos30^\circ=4{,}33\ \text{см};\ CP_2=2{,}5\ \text{см}.$$

$$\omega_{BC}=\frac{V_B}{BP_2}=1{,}15\ \text{рад/с};\ \ V_C=\omega_{BC}CP_2=2{,}87\ \text{см/с};$$

$$\omega_1=\frac{V_C}{CP_1}=0{,}72\ \text{рад/с};\ EP_1=2R_1\cos30^\circ=3{,}46\ \text{см};$$

$$V_E=\omega_1 EP_1=2{,}49\ \text{см/с};\ EP_3=2AE\cos30^\circ=10{,}39\ \text{см};$$

$$\omega_{AE}=\frac{V_E}{EP_3}=0{,}24\ \text{рад/с};\ \ EA=AP_3;$$

$$V_A=\omega_{AE}AP_3=1{,}44\ \text{см/с},\ \ \omega_{AO}=\frac{V_A}{AO}=0{,}24\ \text{рад/с}.$$

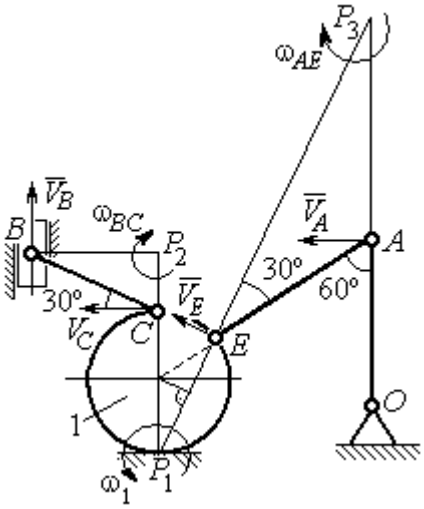


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

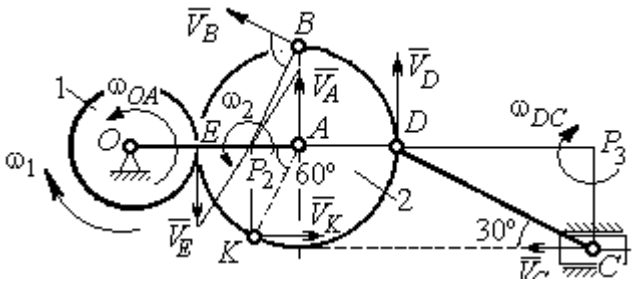


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E=\omega_1 r_1=18\ \text{см/с}.$$

$$V_A=\omega_{OA}(r_1+r_2)=18\ \text{см/с}.$$

$$EP_2=P_2A=3\ \text{см},\ \omega_2=\frac{V_E}{EP_2}=6\ \text{рад/с}.$$

$$V_K=\omega_2 P_2K=31{,}18\ \text{см/с}.$$

$$V_B=\omega_2 P_2B=40{,}25\ \text{см/с};\ V_D=\omega_2 P_2D=54\ \text{см/с}.$$

$$DC = 2r_2,\ \omega_{DC} = \frac{V_D}{DP_3} = 5{,}197 \text{ рад/с};\ V_C\cos 30^\circ = V_D\cos 60^\circ,\ V_C = 31{,}18 \text{ см/с}.$$

2.5

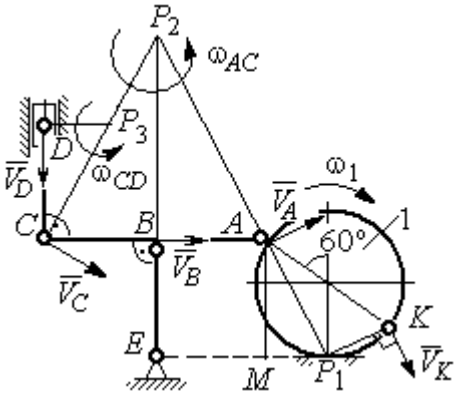


Рис. 7. 19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$$BE = 1{,}5R_1;\ R_1 = 2{,}67 \text{ см}.$$

$$KP_1 = R_1;\ \omega_1 = \frac{V_K}{KP_1} = 0{,}75 \text{ рад/с}.$$

$$AP_1 = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = 4{,}62 \text{ см};\ V_A = \omega_1 P_1 A = 3{,}46 \text{ см/с}.$$

$$AP_2 = 2AB = 8 \text{ см};\ \omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}43 \text{ рад/с}.$$

$$V_B\cos 0^\circ = V_A\cos 30^\circ;\ V_B = 2{,}99 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{BE} = \frac{V_B}{BE} = 0{,}75 \text{ рад/с};\ V_C = V_A = 3{,}46 \text{ см/с};\ CP_3 = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62 \text{ см};$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_3} = 0{,}75 \text{ рад/с};\ V_D\cos 0^\circ = V_C\cos 60^\circ;\ V_D = 1{,}73 \text{ см/с}.$$

2.6

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12 \text{ см/с};\ \omega_{AD} = 0,\ V_D = V_A.$$

$$\omega_{O_1C} = \frac{V_D}{DO_1} = 3 \text{ рад/с};$$

$$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48 \text{ см/с}.$$

$$CB = CP = 16 \text{ см};\ \omega_{CB} = \omega_{CL} = \frac{V_C}{CP} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$PL = \frac{CP}{\cos 30^\circ} = 18{,}48 \text{ см};\ PB = 2BC\cos 30^\circ.$$

$$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55{,}44 \text{ см/с};$$

$$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83{,}13 \text{ см/с}.$$

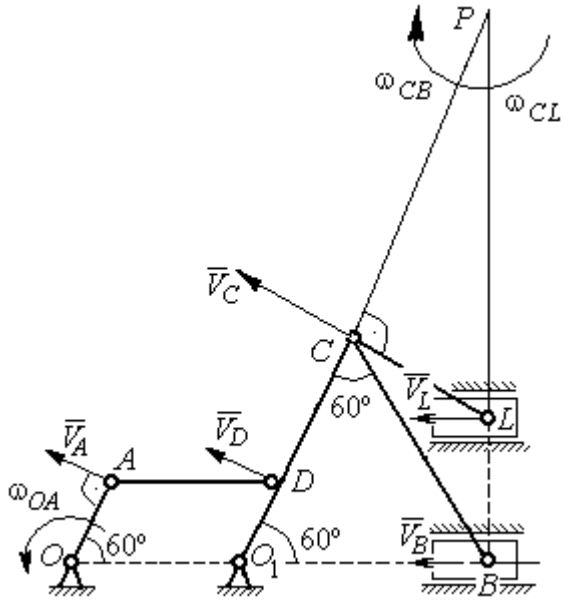


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$V_D = \omega_1 R_1 = 30$ см/с; $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15$ см/с.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с}.$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21{,}21 \text{ см/с}.$$

$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ$; $V_C = 15$ см/с.

$CP_3 = CB$; $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 1{,}87$ рад/с.

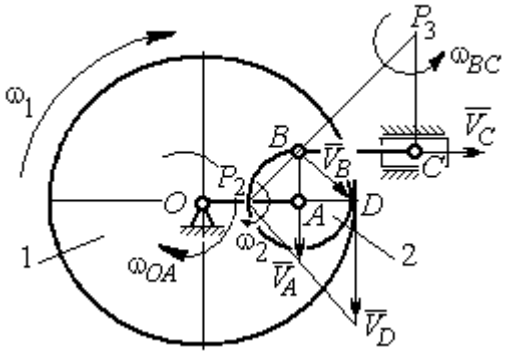


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

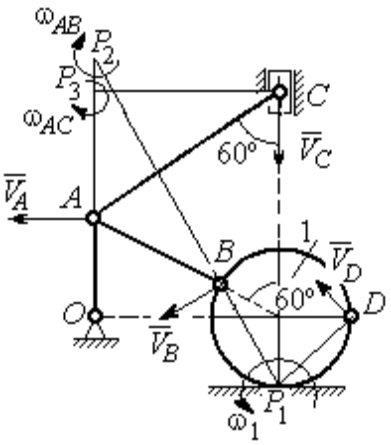


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$AC = AB + R_1 = 12$ см; $CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10{,}39$ см.

$\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}48$ рад/с; $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2{,}89$ см/с.

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}29 \text{ рад/с}.$$

$$BP_2 = 2AB \cos 30^\circ = 17{,}32 \text{ см}.$$

$$V_B = \omega_{AB} BP_2 = 5{,}02 \text{ см/с}.$$

$OA = (AB + R_1)\sin 30° = 6$ см; $\omega_{OA} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}48$ рад/с.

$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3{,}46$ см; $\omega_1 = \dfrac{V_B}{BP_1} = 1{,}45$ рад/с.

$DP_1 = R_1\sqrt{2} = 2{,}82$ см; $V_D = \omega_1 DP_1 = 4{,}09$ см/с.

2.9

$V_A = \omega_{OA} OA = 12$ см/с; $AP = 2AB = 2BC \cdot \text{tg}60^\circ = 27{,}71$ см.

$\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP} = 0{,}43$ рад/с; $V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ$; $V_B = 10{,}38$ см/с.

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1{,}29 \text{ рад/с}.$$

$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}$; $\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC}$, $a_C = 0$.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO},\ a_O = 0.$$

$$\bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC} = \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO} + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти a^τ_{BC}

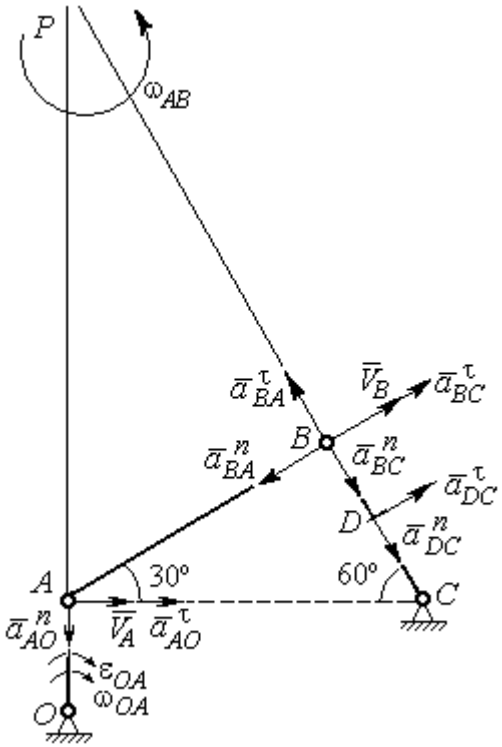


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

$$a^n_{AO} = \omega^2_{AO} \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a^\tau_{AO} = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \text{tg}60^\circ = 13{,}86 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 2{,}56 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{AB} = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a^n_{BC} = \omega^2_{BC} \cdot BC = 13{,}31 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{BC} = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a^\tau_{BC} = -a^n_{AO}\cos 60^\circ +$$

$$+ a^\tau_{AO}\cos 30^\circ - a^n_{BA} = 13{,}63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\left|a^\tau_{BC}\right|}{BC} = 1{,}7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}.$$

$$a^n_{DC} = \omega^2_{BC} \cdot DC = 6{,}65 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{DC} = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{\left(a^n_{DC}\right)^2 + \left(a^\tau_{DC}\right)^2} = 9{,}51 \text{ см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с};\ P_2 A = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2{,}4 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ;\ V_B = 6{,}93 \text{ см/с}.$$

$$P_3 B = BC\cos 30^\circ = 8{,}66 \text{ см};$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0{,}8 \text{ рад/с}.$$

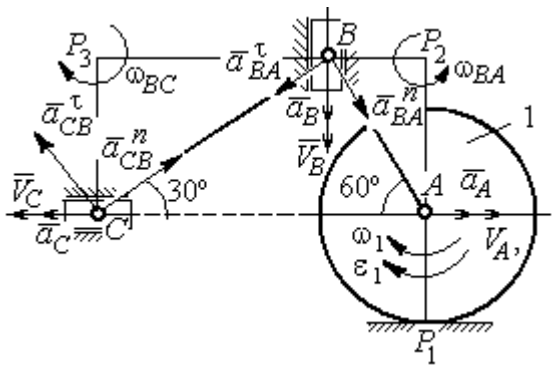


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти a_B.

Проекция на BA: $a_B\cos30° = a_A\cos60° + a^n_{BA}$.

$$a_A = a^\tau_A = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ см/с}^2;\ AB = BC\operatorname{tg}30° = 5{,}77 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{BA} \cdot BA = 33{,}23 \text{ см/с}^2;\ \ a_B = 43{,}03 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}^n_{CB} + \bar{a}^\tau_{CB}.$$

Проекция на BC: $a_C\cos60° = a_B\cos60° - a^n_{CB}$,

$$a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB = 6{,}4 \text{ см/с}^2;\ \ a_C = a_B - 2a^n_{CB} = 30{,}23 \text{ см/с}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 11{,}55 \text{ см}.$$

Так как $CM_1\cos30° = 10$ см $= R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

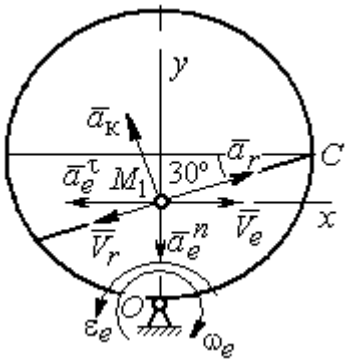


Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{40\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{3};\ V_r(1) = 6{,}98 \text{ см/с}.$$

$$\omega_e(1) = 0{,}5 \text{ рад/с};\ OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4{,}23 \text{ см}.$$

$$V_e = \omega_e OM_1;\ \ V_e(1) = 2{,}12 \text{ см/с}.$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r\cos30° = -3{,}93 \text{ м/с};\ V_{My} = -V_r\cos60° = -3{,}49 \text{ м/с};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5{,}26 \text{ см/с}.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}^n_e + \bar{a}^\tau_e,\ \ a^n_e = \omega^2_e OM_1;\ \ a^n_e(1) = 1{,}06 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot{\omega}_e = -\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3},\ \ \dot{\omega}_e(1) = -0{,}91 \text{ рад/с}^2;\ \ \varepsilon_e = |\dot{\omega}_e(1)| = 0{,}91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a^\tau_e(1) = \varepsilon_e \cdot OM_1 = 3{,}85 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27}\sin\frac{\pi t}{3},\ \dot{V}_r(1) = -12{,}66;\ a_r = \left|\dot{V}_r(1)\right| = 12{,}66\ \text{см/с}^2$$

$$a_к = 2\left|\omega_e\right|\cdot\left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 6{,}98\ \text{см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_к.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r\cos 30° - a_к\cos 60° = 3{,}62\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r\cos 60° + a_к\cos 30° = 11{,}31\ \text{см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11{,}87\ \text{см/с}^2.$$

3.2

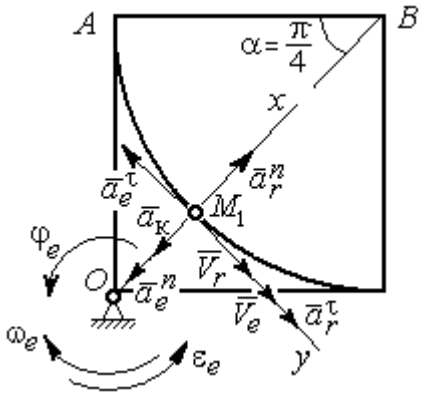


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение M_1:

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4};\ \ OM_1 = 8{,}28\ \text{см}.$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t;\ \ V_r = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 31{,}42\ \text{см/с}.$$

$$\dot{\varphi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\varphi}_e(1) = -3\ \text{рад/с},\ \ \omega_e = \left|\dot{\varphi}_e(1)\right| = 3\ \text{рад/с}.$$

$$V_e = \omega_e\cdot OM_1 = 24{,}6\ \text{см/с}.$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r\cdot\ V_{Mx} = V_e + V_r = 56{,}02\ \text{см/с};$$

$$V_{My} = 0;\ V_M = 56{,}02\ \text{см/с}.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_к.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau\ \cdot\ a_e^n = \omega_e^2\cdot OM_1 = 74{,}52\ \text{см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2\ \text{рад/с}^2;\ \varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|;\ \ a_e^\tau(1) = \varepsilon_e OM_1 = 16{,}56\ \text{см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau\cdot\dot{V}_r = 10\pi;\ a_r^\tau = \left|\dot{V}_r\right| = 10\pi = 31{,}42\ \text{см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49{,}36\ \text{см/с}^2;\ \ a_к = 2\left|\omega_e\right|\cdot\left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 62{,}84\ \text{см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_к = -88\ \text{см/с}^2;\ a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14{,}86\ \text{см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89{,}24\ \text{см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60° - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30° = 0.$$

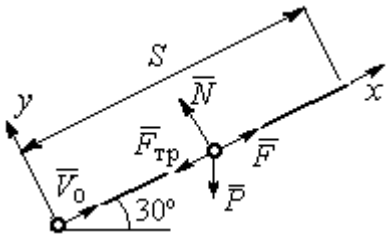


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30°;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3{,}4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3{,}4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1{,}7t^2 + V_0 t.$$

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6{,}8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3{,}4 + V_0.$$

$$k = 8{,}4; \; V_0 = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

4.2

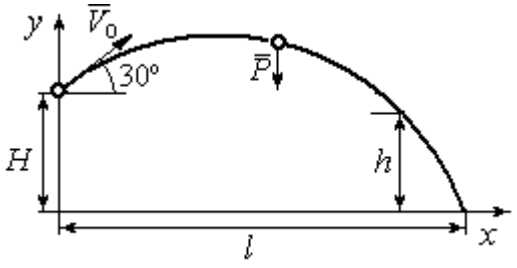


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \; \dot{x} = V_0\cos 30°; \; x = V_0 t\cos 30°.$$

$$m\ddot{y} = -P; \dot{y} = -gt + V_0\cos 60°;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\cos 60° + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h:

$$t = 1 \text{ с}; \; y = h = 7 \text{ м}.$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3{,}81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \; x = l; \; y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0 t_{\text{пад}}\cos 30°; \; 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0 t_{\text{пад}}\cos 60° + H.$$

Находим: $t_{\text{пад}} = 1{,}64$ с; $l = 5{,}41$ м.

4.3

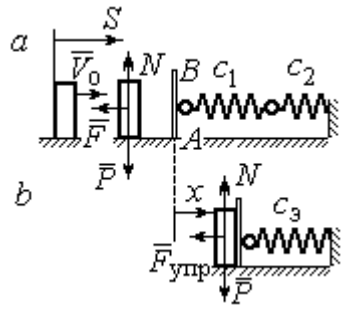


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3: *a* – движение груза до начала колебаний; *b* – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, *a*):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0;\ S = 0;\ \dot{S} = V_0$.

Решение: $S = \dfrac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 6\left(1 - e^{-t}\right)$ м.

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой AB: $V_1 = \dot{S}(1) = 0{,}21$ м/с.

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, *b*):

$$m\ddot{x} = -F_{упр} = -c_э x;\ c_э = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м}.$$

Начальные условия движения: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 7{,}75$ рад/с,

где константы: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_1}{\omega} = 0{,}28$ м. Закон движения груза $x = 0{,}28\sin 7{,}75t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_э = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э(\lambda_{ст} + x) = -c_э x.$$

Общее решение:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\frac{c_э}{m}} = 10{,}33 \text{ рад/с}.$$

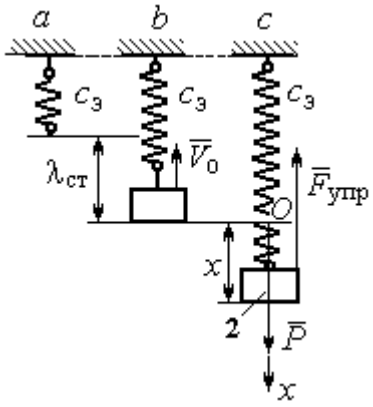


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4: *a* – нерастянутая пружина; *b* – положение статического равновесия; *c* – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_0}{\omega} = 0{,}39$ м.

Закон движения груза: $x = 0{,}39\sin 10{,}33t$.

Амплитуда $A = 0{,}39$ м, частота $\omega = 10{,}33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right]$.

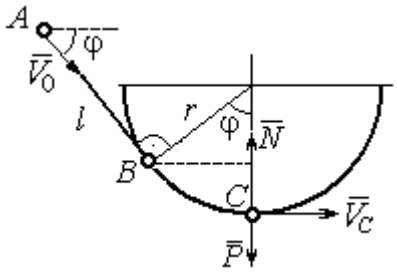


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

Уравнение движения человека, двигающегося вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\dfrac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \le 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \le 2gr$, или

$V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right] \le 2gr$. Откуда $r \ge \dfrac{V_0^2 + 2gl\sin\varphi}{2g\cos\varphi}$.

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg\left[R + R\cos 60° - a\cos 30°\right].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

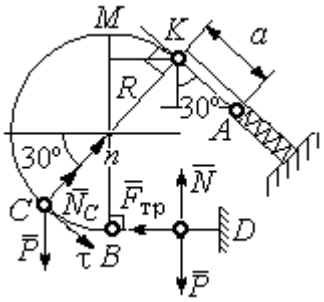


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: s = 5,39 м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60°.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство $N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60° = \frac{1}{R}\left[mV_B^2 - 2mgR(1-\cos 60°)\right] + mg\cos 60°$, где кинетическая энергия шарика в точке B: $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR\left[(1+\cos 60°) - \frac{a}{R}\cos 30°\right]$. Получим: $N_C = 18{,}71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

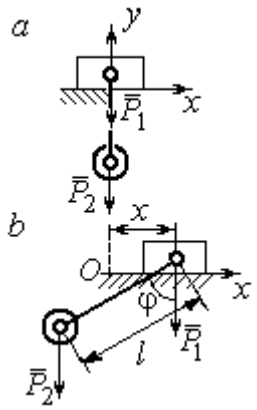


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:
a – начальное положение системы;
b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, x_0 = 0 (см. рис.7.33); x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения груза 2: $x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi$.

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси z: $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

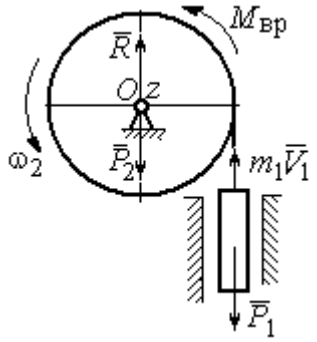


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2}\omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z: $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 g r$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 g r.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \dfrac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

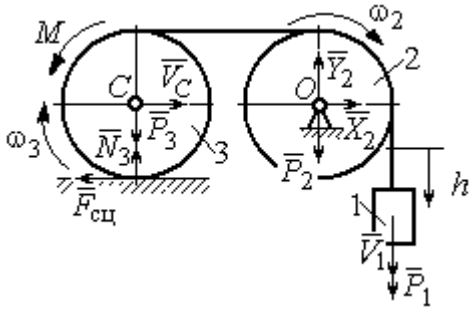


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \dfrac{1}{2} J_O \omega_2^2$, где осевой момент инерции блока: $J_O = \dfrac{m_2 r^2}{2}$, угловая скорость блока $\omega_2 = \dfrac{V_1}{r}$. Кинетическая энергия катка 3: $T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_C^2 + \dfrac{1}{2} J_C \omega_3^2$, где момент инерции катка относительно оси, проходя-

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа вешних сил на перемещении h: $\sum A(F_k) = P_1 h - M\frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h.$$

Скорость груза на высоте h: $V_1 = 4\sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}$.

5.4

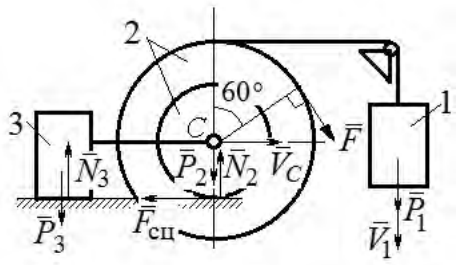


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1. Скорость центра масс катка V_C.

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2 V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$, $J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{9P}{2g}V_C^2$.

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы): $T = T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{17P}{2g}V_C^2$. Производная $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{17P}{g}V_C\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{17}{g}V_C a_C$.

Мощности сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{\text{сц}}$, $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле: $N(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F})\cdot\vec{\omega}_2 = FV_C\cos 60° + FR\omega_2$. Мощность силы $\vec{P}_1$ $N(\vec{P}_1) = P_1V_1$. Суммарная мощность внешних сил: $\sum N(F^e) = 7PV_C$.

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы: $\dfrac{17P}{g}V_C a_C = 7PV_C$, откуда $a_C = \dfrac{7}{17}g$ м/с^2.

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

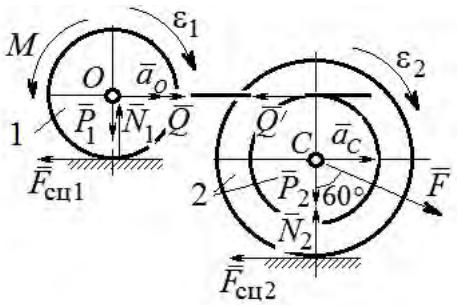


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц1}},\ J_{1O}\varepsilon_1 = F_{\text{сц1}}r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц2}} + F\cos 30°;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = F_{\text{сц2}}3r - Q'r.$$

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $\left|\vec{Q}\right| = \left|\vec{Q}'\right|$; $\vec{F}_{\text{сц1}}$, $\vec{F}_{\text{сц2}}$ – силы сцепления катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \dfrac{m_1 r^2}{2}$, $J_{2C} = m_2 i_2^2$. Подставляя кинематические соотношения $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{3r}$; $a_O = \dfrac{4}{3}a_C$; $\varepsilon_1 = \dfrac{4a_C}{3r}$, с учётом данных задачи, получим систему уравнений:

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц}1};\ \ \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц}1} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц}2} + P\sqrt{3};\ \ \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц}2} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \dfrac{3\left(3\sqrt{3}-16\right)g}{46} \approx -\ 0{,}7g$. Каток движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2{,}6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. Допустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

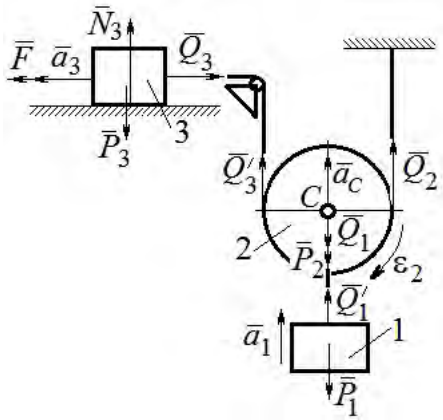


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

Уравнения движения тел:

$$m_3a_3 = F - Q_3,\ m_2a_C = Q_3' + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = Q_3'r - Q_2r,\ m_1a_1 = Q_1' - P_1.$$

С учётом, что $\left|\vec{Q}_3\right| = \left|\vec{Q}_3'\right|$, $\left|\vec{Q}_1\right| = \left|\vec{Q}_1'\right|$ и $a_C = a_1$, $a_3 = 2a_1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$, $J_{2C} = \dfrac{m_2r^2}{2}$, подставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2{,}5mg - Q_3;\ \ ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2;\ m_1a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \dfrac{2}{17}g \approx 0{,}12g$; $Q_3 = 2{,}26mg$; $Q_2 = 2{,}15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями. Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1a_1 = P_1\cos 30° - Q_1;\ \ m_3a_3 = Q_3;$$

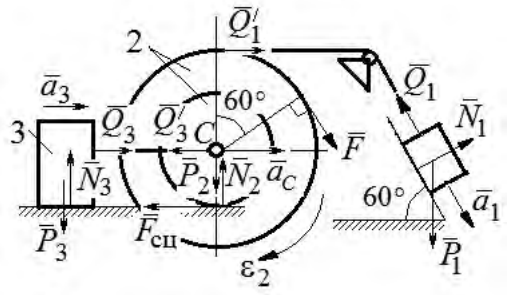


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q_1' - Q_3' - F_{\text{сц}} + F\cos 60^\circ;\ J_{2C}\varepsilon_2 = Q_1' R + FR + F_{\text{сц}} r,\ J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R+r}$, $a_C = \dfrac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя данные задачи, с учётом, что модули сил $Q_1' = Q_1$ и $Q_3' = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1;\ \frac{2}{3}ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2}mg;\ 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \dfrac{3}{46}\left(5+3\sqrt{3}\right)g \approx 0{,}44g;\ Q_1 = 0{,}21mg;\ Q_3 = 0{,}44mg$.

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$ Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, *a*). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

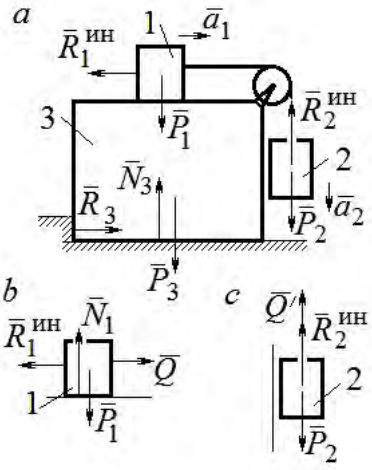


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0,\ N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, *b*, *c*). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил - для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – на вертикальную:

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0;\ P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0{,}5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2{,}5mg$.

6.2

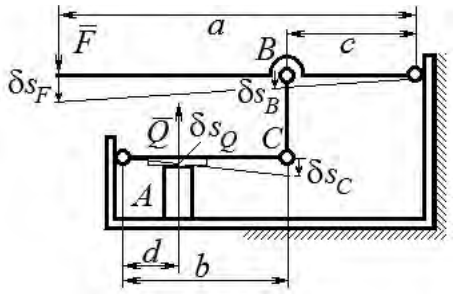


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A\left(\vec{F}\right) + \delta A\left(\vec{Q}\right) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\dfrac{\delta s_F}{\delta s_B} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \dfrac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C, причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \dfrac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \dfrac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2. Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A\left(\vec{P}_3\right) + \delta A\left(\vec{P}_4\right) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

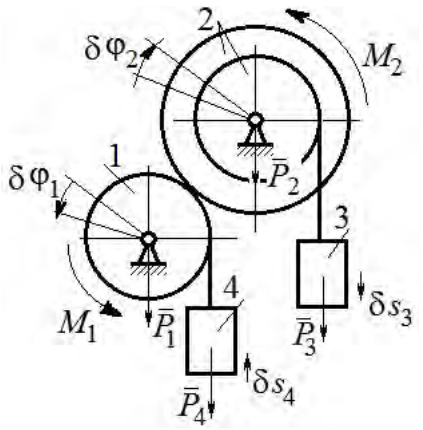


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4 + M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta\varphi_2 r$, $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$, $\delta s_4 = 3r\delta\varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{\text{вр}}$ (рис. 7.43).

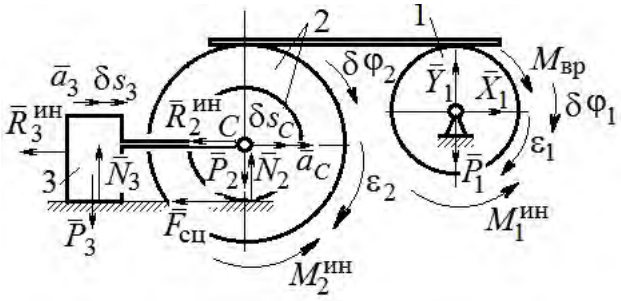


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta\varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta\varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3,\ a_C = a_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r},\ \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r},\ \delta\varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r},\ \varepsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_3 = ma_3$;

$$R_2^{\text{ин}} = m_2 a_C = 2ma_3;\ M_2^{\text{ин}} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4{,}5mra_3;\ M_1^{\text{ин}} = \frac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1 = 1{,}5mra_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = M_{\text{вр}}\delta\varphi_1 = (mg\sin\omega t)3\delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_2^{\text{ин}}\delta s_C - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2 - M_1^{\text{ин}}\delta\varphi_1 =$$

$$= -ma_3\delta s_3 - 2ma_3\delta s_3 - 4{,}5ma_3\delta s_3 - 1{,}5ma_3 3\delta s_3 = -12ma_3\delta s_3.$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g\sin\omega t - 12a_3)\delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0{,}25g\sin\omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0{,}25g\sin\omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза: $s_3 = \dfrac{0{,}25g}{\omega}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

6.5

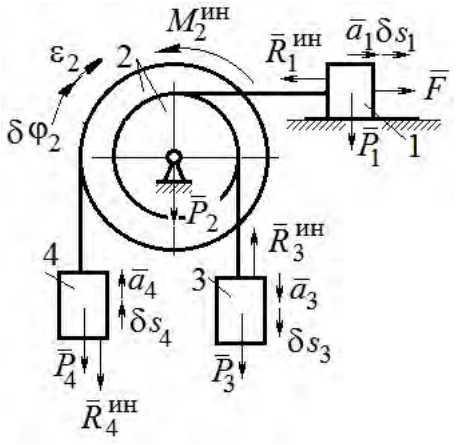


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

Система с идеальными связями. Активные силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F\delta s_1 + P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4$ и сил инерции $\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_4^{\text{ин}}\delta s_4 - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2$, где модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_1$, $R_3^{\text{ин}} = \dfrac{P_3}{g}a_3$, $R_4^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_4$, $M_2^{\text{ин}} = \dfrac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2$.

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = P(t+1)\delta s_1 + P\delta s_1 - 2P\delta s_1 -$$

$$-\left(\frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{2P}{g}2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g}2r^2\frac{a_1}{r}\frac{\delta s_1}{r}\right) = P\left(t - \frac{14a_1}{g}\right)\delta s_1 = 0.$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \dfrac{1}{14}gt$, или $\ddot{x}_3 = \dfrac{1}{14}gt$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \dfrac{1}{84}gt^3 \approx 0{,}012gt^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0. Обобщённая скорость $\dot{x}$.

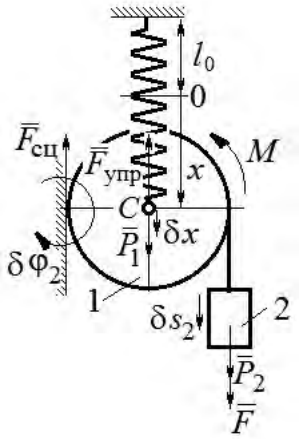


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

Кинетическая энергия катка: $T_1=\frac{1}{2}m_1V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2$, где ω_1, V_C – угловая скорость катка и скорость его центра масс, $V_C=\dot{x}$, $\omega_1=\frac{V_C}{r}=\frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC}=\frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2=\frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2=2V_C=2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T=T_1+T_2=\frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x, дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum\delta A(F_{\text{к}})=P_1\delta x-F_{\text{упр}}\delta x+(P_2+F)\delta s_2-M\delta\varphi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2=2\delta x$, $\delta\varphi_1=\frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}}=cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum\delta A(F_{\text{к}})=(3P-cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x=3P-cx$.

Уравнение Лагранжа $\frac{7P}{g}\ddot{x}=3P-cx$, или $\ddot{x}+\frac{4g}{7r}x=\frac{3g}{7}$.

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями): $x = \frac{3}{4} r\left(1 - \cos\omega t\right)$. Закон движения груза: $s_2 = 2x = \frac{3}{2} r\left(1 - \cos\omega t\right)$.

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1, x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных центров блоков *B* и *D* (рис. 7.46, *a*). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

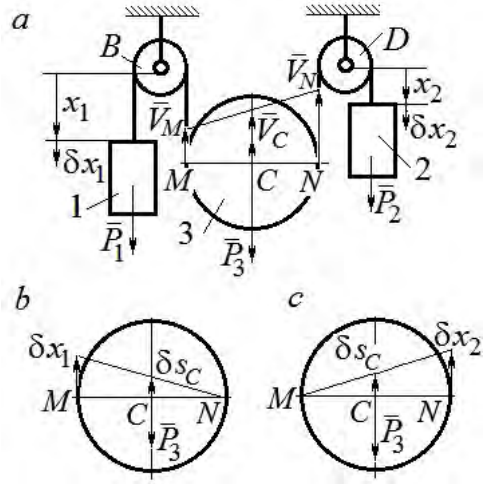


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7: *a* – кинематика механизма; *b*, *c* – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g},\ T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}\right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, *a*): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1, оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *b*):

$$\sum \delta A(F_к) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3\right)\delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3$.

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2, так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *c*):

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3 , \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \text{ или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 , \; \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g .$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31} g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31} g$. Ускорение центра масс блока $\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31} g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы. Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

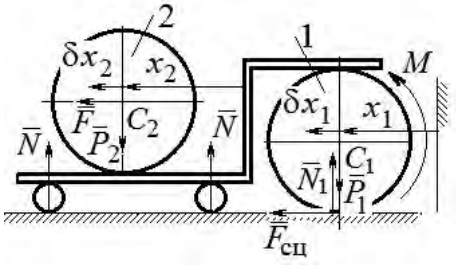


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[m_2 \left(\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1 \right)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left(\frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 $\left(\delta x_1 \neq 0 \right)$, оставляя другую координату x_2 неизменной $\left(\delta x_2 = 0 \right)$. Работу совершают момент M и сила $\overline{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2\delta x_1 = 4P \delta x_1 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_к) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2, равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g}\left(\frac{11}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2\right) = 4P,\ \frac{P}{g}\left(2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1\right) = P, \text{ или}$$

$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g,\ 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси x_1. Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: В 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев*, *С. А*. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №
Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ



Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Екатеринбург
2017

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Издание УГГУ Екатеринбург, 2017

В 67

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017
©Уральский государственный горный университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 4
1.1. Основные виды связей и их реакции 4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары 5
1.3. Условия равновесия систем сил 7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел 8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил 17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА 26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки 26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси 28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела 29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях 32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 57
3.1. Основные понятия сложного движения точки 57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении 60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ... 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы. 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей. **Гибкая связь**. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

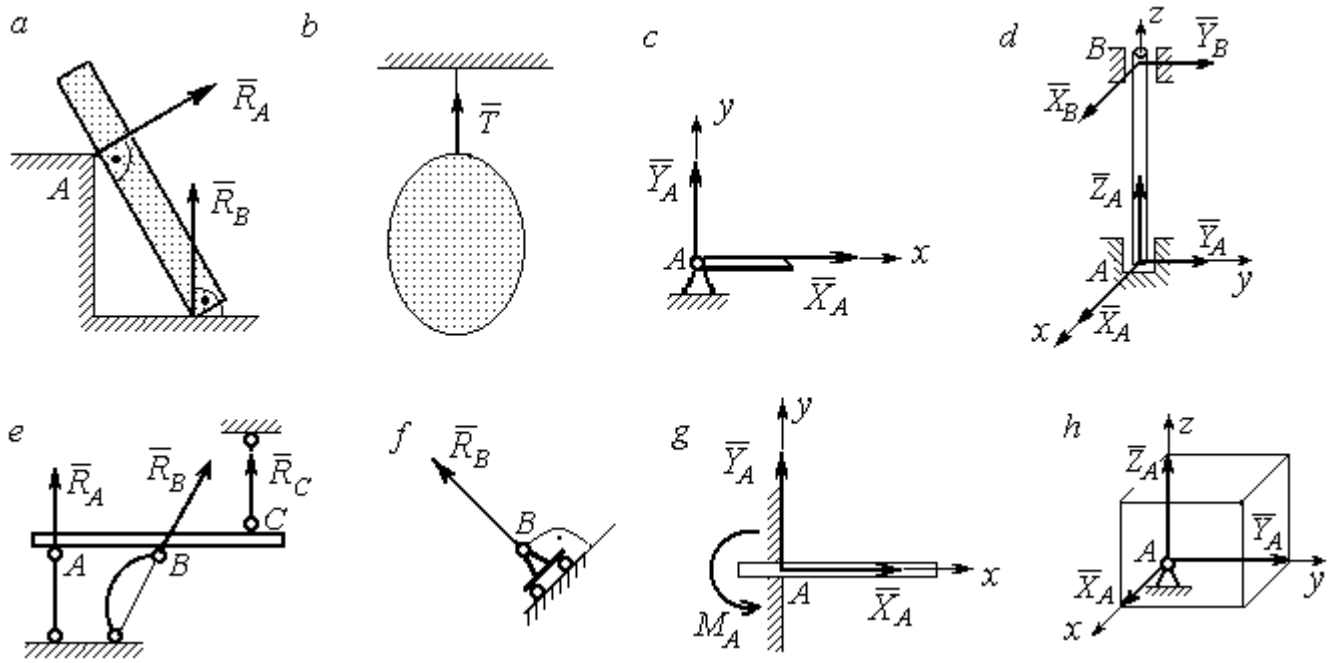


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:
a – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *c*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *d*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *e*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *f*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *g*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы *F* относительно центра *O* $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра *O*, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние *h* от центра *O* до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *a*).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

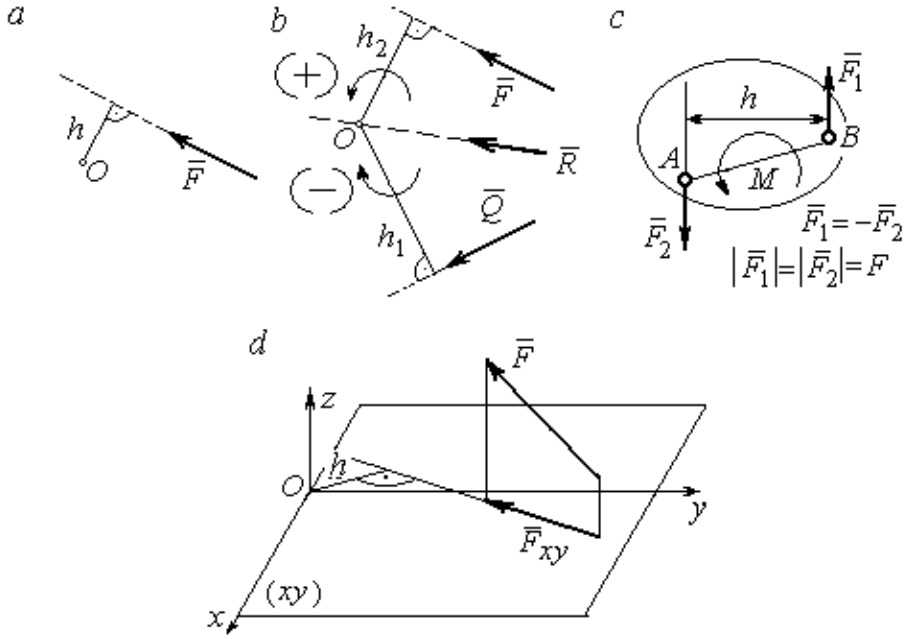


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил;
d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, *b* показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, *c*).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно оси *z*: $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость *xy*, перпендикулярную оси *z*, *h* – плечо проекции F_{xy} относительно центра *O* – точки пересечения оси *z* и плоскости *xOy*.

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для **равновесия пространственной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними,** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

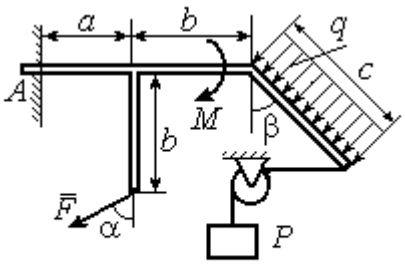
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

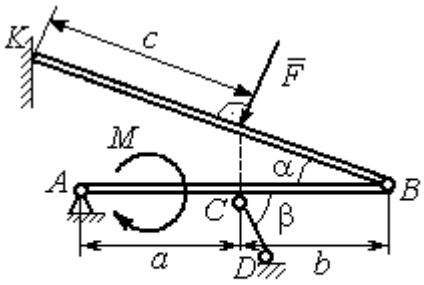
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

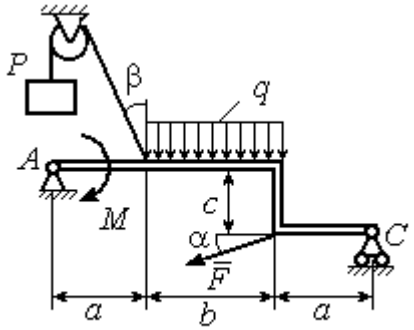
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

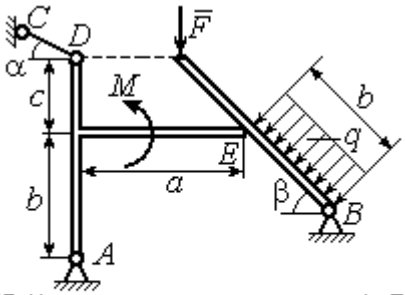
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

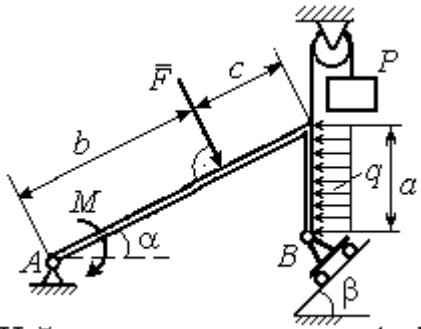
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

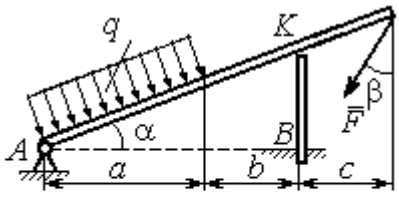
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакцию шарниров A и B

Задача 2

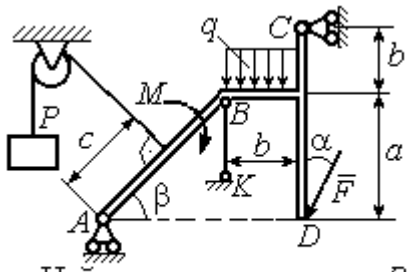


Найти реакцию шарнира A, реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

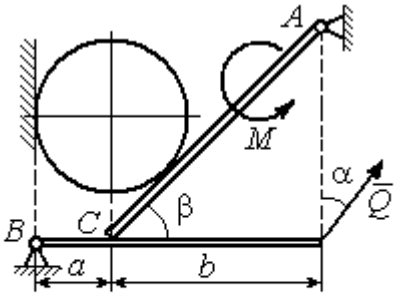
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

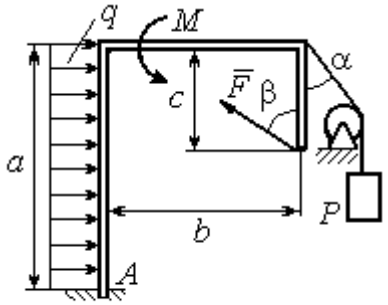
Задача 2



Вес шара P. Найти реакцию шарниров A, B, давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравновешивающую силу Q

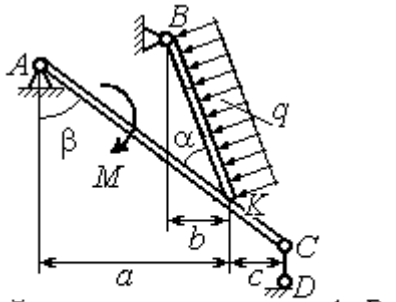
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

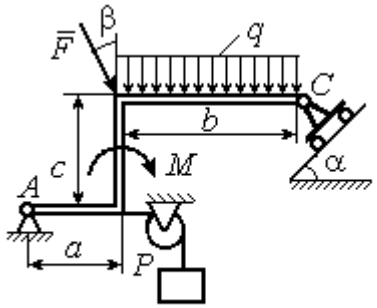
Задача 2



Найти реакцию шарнирв A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

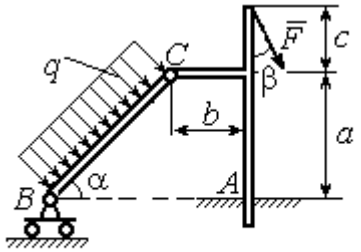
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

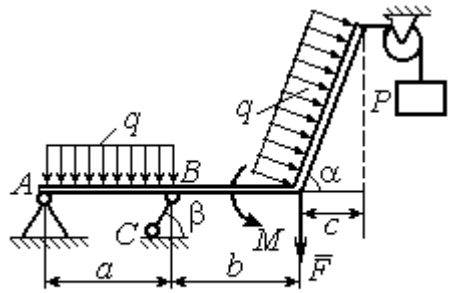


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 –26

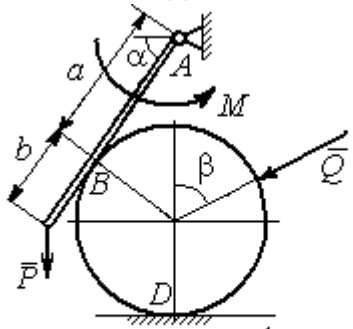
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

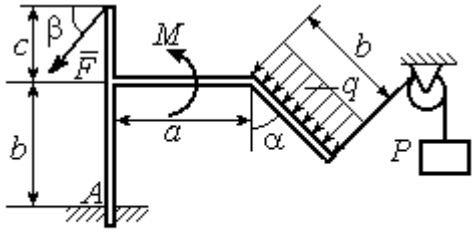
Задача 2



Найти реакцию шарнира A, давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

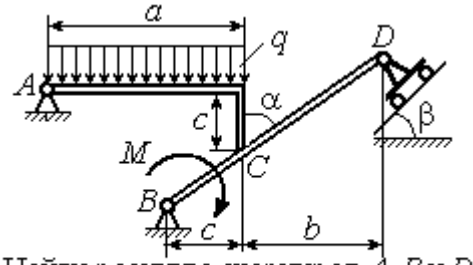
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

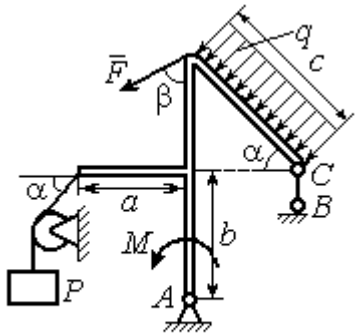
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

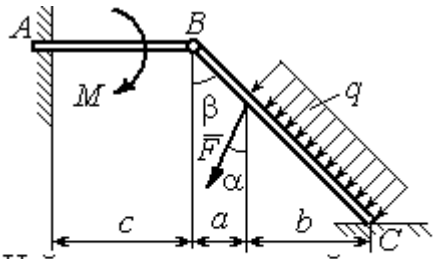
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2



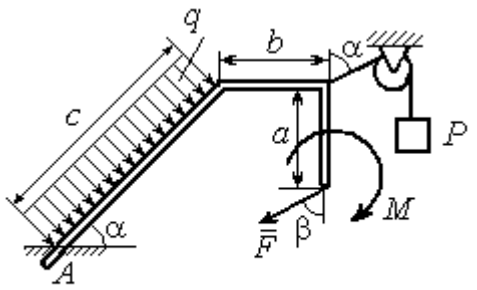
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания С1

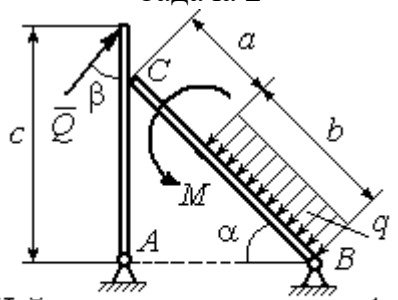
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B, реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P, кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F, кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q, кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M, кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α, град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β, град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a, м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b, м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c, м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F, кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q, кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M, кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α, град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β, град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a, м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b, м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c, м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1**.** Рама *ACE* (рис. 1.7) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке *AB*. В точке *E* под прямым углом к участку балки *CE* прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

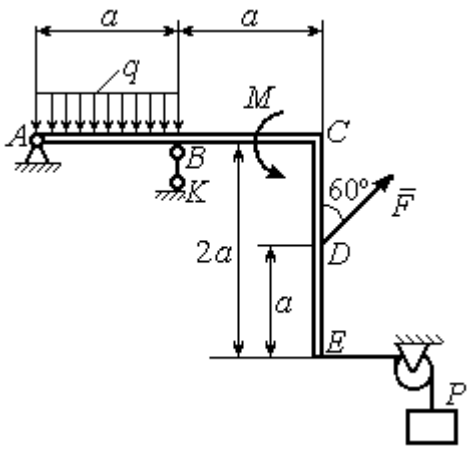


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза *P* на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

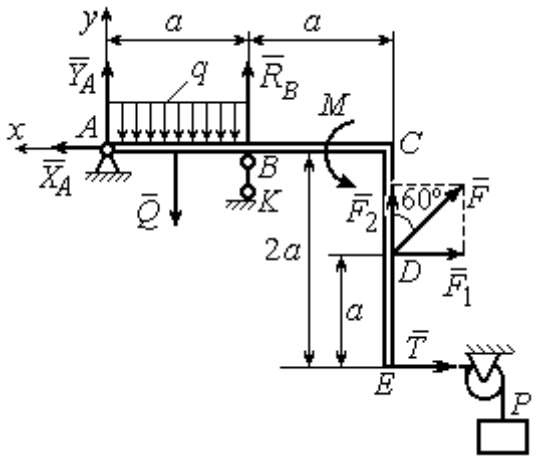


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *x*, *y*, и моменты сил относительно центра *A*, уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q\frac{a}{2} + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра *A* использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B:

$$X_A - 28{,}66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121{,}32 = 0.$$

Решая систему, найдем X_A= 28,66 Н, Y_A= 59,66 Н, R_B= – 60,66 Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры *BK* противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка *ABLC* с вертикальной частью *AB* и горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° в точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *CL*, а в точке *E* закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине *F* = 10 кН, и пара сил

с моментом M = 5 кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если a = 2 м.

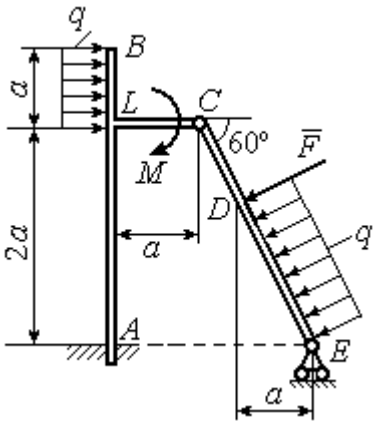


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL, направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a =$ 4 кН. Кроме силы $\vec{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция жёсткой заделки в точке A, имеющая своими составляющими силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A, а также реакция шарнира C, разложенная на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ (см. рис. 1.10, *a*). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy, как показано на рис. 1.10, *a*, и составим уравнения равновесия:

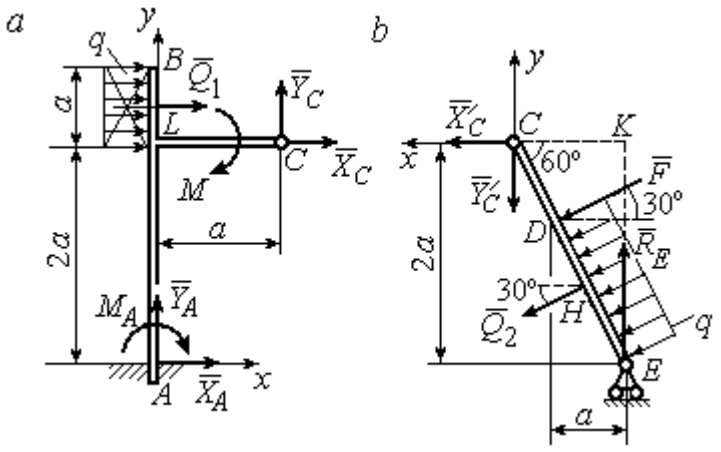


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки *EC*. Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED*, направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8\,\text{кН}$. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке *E* и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира *C*. Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, *a*, *b*). Действующие на балку *EC* силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат *xCy,* как показано на рис. 1.10, *b,* и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0,\ \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a\,\text{tg}30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C, а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0,\ Y_A + Y_C = 0,\ -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15{,}59 = 0,\ -Y_C + R_E - 9 = 0,\ 2{,}31R_E - 27{,}14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11{,}59\ \text{кН},\ Y_A = -2{,}76\ \text{кН},\ M_A = 42{,}87\ \text{кН·м},$$

$$X_C = -15{,}59\ \text{кН},\ Y_C = 2{,}76\ \text{кН},\ R_E = 11{,}76\ \text{кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки *A* и шарнира *C*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91\ \text{кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83\ \text{кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q. Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравновешивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M. Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

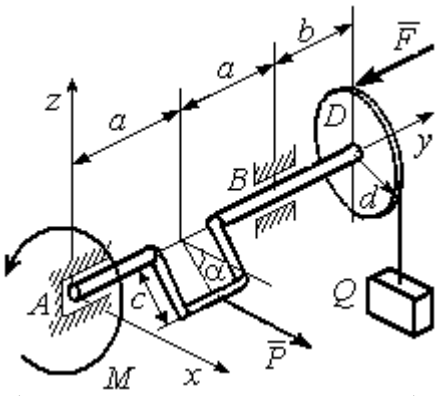
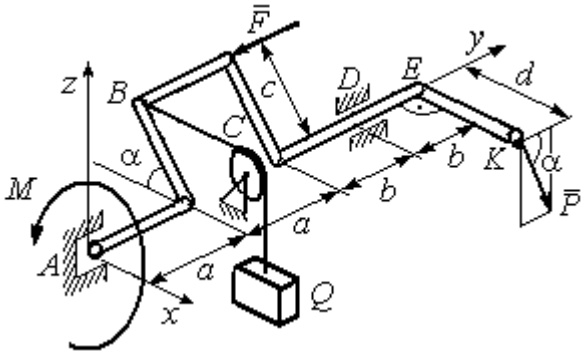
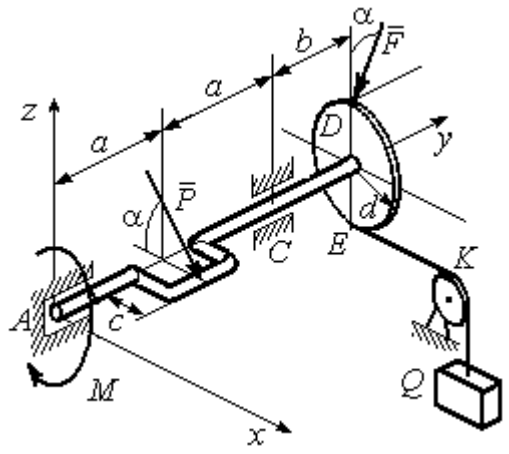
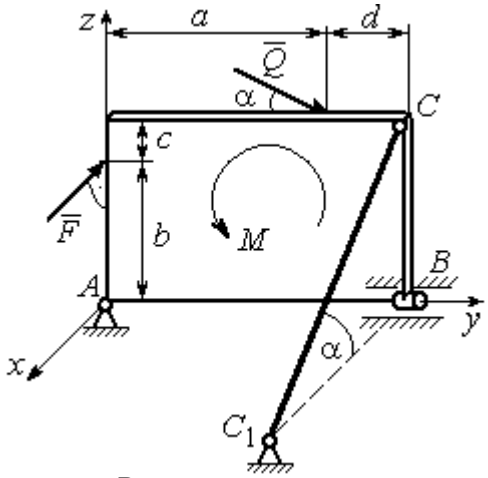
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравновешивающего груза Q	Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоять вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравновешивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости zAy; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAx, отрезок нити EK параллелен оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и C, а также величину уравновешивающего груза Q	Плита весом P расположена в плоскости zAy; пара сил с моментом M действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной zAx; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

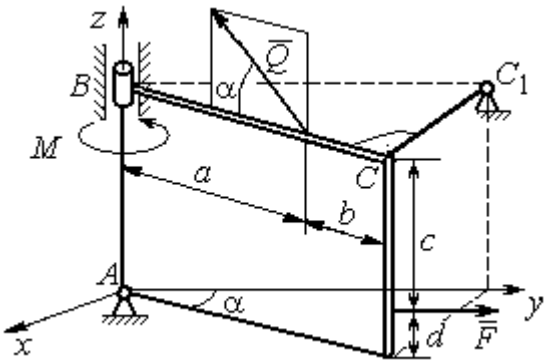
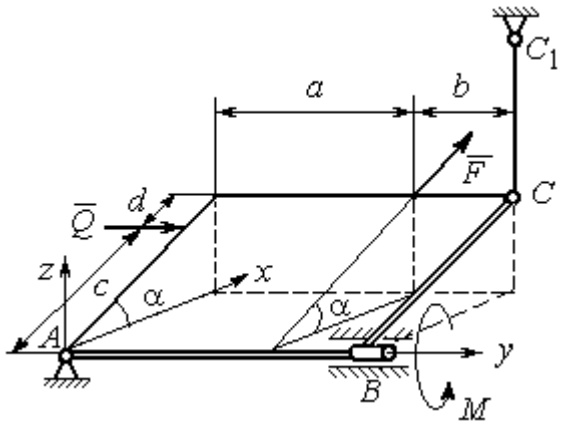
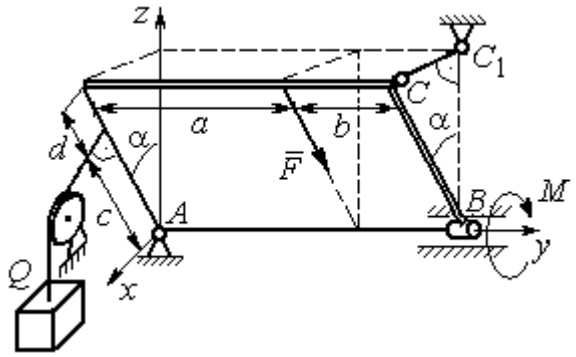
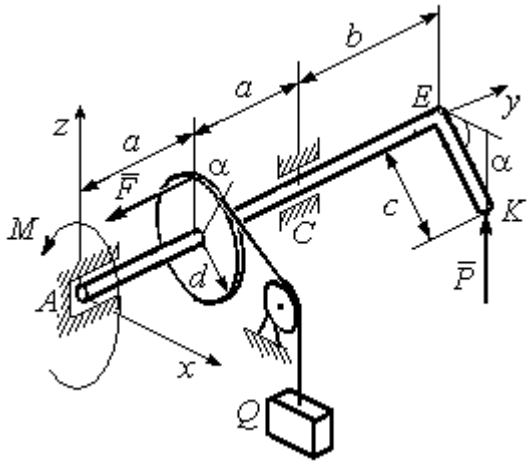
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Плита весом P отклонена на угол α от вертикальной плоскости zAy; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1	Плита весом P отклонена на угол α от горизонтальной плоскости xAy; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси Ay; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси Az. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках A и B и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; нить, удерживающая груз *Q*, находится плоскости *zAx*, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости *zAy*. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Рукоять *EK* перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{P}$ параллельна оси *Az*; сила $\vec{F}$ параллельна оси A*y*; нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *C*, и величину уравновешивающего груза *Q*

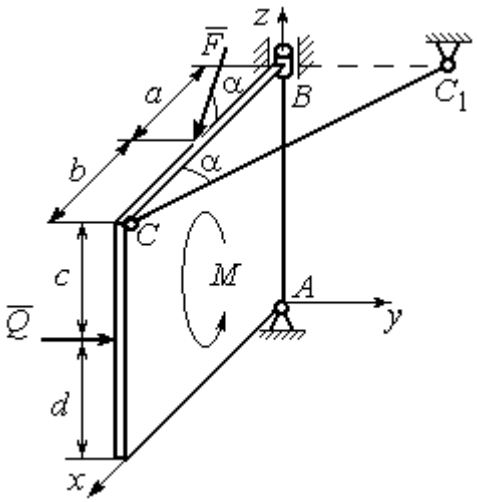
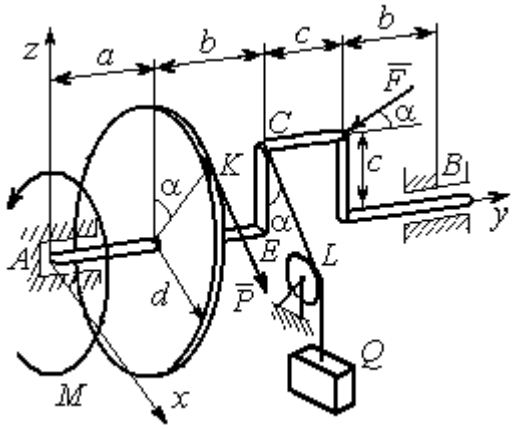
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Плита весом *P* находится в вертикальной плоскости *zAx*; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной *xAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Сила $\vec{F}$ находится в плоскости *zAy*; стойка *CE* находится в плоскости *zAy*; отрезок *CL* нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной *xAz*; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке *K*. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *B* и величину уравновешивающего момента *M*

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 1.2

Исходные данные для задания С2.
Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P, кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F, кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q, кН	–	12	–	12	8	12	10	–	10	12
M, кН·м	12	–	10	8	12	6	8	6	8	–
α, град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a, м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b, м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c, м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d, м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
P, кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F, кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q, кН	–	14	–	10	10	12	14	–	12	14
M, кН·м	10	–	12	12	12	8	10	10	10	–
α, град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a, м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b, м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c, м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d, м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F, кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q, кН	–	10	–	12	14	10	16	–	12	6
M, кН·м	12	–	16	14	8	10	8	12	10	–
α, град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a, м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b, м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c, м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d, м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике *C* и подшипнике *K*. Вал имеет шкив I радиуса *R* и шкив II радиуса *r*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*. Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*, закручивающая вал вокруг оси *Cy*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в точке *B* шкива II, определяемой центральным углом 30º, и направлена по касательной. Определить величину уравновешивающего момента *M* и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0{,}6$ м, $r = 0{,}3$ м, $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}4$ м.

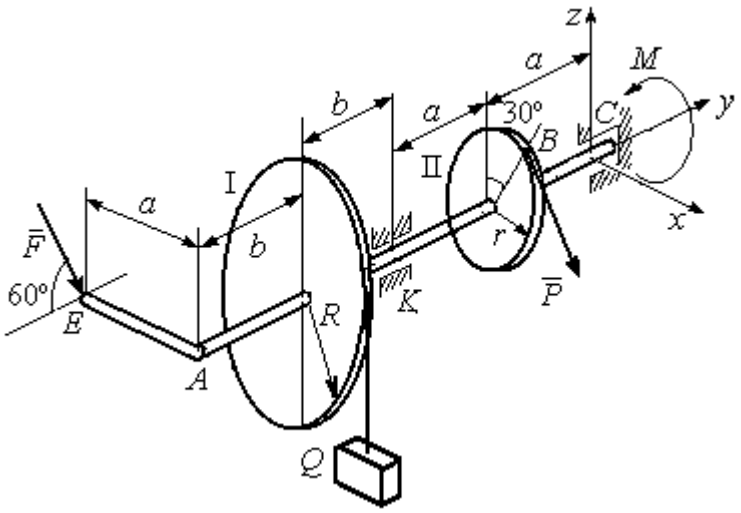


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом *Q*, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника *C* раскладываем на три со-

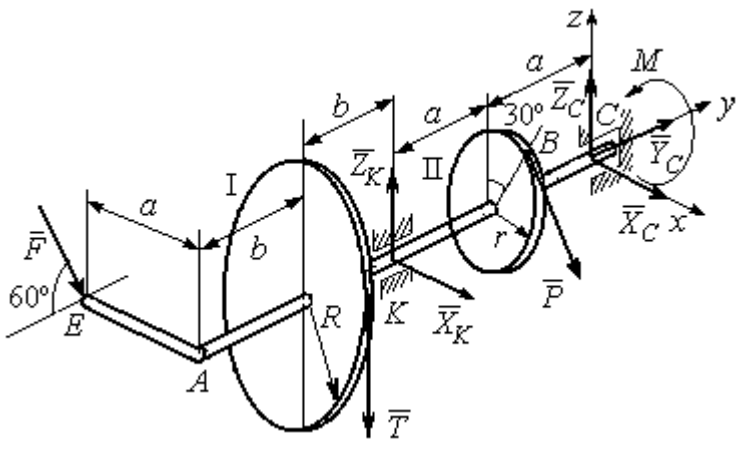


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника *K* лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *K* и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю ($\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M$) ∞ 0, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

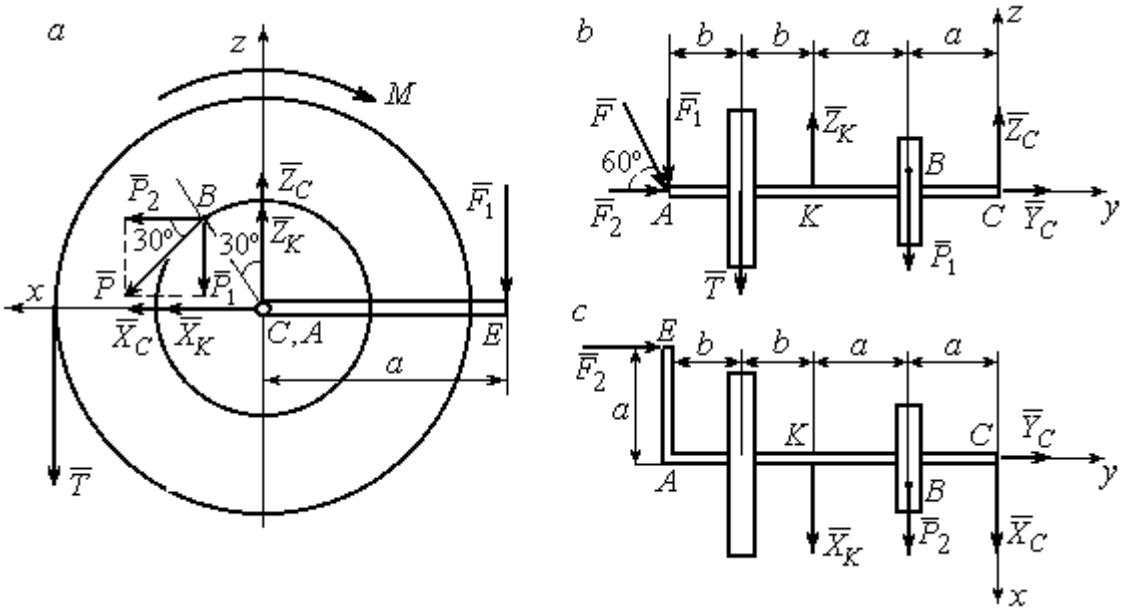


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:

a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;

b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;

c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*.

На рис. 1.16, *а* показаны проекции всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки *C*, получим значения моментов исходных сил относительно оси *y*.

Для вычисления моментов сил относительно оси *x* достаточно найти моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси z.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P_2 + X_K + X_C = 0,\ \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F_1 a + TR + Pr - M = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P\cos 60^\circ = 0{,}5P,\ P_2 = P\cos 30^\circ = 0{,}87P,$$

$$F_1 = F\cos 30^\circ = 0{,}87F,\ F_2 = F\cos 60^\circ = 0{,}5F$$ (см. рис. 1.16 *а*, *b*),

получим систему уравнений:

$$0{,}87 \cdot 4 + X_K + X_C = 0,\ \ 2 \cdot 0{,}5 + Y_C = 0,\ -4 \cdot 0{,}5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0{,}87 = 0,$$

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}8 - 1{,}6Z_K - 3 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4) + 2 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4) = 0,$$

$$-0{,}87 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3 - M = 0,\ 0{,}87 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 1{,}6 \cdot X_K - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0.$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2{,}24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6{,}39$ кН, $X_K = -1{,}24$ кН, $Z_K = 0{,}35$ кН, $M = 2{,}3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6{,}84$ кН, реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1{,}29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy. В точке А плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1, прикреплённого шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

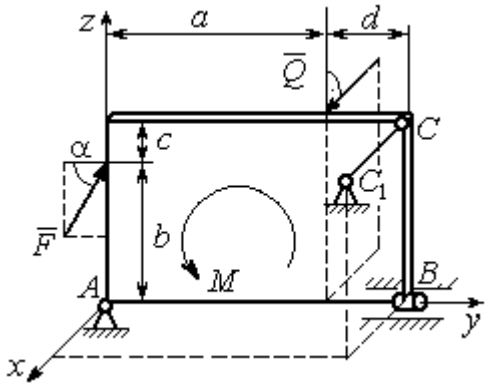


Рис. 1.17. Равновесие плиты

На плиту действует сила $\vec{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно её плоскости, и сила $\vec{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M. Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: P = 1 кН, Q = 500 Н, F = 400 Н, M = 300 Н·м, $\alpha = 35^\circ$, a = 2 м, b = 1,5 м, c = 0,2 м, d = 0,4 м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей x, z. Реакция стержня $\vec{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

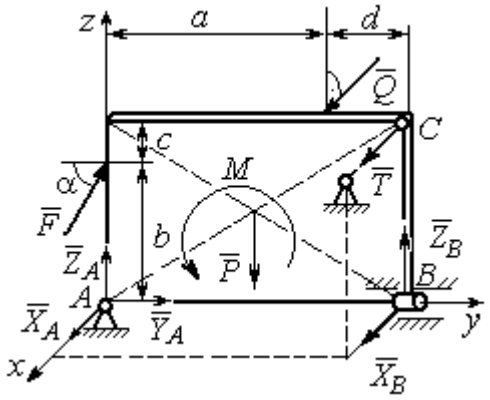


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + F\cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0,\ Z_A + F\sin\alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ -F\cos\alpha \cdot b - P \cdot 0{,}5(a+d) + Z_B(a+d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ Q \cdot (b+c) + T \cdot (b+c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0,\ -Q \cdot a - T \cdot (a+d) - X_B \cdot (a+d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0,\ Y_A + 400 \cdot 0{,}82 = 0,\ Z_A + 400 \cdot 0{,}57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0{,}82 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}4 + Z_B \cdot 2{,}4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1{,}7 + T \cdot 1{,}7 = 0,\quad -500 \cdot 2 - T \cdot 2{,}4 - X_B \cdot 2{,}4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500\ \text{Н},\ X_B = 83{,}33\ \text{Н},\ Z_B = 580\ \text{Н},$$

$$X_A = -83{,}33\ \text{Н},\ Y_A = -328\ \text{Н},\ Z_A = 192\ \text{Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389{,}09\ \text{Н},$$

цилиндрического шарнира B: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585{,}95\ \text{Н}$.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется **нормальным ускорением** точки и вычисляется по формуле: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ в направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

φ, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела (**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A, модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b*, *c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB, соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

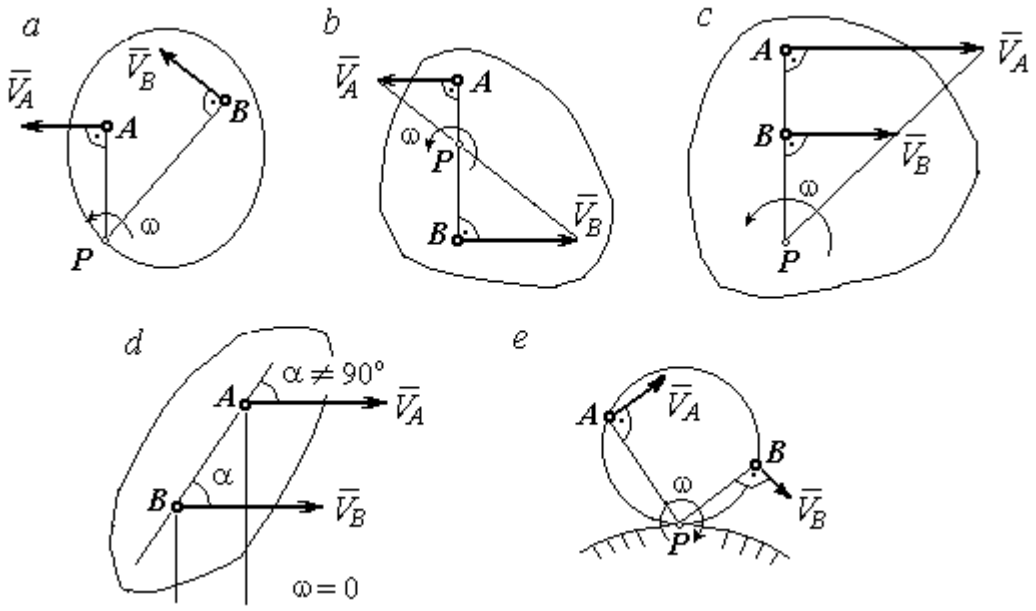


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, *e*).

Ускорение любой точки *M* плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, *b*). Численно величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM\,,\quad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM\,,$$

где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

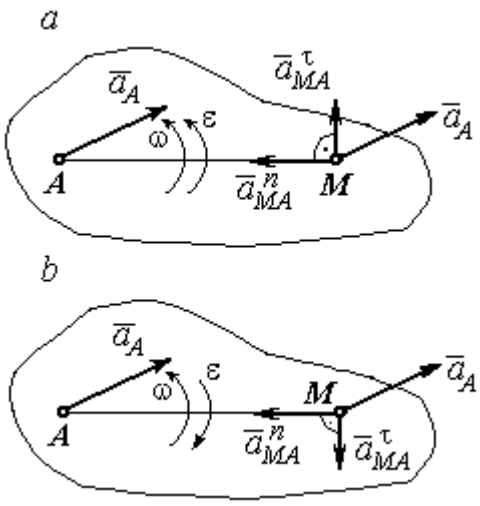


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M, то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

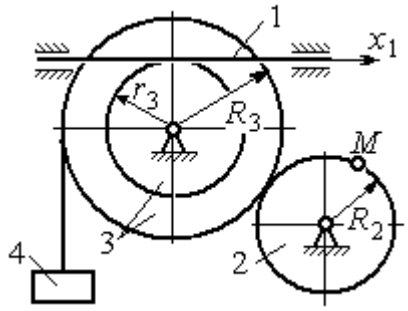
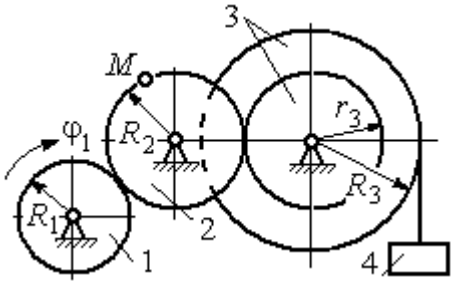
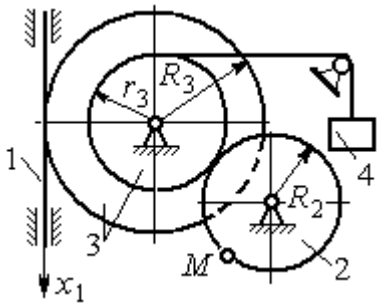
$$\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA},$$

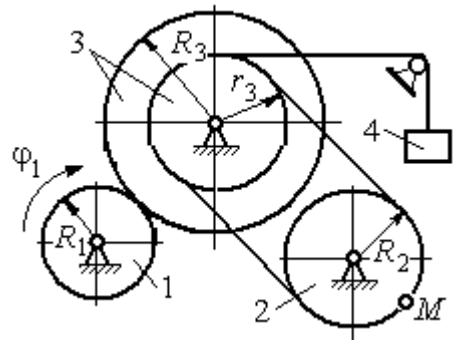
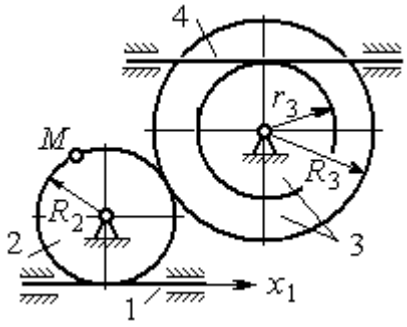
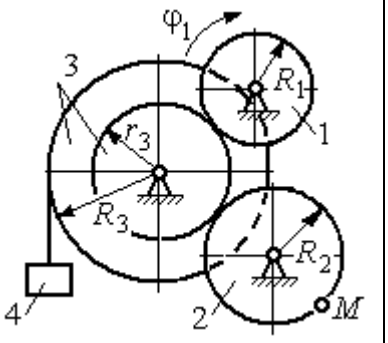
где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		

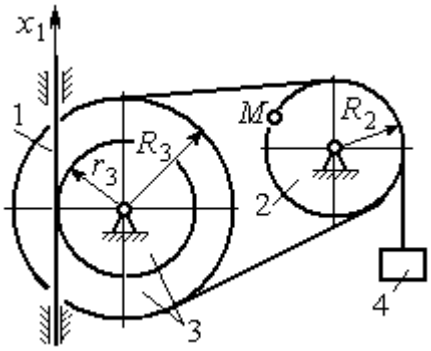
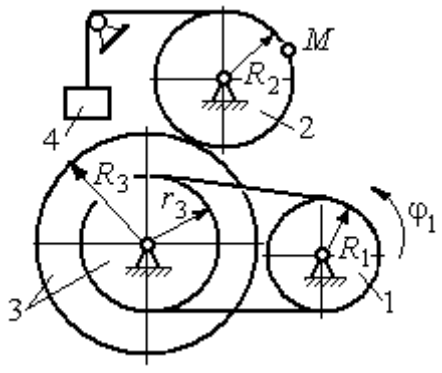
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

Окончание вариантов задания К1

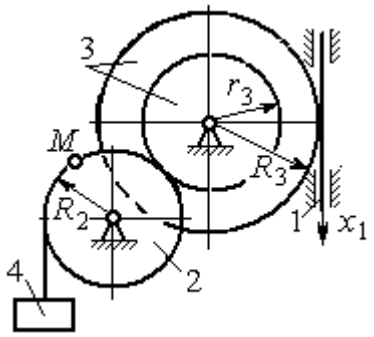
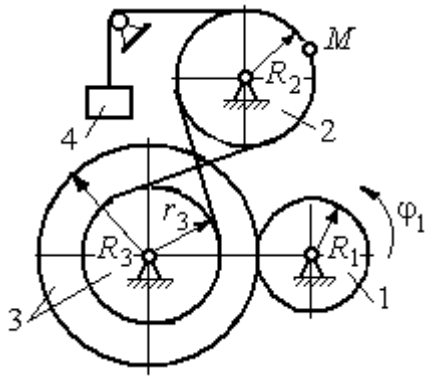
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
1	–	40	45	35	$x_1(t) = (3t-1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	–	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	–	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	–	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	–	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	–	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	–	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Окончание табл. 2.1

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
15	–	20	30	20	$x_1(t)=3t^2-\cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\cos(\pi t/2)$	1
17	–	20	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t)=5t+\cos(\pi t/2)$	1
19	–	22	50	18	$x_1(t)=t^2+\cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\sin(\pi t/4)$	4
21	–	20	40	20	$x_1(t)=t+(3t-4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t)=2t^2+12\cos(\pi t/6)$	3
23	–	45	60	40	$x_1(t)=4t^2+\sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t)=2t^2+4\cos(\pi t/2)$	2
25	–	15	35	25	$x_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\sin(\pi t/2)$	1
27	–	15	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/2)$	1
29	–	35	50	10	$x_1(t)=t^3-\cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, *а*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* на момент времени t_1, а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: R_2= 20 см, r_2= 5 см, R_3= 8 см, r_3 = 4 см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, t_1=1 с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2, φ_3, а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4.

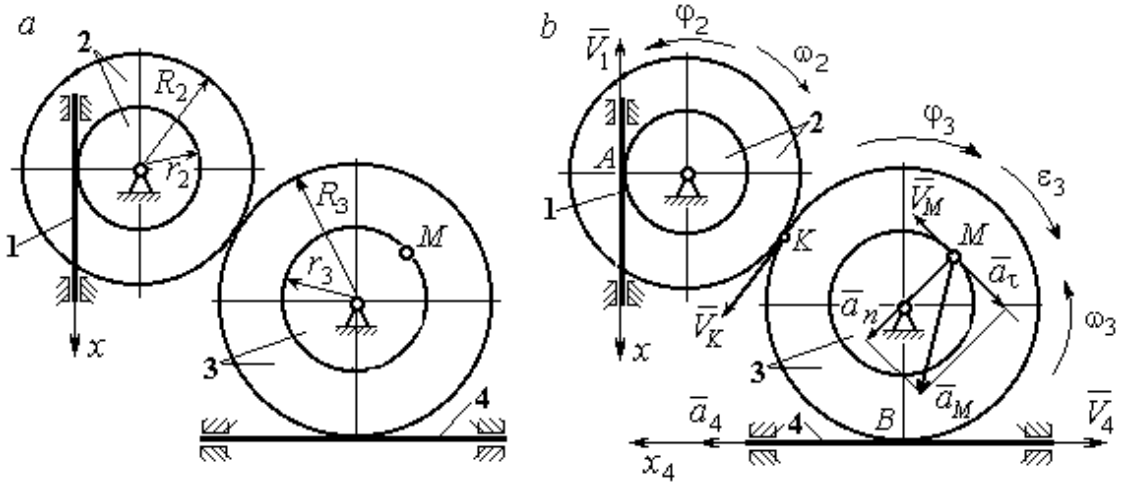


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x. Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Эту же скорость будет иметь точка *A* – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r_2} = \dfrac{|4t-5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0{,}2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0{,}2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2. При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2{,}5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0{,}5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0{,}5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3, как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки *M* (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2{,}5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с^2. Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3, диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки M рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с^2. Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8{,}06$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

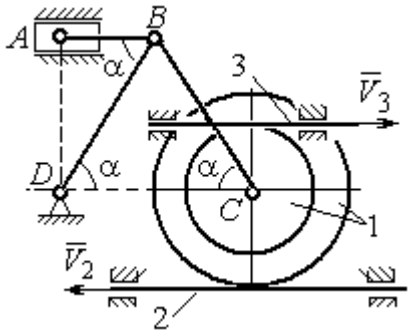
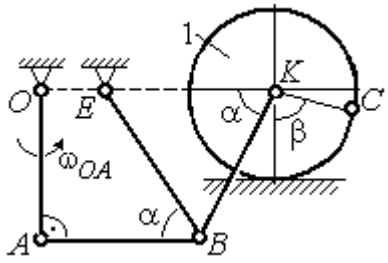
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

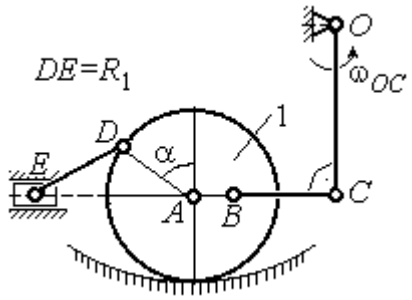
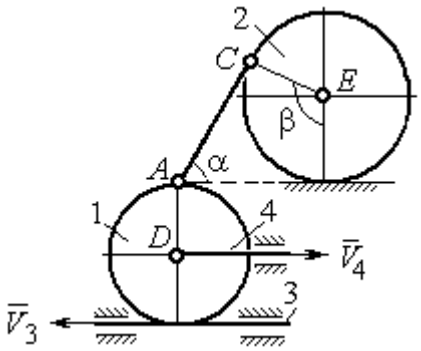
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$	 Найти: V_A, V_B, V_K, $\omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}$, ω_{BE}, ω_{BK}

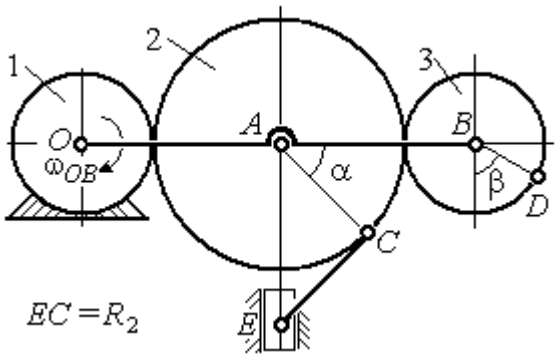
Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	AD, см	α, град	V_2, см/с	V_3, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	OE, см	α, град	β, град	V_C, см/с
1	10	5	20	30	8	10	**2**	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	**12**	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	**22**	5	12	2	60	120	12

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$	 Найти: V_A, V_C, V_E, $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OC, см	AB, см	BC, см	α, град	ω_{OC}, рад/с	Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	α, град	β, град	V_3, см/с	V_4, см/с
3	12	18	10	35	60	4	**4**	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	**14**	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	**24**	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

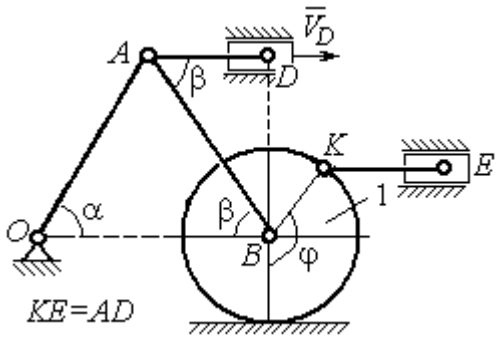
Варианты № 5, 15, 25



Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, ω_2, ω_3, ω_{EC}

Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	R_3, см	α, град	β, град	ω_{OB}, рад/с
5	10	20	12	60	0	6
15	6	18	10	90	90	8
25	20	25	15	120	180	4

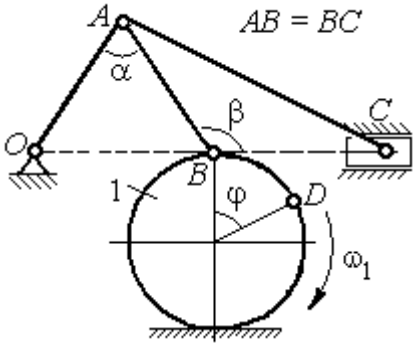
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E,$ ω_1, ω_{OA}, ω_{AB}, ω_{AD}, ω_{KE}

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
6	10	20	30	60	60	12
16	12	26	30	30	90	8
26	15	30	60	60	120	15

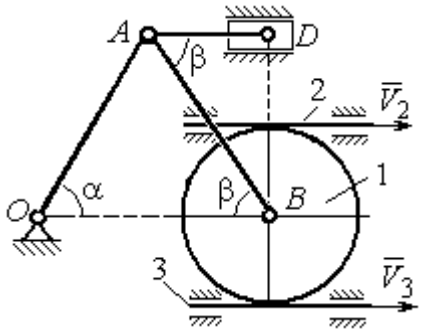
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
7	10	20	30	60	60	12
17	12	25	60	120	90	16
27	8	16	30	60	120	10

Варианты № 8, 18, 29

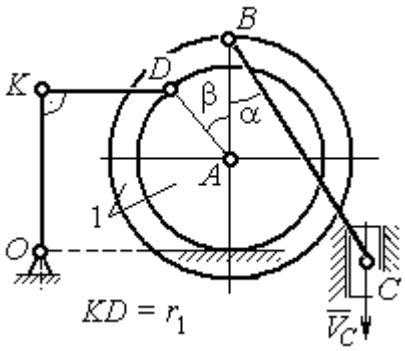
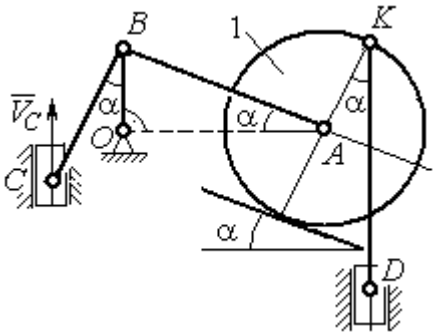


Найти: V_A, V_B, V_D, $\omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	V_2, см/с	V_3, см/с
8	10	20	30	60	12	4
18	12	26	30	30	8	2
28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К2

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $\omega_{OK}, \omega_{KD}, \omega_{BC}, \omega_1,$ V_A, V_B, V_K, V_D	 Найти: $V_A, V_B, V_D, V_K,$ $\omega_{CB}, \omega_1, \omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	α, град	β, град	BC, см	V_C, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	CB, см	OB, см	KD, см	α, град	V_C, см/с
9	20	12	45	60	60	8	**10**	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	**20**	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	**30**	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2, r_3, шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C. Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC}. Диск 2, увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1. Диск 3, также увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзыва-

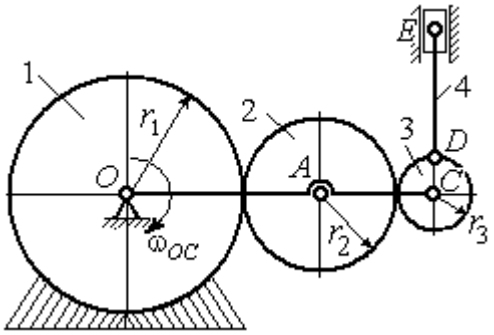


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке *D*, расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке *E* шарнирно прикреплен поршень *E*, способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень *OC* горизонтален, стержень *DE* направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек *A*, *C*, *D*, *E*, угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: r_1 = 6 см, r_2 = 4 см, r_3 = 2 см, *DE* = 10 см, ω_{OC} = 1 рад/с.

Решение

Определим скорость точки *A*, общей для стержня *OC* и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2)$ = 10 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню *OC* и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

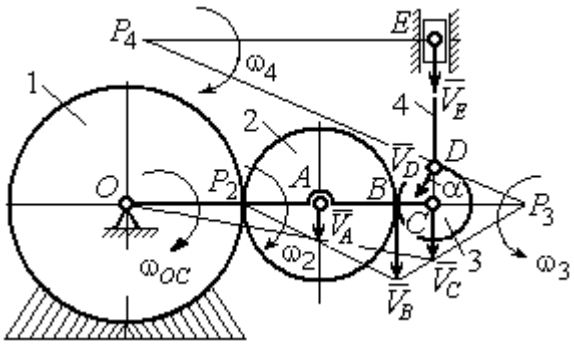


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2. В этом случае скорость точки *A* может быть определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом: $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как V_A = 10 см/с, получим ω_2 = 2,5 рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек *B* и *C*. Скорость точки *B* может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 20 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2.

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC: $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3)$ = 16 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3, получим: CP_3= 8 см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3}$= 2 рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B, принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$ = $=2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}$ = 16,5 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3.

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E. По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos\alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0{,}97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos\alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E: V_E=16 см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \dfrac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ = 40 см. В результате, $\omega_4 = 0{,}4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки D.

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы OA и ED вращаются вокруг неподвижных центров O и E. В крайней точке D кривошипа ED к нему прикреплён шатун DB, второй конец которого в точке B прикреплён к кривошипу OA. Шатун AC прикреплён в точке A к кривошипу AO, а другим своим концом – к ползуну C, способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонён на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO. Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма AC = 6 см, AB = 2 см, BO = 8 см, DB = 10 см и скорость ползуна в данный момент V_C = 4 см/с.

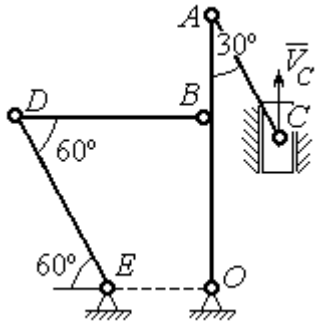


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы OA и ED совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B перпендикулярны кривоши-

пу OA, а скорость $\vec{V}_D$ точки D перпендикулярна кривошипу ED. Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

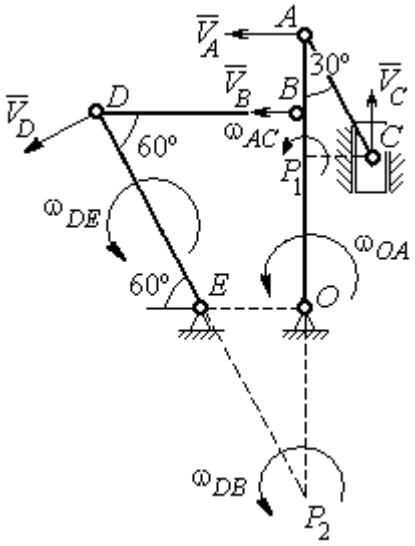


Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{P_1C} = \dfrac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \dfrac{4}{3}$ рад/с. Далее, полагая, что точка A принадлежит шатуну AC, найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

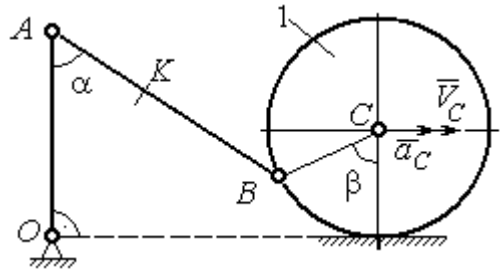
Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC, так и кривошипу OA, найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3{,}2\sqrt{3}$ см/с.

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D, построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB $\omega_{DB} = \dfrac{V_B}{P_2B} = \dfrac{3{,}2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}32$ рад/с. Скорость точки D $V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0{,}32 \dfrac{DB}{\sin 30^\circ} = 6{,}4$ см/с. Угловая скорость кривошипа DE $\omega_{DE} = \dfrac{V_D}{DE} = \dfrac{6{,}4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0{,}69$ рад/с.

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

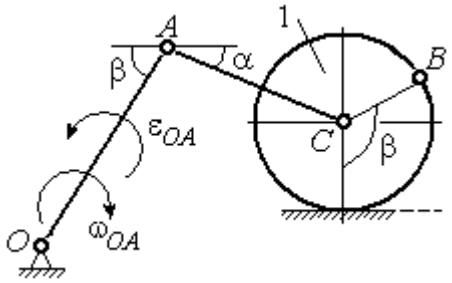
Варианты № 1, 11, 21



Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$

Номер варианта задания	AB, см	AK, см	α, град	β, град	R_1, см	V_C, см/с	a_C, см/с^2
1	16	10	60	120	10	12	6
11	20	16	30	60	8	10	8
21	18	10	60	180	6	8	4

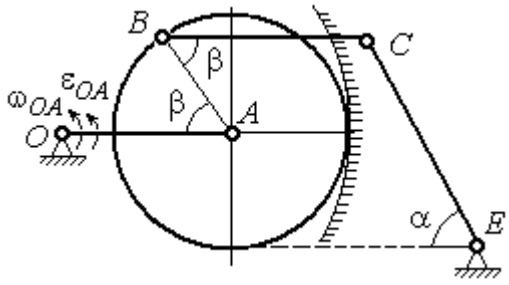
Варианты № 2, 12, 22



Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	AC, см	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
2	5	10	12	30	60	2	4
12	8	24	20	30	120	1	2
22	6	12	15	60	90	2	3

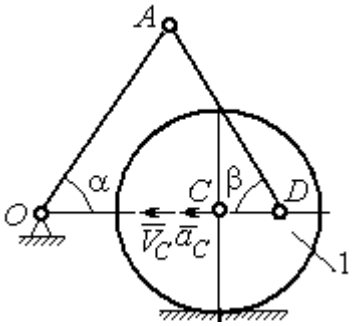
Варианты № 3, 13, 23



Найти: a_C, a_B, ε_{BC}

Номер варианта задания	BC, см	AO, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
3	16	15	60	90	10	2	3
13	18	12	90	60	8	3	2
23	14	12	30	120	10	2	4

Варианты № 4, 14, 24

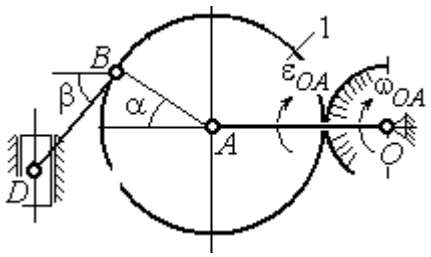


Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	DC, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
4	10	28	5,78	60	30	10	2
14	8	24	4,62	30	90	8	3
24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

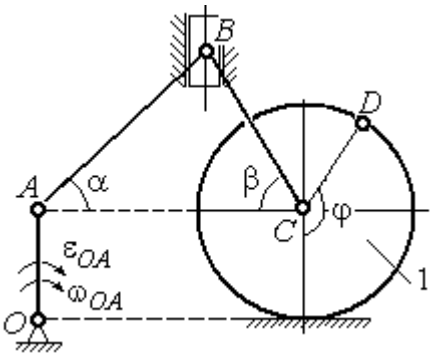
Варианты № 5, 15, 25



Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	OA, см	BD, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
5	16	10	60	30	10	4	3
15	18	8	90	45	12	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2

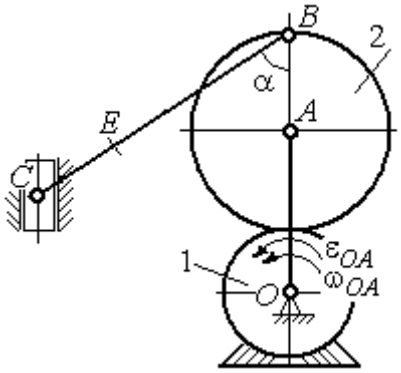
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $a_B, a_D, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	φ, град	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
6	6	18	60	30	30	2	3
16	8	20	90	60	30	2	4
26	5	16	120	30	60	3	4

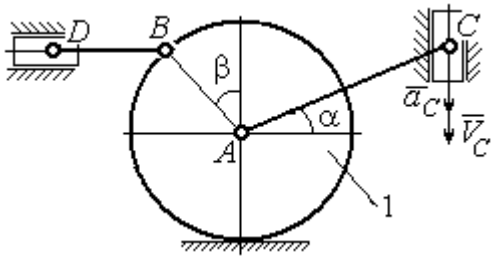
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $a_E, a_C, \varepsilon_{BC}$

Номер варианта задания	BC, см	BE, см	α, град	R_1, см	R_2, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
7	22	10	60	2	10	2	3
17	28	15	30	3	6	3	4
27	20	8	45	4	8	2	2

Варианты № 8, 18, 28

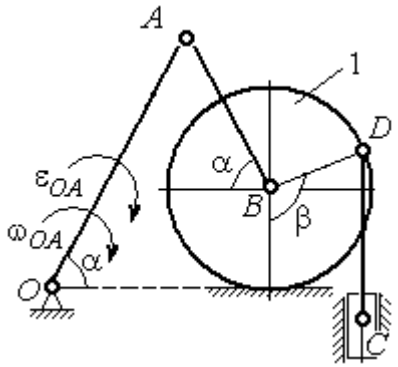
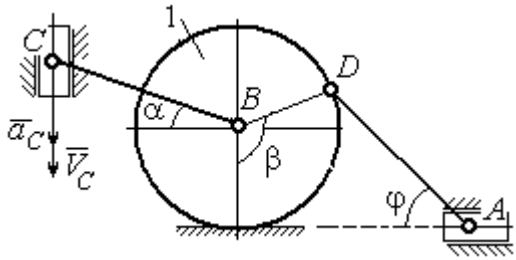


Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	R_1, см	BD, см	AC, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
8	4	5	12	60	60	12	5
18	6	10	16	45	90	10	8
28	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К3

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$	 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$

Номер варианта задания	OA, см	DC, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	BC, см	φ, град	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
9	18	10	30	120	4	2	3	**10**	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	**20**	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	**30**	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек R = 0,5 м и r = 0,3 м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC, один конец которого соединён с центром барабана в точке A, а другой – с ползуном C, перемещающимся вертикально. В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60°, найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C: V_C = 9м/с, a_C = 4 м/с^2.

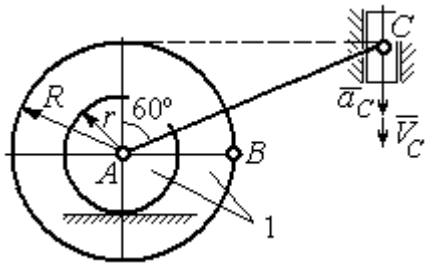


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC}, ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC, так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

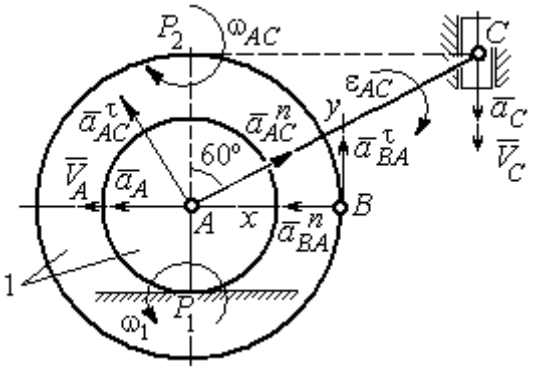


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_2} = \dfrac{9}{R\text{tg}60^\circ} = 6\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки A шатуна $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3}$ м/с. Угловая скорость барабана 1 $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3}$ рад/с.

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{AC} + \vec{a}^{\,n}_{AC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,\tau}_{AC}$, $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C. Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a^n_{AC} = \omega^2_{AC} \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108$ м/с^2. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC.

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

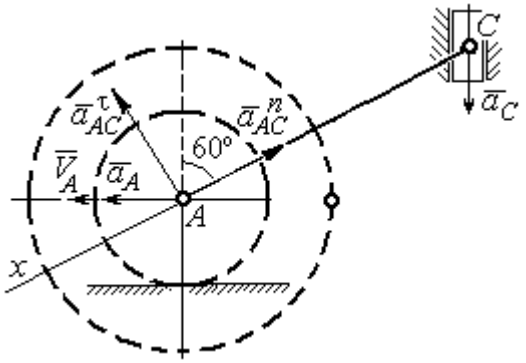


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\,\tau} + \vec{a}_{AC}^{\,n}$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}$. Отсюда найдём ускорение центра барабана $a_A = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}\left(a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}\right) = -\,122{,}4$ м/с^2. Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки B, выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение

точки A, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A.

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{BA}$ равен по величине $a^{n}_{BA} = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150$ м/с^2. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r. Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\dfrac{dV_A}{dt} = \dfrac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A}{r} = 40{,}8$ рад/с^2, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot BA = 20{,}4$ м/с^2.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B:

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20{,}4$ м/с^2, $a_{Bx} = -122{,}4 + 150 = 27{,}6$ м/с^2. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34{,}32$ м/с^2.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A, катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2. На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см. Длина стержня $BC = 20$ см.

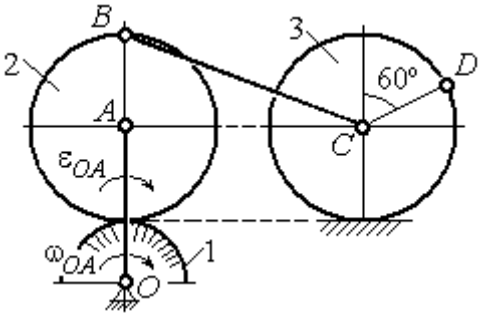


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{48}{8} = 6$ рад/с.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96$ см/с.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96$ см/с.

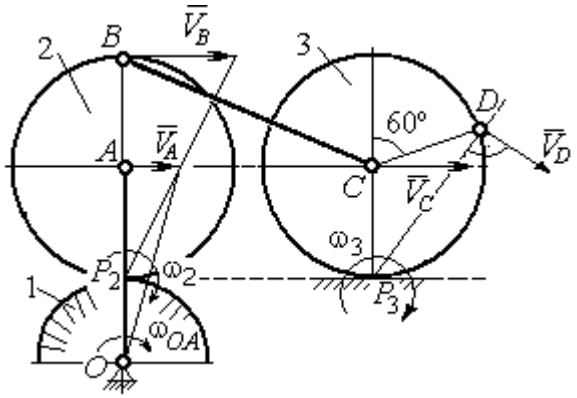


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Скорость точки D диска 3: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC. В результате $DP_3 = 2R_3\cos 30^\circ = 13{,}8$ см и $V_D = 165{,}6$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B, $a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB$, $a^{\tau}_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a^n_{CB} = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB}. Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB}.

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

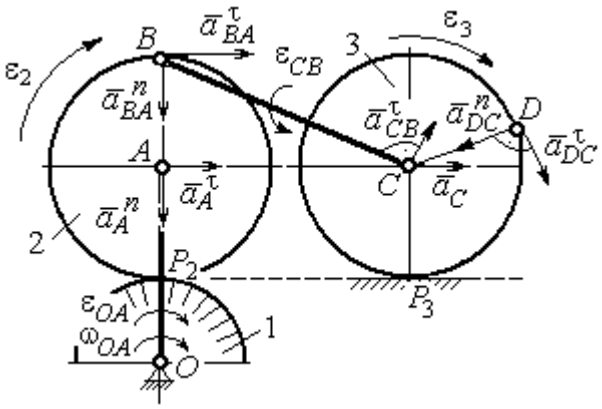


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Выразим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A. Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a^{n}_{BA} = \omega_2^2 \cdot BA = 288$ см/с^2. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2$, или $a^{\tau}_{A} = \varepsilon_2 R_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{A}}{R_2}$.

Для того чтобы найти величину a^{τ}_{A}, рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O. Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – известные

нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA: $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192$ см/с^2, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24$ см/с^2. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{R_2} =$ $= 3$ рад/с^2, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24$ см/с^2.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

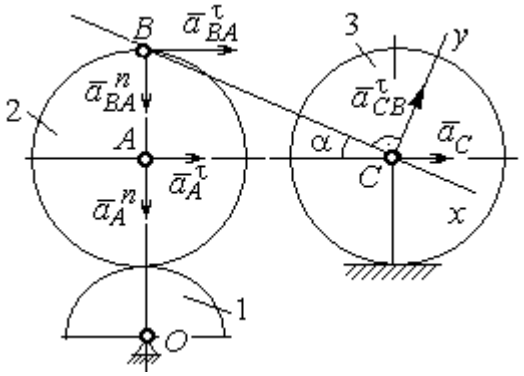


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки С

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha;$$

$$a_C \sin\alpha = a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha + a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC; $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256{,}7$ см/с^2, $a_{CB}^\tau = -358{,}12$ см/с^2.

Модуль углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 17{,}9$ рад/с^2.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC, показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB}, также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{DC} + \vec{a}^{\,\tau}_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки C; $\vec{a}^{\,n}_{DC}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Величина нормального ускорения точки D: $a^n_{DC} = \omega_3^2 \cdot DC = 1152$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}^{\,n}_{DC}$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

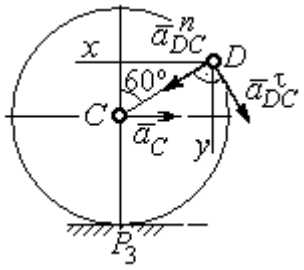


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Для расчёта касательной составляющей a^{τ}_{DC} ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3$. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3$, или $a_C = \varepsilon_3 R_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32{,}09$ рад/с^2. Тогда величина касательной составляющей ускорения точки D: $a^{\tau}_{DC} = \varepsilon_3 \cdot DC = 256{,}7$ см/с^2. Направление вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a^n_{DC}\cos 30^\circ - a^{\tau}_{DC}\cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a^n_{DC}\cos 60^\circ + a^{\tau}_{DC}\cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612{,}5$ см/с^2, $a_{Dy} = 798{,}3$ см/с^2. Величина ускорения точки D:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 1006{,}2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией.** Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_к$ – вектор ускорения Кориолиса. (Иногда его называют поворотным ускорением.)

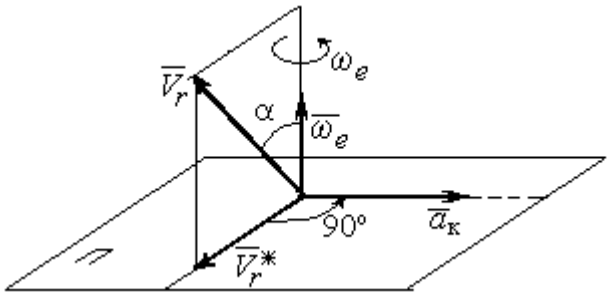


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_к = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_к| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^{\tau}$ и относительного нормального $\vec{a}_r^{n}$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^{\tau}$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^{n}$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки равны: $a_r^{\tau} = \left|\dot{V}_r\right|$, $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^{n} = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, $a_e^{n} = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_{\text{к}} = 0,\ a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

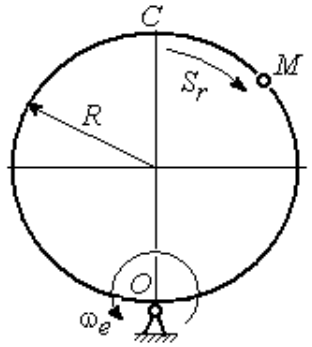
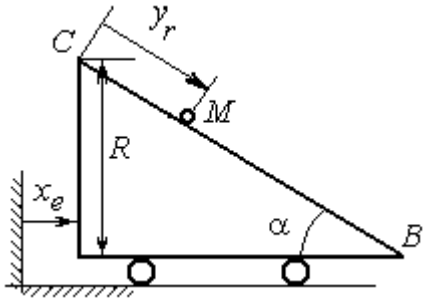
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1.

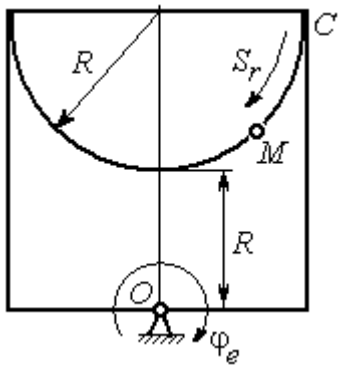
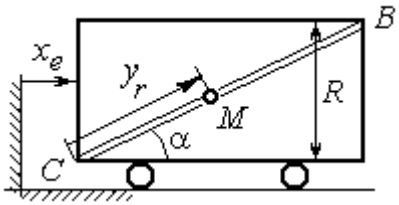
Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2, который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схемеописаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21	
Задача 1	Задача 2
	 В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22	
Задача 1	Задача 2
	 В момент $t = t_2$ точка M прошла 2/3 пути CB

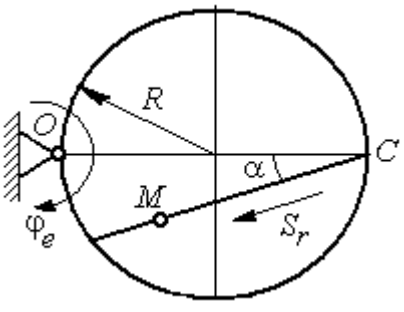
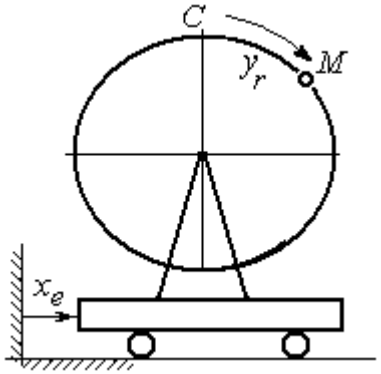
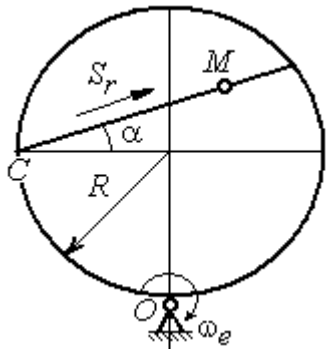
Варианты № 3, 13, 23	
Задача 1	Задача 2
	

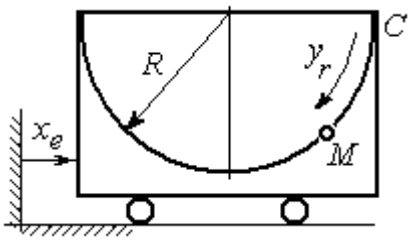
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

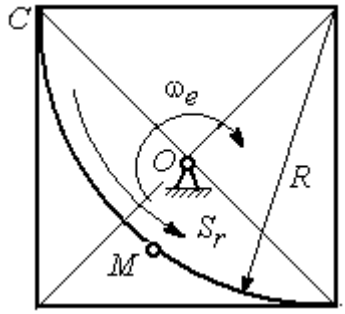


Задача 2

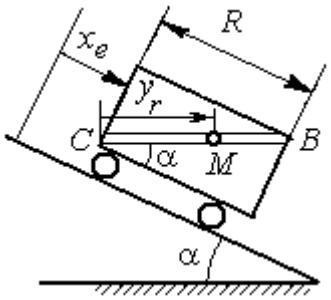


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



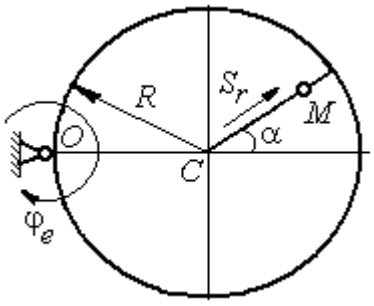
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка *M* прошла путь *CB*

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Задача 2

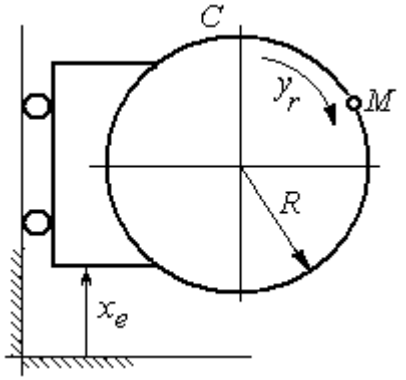
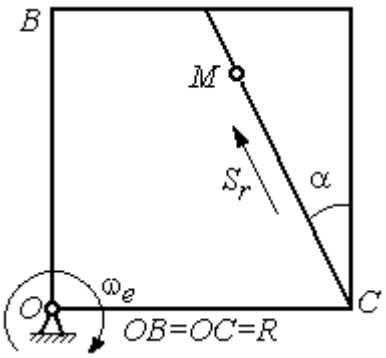


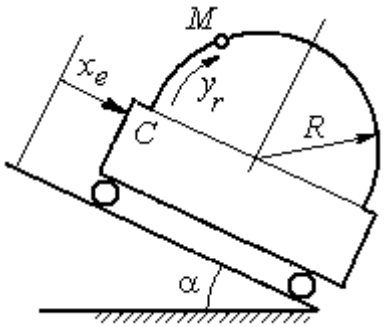
Рис. 3.3. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

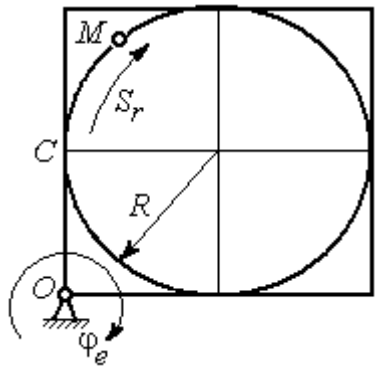


Задача 2

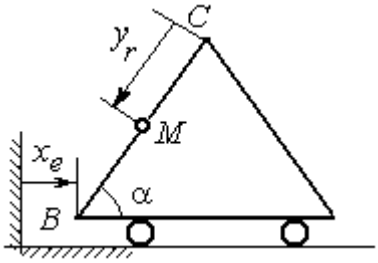


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



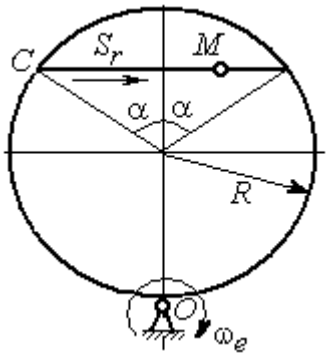
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

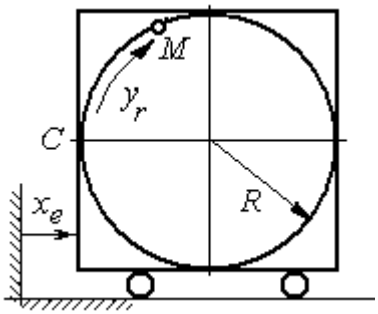
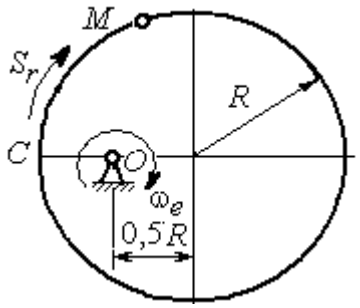


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

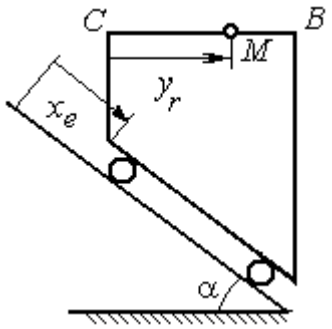
Окончание вариантов задания К4

Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
1	1	3	–	$S_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	–
2	1	2	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	–	$y_r = \pi\left[2t + \sin\pi t\right]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	–	$y_r = \pi\left[2t + \cos(\pi t/2)\right]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	–
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = \left[1 - \cos(\pi t/4)\right]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
8	1	8	–	$S_r = 2\pi\left[t^2 + \sin\pi t\right]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	–
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	–	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	–
11	1	6	–	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	–
12	1	18	–	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	–
16	1	12	90	$S_r = 3\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	–	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}\left[t^2 + 2\sin\pi t\right]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	–
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	–	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	–
21	1	3	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	–

Окончание табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
22	1	4	–	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	–
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	–	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	–
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	–	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	–	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	–	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного треугольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

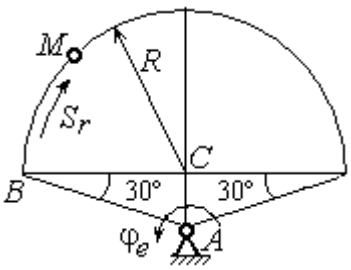


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ_e. По ободу диска от точки *B* движется точка *M*. Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\cup}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки *M* на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой S_r. Радиус диска $R = 9$ см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Вращение фигуры будет для точки *M* переносным движением. Относительное движение точки *M* – её движение по окружности обода диска.

Для определения **положения точки** *M* на ободе диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки *M* определяется центральным углом $\alpha = \dfrac{S_r(1)}{R} = \dfrac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.7 точкой M_1.

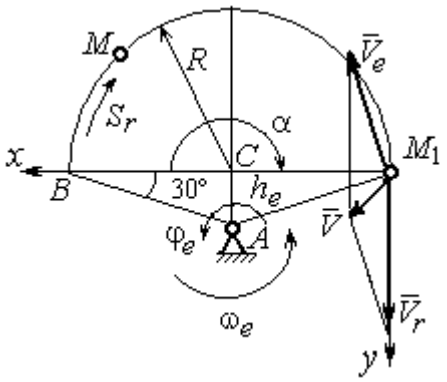


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

Для определения **скорости переносного движения** точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При $t_1 = 1$ с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает, что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой ω_e на рис. 3.7.

В момент времени $t_1 = 1$ с точка *M* находится в положении M_1. Скорость V_e переносного движения точки в момент времени $t_1 = 1$ с $V_e(1) = \omega_e(1)h_e$, где

расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги *BM*. В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|18\pi t\right|$. При t_1 = 1 с $V_r(1) = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 18\pi$ = 56,5 см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат M_1xy (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56{,}5 = 29{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5{,}2^2 + 29{,}5^2} = 29{,}95$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi$ = 56,5 см/с^2 – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r.

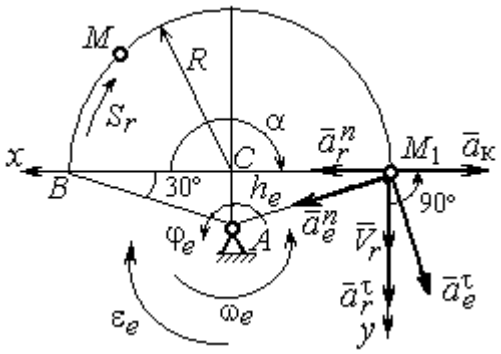


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно: $a_r^n(1) = \dfrac{V_r^2(1)}{R} = \dfrac{(18\pi)^2}{9} = 355{,}3$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right|$. Вычислим производную $\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2. Угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right| = 4$ рад/с^2 постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\varphi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\varphi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41{,}6$ см/с^2.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле: $a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1)h_e = 6\sqrt{3} = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113{,}1$ см/с^2.

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_к$. Получим: $a_y = a_e^{\tau}\cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^{\tau} = 97{,}9$ см/с^2, $a_x = -a_e^{\tau}\cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 228{,}4$ см/с^2. Модуль абсолютного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248{,}5$ см/с^2.

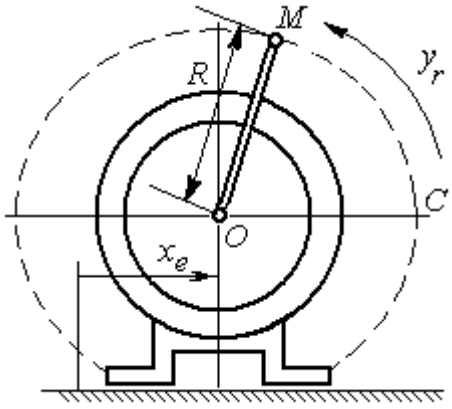


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укреплённого на электромоторе

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t/3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R, переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α, отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC, в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \dfrac{y_r(t_1)}{R} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1.

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с V_r= 6,28 см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1.

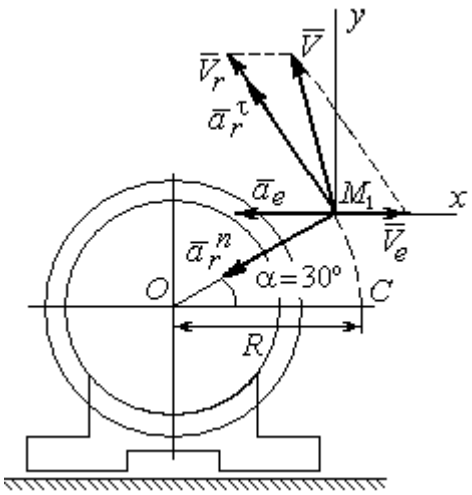


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3}\cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 1$с $V_e = \dfrac{5\pi}{3}\cos 60^\circ$ = 2,62 см/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси xM_1y, как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r\cos 60^\circ = -0{,}52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r\cos 30^\circ = 5{,}44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5{,}46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_к = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^{\tau} = \dot{V}_r$, $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^{\tau} = \dot{V}_e = -\dfrac{5\pi^2}{9}\sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$с равны $a_r^{\tau} = 6{,}28$ см/с^2, $a_r^n = 6{,}57$ см/с^2, $a_e = -4{,}75$ см/с^2. Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y. Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^{\tau}\cos 60^\circ - a_r^n\cos 30^\circ - a_e = -4{,}08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^{\tau}\cos 30^\circ - a_r^n\cos 60^\circ = 2{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4{,}61$ см/с^2.

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:** $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}$, где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

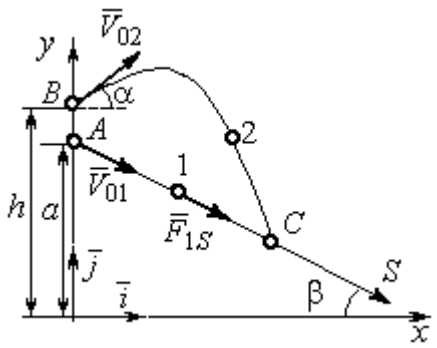
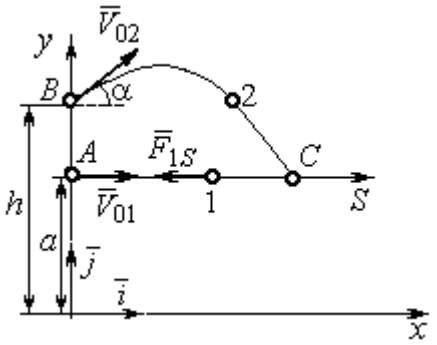
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой m_1, получив в начальном положении *A* скорость V_{01}, движется вдоль гладкой оси *AS*, наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси *AS*. Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения *B* на оси *y*. На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей *x*, *y*.

Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке C. Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

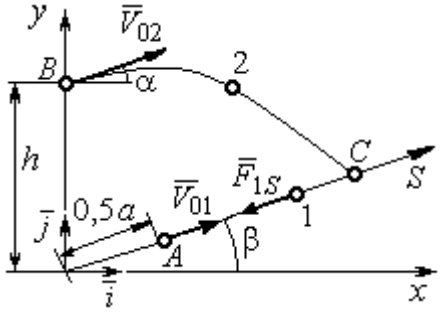
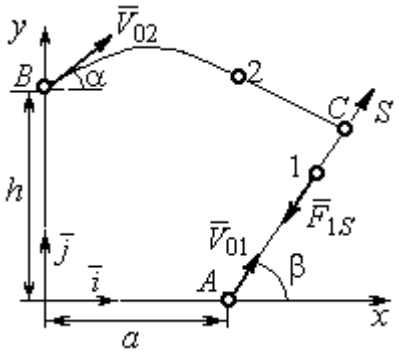
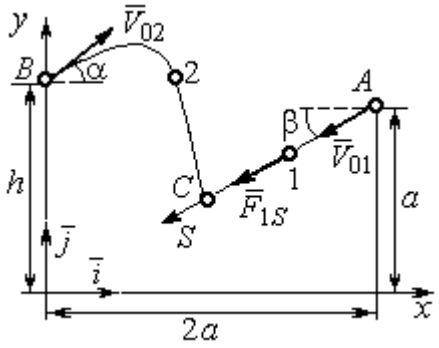
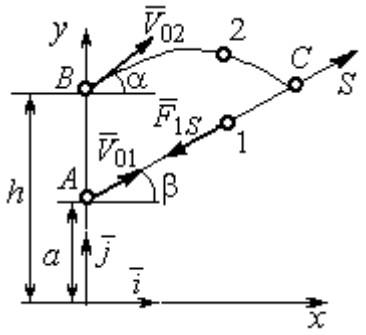
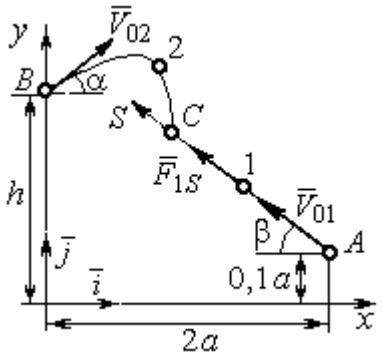
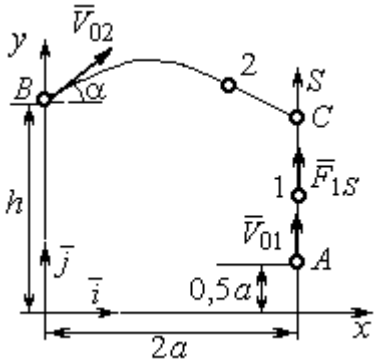
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Встреча в точке *C* в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	Встреча в точке *C*, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}4$ с	Встреча в точке *C* в момент максимального подъёма точки 1

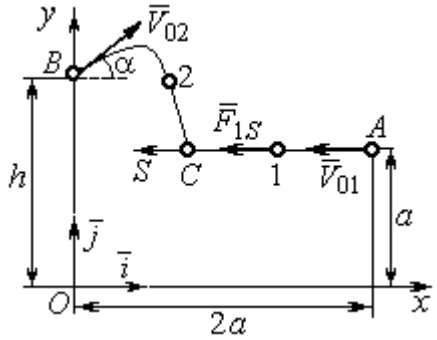
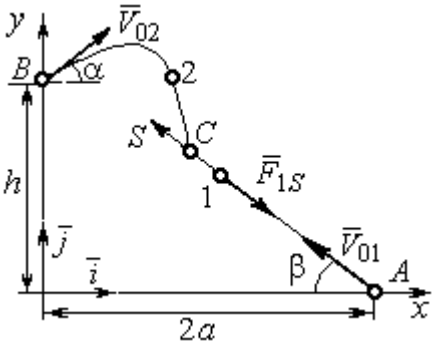
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с	Встреча в точке *C* в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1, кг	F_{1S}, Н	V_{01}, м/с	β, град	m_2, кг	$\vec{F}_2$, Н	a, м	h, м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i}+8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i}+2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i}+8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i}+2\vec{j}$	2	2,5
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i}+8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i}-4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i}+4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i}+10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i}-2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i}+2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1	1

Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси *AS* с углом наклона $\beta = 30^{\circ}$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось *AS* равна $F_{1S} = 4{,}5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось *AS* показано на рис. 4.3.

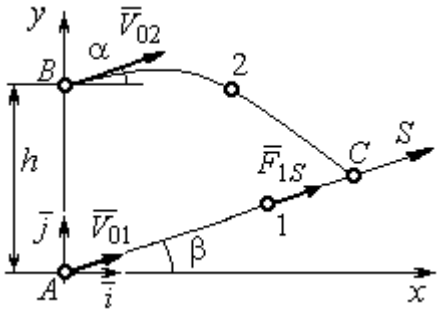


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения *B* на оси *y* высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1{,}2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей *x*, *y* декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси *AS* в точке *C*.

Решение

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси *AS* и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось *AS* равна F_{1S} (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\dfrac{dV_{1S}}{dt} = 4{,}5 - m_1 g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2, дифференциальное уравнение движения точки 1

приводится к виду: $\frac{dV_{1S}}{dt} = -2{,}66$. Разделим переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2{,}66dt$. Проинтегрировав его, получим зависимость скорости точки 1 от времени: $V_{1S} = -2{,}66t + C_1$. Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты $V_{1S} = \frac{dS}{dt}$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{dS}{dt} = -2{,}66t + C_1$, проинтегрировав которое, найдём уравнение движения точки 1: $S = -1{,}33t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2{,}66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси AS описывается уравнением: $S = -1{,}33t^2 + 4t$.

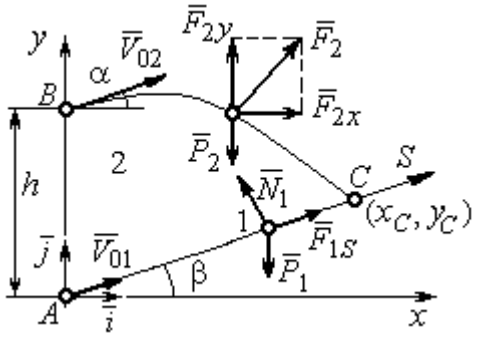


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени t_1, когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной: $V_{1S}(t_1) = \frac{V_{01}}{2} = 2$ м/с. Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2{,}66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0{,}75$ с. Расстояние AC, пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0{,}75$ с, $AC = S(t_1) = -1{,}33 \cdot 0{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ м. Координаты точки встречи x_C, y_C определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1{,}95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1{,}12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, проекции которой на оси координат $F_{2x} = 2{,}4$ Н, $F_{2y} = 4{,}5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат *x*, *y* имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2{,}4, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2 g + 4{,}5,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2$, $\ddot{y} = -6{,}06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось *x* как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \dfrac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось *x* на производную от координаты $V_{2x} = \dfrac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси *x*, $x = t^2 + C_3 t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные C_3 и C_4, воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0{,}75$ с $x(t_1) = x_C = 1{,}95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1{,}85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси *x*: $x = t^2 + 1{,}85t$.

Закон движения точки 2 вдоль оси *y* находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\dfrac{dV_{2y}}{dt} = -6{,}06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось *y* от времени: $V_{2y} = -6{,}06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось *y* производной от координаты $V_{2y} = \dfrac{dy}{dt}$, вто-

рично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси y описывается уравнением: $y = -3{,}03t^2 + C_5 t + C_6$. Для определения констант C_5 и C_6 используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0{,}75$ с $y(t_1) = y_C$ =1,12 м. Получим $C_6 = 1$, $C_5 = 2{,}43$. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси y по закону: $y = -3{,}03t^2 + 2{,}43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1{,}85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6{,}06t + 2{,}43$. Значения проекций при $t = 0$: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1{,}85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2{,}43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{{V_{02x}}^2 + {V_{02y}}^2} = 3{,}05$ м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V_{02y}}{V_{02x}} = \dfrac{2{,}43}{1{,}85} = 1{,}31$. Откуда $\alpha = 52{,}64^\circ$.

4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало

координат; ω – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где μ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где n – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$; ω – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; ω_1 – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$;

$A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; α – начальная фаза колебаний, $\text{tg}\alpha = \dfrac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки апериодическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.**

При действии гармонической возмущающей силы $F = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \dfrac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае резонанса, когда $p = \omega$, – вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2

определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}$. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \dfrac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a\sin pt$, где a, p – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$, где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \dfrac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

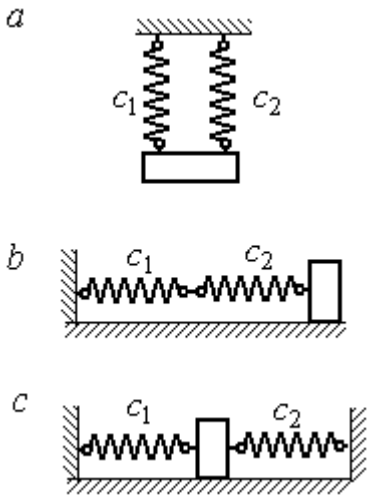


Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:
a – две параллельные пружины;
b – последовательно соединённые пружины; *c* – крепление груза между пружинами

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.5, *a*) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалент-

ной жесткости $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{экв} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

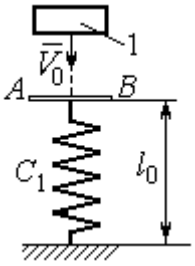
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2. Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu \vec{V}$ Н, где μ – коэффициент сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

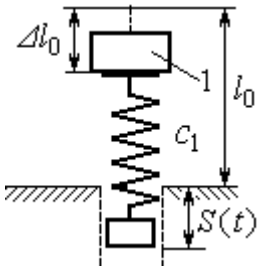
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

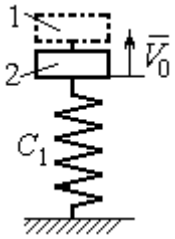
Задача 2



К верхнему концу пружины, сжатой на величину $\Delta\ell_0$, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

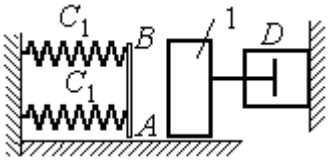
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх

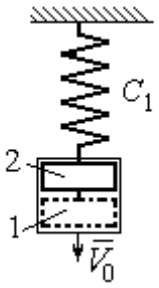
Задача 2



Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упирается в площадку AB, укреплённую на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

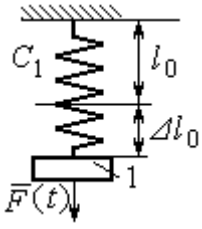
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



В положении статического равновесия груза 2, укреплённого на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0

Задача 2

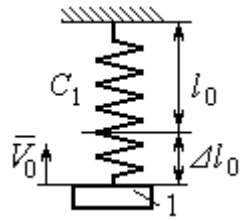


Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

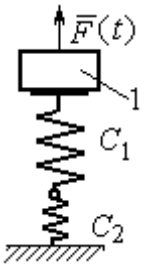
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вверх

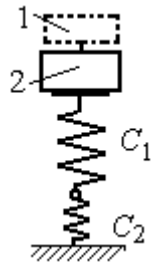
Задача 2



Грузу 1, укреплённому на двух последовательно соединённых пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

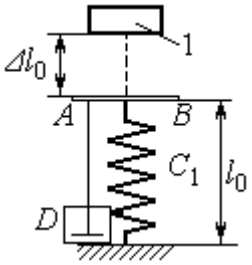
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укреплённых на двух вертикальных последовательно соединённых пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

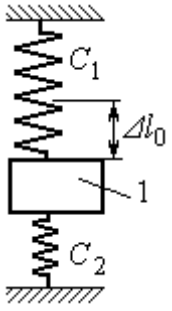
Задача 2



Груз 1 падает с высоты $\Delta\ell_0$ на площадку AB, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине

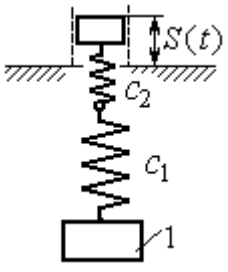
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости

Задача 2

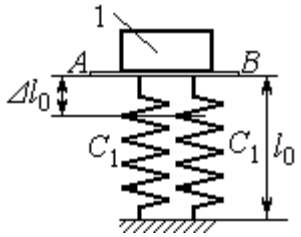


К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

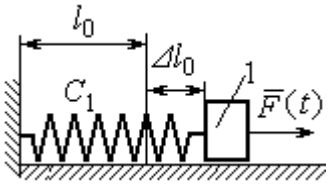
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вниз

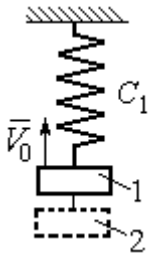
Задача 2



К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

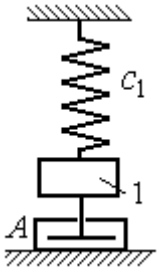
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх

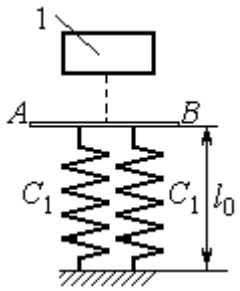
Задача 2



В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

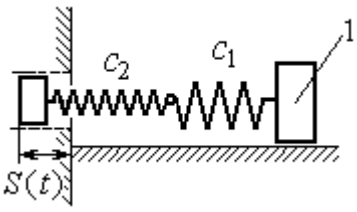
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укреплённой на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней

Задача 2



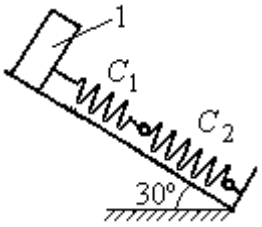
К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания Д2

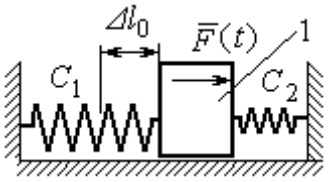
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



В положении статического равновесия груза 1, укреплённого на двух последовательно соединённых пружинах, сообщили скорость V_0, направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2



Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	–	2,0	200	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	210	–	0,1	–	–	0,02sin12t
2	1	1,5	2,0	4	250	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	4	220	–	–	1,0	–	–
3	1	2,0	1,5	3	250	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	–	200	–	0,14	–	12sin5t	–
4	1	2,0	–	3	180	–	0,1	–	–	–
	2	1,5	–	2	150	120	–	–	8sin12t	–
5	1	1,0	2,0	–	120	100	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	50	–	0,5	18	–	–
6	1	1,2	–	–	120	180	0,12	–	–	–
	2	1,4	–	2,4	120	180	–	–	–	0,03sin14t
7	1	1,6	–	3,2	140	–	0,15	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,12	–	12sin6t	–
8	1	1,0	2,0	3,0	150	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	3,5	120	–	–	15	–	–

Продолжение табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
9	1	1,5	–	–	100	–	–	–	–	–
	2	1,4	–	2,0	100	110	–	–	–	0,015sin8t
10	1	2,5	–	2,5	110	100	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	110	52	0,08	–	5sin9t	–
11	1	2,0	–	4,0	300	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	200	–	0,12	–	–	0,01sin4t
12	1	1,8	2,4	4	220	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	5	240	–	–	0,6	–	–
13	1	1,5	1,5	2	200	–	–	–	–	–
	2	1,8	–	–	180	–	0,08	–	10sin10t	–
14	1	2,0	–	2	200	–	0,12	–	–	–
	2	2,0	–	2	150	120	–	–	10sin8t	–
15	1	1,5	2,0	–	120	250	–	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,4	4	–	–
16	1	2,0	–	–	150	75	0,1	–	–	–
	2	2,0	–	2,5	150	75	–	–	–	0,01sin5t
17	1	1,5	–	2,1	160	–	0,11	–	–	–
	2	1,8	–	–	150	–	0,1	–	8sin12t	–
18	1	2,0	1,0	2,5	80	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	2,5	50	–	–	21	–	–
19	1	1,6	–	–	120	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	2,0	85	120	–	–	–	0,015sin7t
20	1	2,0	–	2,0	90	100	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	100	90	0,12	–	6sin10t	–
21	1	2,0	–	1,6	220	–	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	250	–	0,14	–	–	0,01sin10t
22	1	2,2	1,5	3	180	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	4	280	–	–	0,8	–	–
23	1	2,2	1,2	2	220	–	–	–	–	–
	2	1,6	–	–	200	–	0,12	–	5sin7t	–

Окончание табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
24	1	1,6	–	2,4	160	–	0,13	–	–	–
	2	1,0	–	3	150	300	–	–	6sin10t	–
25	1	0,8	1,2	–	120	80	–	–	–	–
	2	0,8	–	–	180	–	0,4	12	–	–
26	1	1,4	–	–	100	120	0,15	–	–	–
	2	1,8	–	2,2	150	120	–	–	–	0,015sin8t
27	1	2	–	4,0	150	–	0,12	–	–	–
	2	2	–	–	162	–	0,13	–	5sin9t	–
28	1	1,5	2,0	2,0	140	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	3,1	180	–	–	12	–	–
29	1	1,0	–	–	140	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	2,4	75	150	–	–	–	0,08sin5t
30	1	1,6	–	3	75	150	–	–	–	–
	2	1,5	–	3	80	70	0,15	–	8sin10t	–

Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

Задача 1. Груз 1 весом P = 20 Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплён к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30º, коэффициент жесткости пружины c = 400 Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta\ell_0$ = 0,1 м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

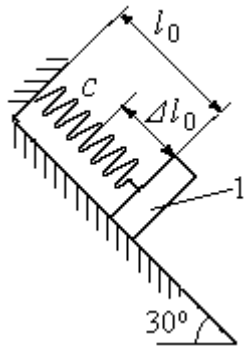


Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11) В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение *x* относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

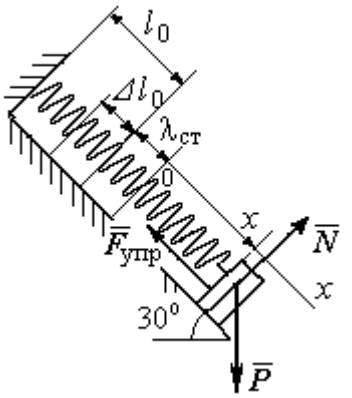


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравновешивается силой, равной проекции силы тяжести на ось *x*: $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где ω – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}01$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси *Ox*.

Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \dfrac{P\sin 30^\circ}{c} = 0{,}025$ м. Координата начального положения груза определяется величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты x выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!): $x_0 = -(\Delta\ell_0 + \lambda_{ст}) = -0{,}125$ м (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0{,}125$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0{,}125\cos 14{,}01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0{,}125$ м.

Задача 2. Груз 1 весом $P = 20$ Н подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800$ Н/м. В начальный момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2$ м/с, направленная вверх.

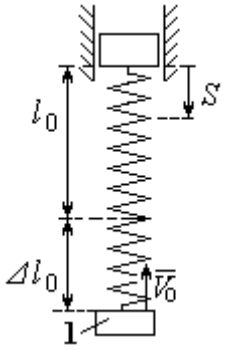


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону $S = a\sin 10t$, где $a = 0{,}02$ м.

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, *c*, *d*). В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

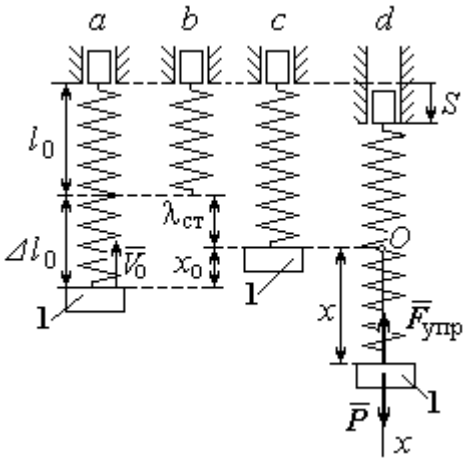


Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза: *a* – положение груза на начало колебаний; *b* – недеформированная пружина; *c* – статическое растяжение пружины под действием веса груза; *d* – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*

$$F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение *x* относительно начала координат, растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{\text{ст}} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, ω = 19,81 рад/с; h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m}$ = 7,85 м/с^2; p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 10 рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox. Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, *b*) $x_0 = \Delta\ell_0 - \lambda_{ст}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \frac{P}{c}$ = 0,02 м, тогда x_0 = 0,08 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,08 м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1 \omega \sin\omega t + C_2 \omega \cos\omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2} \cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось Ox $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при t = 0 $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим: $C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)}$ = – 0,11 м. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0{,}08\cos 19{,}82t - 0{,}11\sin 19{,}82t - 0{,}03\sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$ = 0,03 м. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{соб} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ = 0,14 м.

4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой $A(\vec{F})$ силы $\vec{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении S_1 точки приложения силы называется величина $A(\vec{F}) = FS_1\cos\alpha$. Если угол α острый, работа силы положительна. Если угол α тупой, – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

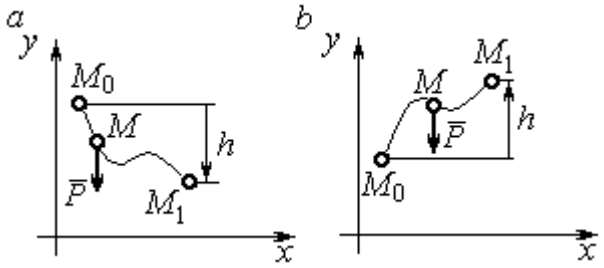


Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы тяжести материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

Работа силы упругости пружины на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\dfrac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \dfrac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\dfrac{mV_1^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0,

V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения M_0 в положение M_1.

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; ρ – радиус кривизны траектории точки.

4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

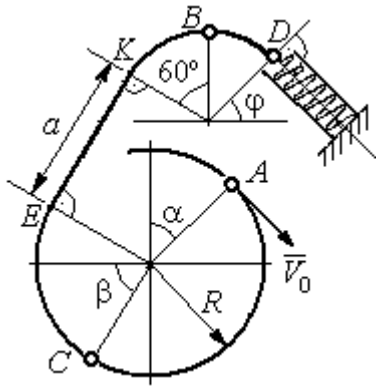
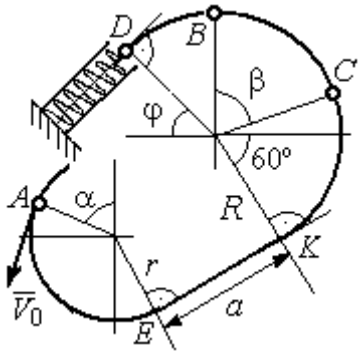
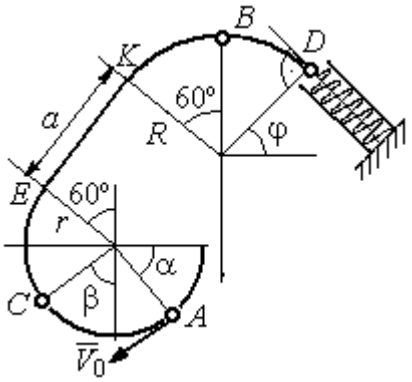
Тонкий стержень с надетым на него шариком массой *m* расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами *r* и *R* = 2*r*, соединённых прямолинейным отрезком *EK*, сопряжённым с дугами окружностей в точках *E* и *K*. В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка *EK* = *a*.

В точке *A*, положение которой на дуге окружности определяется углом α, шарику сообщают начальную скорость V_0. По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку *EK* на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения *f*. На участках с вертикальным отрезком *EK* считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки *D*, шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью *c* и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки *D* определяется углом φ.

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положении траектории – точку *B* со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом β.

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**	**Варианты № 3, 13, 23**
		

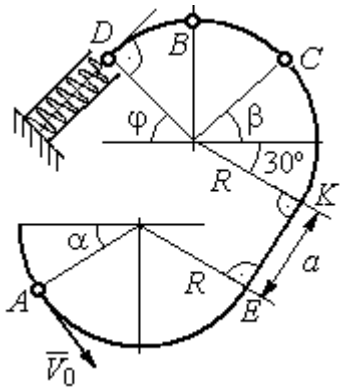
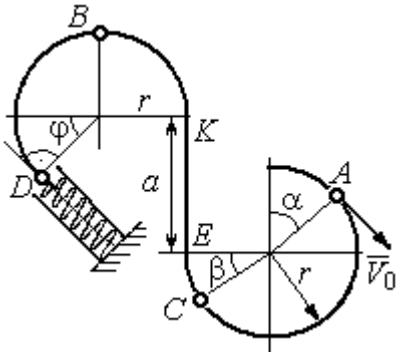
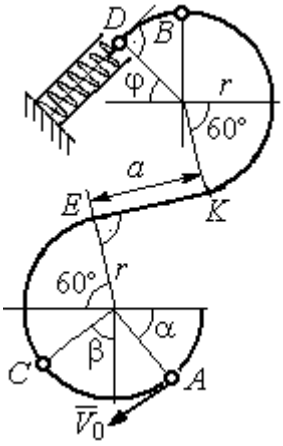
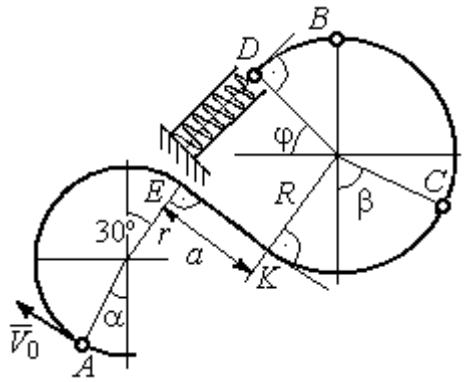
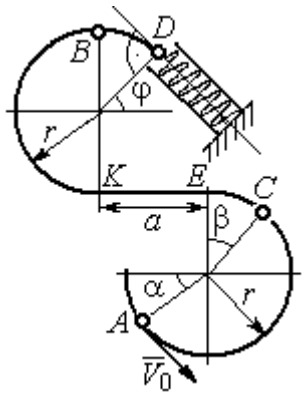
Варианты № 4, 14, 24	**Варианты № 5, 15, 25**	**Варианты № 6, 16, 26**
		

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д3

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

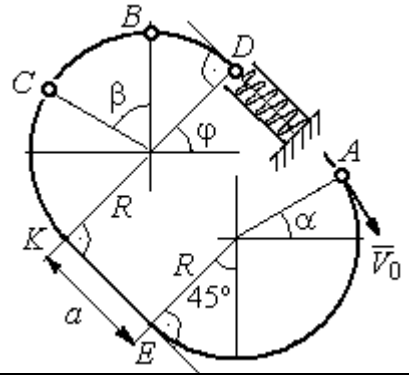
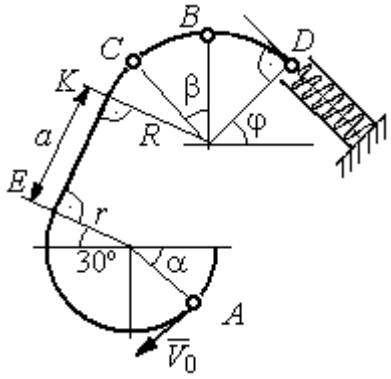
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 4.16. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
m, кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α, град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ, град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r, м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a, м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c, Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Окончание табл. 4.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
m, кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α, град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β , град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ, град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r, м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a, м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c, Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках E и K с прямолинейным отрезком EK длиной a = 0,6 м (рис. 4.17). Радиусы окружностей R = 1 м и r = 0,5 м. Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках E и K, составляют с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик массой m = 0,5 кг. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом α = 60° (см. рис. 4.17), шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой EK на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения f = 0,2. Достигнув точки D на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью c = 100 Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку B) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при k = 0,3. При

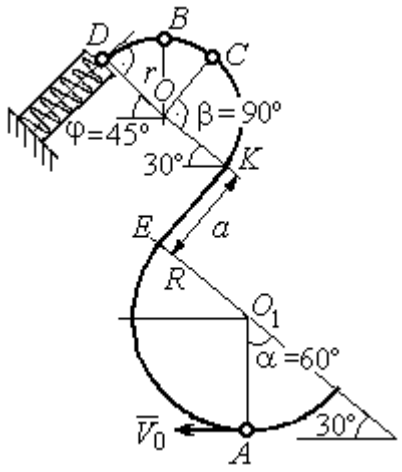


Рис. 4.17. Схема движения шарика

найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90°$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения *A* в наивысшее положение – точку *B*.

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движении шарика по прямой *EK* на него действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_{EK}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.18, *b*). Работу совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

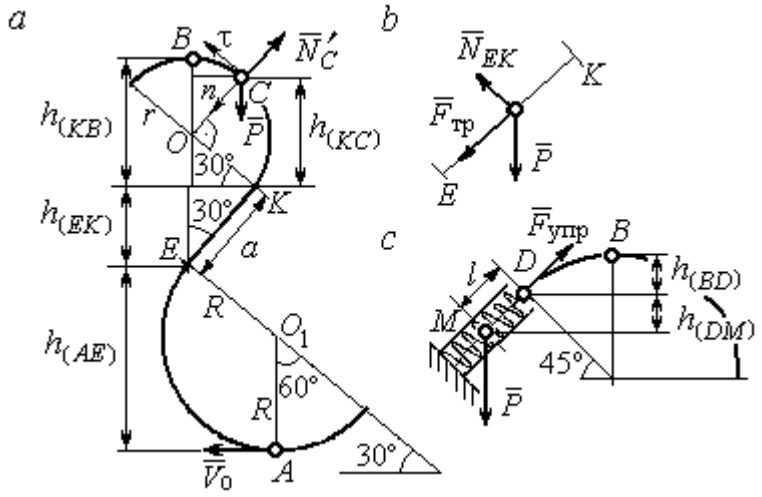


Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек *A* и *B* на траектории; V_A – начальная скорость шарика в точке *A*, $V_A = V_0$; V_B – его скорость в точке *B*, $V_B = 0{,}3V_0$.

Для вычисления перепада высот точек *A* и *B* имеем выражение (рис. 4.18, *a*):

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} = R(1+\sin 30^\circ) + a\cos 30^\circ + r(1+\sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *A* в положение *B*, получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{тр}})$, где $A(\vec{P}) = -Ph_{(AB)}$,

$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения *AB* и силы трения на отрезке *EK*. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg\cos 60^\circ$ (рис. 4.18, *a*, *b*).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения *A* в конечное положение *B* принимает вид: $\frac{m(0{,}3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -\,mg\left[(R+r)(1+\sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f \cdot \cos 60^\circ)\right]$.

После подстановки данных задачи, получим: $0{,}91V_0^2 = 55{,}517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: $V_0 = 7{,}81$ м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке *C*.

Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.18, *a*). Уравнение движения шарика в точке *C* в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N'_C$, где V_C – скорость шарика в точке *C*, N'_C – реакция стержня, приложенная к шарику. Направление реакции на рис. 4.18, *a* соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся тем, что скорость шарика в точке *B* уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения *C* в конечное положение *B*. На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где V_C, V_B – значения скорости шарика в точках *C* и *B*; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек *C* и *B*; $h_{(CB)} = r(1-\sin 30^\circ) = 0{,}5r$ (см. рис. 4.18, *a*). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии $V_B = 0{,}3V_0 = 2{,}34$ м/с, найдём $V_C = 3{,}22$ м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} = -6{,}12$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке C (см. рис. 4.18, *а*) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке C равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки *B* до положения максимально сжатой пружины – точки *M*. Движение на этом участке происходит по дуге окружности *BD* и по прямой *DM*. При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *B* в *M* получим: $\dfrac{mV_M^2}{2} - \dfrac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где V_M, V_B – скорость шарика в точках *M* и *B*. Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} =$ $= P\left[h_{(BD)} + h_{(DM)}\right] = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке *DM* длиной *l*: $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\dfrac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке *M* скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\dfrac{mV_B^2}{2} = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right] - \dfrac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке *B* найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2{,}34$ м/с, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3{,}468l - 2{,}085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0{,}24$ м.

5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

Поступательное движение твердого тела описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k) \quad \text{или} \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}^e_k),$$

где ω – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; φ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ε – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}, \quad ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}, \quad J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx},

F_{ky}^{e} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

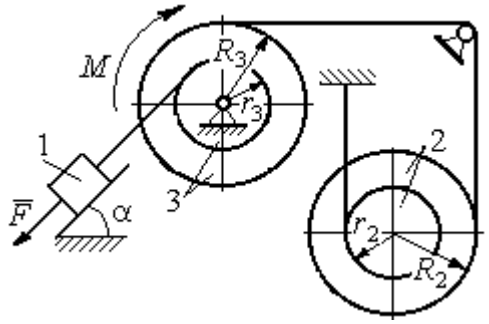
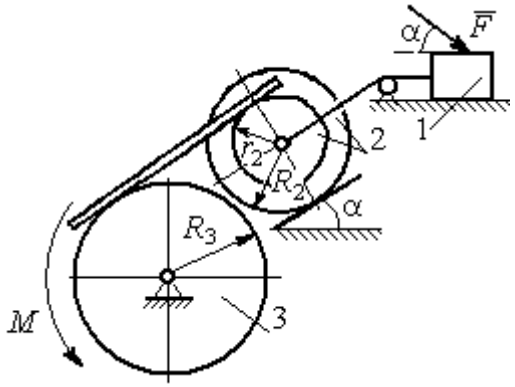
Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α. Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

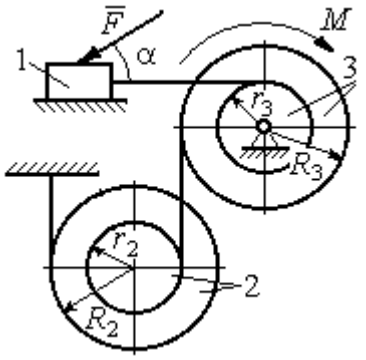
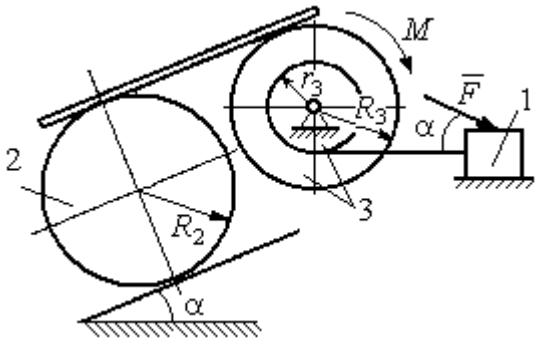
Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2, r_2 и R_3, r_3.

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2}, i_{z3}.

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

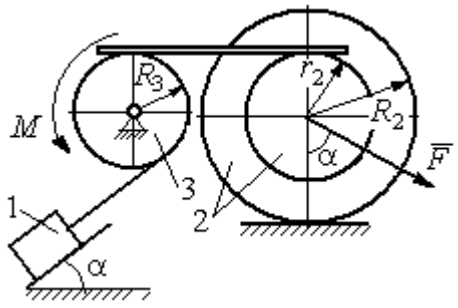
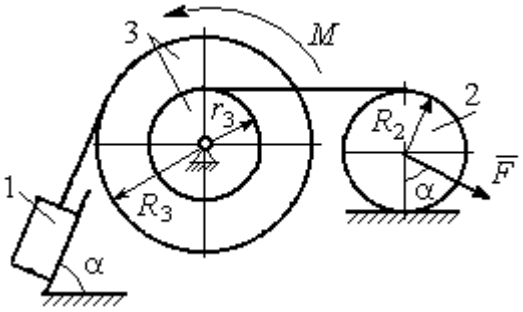
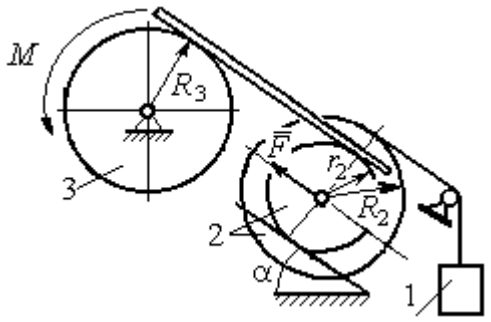
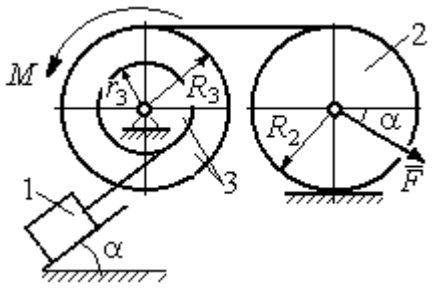
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

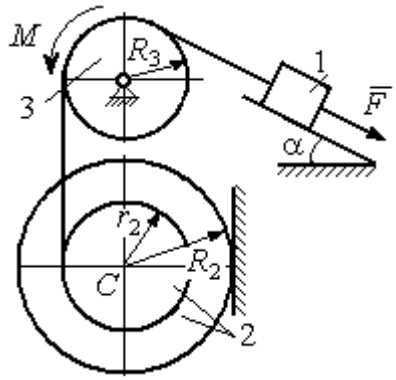
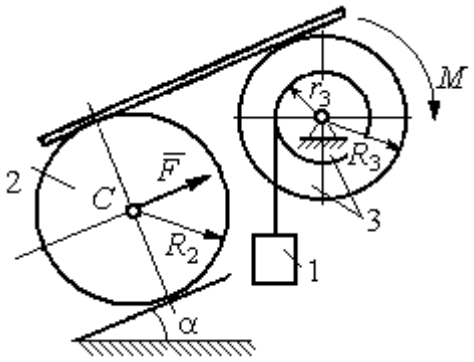
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	–	$2r$	–
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	–	$2r$	–
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	-	$r\sqrt{3}$	–

Окончание табл. 5.1

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	–	$r\sqrt{2}$	–
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	–	$r\sqrt{3}$	–
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$	–
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	-	$r\sqrt{3}$	
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	–	$2r$	–
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$2r$	–
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	–	$r\sqrt{3}$	–
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	-	$r\sqrt{3}$	
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	–	$2r$	–
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$

Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 3P$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$,

приложенных к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической системой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

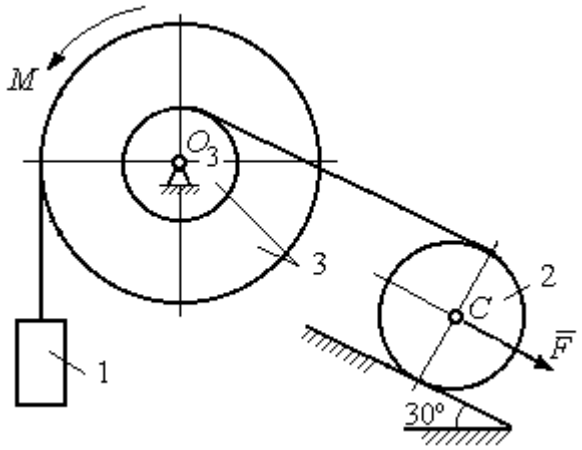


Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

Решение

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

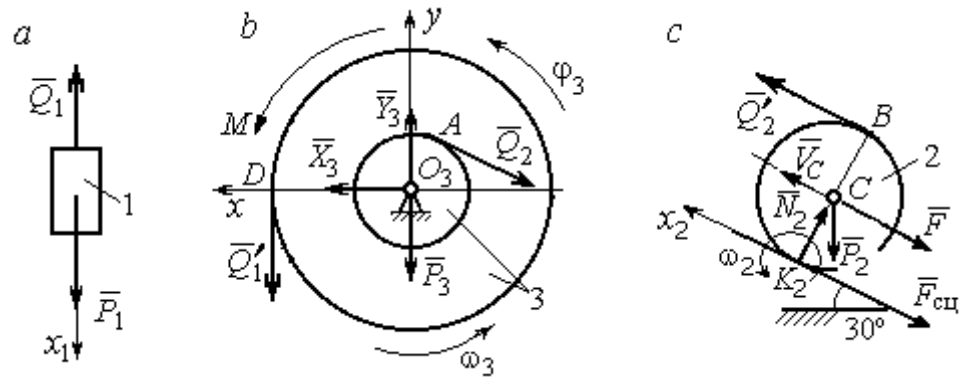


Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
a – поступательное движение груза 1; *b* – вращательное движение блока 3;
c – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.4, *a*). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось x_1 в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось x_1 в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где m_1, a_1 – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси *z*, проходящей через его центр масс O_3, перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой ω_3.

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1' R_3 + M - Q_2 r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

где J_{zO_3} – момент инерции блока 3 относительно оси *z*; ε_3 – угловое ускорение диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g}(r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси x_2. Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости ω_2 (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через

центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q_2' R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r,$$

где m_2 – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; a_C, ε_2 – ускорение центра масс и угловое ускорение катка 2; J_C – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P R_2^2}{g} = \frac{4 P r^2}{g}$. В уравнении вращательного движения диска момент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна V_C, то угловая скорость катка определится по формуле: $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей (см. рис. 5.4, *c*). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс катка 2 и его угловым ускорением: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки *B* катка 2 (см. рис. 5.4, *c*) $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C$.

Точка *B* катка 2 и точка *A* блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек *A* и *B*, получим равенство: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования последнего выражения найдём соотношение между ускорениями: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\frac{2P}{g} a_1 = 2P - Q_1, \quad \frac{9Pr^2}{g} \varepsilon_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r;$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, \quad \frac{4Pr^2}{g} \varepsilon_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1, \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину Q_1, а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g} a_C = 7P - Q_2, \; \frac{3P}{g} a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \dfrac{10}{111} g$, $Q_2 = \dfrac{79}{37} P$. Величину натяжения нити Q_1 находим из первого уравнения исходной системы: $Q_1 = \dfrac{34}{37} P$.

Для вычисления динамической реакции R_3 оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси x, y имеют вид :

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0,\ m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где X_3, Y_3, – проекции реакции R_3 оси вращающегося блока 3 на оси x, y (см. рис. 5.4, *b*). Отсюда, с учетом значений $Q_1 = 0{,}919P$ и $Q_2 = 2{,}135P$, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инерции относительно оси z, проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где R – радиус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении S точки приложения силы: $A(F) = FS\cos\alpha$, где α – угол между вектором силы и перемещением. Если угол α острый, работа

положительна. Если тупой – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

Работа пары сил с постоянным моментом M при повороте тела на конечный угол φ: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V\cos\alpha$, где V – скорость точки приложения силы; α – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O\cos\alpha \pm F h_O \omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; h_O – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса *O*.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где T – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где T, T_0 – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сум-

ма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

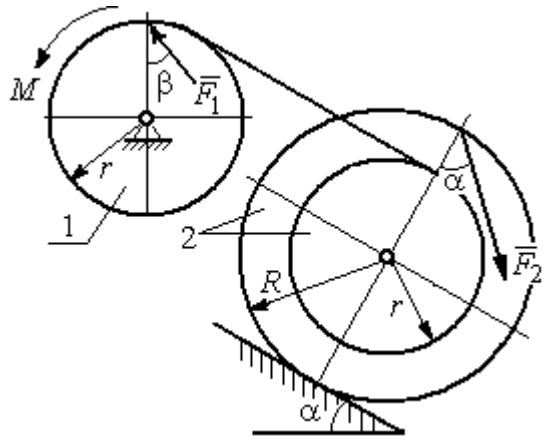
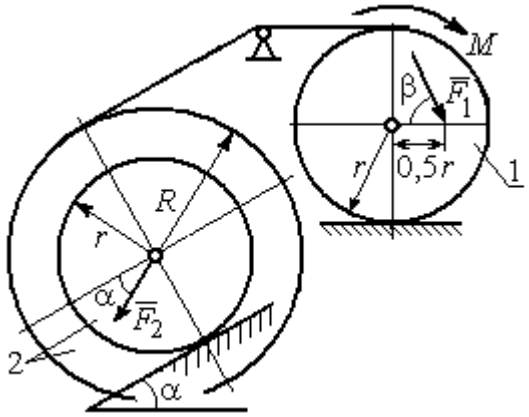
Вес дисков P_1 и P_2. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом *M*. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β, показанными на схемах механизмов.

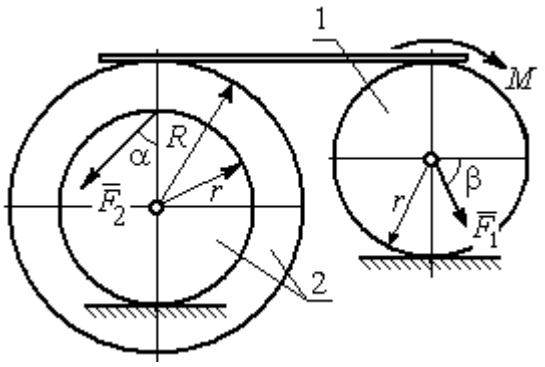
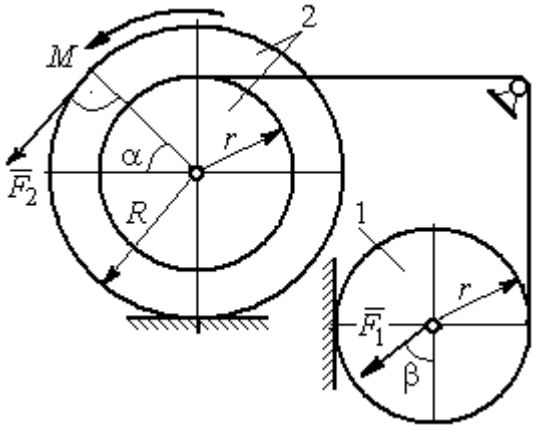
Радиус однородного диска *r*. Радиусы ступеней ступенчатого диска *R* и *r*. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

1. Найти ускорение центра масс диска 2.

2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

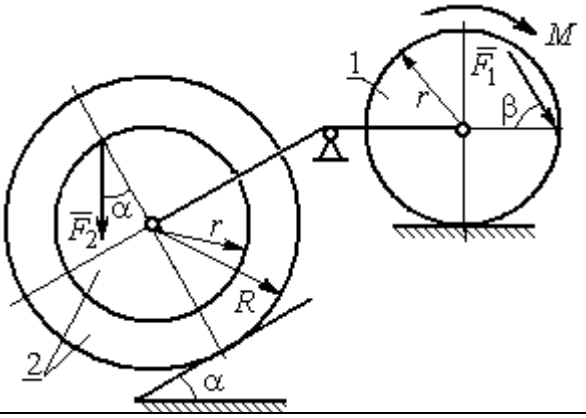
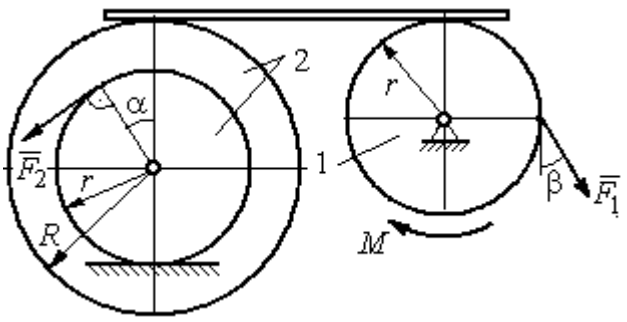
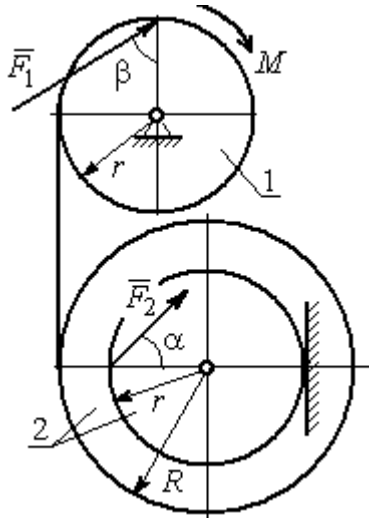
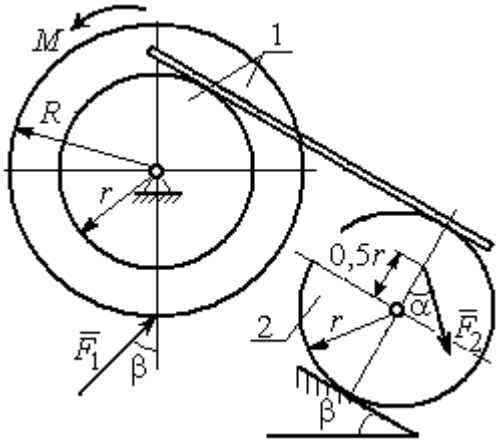
Вариант № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д5

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

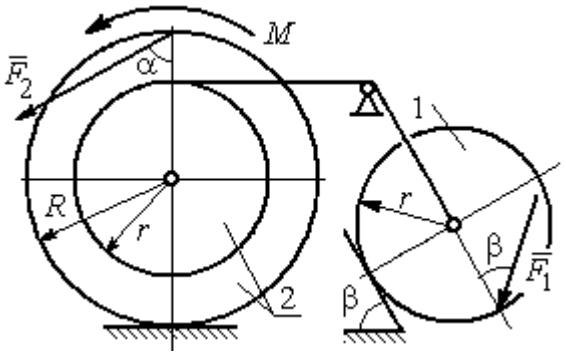
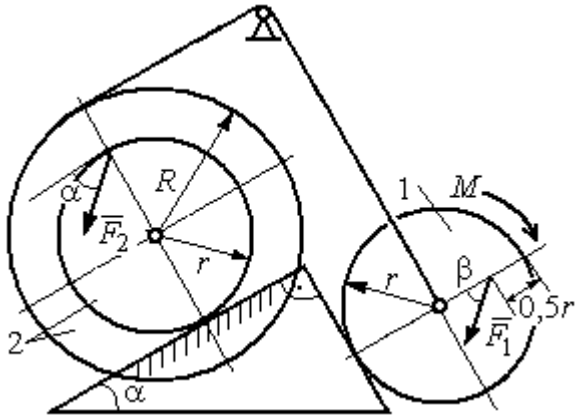
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты 10, 20, 30**
	

Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2

Окончание табл. 5.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами α и β.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1. Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания.

Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

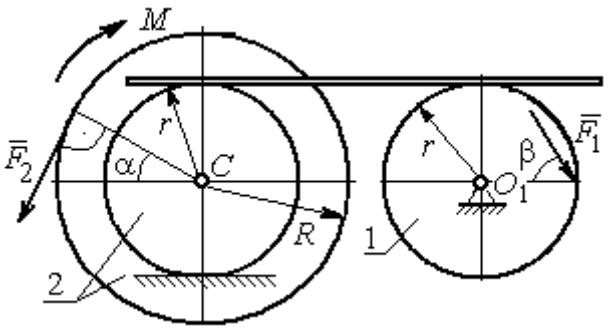


Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира O_1, реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести $P_1 = 40$ Н, $P_2 = 60$ Н, модули сил $F_1 = 80$ Н, $F_2 = 30$ Н, величина момента $M = 35$ Н·м, углы наклона сил $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, радиусы дисков $R = 0{,}8$ м, $r = 0{,}6$ м, радиус инерции диска 2 $i_z = 0{,}4$ м.

Решение

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости ω_1 и ω_2 дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\vec{F}_1$, сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$. На диск 2: сила $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\vec{F}_{сц}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

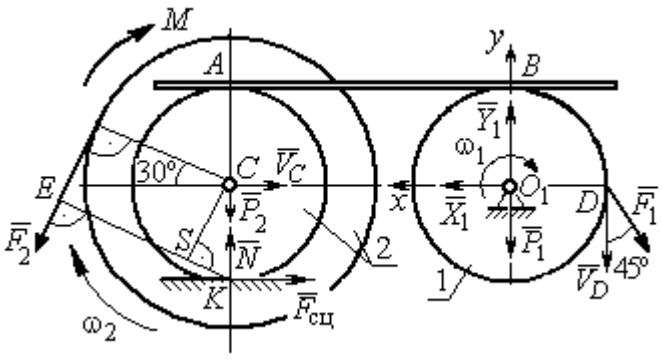


Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где ω_1 – угловая скорость диска 1; J_{zO_1} – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где V_C, ω_2 – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; J_{zC} – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка *K* на рис. 5.8). Тогда скорость точки *C* определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки *A* $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки *A* на диске 2 равна скорости точки *B* на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравнивая скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left(\frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2 .$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt} \left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки C – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра K; $\vec{\omega}_2$, ω_2 – вектор и модуль угловой скорости диска 2; h_K – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра K. Мощ-

ность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки K противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2(R + r\cos 60^\circ)\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r\cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы F_2 можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку C. Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Момент M направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M\omega_2 = M\dfrac{V_C}{r}$. Мощность силы $\vec{F}_1$, приложенной в точке D, $N(\vec{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2}.$$

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C\frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + \frac{M}{r} + F_1\sqrt{2}\right]g}{\left[2P_1 + P_2\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6{,}85$ м/с^2.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки *C* до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки *K* – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{r} = \frac{a_C}{r}$ = 11,42 рад/с^2. Угловое ускорение диска 1 находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22{,}84$ рад/с^2.

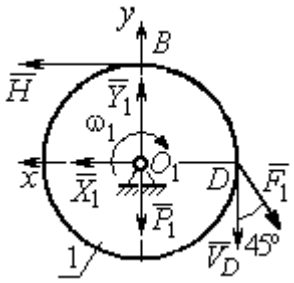


Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\vec{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме: $J_{zO_1}\varepsilon_1 = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ε_1 – угловое ускорение диска; J_{zO_1} – момент инерции диска 1 относительно оси *z*, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси *z*.

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси *z*: $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e) = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного движения диска 1 принимает вид: $\frac{P_1 r^2}{2g}\varepsilon_1 = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$.

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 ε_1 = 22,84 рад/с^2, найдем реакцию стержня *H* = 28,63 Н.

Для определения динамической реакции шарнира O_1 диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат O_1x и O_1y, как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1\sin 45^\circ = 0, \quad Y_1 - P_1 - F_1\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне $H = 28{,}63$ Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: $X_1 = 27{,}94$ Н, $Y_1 = 96{,}57$ Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = 100{,}53$ Н.

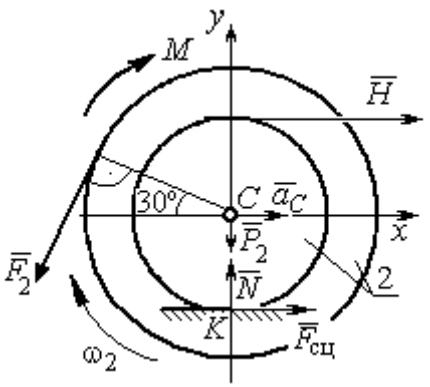


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат xCy показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{\text{сц}} - F_2\cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2\cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28{,}63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6{,}85$ м/с^2, находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{\text{сц}} = 28{,}27$ Н, $N = 85{,}98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{\text{сц}}^2} = 90{,}51$ Н.

6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

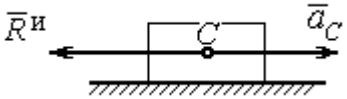


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$, равному по величине $R^{\text{и}} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

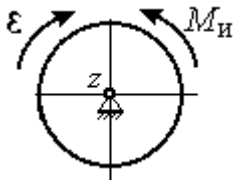


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{\text{и}}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси,

проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

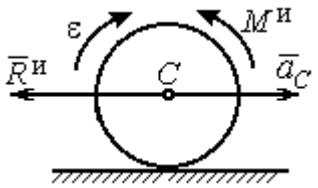


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0, \ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра *O*; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма

элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r. Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M. Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

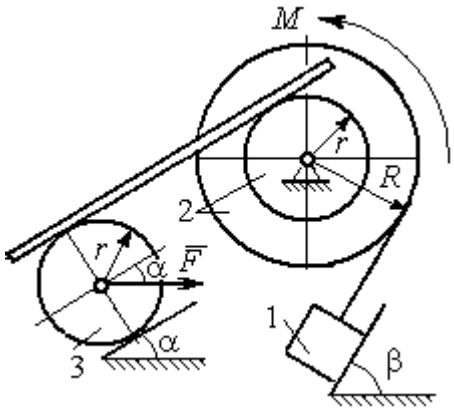
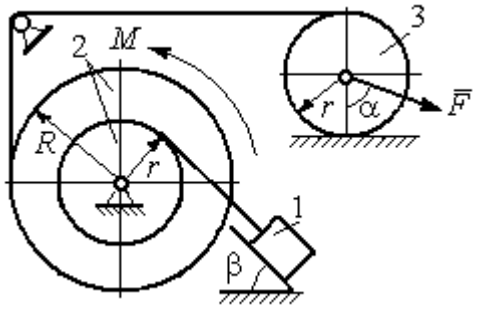
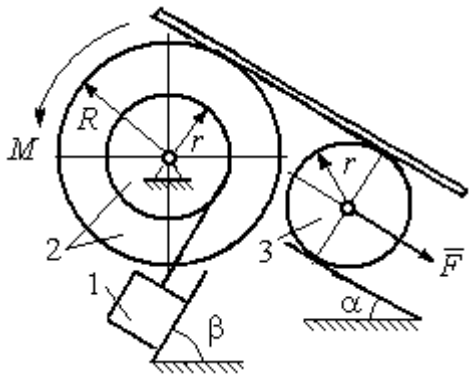
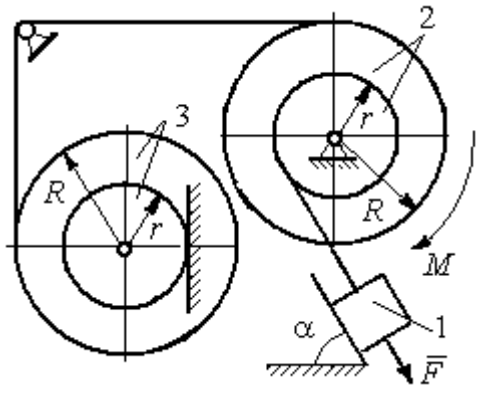
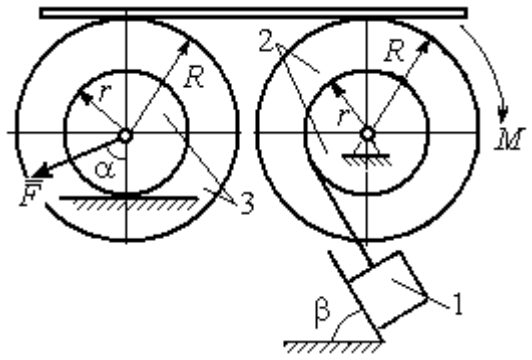
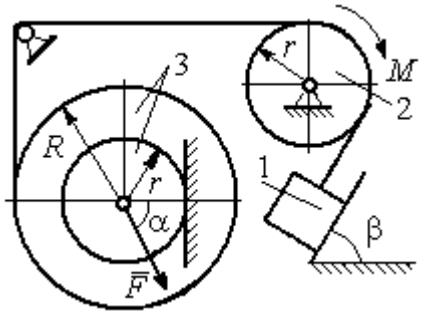
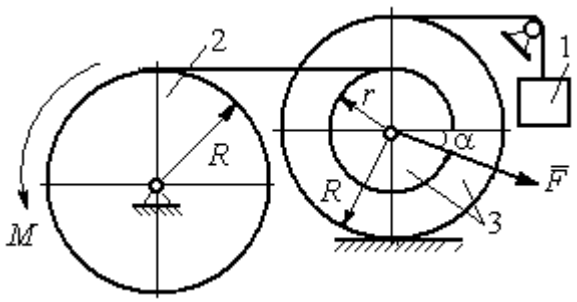
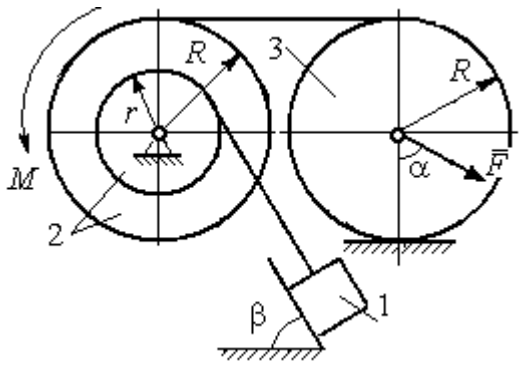
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

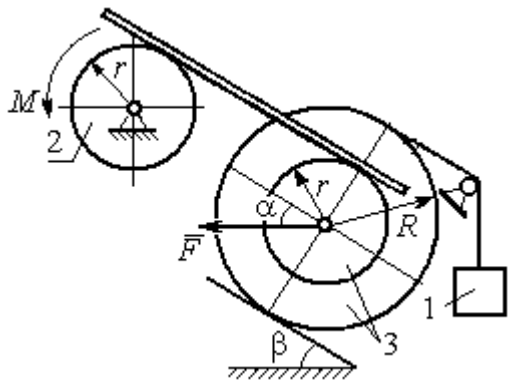
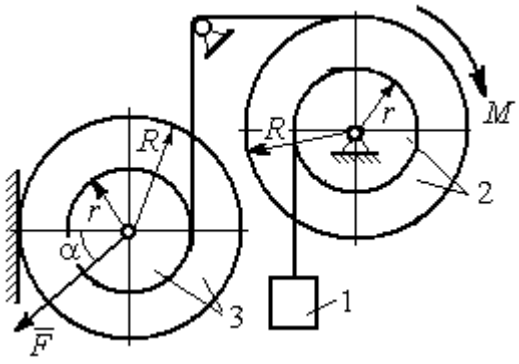
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики. Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 6.1

Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3
4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+ t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+ t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилин-

дрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом M, приложенной к диску 3.

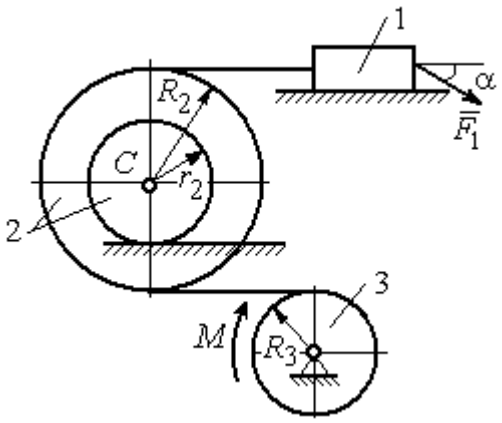


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя. Определить реакцию шарнира диска 3 в момент t = 1 с, если: P_1 = 10 Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 =$ 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; i_{2C} = 0,6 м.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3. Обозначим ω_3, ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, V_C, a_C – скорость и ускорение центра масс катка 2, V_1, a_1 – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^{\text{и}}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

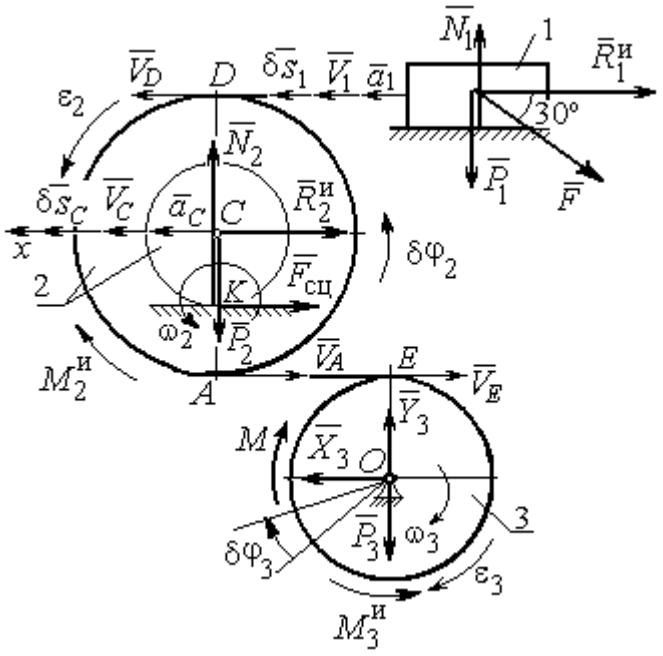


Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_2^{\text{и}}$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$, и составляет $R_2^{\text{и}} = m_2 a_C$, где m_2 – масса катка 2; a_C – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2$, где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε_2 – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^{\text{и}}$ в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2.

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой ра-

вен главному моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; ε_3 – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3. Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке *K* касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Скорость точки *A* катка 2: $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \dfrac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки *E* блока 3 равна скорости точки *A* катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки *D* катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0, \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом M, приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ =$$

$$= \left[6(1 + 2t)\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2} \right) - 5(t + 1)\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2} \right) 0{,}866 \right] \delta s_C = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 2:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 (R_2 + r_2)}{g r_2} a_C, \quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g},$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2g r_2}a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка 2; J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 2:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}}\delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}}\delta s_C \cos 180^\circ = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C,\ \delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C =$$

$$= -\frac{a_C \delta s_C}{g}\left[\frac{10(0{,}8 + 0{,}2)^2}{0{,}2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2} + \frac{15(0{,}8 - 0{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}2^2}\right] = -52{,}75\, a_C \delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0{,}44 + 1{,}29t.$$

Выберем ось x по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки C на ось x, получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0{,}44 + 1{,}29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0{,}44\dfrac{t^2}{2} + 1{,}29\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0$, $V_C = 0$, $x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0{,}22t^2 + 0{,}21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

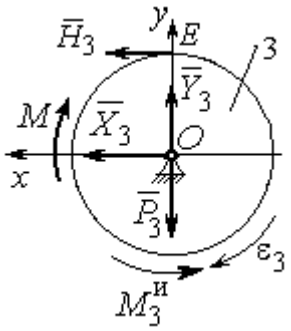


Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3 R_3 - M_3^{и} = 0$, где $M_3^{и} = J_{3O}\varepsilon_3 = \dfrac{P_3 R_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2}$. Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2} = \frac{6(1 + 2t)}{R_3} - \frac{P_3 (R_2 - r_2)}{2 g r_2}(0{,}44 + 1{,}29t) = 13{,}99 + 27{,}04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41{,}04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с: $X_3 = -H_3$= – 41,04 Н, $Y_3 = P_3$= 15 Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира X_3 означает её противоположное направление.

Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}$ = 43,69 Н.

6.3. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S$. Величина Q_k, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью *c*. Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

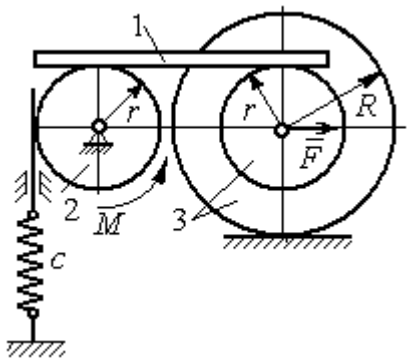
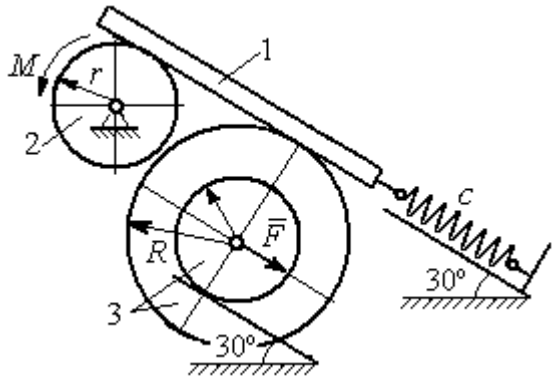
Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

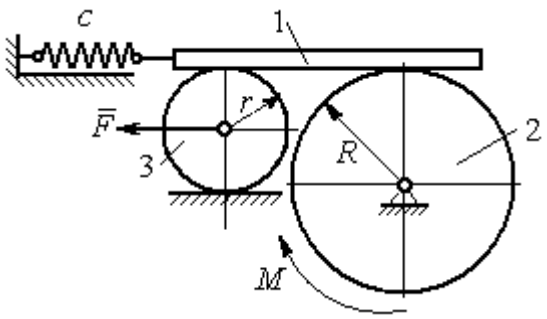
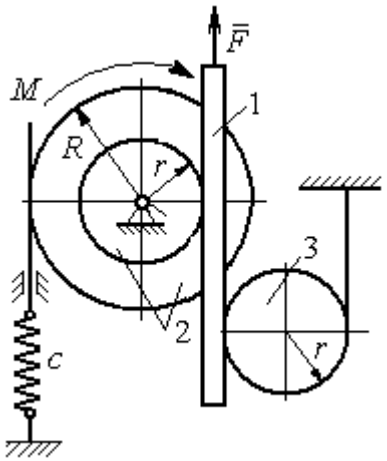
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M.

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20}, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин *F* или *M* в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента *M* на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

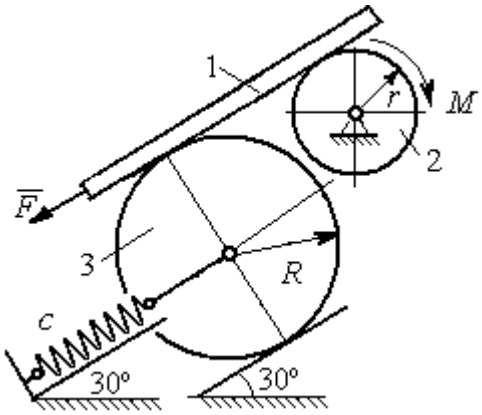
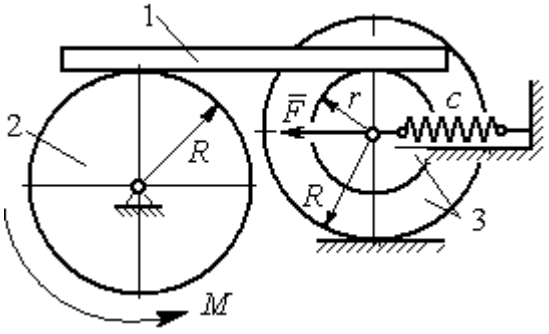
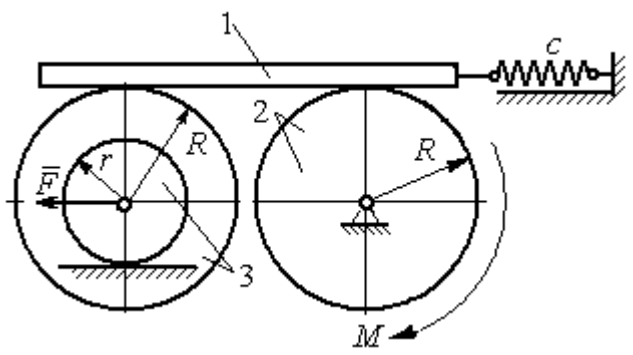
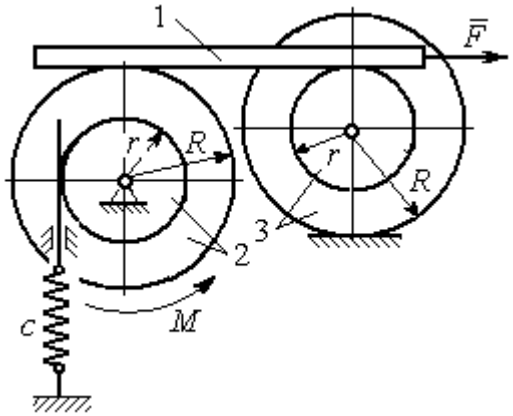
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

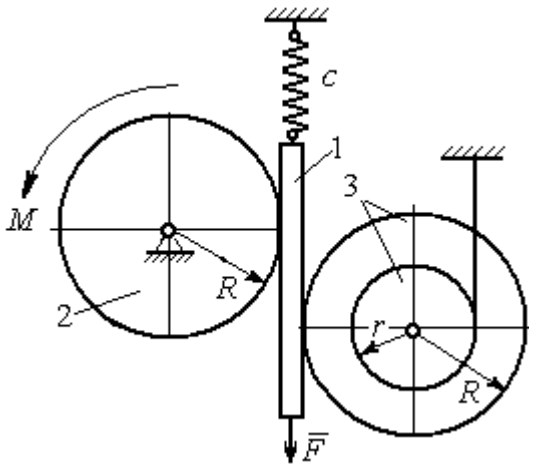
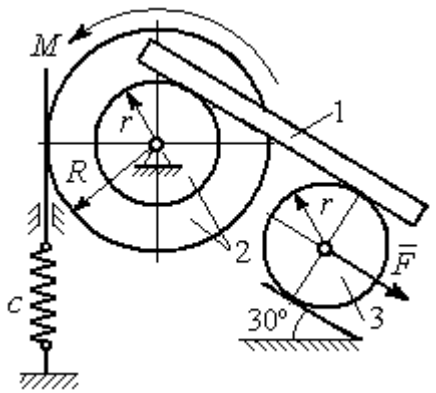
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	–
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	–

Окончание табл. 6.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9
11	4	10	12	–10	–2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	–8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	–12	–4	65	0,4	0,6	0,5	–
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	–10	2	70	0,2	1,2	0,6	–
16	10	12	12	–5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	–6	–2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	–10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	–3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	–3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	–2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	–8	2	45	0,2	0,8	0,6	–
24	12	20	18	–4	–8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	–6	–2	60	0,1	1,4	0,7	–
26	8	12	10	10	–3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	–3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	–6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	–10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r, радиус однородного диска r. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует.

Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z.

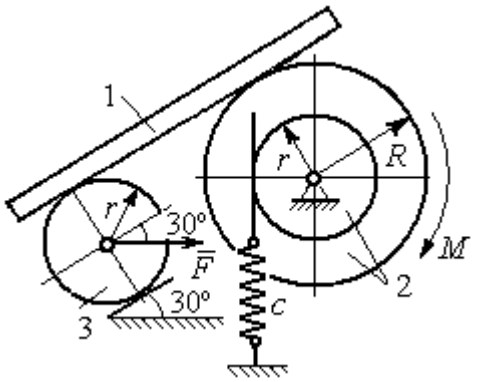


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной l_0 находилась в нерастянутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

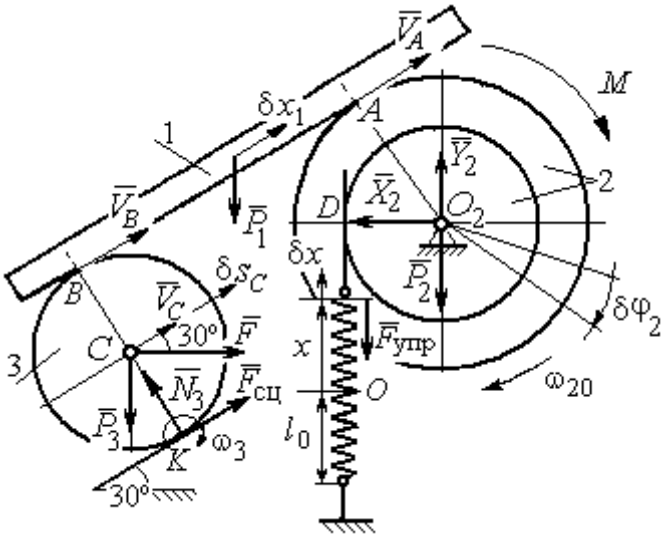


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T –

кинетическая энергия системы, Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате *x*.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где m_1, V_1 – масса и скорость бруса. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока, J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси *z*, $J_{2z} = m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; *r* – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_1 бруса 1, угловые скорости ω_2, ω_3 блока 2 и катка 3, а также скорость V_C центра масс катка 3 через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки *D* блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1 равна скорости точки *A* блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x} R}{r}$. Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x} R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3 учтено, что точка *K* касания катка 3 с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x} R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_1^2=\frac{P}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{r}\right)^2=1{,}125\frac{P}{g}\dot{x}^2,\ \ T_2=\frac{1}{2}J_{2z}\omega_2^2=\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(r\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=2\frac{P}{g}\dot{x}^2,$$

$$T_3=\frac{1}{2}m_3V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2=0{,}422\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T=T_1+T_2+T_3=3{,}547\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой *x*, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси *x* (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2=\frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние δx_1: $\delta x_1=\frac{\delta xR}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние δS_C: $\delta S_C=\frac{\delta xR}{2r}$. Все перемещения получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом *M*, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента *M*, приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M)=M\delta\varphi_2=M\frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1)=P_1\delta x_1\cos120^\circ=-P_1\delta x_1\cos60^\circ=-\frac{P_1\delta xR}{2r}$. Работы силы тяжести катка 3 и силы *F*: $\delta A(P_3)=P_3\delta s_C\cos120^\circ=-P_3\frac{\delta xR}{4r}$, $\delta A(F)=F\frac{\delta xR}{2r}\cos30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из неде-

формированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\delta A = \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) =$$

$$= M\frac{\delta x}{r} - \frac{P_1\delta xR}{2r} - P_3\frac{\delta xR}{4r} + F\frac{\delta xR}{2r}\cos 30^\circ - cx\delta x = P(1{,}174 - 5x)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1{,}174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате x: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7{,}094\frac{P}{g}\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x}$. Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x} = P(1{,}174 - 5x), \text{ или при } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,\ \ddot{x} + 6{,}91x = 1{,}62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6{,}91} = 2{,}63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0{,}23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1\sin 2{,}63t + C_2\cos 2{,}63t + 0{,}23$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки *D* блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость ω_{20}, то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2{,}63C_1 \cos 2{,}63t - 2{,}63C_2 \sin 2{,}63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}038$. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}038 \sin 2{,}63t - 0{,}23 \cos 2{,}63t + 0{,}23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1{,}5\, x(t) = 0{,}057 \sin 2{,}63t - 0{,}34 \cos 2{,}63t + 0{,}34 \text{ м};$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5\, x(t) = 0{,}19 \sin 2{,}63t - 1{,}15 \cos 2{,}63t + 1{,}15 \text{ рад}.$$

Амплитуда колебаний бруса $A = \sqrt{0{,}057^2 + 0{,}34^2} = 0{,}35$ м.

6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны *R*. Найти уравнения движения системы в обоб-

щённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

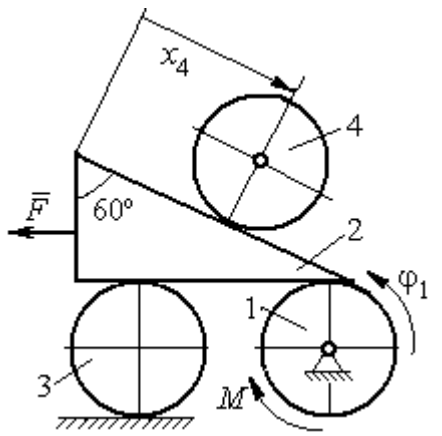
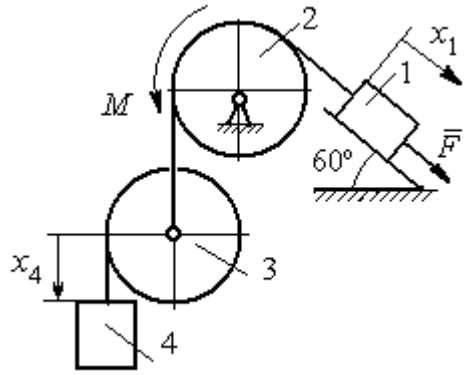
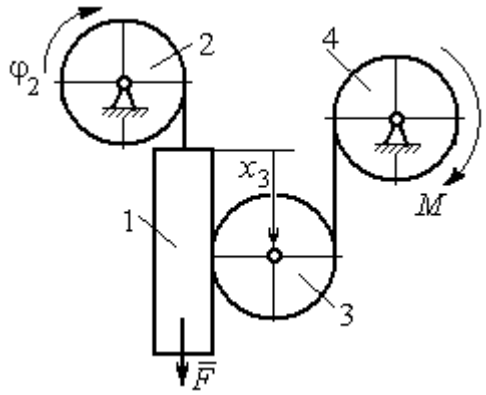
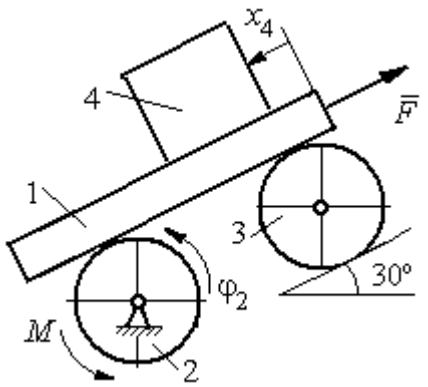
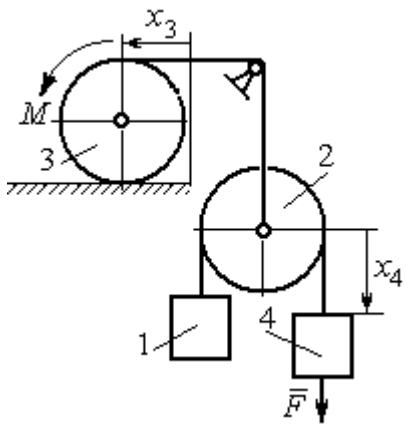
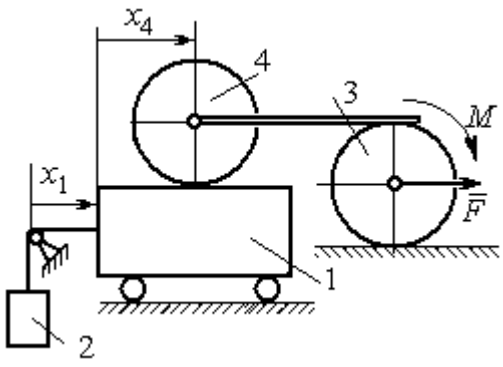
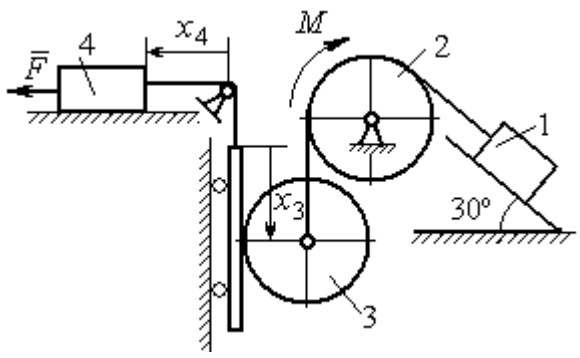
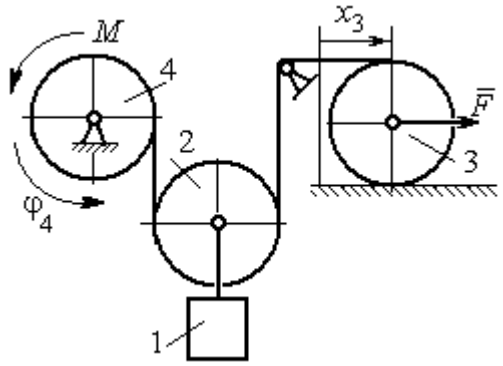
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д8

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

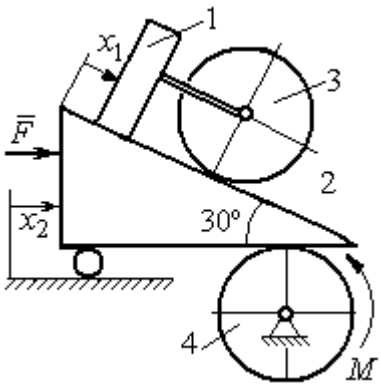
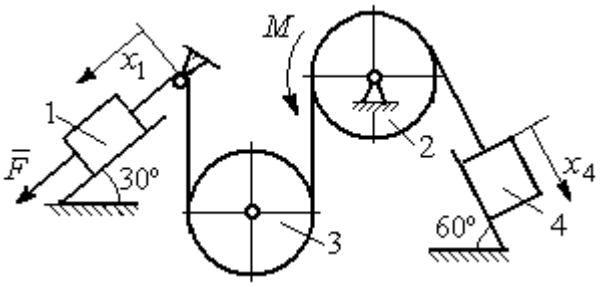
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P_1, Н	P	$2P$	P	$1{,}5P$	P	$3P$	P	$1{,}2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
P_2, Н	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
P_4, Н	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
R, м	$2r$	$1{,}5r$	$2{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	r	$1{,}5r$	r	$2r$	r	$1{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	$2r$	$2r$
F, Н	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$
M, Н·м	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Окончание табл. 6.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P_1, Н	4P	1,5P	P	2P	P	P	1,5P	1,5P	2P	P	P	2P	1,2P	3P	1,2P
P_2, Н	2P	2P	2P	4P	3P	4P	3P	4P	3P	2P	2P	1,2P	2P	3P	2P
P_3, Н	2P	2P	3P	2P	2P	3P	2P	2P	P	2P	3P	2P	P	P	3P
P_4, Н	1,5P	2P	3P	P	2P	2P	2P	P	2P	3P	P	P	2P	P	2P
R, м	1,5r	r	1,5r	2r	r	1,2r	2r	1,5r	2r	r	1,5r	2r	r	1,2r	2r
F, Н	2P	2P	P	3P	4P	2P	3P	2P	3P	P	3P	1,5P	4P	2P	3P
M, Н·м	3Pr	2Pr	4Pr	Pr	4Pr	4Pr	2Pr	Pr	4Pr	2Pr	4Pr	2Pr	2Pr	3Pr	2Pr

Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса R (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом M. Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, перекинутому через невесомый блок, прикреплён груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса R. К центру катка прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщённых координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

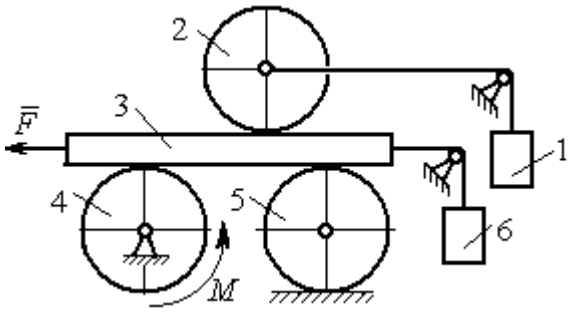


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение

катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение x_2 центра масс катка 2 относительно края платформы и перемещение x_3 платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_{x_2}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_2}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

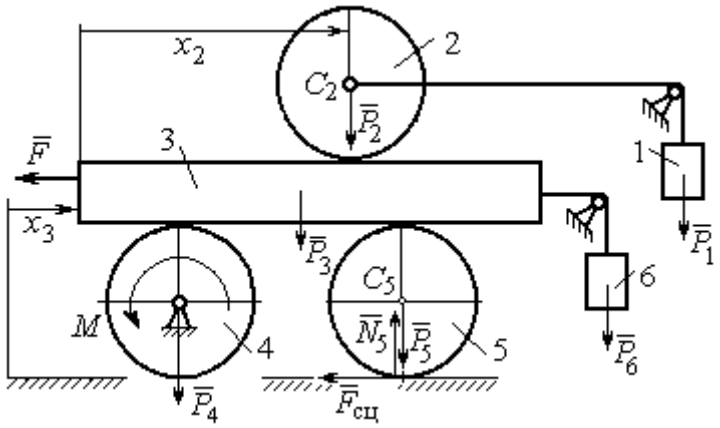


Рис. 6.16. Действующие силы
и обобщённые координаты механической системы

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия платформы $T_3=\frac{P_3}{2g}V_3^2$, где V_3 – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3=\dot{x}_3$.

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4=\frac{1}{2}J_4\omega_4^2$, где J_4, ω_4 – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_3}{R_4}=\frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5 = \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2$, где J_5 – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; ω_5, V_{C_5} – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка *K* касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2}V_3 = \frac{1}{2}\dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, *a*).

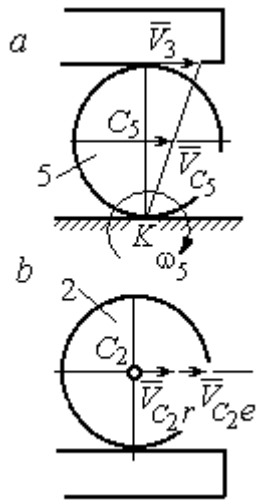


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость V_{C_2} центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, *b*), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, *b*).

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном

движении: $\omega_2 = \dfrac{V_{C_2 r}}{R_2} = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по формуле: $T_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \dfrac{1}{2}J_2\omega_2^2$, где J_2 – осевой момент инерции катка 2; ω_2 – угловая скорость катка; V_{C_2} – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \dfrac{P_1}{2g}V_1^2$, $T_6 = \dfrac{P_6}{2g}V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённые скорости. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 =$$

$$= \frac{P_1}{2g}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{P_3}{2g}V_3^2 + \frac{1}{2}J_4\omega_4^2 + \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2 + \frac{P_6}{2g}V_6^2,$$

где значения скоростей: $V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$, $V_{C_5} = \dfrac{1}{2}\dot{x}_3$, $\omega_5 = \dfrac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$. Значения осевых моментов инерции катков: $J_2 = \dfrac{P_2 R_2^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \dfrac{P_4 R_4^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \dfrac{P_5 R_5^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{3P}{2g}\dot{x}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{4r}\right)^2 + \frac{P}{2g}\dot{x}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g}\dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \frac{35P}{8g}\dot{x}_3^2.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_2 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_2 = 0$ (рис. 6.18). При таком перемещении каток 2 стоит на платформе и движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_3$ катков 2, 5 и платформы 3 равна нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил (см. рис. 6.18). Работа силы тяжести $\vec{P}_4$ равна нулю, так как точка приложения силы лежит на неподвижной оси вращения блока 4.

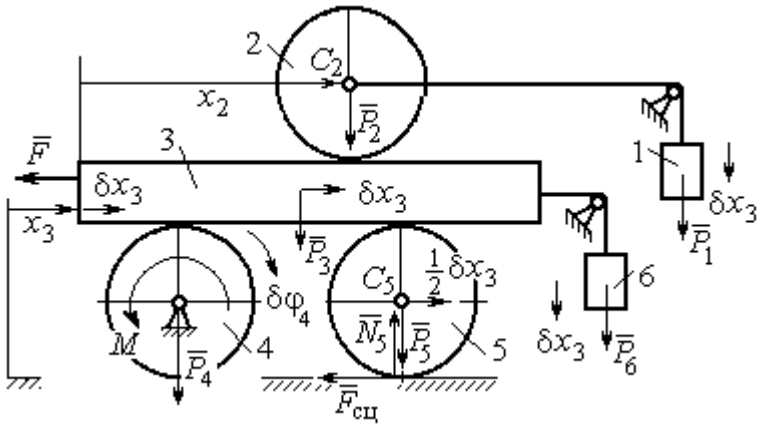


Рис. 6.18. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$

Работу будут производить сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и силы тяжести грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_6$. Суммарная работа сил на перемещении δx_3: $\delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Представим полученное ранее соотношение $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$ в дифференциальном виде: $d\varphi_4 = \dfrac{dx_3}{2r}$. Поскольку дифференциалы координат также являются возможными перемещениями, получим нужное соотношение $\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta x_3}{2r}$. Теперь элементарную работу сил на возможном перемещении δx_3 с учётом значений сил можно представить в виде:

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 = -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -\dfrac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_2, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_2 > 0, \delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P \delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_2: $Q_{x_2} = P$.

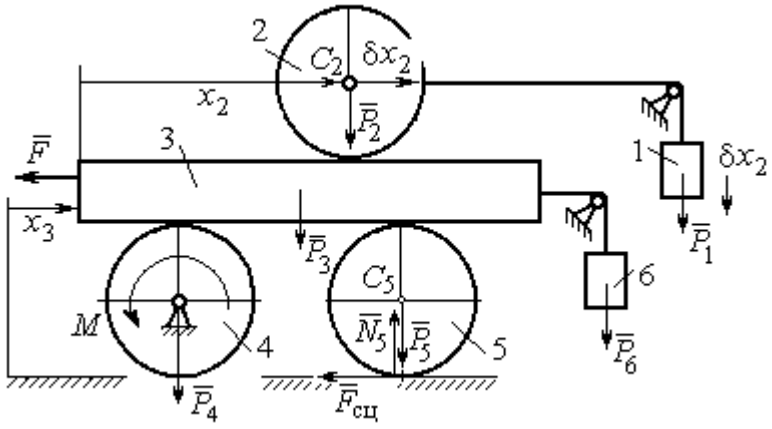


Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g}\dot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g}\dot{x}_2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{3P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{4P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{3P}{g}\ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0{,}19g \quad \text{и} \quad \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0{,}39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0{,}095gt^2, \quad x_2 = 0{,}195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты x_3 означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси x_3 (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0{,}1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2}x_2 = \frac{1}{2r}x_2 = 0{,}097\frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением $\varphi_4 = \frac{1}{R_4}x_3 = \frac{1}{2r}x_3 = -0{,}047\frac{gt^2}{r}$.

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2}x_3 = -0{,}047gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0{,}024\frac{gt^2}{r}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: в 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев С. А*. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

сборник заданий для расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 9,75 Уч. изд. л. 6,5 Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет.
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки.... 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки
с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы . 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы
с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы
с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы
с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____ В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ Б1.О.14 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Направление -

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль -

Мехатроника и робототехника промышленных производств

форма обучения: очная, очно-заочная, заочная

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Технической механики	Горно-механического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Волков Е.Б.	Осипов П.А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 13.09.2024	Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЯМ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ 5
1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ 6
1.1. Принципы механики. Основные понятия и определения 6
1.2. Задание 1. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы 9
2. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 22
2.1. Уравнения Лагранжа II рода. Основные понятия и определения 22
2.2. Задание 2. Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию малых колебаний механической системы с двумя степенями свободы 23
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 35

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЯМ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Курсовая работа по теоретической механике включает два задания по темам: «Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы при действии переменных сил» и «Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию малых колебаний механических систем с двумя степенями свободы».

В каждом задании дается 10 пронумерованных рисунков (схем) – вариантов задания и таблица исходных данных.

Выбор номера варианта задания (номер схемы) осуществляется по **последней цифре** номера зачетной книжки. Номер варианта исходных данных (номер строки) выбирается из таблицы с исходными данными по **предпоследней цифре** номера зачетной книжки.

Например, если две последние цифры номера зачетной книжки 56, то в каждом задании следует выбирать номер варианта (номер схемы) 6, а в таблице исходных данных – строку данных с номером 5.

В учебно-методическом пособии содержатся основные понятия, формулы и теоремы, необходимые для выполнения курсовой работы, а также примеры выполнения заданий с подробным разбором решений задач.

При выполнении заданий все преобразования и числовые расчёты должны быть последовательно проделаны с необходимыми пояснениями. Оба задания, входящие в курсовую работу, должны быть выполнены в одной тетради (ученической). При оформлении курсовой работы обязательно указать фамилию, инициалы студента, специальность, группу и номер зачетной книжки.

1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

1.1. Принципы механики. Основные понятия и определения

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, и направленную противоположно этому ускорению

$$\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a},$$

где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

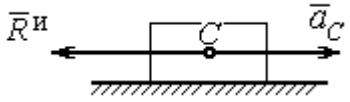


Рис. 1.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$, равному по величине $R^{\text{и}} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 1.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения, величина которого $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 1.2).

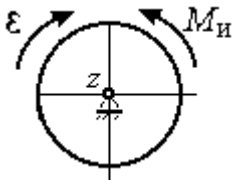


Рис. 1.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{\text{и}}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 1.3). Главный вектор сил инерции равен по

модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$.

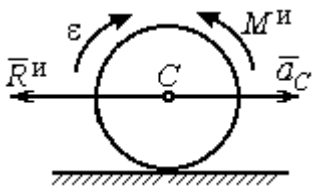


Рис. 1.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 1.3).

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0,$$

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к *k*-й точке системы; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к *k*-й точке системы, относительно произвольного центра *O*; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Связями называют любые ограничения, накладываемые на положения и скорости точек механической системы.

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы

из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Все действующие на точки системы внешние и внутренние силы всегда можно разделить на **активные силы** и **реакции связей**.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$ – элементарная работа активной силы, приложенной к k-й точке системы на её возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к k-й точке системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

1.2. Задание 1. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы

Механическая система состоит из двух грузов и двух дисков. Диски ступенчатые или однородные. Радиусы ступеней ступенчатого диска *R* и *r*. Радиус однородного диска *r* или *R* указан на схеме.

Все тела абсолютно твёрдые, соединены нерастяжимыми нитями. В вариантах задания № 0, 3, 4 диски соединены невесомыми стержнями, которые обеспечивают равенство скоростей точек контакта стержня с дисками. В вариантах задания, где движение тел происходит по наклонной плоскости, угол наклона плоскости указан на схеме.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, переменной силы $\vec{F}$, зависящей от времени, и пары сил с переменным моментом *M*. Вес тел $P_1 - P_4$. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α.

Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z. Качение дисков происходит по прямой линии без проскальзывания. В вариантах задания № 0, 3, 4 скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. При движении грузов по плоскости трение отсутствует. Трение в осях блоков не учитывается. Нити и стержни, соединяющие диски и грузы, параллельны соответствующим прямым линиям движения тел.

Найти зависимость от времени ускорения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 1.4 – 1.5. Исходные данные выбираются из табл. 1.1. В табл. 1.1 в выражениях сил и моментов коэффициенты имеют необходимые для данного параметра размерности.

0	**1**

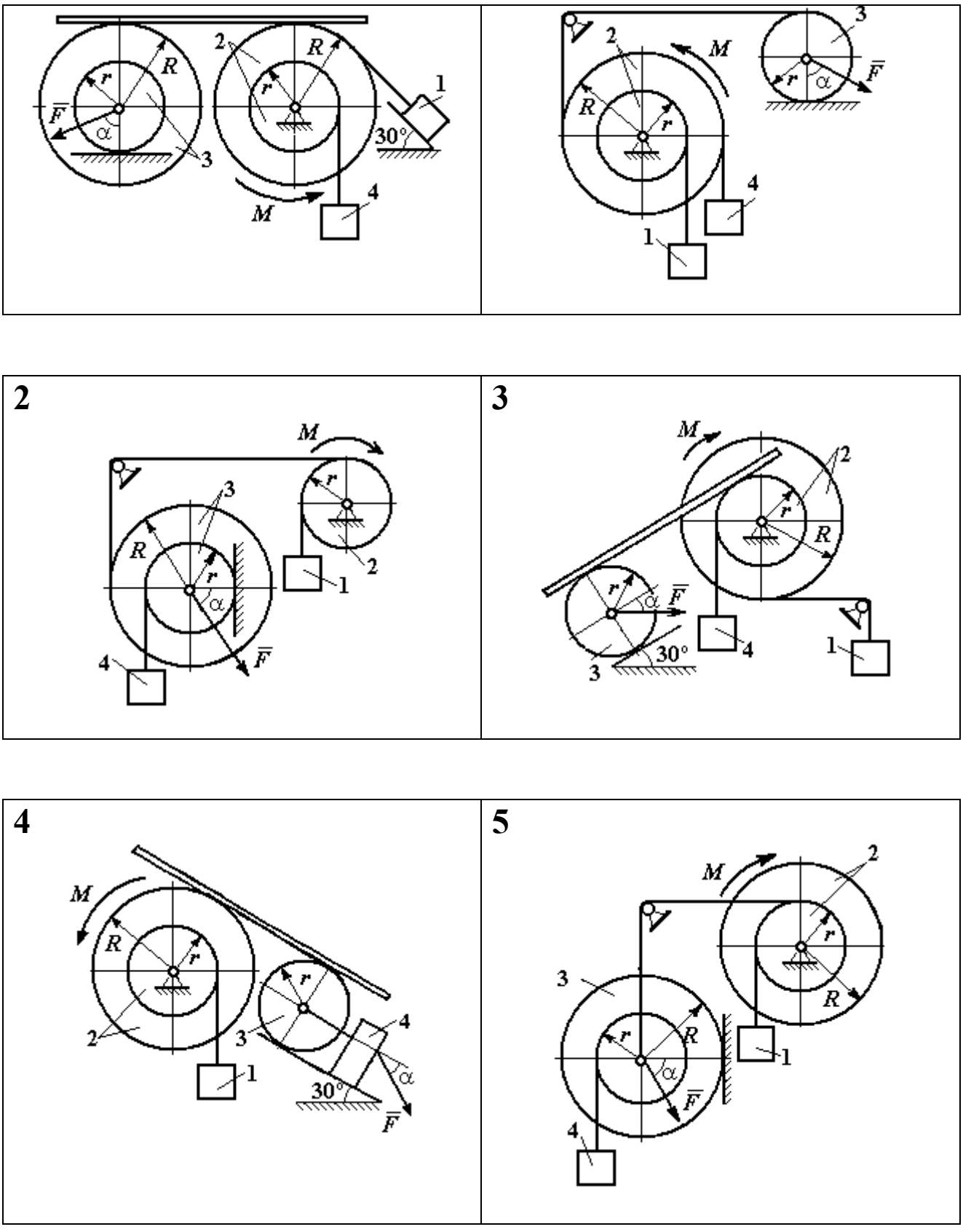


Рис. 1.4. Задание 1. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы. Варианты задания 0 – 5

Окончание вариантов задания 1

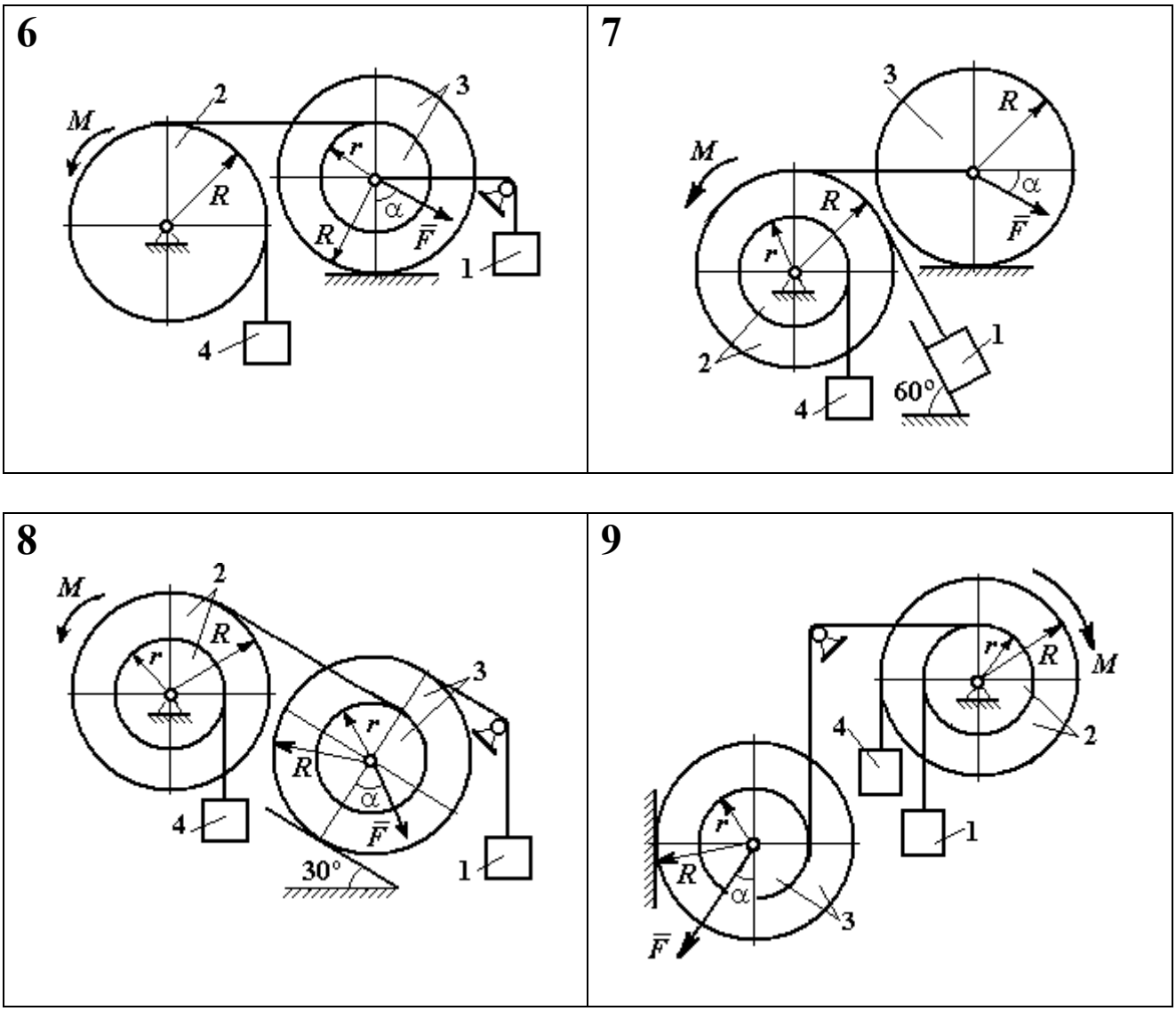


Рис. 1.5. Задание 1. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы. Варианты задания 6 – 9

Таблица 1.1

Варианты исходных данных задания 1

Номер варианта исходных данных	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	P_4, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R, м	r, м	i_z, м
0	12	15	15	10	$2(t+2)$	$15(t^2+2)$	30	0,6	0,2	0,5
1	10	10	10	12	$2(1+t)$	$6(3+2t)$	45	0,5	0,3	0,4
2	14	10	15	10	$2t+1$	$7(2t+5)$	60	0,8	0,6	0,8

Окончание табл. 1.1

Номер варианта исходных данных	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	P_4, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R, м	r, м	i_z, м
3	15	10	10	5	$5t$	$8(2t^2+2)$	30	0,4	0,2	0,3
4	12	15	10	12	$4t+2$	$14(t^2+2)$	60	0,6	0,4	0,5
5	10	20	10	15	$2(2t+1)$	$5(6+t)$	45	0,6	0,4	0,5
6	8	12	8	10	$1+4t$	$3(10+t)$	30	1,0	0,6	0,8
7	14	20	12	12	t^2+1	$8(3t^2+4)$	60	0,8	0,4	0,8
8	8	15	10	10	$6t+1$	$7(5t+4)$	30	0,9	0,6	0,8
9	15	15	12	15	$3t+2$	$8(3t+3)$	60	0,5	0,3	0,5

Пример выполнения задания

Механическая система состоит из двух грузов 1 и 4, движущихся поступательно, ступенчатого диска (катка) 3, катящегося по неподвижной горизонтальной поверхности, и однородного диска (блока) 2, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 1.6). Тела системы соединены нерастяжимыми нитями. Движение системы происходит в вертикальной плоскости.

Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности без трения. Трение в оси блока 2 не учитывается. Качение ступенчатого диска вдоль горизонтальной прямой происходит без проскальзывания.

К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом α к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 2 приложена пара сил с моментом M.

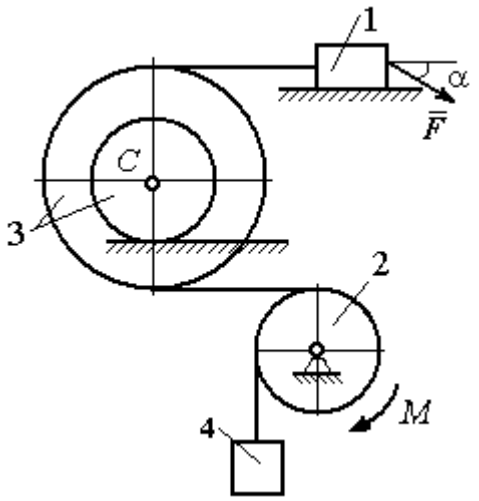


Рис. 1.6. Схема движения механической системы

Найти зависимость от времени ускорения a_C центра масс катка 3. Определить реакцию шарнира блока 2 в момент времени $t = 1$ с, если $P_1 = 10$ Н; $P_2 = 15$ Н; $P_3 = 20$ Н; $P_4 = 10$ Н; $F = 5(t+2)$ Н; $M = 3(4 + 2t)$ Н·м; $R_2 = 0{,}4$ м; $R_3 = 0{,}8$ м; $r_3 = 0{,}2$ м; $i_{3C} = 0{,}6$ м; $\alpha = 30°$.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1 - \vec{P}_4$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 1.7). Реакциями связей являются нормальные реакции опор $\vec{N}_1$, $\vec{N}_3$ груза 1 и катка 3, сила сцепления катка 3 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{сц}$ и реакция шарнира O блока 2, разложенная на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$.

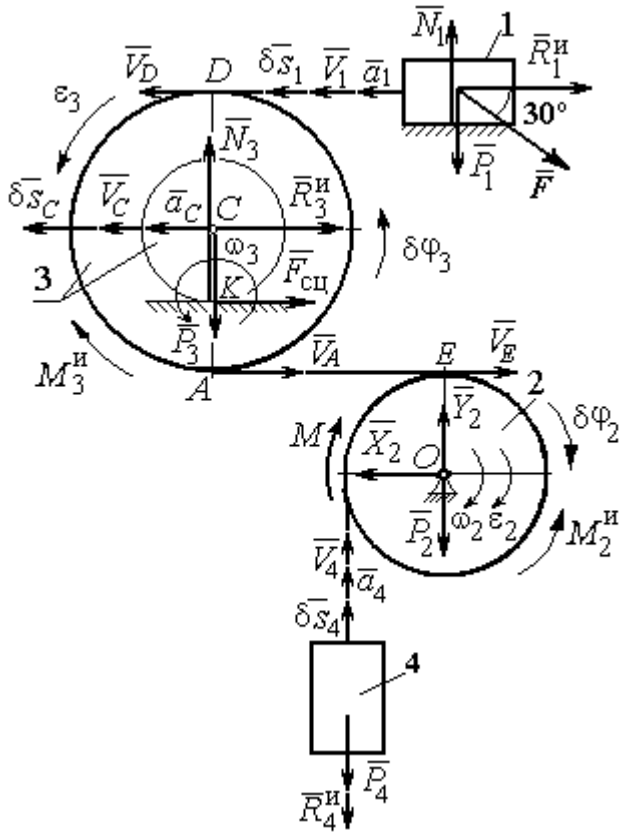


Рис. 1.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение катка 3 без проскальзывания, ось вращения блока 2 неподвижна и трение в оси отсутствует.

Предположим система движется так, что груз 4 поднимается вверх со скоростью $\vec{V}_4$ и ускорением $\vec{a}_4$; блок 2 вращается с угловой скоростью ω_2 и угловым ускорением ε_2; каток 3 катится по горизонтальной поверхности с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3; скорость центра масс катка 3 равна $\vec{V}_C$, ускорение $\vec{a}_C$; скорость и ускорение

груза 1 соответственно равны $\vec{V}_1$ и $\vec{a}_1$. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел показаны на рис. 1.7.

Общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^{\text{и}}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$. Модуль главного вектора сил инерции груза 1: $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

Силы инерции блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока, приводятся к паре сил, момент которой равен главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока равен по величине $M_2^{\text{и}} = J_{2O}\varepsilon_2$, где J_{2O} – момент инерции блока 2 относительно оси вращения; ε_2 – угловое ускорение блока. Направлен главный момент сил инерции блока 2 в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2.

Силы инерции катка 3, совершающего плоское движение, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_3^{\text{и}}$, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции равен по величине: $R_3^{\text{и}} = m_3 a_C$, где m_3 – масса катка 3; a_C – величина ускорения центра масс, приложен в центре масс катка и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$. Главный момент сил инерции по величине равен: $M_3^{\text{и}} = J_{3C}\varepsilon_3$, где J_{3C} – момент инерции катка 3 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε_3 – угловое

ускорение катка 3. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3.

Силы инерции груза 4 приводятся к главному вектору $\vec{R}_4^{\text{и}}$, приложенному в центре масс груза, равному по величине $R_4^{\text{и}} = m_4 a_4$, где m_4 – масса груза 4; a_4 – величина ускорения груза 4, и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_4$.

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 1.7.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 3.

Каток 3 катится по неподвижной поверхности без проскальзывания. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке K касания катка с поверхностью качения (см. рис. 1.7). Угловая скорость катка 3

$$\omega_3 = \frac{V_C}{|CK|} = \frac{V_C}{r_3}.$$

Скорость точки A катка 3

$$V_A = \omega_3 |AK| = \omega_3 (R_3 - r_3) = V_C \left(\frac{R_3 - r_3}{r_3} \right).$$

Скорость груза 4, как и скорость точки E блока 2, равны скорости точки A катка 3 (см. рис. 1.7), $V_4 = V_E = V_A$. Тогда скорость груза 4 и точки E

$$V_E = V_C \left(\frac{R_3 - r_3}{r_3} \right), \qquad V_4 = V_C \left(\frac{R_3 - r_3}{r_3} \right).$$

Угловая скорость блока 2

$$\omega_2 = \frac{V_E}{R_2} = \frac{V_C}{R_2} \left(\frac{R_3 - r_3}{r_3} \right).$$

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 3

$$V_1 = V_D = \omega_3 |DK| = \omega_3 (R_3 + r_3) = V_C \left(\frac{R_3 + r_3}{r_3} \right).$$

Выразим кинематические соотношения между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right),\ \ \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_C}{r_3},\ \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{R_2}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right),\ \ \delta s_4 = \delta s_C\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right).$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right),\quad \varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3},\quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{R_2}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right),\quad a_4 = a_C\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right).$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным.

Элементарные работы реакций связей на возможном перемещении системы равны нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение δs_C центра масс катка 3.

Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 3 равны нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны силам:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1\delta s_1\cos 90^\circ = 0, \qquad \delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C\cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 2 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 2 не перемещается, $\delta A(\vec{P}_2) = 0$.

Элементарная работа силы тяжести $\vec{P}_4$ груза 4

$$\delta A(\vec{P}_4) = P_4\delta s_4\cos 180^\circ = -P_4\delta s_C\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right).$$

Элементарная работа пары сил с моментом *M*, приложенной к блоку 2

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_2 = M\frac{\delta s_C}{R_2}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right).$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right)\cos 30^\circ .$$

Сумма элементарных работ всех активных сил

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{P}_4) + \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) =$$

$$= -P_4\delta s_C\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right) + M\frac{\delta s_C}{R_2}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right) - F\delta s_C\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right)\cos 30^\circ =$$

$$= \left[-10\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}2}\right) + 3(4 + 2t)\frac{1}{0{,}4}\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}2}\right) - 5(t + 2)\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2}\right)0{,}866\right]\delta s_C =$$

$$= (16{,}7 + 23{,}35t)\delta s_C .$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 3.

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}a_1 = \frac{P_1}{g}\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right)a_C, \qquad R_3^{\text{и}} = m_3 a_C = \frac{P_3}{g}a_C,$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3C}\varepsilon_3 = m_3 i_{3C}^2\varepsilon_3 = \frac{P_3}{g}i_{3C}^2\frac{a_C}{r_3}, \qquad R_4^{\text{и}} = m_4 a_4 = \frac{P_4}{g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)a_C,$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2O}\varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}\varepsilon_2 = \frac{P_2 R_2^2}{2g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)\frac{a_C}{R_2} = \frac{P_2 R_2}{2g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)a_C,$$

где J_{3C} – момент инерции катка 3 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{3C} = m_3 i_{3C}^2$; i_{3C} – радиус инерции катка 3; J_{2O} – момент инерции блока 2 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{2O} = \frac{m_2 R_2^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 3.

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}}\delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1}{g}\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right)^2 a_C\delta s_C ,$$

$$\delta A(\vec{R}_3^{\text{и}}) = R_3^{\text{и}}\delta s_C\cos 180^\circ = -\frac{P_3}{g}a_C\delta s_C,\ \delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3}{g}\left(\frac{i_3}{r_3}\right)^2 a_C\delta s_C,$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2}{2g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)^2 a_C\delta s_C,$$

$$\delta A(\vec{R}_4^{\text{и}}) = R_4^{\text{и}}\delta s_4\cos 180^\circ = -\frac{P_4}{g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)^2 a_C\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции

$$\sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\left[P_1\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right)^2 + P_3 + P_3\left(\frac{i_3}{r_3}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{P_2}{2}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)^2 + P_4\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)^2\right]\frac{a_C\delta s_C}{g} =$$

$$= -\left[10\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2}\right)^2 + 20 + 20\left(\frac{0{,}6}{0{,}2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{15}{2}\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}2}\right)^2 + 10\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}2}\right)^2\right]\frac{a_C\delta s_C}{g} = = -61{,}93\,a_C\delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид

$$\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (16{,}7 + 23{,}35t)\delta s_C - 61{,}93\,a_C\delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 3

$$a_C = 0{,}27 + 0{,}38t \text{ м/с}^2.$$

Для того, чтобы определить натяжение нити, удерживающей груз 4, выделим его из системы, заменим действие нити реакцией $\vec{H}_4$, направленной вдоль нити, присоединим к грузу силу инерции $\vec{R}_4^{\text{и}}$ (рис. 1.8) и применим к нему принцип Даламбера.

В соответствии с принципом Даламбера силы, приложенные к грузу, – сила тяжести $\vec{P}_4$, сила натяжения нити $\vec{H}_4$ и сила инерции $\vec{R}_4^{\text{и}}$, образуют уравновешенную систему сил. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы проекций сил на ось x, параллельную линии движения груза (см. рис. 1.8):

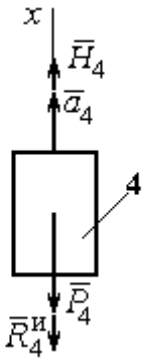


Рис. 1.8. Расчетная схема для определения натяжения нити, удерживающей груз 4

$$-P_4 + H_4 - R_4^{\text{и}} = 0\,.$$

Модуль силы инерции груза 4

$$R_4^{\text{и}} = m_4 a_4 = \frac{P_4}{g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)a_C =$$

$$= \frac{10}{9{,}81}\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}2}\right)(0{,}27 + 0{,}38t) = 0{,}83 + 1{,}16t \text{ Н}.$$

Зависимость от времени силы натяжения нити H_4, удерживающей груз 4

$$H_4 = P_4 + R_4^{\text{и}} = 10 + 0{,}83 + 1{,}16t = 11{,}83 + 1{,}16t \text{ Н}.$$

Для того, чтобы определить реакцию нити, к которой прикреплён груз 1, выделим груз из системы и применим к нему принцип Даламбера. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ гладкой поверхности, по которой движется груз, и сила $\vec{F}$. Заменим действие нити реакцией $\vec{H}_1$ и присоединим к грузу силу инерции $\vec{R}_1^{\text{и}}$ (рис. 1.9). В соответствии с принципом Даламбера составим уравнение равновесия полученной системы сил в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось x, параллельную линии движения груза (см. рис. 1.9)

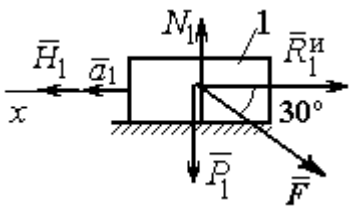


Рис. 1.9. Расчетная схема для определения реакции нити груза 1

$$H_1 - R_1^{\text{и}} - F\cos 30^\circ = 0\,.$$

Модуль силы инерции груза 1

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\left(\frac{R_3 + r_3}{r_3}\right)a_C =$$

$$= \frac{10}{9{,}81}\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2}\right)(0{,}27 + 0{,}38t) = 1{,}38 + 1{,}94t \text{ Н}.$$

Сила натяжения нити H_1

$$H_1 = R_1^{\text{и}} + F\cos 30^\circ = 1{,}38 + 1{,}94t + 5(t+2)0{,}866 = 10{,}04 + 6{,}27t \text{ Н}.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 2, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_2$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$, пара сил с моментом M и натяжения нитей $\vec{H}_4'$ и $\vec{H}_2$ (рис. 1.10).

Сила натяжения нити $\vec{H}_4'$, приложенная к блоку 2, направлена вертикально вдоль нити, связывающей блок 2 и груз 4, и по модулю равна силе натяжения нити $\vec{H}_4$, приложенной к грузу 4. Сила натяжения нити $\vec{H}_2$, приложенная к блоку 2, направлена горизонтально вдоль нити, связывающей каток 3 и блок 2 (см. рис. 1.10).

Присоединим к блоку 2 пару сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $M_2^{\text{и}}$ относительно оси вращения и направленным в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2 блока 2 (см. рис. 1.10).

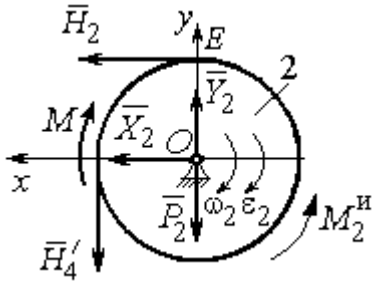


Рис.1.10. Расчётная схема определения натяжения нитей блока 2 и реакции шарнира

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 2, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения:

$$M + H_4' R_2 - H_2 R_2 - M_2^{\text{и}} = 0.$$

Модуль главного момента сил инерции блока 2

$$M_2^{\text{и}} = J_{2O}\varepsilon_2 = \frac{P_2 R_2}{2g}\left(\frac{R_3 - r_3}{r_3}\right)a_C =$$

$$= \frac{15 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 9{,}81}\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}2}\right)(0{,}27 + 0{,}38t) = 0{,}25 + 0{,}35t \text{ Н·м}.$$

Из уравнения равновесия получим зависимость от времени величины натяжения нити, соединяющей блок 2 и каток 3

$$H_2 = \frac{M}{R_2} + H_4' - \frac{M_2^{\text{и}}}{R_2} = \frac{3(4 + 2t)}{0{,}4} + 11{,}83 + 1{,}16t - \frac{0{,}25 + 0{,}35t}{0{,}4} = 41{,}21 + 15{,}28t \text{ Н}.$$

При вращательном движении блока 2 главный вектор сил инерции равен нулю. В результате уравнения равновесия блока, составленные по принципу Даламбера, в виде проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы (см. рис. 1.10):

$$X_2 + H_2 = 0, \quad Y_2 - P_2 - H_4' = 0.$$

Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 2

$$X_2 = -H_2 = -(41{,}21 + 15{,}28t) \text{ Н},$$

$$Y_2 = P_2 + H_4' = 15 + 11{,}83 + 1{,}16t = 26{,}83 + 1{,}16t \text{ Н}.$$

Отрицательное значение горизонтальной составляющей X_2 реакции шарнира блока 2 показывает, что её направление противоположно тому, как показано на рис. 1.10.

Полная реакция шарнира *O* на момент времени 1 с

$$R_2(1) = \sqrt{X_2^2(1) + Y_2^2(1)} = \sqrt{(56{,}49)^2 + (27{,}99)^2} = 63{,}04 \text{ Н}.$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Уравнения Лагранжа II рода. Основные понятия и определения

Механическая система, состоящая из n материальных точек, в инерциальной декартовой системе координат $Oxyz$ описывается $3n$ координатами. Если движение системы ограничивается наличием связей, то $3n$ координаты, описывающие положение точек системы, не являются независимыми. **Числом степеней свободы** материальной системы называется количество s независимых координат, которое определяется как разность между общим числом координат, описывающих положение точек материальной системы, и числом уравнений связей.

Обобщенными координатами называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде

$$\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S .$$

Величина Q_k, k = 1, 2, … , s, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

2.2. Задание 2. Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию малых колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, блока 2 и катка 3. Все тела абсолютно твердые, соединены между собой гибкой нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нить или стержень, соединяющие каток 3 с блоком 2, параллельны линии качения катка 3. Груз 1 соединяется с блоком 2 или катком 3 пружиной жесткостью c. Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r. Радиус однородного диска r или R указан на схеме.

Вес тел, входящих в систему, P_1, P_2, P_3. Вес пружины не учитывается. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Трение скольжения груза 1 и сопротивление качению катка 3 отсутствуют. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z.

В начальный момент система находилась в состоянии покоя. При этом груз 1 находился в положении, при котором пружина растянулась относительно своего недеформированного состояния на величину $\Delta\ell_0$.

Определить закон абсолютного движения груза 1.

Варианты заданий даны на рис. 2.1 – 2.2. Варианты исходных данных приведены в табл. 2.1.

В таблице все длины выражены в долях условной единицы длины *r*, м, а вес тел и величина силы $\vec{F}$ – в долях условной единицы веса *P*, Н. Момент пары сил представлен в долях единиц условного момента *Pr*, Н·м; коэффициент жесткости пружины – в долях единиц условного коэффициента жесткости *P*/*r*, Н/м.

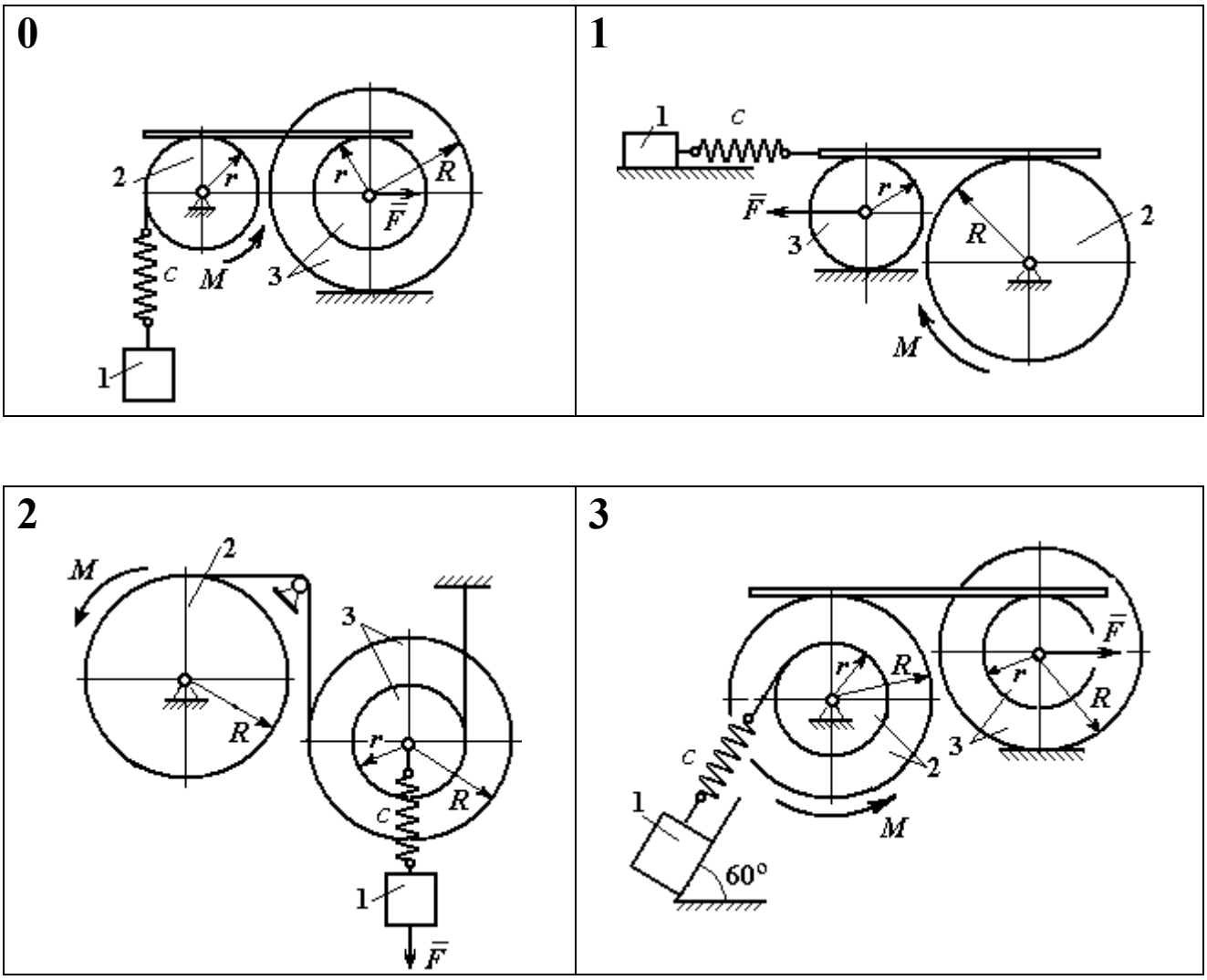
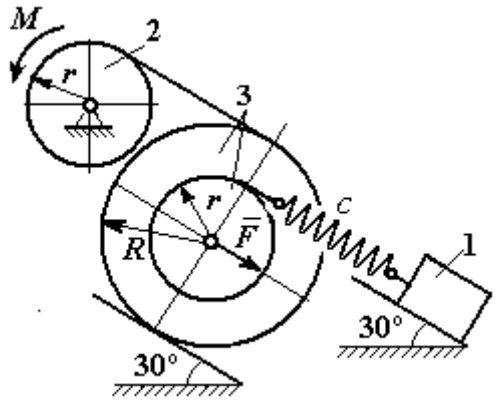
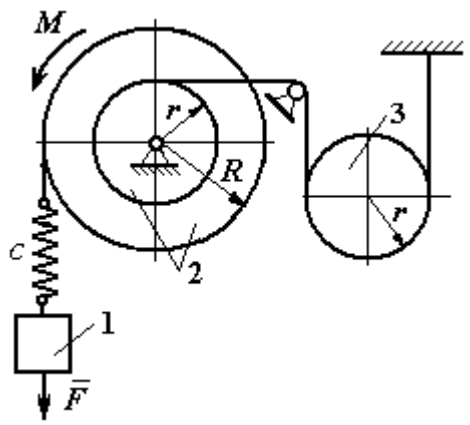


Рис. 2.1. Задание 2. Применение уравнений Лагранжа к исследованию малых колебаний механической системы. Варианты заданий 0 – 3

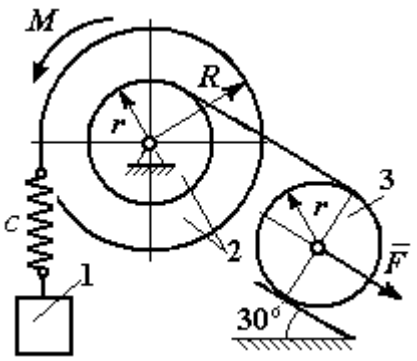
4



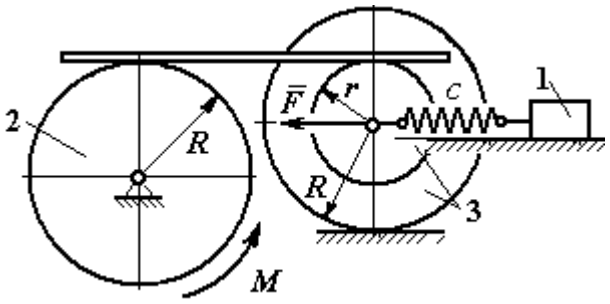
5



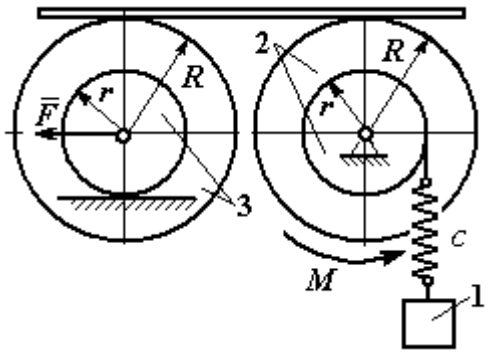
6



7



8



9

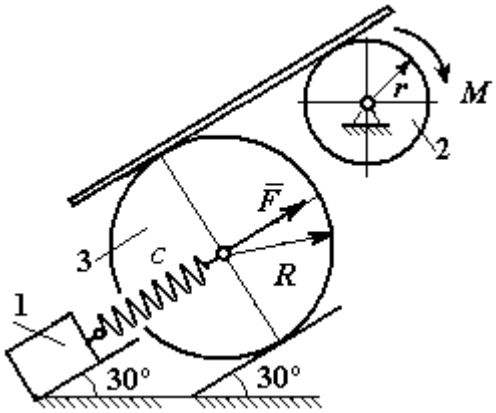


Рис. 2.2. Задание 2. Применение уравнений Лагранжа к исследованию малых колебаний механической системы. Варианты заданий 4 – 9

Таблица 2.1

Варианты исходных данных задания 2

Номер варианта исходных данных	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	R, м	i_z, м	c, Н/м	$\Delta\ell_0$, м
0	$2P$	$2{,}5P$	$3P$	$1{,}5P$	$8Pr$	$1{,}5r$	$r\sqrt{2}$	$1{,}5P/r$	$0{,}1r$
1	P	$2P$	$2P$	$2P$	$6Pr$	$2r$	$r\sqrt{3}$	$0{,}5P/r$	$0{,}08r$
2	P	$3P$	$3{,}5P$	$3P$	$8Pr$	$2{,}5r$	$2r$	P/r	$0{,}2r$
3	$2{,}5P$	$3P$	$2{,}5P$	P	$10Pr$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$2P/r$	$0{,}15r$
4	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$12Pr$	$1{,}5r$	$1{,}2r$	P/r	$0{,}1r$
5	$1{,}5P$	$2{,}5P$	$2{,}5P$	$2{,}5P$	$8Pr$	$2r$	$1{,}5r$	P/r	$0{,}2r$
6	P	$1{,}5P$	$2P$	P	$6Pr$	$2{,}5r$	$r\sqrt{3}$	$0{,}5P/r$	$0{,}08r$
7	$2P$	$2{,}5P$	$2{,}5P$	$3{,}5P$	$12Pr$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$1{,}5P/r$	$0{,}15r$
8	$2{,}5P$	$3P$	$3P$	$2{,}5P$	$10Pr$	$1{,}5r$	$2r$	$1{,}5P/r$	$0{,}2r$
9	$1{,}5P$	$2P$	$2{,}5P$	$2P$	$8Pr$	$2r$	$r\sqrt{2}$	P/r	$0{,}15\,r$

Пример выполнения задания

Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, блока 2 и катка 3 (рис. 2.3). Все тела абсолютно твердые. Невесомый стержень, соединяющий каток 3 с блоком 2, параллелен наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30°. На цилиндрическую ступень блока 2 радиусом r намотана нерастяжимая нить, к которой посредством пружины с коэффициентом жесткости c прикреплён груз 1. Радиус блока R. Каток 3 однородный, радиус катка r. Вес тел, входящих в систему, – P_1, P_2, P_3. Вес пружины не учитывается.

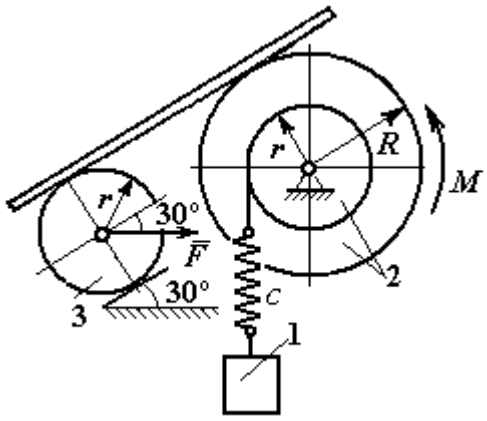


Рис. 2.3. Механическая система с двумя степенями свободы

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 3 под углом 30° к направлению движения центра масс катка, и пары сил с моментом M, приложенной к блоку 2 (см. рис.

2.3). Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z. Качение катка 3 по наклонной плоскости без проскальзывания, сопротивление качению отсутствует. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором пружина растянулась относительно своего недеформированного состояния на величину $\Delta\ell_0$.

Найти закон абсолютного движения груза 1 если $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 4P$ Н, $M = 5Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$, Н/м, $\Delta\ell_0 = 0{,}1r$ м.

Решение

Рассматриваемая механическая система – груз 1, блок 2 и каток 3 (рис. 2.4) имеет две степени свободы, так как допускается движение груза 1, не зависящее от вращения блока 2, или перемещения катка 3. За обобщенные координаты выберем угол φ_2 поворота блока 2 и удлинение пружины x_1 относительно своего недеформированного состояния. Длина недеформированной пружины l_0 и начало отсчёта координаты x_1 – точка O, а также положительные направления отсчета координат x_1 и φ_2 показаны на рис. 2.4.

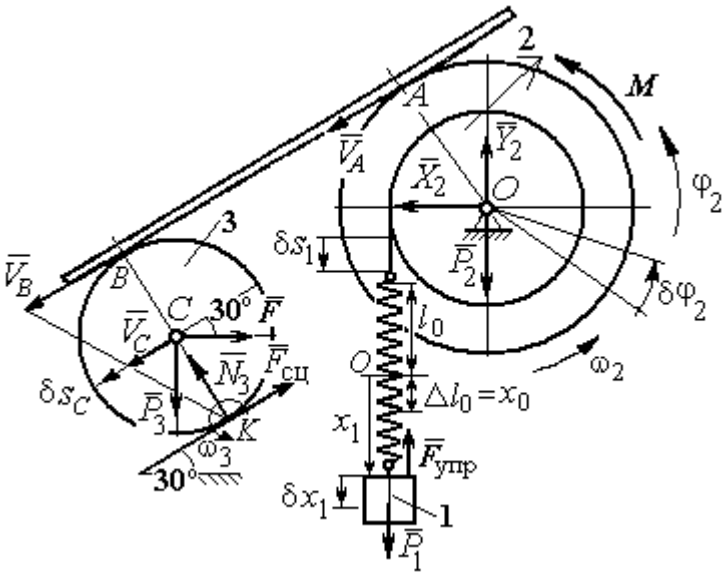


Рис. 2. 4. Расчётная схема колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Таким образом, обобщенные координаты системы: $q_1 = x_1$, $q_2 = \varphi_2$; обобщенные скорости: $\dot{q}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_x, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=Q_\varphi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x, Q_φ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и φ_2.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий груза, блока и катка

$$T=T_1+T_2+T_3.$$

Рассмотрим движение груза 1. Колебания груза на пружине относительно точки O – нижнего конца недеформированной пружины – будем считать относительным движением. Движение пружины, прикреплённой верхним концом к нити, намотанной на цилиндрическую ступеньку блока 2, – переносным.

Относительная скорость груза $V_{1r}=\dot{x}_1$, переносная – $V_e=\omega_2 r = \dot{\varphi}_2 r$, где r – радиус ступеньки блока. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим модуль абсолютной скорости груза

$$V_1=\dot{x}_1+\dot{\varphi}_2 r.$$

В результате кинетическая энергия груза 1 определяется выражением

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_1^2=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1+\dot{\varphi}_2 r)^2.$$

Кинетическая энергия блока 2

$$T_2=\frac{1}{2}J_{2z}\omega_2^2=\frac{1}{2}J_{2z}\dot{\varphi}_2^2,$$

где J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z, $J_{2z}=m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия

$$T_3=\frac{1}{2}m_3V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2,$$

где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относи-

тельно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость центра масс катка 3 V_C и угловую скорость катка ω_3 через обобщённую скорость $\dot{\varphi}_2$.

Заметим, что скорость точки A блока 2 равна скорости точки B катка 3, $V_A = V_B$ (см. рис. 2.4). Выражая скорость точки A через угловую скорость блока 2, а скорость точки B через угловую скорость катка 3 и приравнивая их, получим: $\omega_2 R = \omega_3 2r$. Здесь при определении скорости точки B учтено, что точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей.

Из равенства скоростей точек A и B, с учётом $R = 1{,}5r$, получим угловую скорость катка 3

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R}{2r} = 0{,}75\dot{\varphi}_2.$$

Скорость центра катка 3 $V_C = \omega_3 r = 0{,}75\dot{\varphi}_2 r$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2 r)^2 = 0{,}5 \frac{P}{g} (\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2 r)^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} m_2 i_z^2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 = 2 \frac{P}{g} \dot{\varphi}_2^2 r^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 =$$

$$= 0{,}5 \frac{P}{g} (0{,}75\dot{\varphi}_2 r)^2 + 0{,}25 \frac{Pr^2}{g} (0{,}75\dot{\varphi}_2)^2 = 0{,}42 \frac{P}{g} \dot{\varphi}_2^2 r^2.$$

Складывая полученные выражения, найдем полную кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 0{,}5\frac{P}{g}(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2 r)^2 + 2{,}42\frac{P}{g}\dot{\varphi}_2^2 r^2 = \frac{P}{g}(0{,}5\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1\dot{\varphi}_2 r + 2{,}92\dot{\varphi}_2^2 r^2).$$

Сумма элементарных работ сил при вариации обобщенных координат δx_1, $\delta\varphi_2$ может быть представлена в виде: $\delta A = Q_x \delta x_1 + Q_\varphi \delta\varphi_2$, где Q_x, Q_φ – обобщенные силы, соответствующие обобщённым координатам x_1 и φ_2.

Дадим системе возможное перемещение, при котором $\delta x_1 > 0$, а другая координата не изменяется, $\varphi_2 = \text{const}$. При такой вариации обобщённых координат происходит растяжение пружины относительно точки O – относительное движение груза 1. Блок 2 и каток 3 – неподвижные. Работу на этом возможном перемещении будут производить сила тяжести груза и упругая сила пружины.

Величина силы упругости пружины пропорциональна её удлинению: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно недеформированного состояния. Направление силы упругости при движении груза 1 в положительном направлении отсчета координаты x_1 показано на рис. 2.4. Проекция силы упругости на ось Ox_1: $F_{\text{упр}\,x} = -cx_1$.

Сумма элементарных работ сил на данном перемещении системы

$$\delta A = F_{\text{упр}\,x}\delta x_1 + P_1\delta x_1 = [-cx_1 + P_1]\delta x_1 = Q_x\delta x_1.$$

С учётом исходных данных обобщенная сила Q_x, соответствующая координате x_1

$$Q_x = -cx_1 + P_1 = -\frac{P}{r}x_1 + P.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается, а блок 2 повернулся на угол $\delta\varphi_2$: $x_1 = \text{const}$, $\delta\varphi_2 > 0$. В этом случае груз 1 движется вместе с нитью, сматывающейся с блока 2. Кроме того, вращение блока 2 вызывает качение катка 3.

На этом перемещении работу совершают сила тяжести груза 1, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 2, сила тяжести катка 3 и сила $\vec{F}$, прило-

женная в центре масс катка 3 (см. рис. 2.4). Сумма элементарных работ сил на данном возможном перемещении системы

$$\delta A = P_1 \delta s_1 + M \delta \varphi_2 + P_3 \delta s_C \cos 60^\circ + F \delta s_C \cos 150^\circ,$$

где δs_1, δs_C – элементарные перемещения груза 1 и центра масс катка 3, вызванные поворотом блока 2 на элементарный угол $\delta \varphi_2$

$$\delta s_1 = \delta \varphi_2 r, \qquad \delta s_C = 0{,}75 \delta \varphi_2 r.$$

Подставляя заданные значения сил и момента в выражение суммы элементарных работ сил и с учётом найденных кинематических соотношений, получим:

$$\delta A = Pr \delta \varphi_2 + 5 Pr \delta \varphi_2 + 0{,}375 Pr \delta \varphi_2 - 2{,}598 Pr \delta \varphi_2 = 3{,}78 Pr \delta \varphi_2.$$

Следовательно, обобщенная сила $Q_\varphi = 3{,}78 Pr$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_1$, $\dot{\varphi}_2$ и координатам x_1 и φ_2:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{P}{g}(\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2 r), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{P}{g}(\dot{x}_1 r + 5{,}84 \dot{\varphi}_2 r^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Определим полные производные по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{P}{g}(\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_2 r),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{P}{g}(\ddot{x} r_1 + 5{,}84 \ddot{\varphi}_2 r^2).$$

Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_2 r = -\frac{g}{r} x_1 + g,$$

$$\ddot{x}_1 + 5{,}84 \ddot{\varphi}_2 r = 3{,}78 g.$$

Решим данную систему как алгебраическую относительно $\ddot{x}_1$. Из первого уравнения найдем: $\ddot{\varphi}_2 r = -\ddot{x}_1 - \frac{g}{r}x_1 + g$ и, подставив во второе, получим дифференциальное уравнение относительных колебаний груза 1:

$$\ddot{x}_1 + 1{,}21\frac{g}{r}x_1 = 0{,}43g.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{одн}} = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}$ рад/с.

Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $\frac{1{,}21g}{r}b = 0{,}43g$, откуда $b = 0{,}36r$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t + 0{,}36r\,.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий.

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина растянулась относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1r$. Тогда (см. рис. 2.4) $x_{01} = \Delta\ell_0 = 0{,}1r$.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим

$$x_1(0) = x_{01} = C_2 + 0{,}36r = 0{,}1r\,, \text{ откуда } C_2 = -0{,}26r\,.$$

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени

$$\dot{x}_1(t) = C_1\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t - C_2\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\sin\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t.$$

По условию задачи система начала движение из состояния покоя. Это означает, что груз 1 из начального положения был отпущен без начальной скорости, т. е. при $t = 0$ $\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1, получим

$$\dot{x}_1(0) = 0 = C_1\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}, \text{ откуда } C_1 = 0.$$

Окончательно уравнение относительного движения груза 1

$$x_1(t) = -0{,}26r\cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t + 0{,}36r.$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 2.

Для этого в дифференциальное уравнение $\ddot{x}_1 + 5{,}84\ddot{\varphi}_2 r = 3{,}78g$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1:

$$0{,}26r\frac{1{,}21g}{r}\cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t + 5{,}84\ddot{\varphi}_2 r = 3{,}78g.$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вращение блока 2:

$$\ddot{\varphi}_2 = 0{,}64\frac{g}{r} - 0{,}05\frac{g}{r}\cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t.$$

Понизим порядок дифференциального уравнения подстановкой $\ddot{\varphi}_2 = \dfrac{d\omega_2}{dt}$, где ω_2 – угловая скорость блока 2. После интегрирования получим зависимость угловой скорости блока 2 от времени

$$\omega_2 = 0{,}64\frac{g}{r}t - 0{,}045\sqrt{\frac{g}{r}}\sin\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t + C_3.$$

Аналогично, положив $\omega_2 = \dfrac{d\varphi_2}{dt}$, найдём закон вращательного движения блока 2

$$\varphi_2 = 0{,}32\frac{g}{r}t^2 + 0{,}041\cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t + C_3 t + C_4 .$$

Произвольные постоянные C_3 и C_4 определяются из начальных условий движения блока 2: при $t = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\omega_2(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения блока 2, получим $C_3 = 0$, $C_4 = -0{,}041$.

Уравнение вращательного движения блока 2

$$\varphi_2 = 0{,}32\frac{g}{r}t^2 - 0{,}041\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t\right].$$

Абсолютное движение груза 1 происходит по закону: $s = x_1 + R\varphi_2$. Подставляя сюда найденные уравнения относительного движения груза 1 и вращения блока 2, получим

$$s = 0{,}3r + 0{,}48gt^2 - 0{,}2r\cos\left(\sqrt{\frac{1{,}21g}{r}}\right)t .$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 2. Динамика. СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: Т.2. М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев*, *С. А.* Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2010.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____ В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.О.15 РАЗВИТИЕ НАВЫКОВ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией
Философии и культурологии	Горно-механического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Беляев В.П.	Осипов П. А.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 11.09.2024	Протокол № 2 от 18.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по работе с текстом лекций	5
2	Методические рекомендации по подготовке к опросу	8
3	Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)	9
4	Методические рекомендации по написанию эссе	11
5	Методические рекомендации по подготовке к семинарским занятиям	14
6	Методические рекомендации по подготовке к дискуссии	15
7	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	17
	Заключение	20
	Список использованных источников	21

Автор: Гладкова И. В., доцент, к. ф. н.

ВВЕДЕНИЕ

Инициативная самостоятельная работа студента есть неотъемлемая составная часть учебы в вузе. В современном формате высшего образования значительно возрастает роль самостоятельной работы студента. Правильно спланированная и организованная самостоятельная работа обеспечивает достижение высоких результатов в учебе.

Самостоятельная работа студента (СРС) - это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при сохранении ведущей роли студентов.

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками по профилю будущей специальности, опытом творческой, исследовательской деятельности, развитие самостоятельности. Ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровней. Самостоятельная работа студента – важнейшая составная часть учебного процесса, обязательная для каждого студента, объем которой определяется учебным планом. Методологическую основу СРС составляет деятельностный подход, при котором цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, т. е. на реальные ситуации, в которых студентам надо проявить знание конкретной дисциплины. Предметно и содержательно СРС определяется государственным образовательным стандартом, действующими учебными планами и образовательными программами различных форм обучения, рабочими программами учебных дисциплин, средствами обеспечения СРС: учебниками, учебными пособиями и методическими руководствами, учебно-программными комплексами и т.д.

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

Самостоятельная работа студента - это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение информации и ее логическая переработка;

- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию: текущие консультации, коллоквиум, прием и разбор домашних заданий и другие.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия: подготовка презентаций, составление глоссария, подготовка к практическим занятиям, подготовка рецензий, аннотаций на статью, подготовка к дискуссиям, круглым столам.

СРС может включать следующие формы работ:

- изучение лекционного материала;
- работа с источниками литературы: поиск, подбор и обзор литературы и электронных источников информации по заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий, выдаваемых на практических занятиях: тестов, докладов, контрольных работ и других форм текущего контроля;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение; подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе или коллоквиуму;
- подготовка к зачету, экзамену, другим аттестациям;
- написание реферата, эссе по заданной проблем;
- выполнение расчетно-графической работы;
- выполнение выполнение курсовой работы или проекта;
- анализ научной публикации по определенной преподавателем теме, ее реферирование;
- исследовательская работа и участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения. Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

Подготовка к самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

.

1. Методические рекомендации по работе с текстом лекций

На лекционных занятиях необходимо конспектировать учебный материал. Обращать внимание на формулировки, определения, раскрывающие содержание тех или иных понятий, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском мастерстве. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента, и помогает усвоить учебный материал.

Желательно оставлять в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений, фиксировать вопросы, вызывающие личный интерес, варианты ответов на них, сомнения, проблемы, спорные положения. Рекомендуется вести записи на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для размышлений, разборов, вопросов, ответов на них, для фиксирования деталей темы или связанных с ней фактов, которые припоминаются самим студентом в ходе слушания.

Слушание лекций - сложный вид интеллектуальной деятельности, успех которой обусловлен *умением слушать*, и стремлением воспринимать материал, нужное записывая в тетрадь. Запись лекции помогает сосредоточить внимание на главном, в ходе самой лекции продумать и осмыслить услышанное, осознать план и логику изложения материала преподавателем.

Такая работа нередко вызывает трудности у студентов: некоторые стремятся записывать все дословно, другие пишут отрывочно, хаотично. Чтобы избежать этих ошибок, целесообразно придерживаться ряда правил.

1. После записи ориентирующих и направляющих внимание данных (тема, цель, план лекции, рекомендованная литература) важно попытаться проследить, как они раскрываются в содержании, подкрепляются формулировками, доказательствами, а затем и выводами.

2. Записывать следует основные положения и доказывающие их аргументы, наиболее яркие примеры и факты, поставленные преподавателем вопросы для самостоятельной проработки.

3. Стремиться к четкости записи, ее последовательности, выделяя темы, подтемы, вопросы и подвопросы, используя цифровую и буквенную нумерацию (римские и арабские цифры, большие и малые буквы), красные строки, выделение абзацев, подчеркивание главного и т.д.

Форма записи материала может быть различной - в зависимости от специфики изучаемого предмета. Это может быть стиль учебной программы (назывные предложения), уместны и свои краткие пояснения к записям.

Студентам не следует подробно записывать на лекции «все подряд», но обязательно фиксировать то, что преподаватели диктуют – это базовый конспект, содержащий основные положения лекции: определения, выводы, параметры, критерии, аксиомы, постулаты, парадигмы, концепции, ситуации, а также мысли-маяки (ими часто являются афоризмы, цитаты, остроумные изречения). Запись лекции лучше вести в сжатой форме, короткими и четкими фразами. Каждому студенту полезно выработать свою систему сокращений, в которой он мог бы разобраться легко и безошибочно.

Даже отлично записанная лекция предполагает дальнейшую самостоятельную работу над ней (осмысление ее содержания, логической структуры, выводов). С целью доработки конспекта лекции необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополняя и исправляя свои записи. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект. Доработанный конспект и

рекомендуемая литература используется при подготовке к практическому занятию. Знание лекционного материала при подготовке к практическому занятию обязательно.

Особенно важно в процессе самостоятельной работы над лекцией выделить новый понятийный аппарат, уяснить суть новых понятий, при необходимости обратиться к словарям и другим источникам, заодно устранив неточности в записях. Главное - вести конспект аккуратно и регулярно, только в этом случае он сможет стать подспорьем в изучении дисциплины.

Работа над лекцией стимулирует самостоятельный поиск ответов на самые различные вопросы: над какими понятиями следует поработать, какие обобщения сделать, какой дополнительный материал привлечь.

Важным средством, направляющим самообразование, является выполнение различных заданий по тексту лекции, например, составление ее развернутого плана или тезисов; ответы на вопросы проблемного характера, (скажем, об основных тенденциях развития той или иной проблемы); составление проверочных тесты по проблеме, написание по ней реферата, составление графических схем.

По своим задачам лекции могут быть разных жанров: *установочная лекция* вводит в изучение курса, предмета, проблем (что и как изучать), а *обобщающая лекция* позволяет подвести итог (зачем изучать), выделить главное, усвоить законы развития знания, преемственности, новаторства, чтобы применить обобщенный позитивный опыт к решению современных практических задач. Обобщающая лекция ориентирует в истории и современном состоянии научной проблемы.

В процессе освоения материалов обобщающих лекций студенты могут выполнять задания разного уровня. Например: задания *репродуктивного* уровня (составить развернутый план обобщающей лекции, составить тезисы по материалам лекции); задания *продуктивного* уровня (ответить на вопросы проблемного характера, составить опорный конспект по схеме, выявить основные тенденции развития проблемы); задания *творческого* уровня (составить проверочные тесты по теме, защитить реферат и графические темы по данной проблеме). Обращение к ранее изученному материалу не только помогает восстановить в памяти известные положения, выводы, но и приводит разрозненные знания в систему, углубляет и расширяет их. Каждый возврат к старому материалу позволяет найти в нем что-то новое, переосмыслить его с иных позиций, определить для него наиболее подходящее место в уже имеющейся системе знаний.

.

2. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

Письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента. При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [1].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).
8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[2].

---

[1] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

[2]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. Объем временина на подготовку к устному опросу зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

3.Методические рекомендации по подготовке доклада (презентации)

Доклад – публичное сообщение по заданной теме, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему, вид самостоятельной работы, который используется в учебных и внеаудиторных занятиях и способствует формированию навыков исследовательской работы, освоению методов научного познания, приобретению навыков публичного выступления, расширяет познавательные интересы, приучает критически мыслить.

При подготовке доклада используется дополнительная литература, систематизируется материал. Работа над докладом не только позволяет учащемуся приобрести новые знания, но и способствует формированию важных научно-исследовательских навыков самостоятельной работы с научной литературой, что повышает познавательный интерес к научному познанию.

Приветствуется использование мультимедийных технологий, подготовка докладов-презентаций.

Доклад должен соответствовать следующим требованиям:

- тема доклада должна быть согласованна с преподавателем и соответствовать теме занятия;

- иллюстрации (слайды в презентации) должны быть достаточными, но не чрезмерными;

- материалы, которыми пользуется студент при подготовке доклада-презентации, должны тсоответствовать научно-методическим требованиям ВУЗа и быть указаны в докладе;

- необходимо соблюдать регламент: 7-10 минут выступления.

Преподаватель может дать тему сразу нескольким студентам одной группы, по принципу: докладчик и оппонент. Студенты могут подготовить два выступления с противоположными точками зрения и устроить дискуссию по проблемной теме. Докладчики и содокладчики во многом определяют содержание, стиль, активность данного занятия, для этого необходимо:

- использовать технические средства;
- знать и хорошо ориентироваться в теме всей презентации (семинара);
- уметь дискутировать и быстро отвечать на вопросы;
- четко выполнять установленный регламент: докладчик - 7-10 мин.; содокладчик - 5 мин.; дискуссия - 10 мин;
- иметь представление о композиционной структуре доклада.

После выступления докладчик и содокладчик, должны ответить на вопросы слушателей.

В подготовке доклада выделяют следующие этапы:

1. Определение цели доклада: информировать, объяснить, обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т. п.)

2. Подбор литературы, иллюстративных примеров.

3. Составление плана доклада, систематизация материала, композиционное оформление доклада в виде печатного /рукописного текста и электронной презентации.

Общая структура доклада

Построение доклада включает три части: вступление, основную часть и заключение.

Вступление.

Вступление должно содержать:

- название презентации (доклада);
- сообщение основной идеи;
- обоснование актуальности обсуждаемого вопроса;

- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- живую интересную форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Основная часть.

Основная часть состоит из нескольких разделов, постепенно раскрывающих тему. Возможно использование иллюстрации (графики, диаграммы, фотографии, карты, рисунки) Если необходимо, для обоснования темы используется ссылка на источники с доказательствами, взятыми из литературы (цитирование авторов, указание цифр, фактов, определений). Изложение материала должно быть связным, последовательным, доказательным.

Задача основной части - представить достаточно данных для того, чтобы слушатели и заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами. При этом логическая структура теоретического блока не должны даваться без наглядных пособий, аудио-визуальных и визуальных материалов.

Заключение.

Заключение - это ясное четкое обобщение, в котором подводятся итоги, формулируются главные выводы, подчеркивается значение рассмотренной проблемы, предлагаются самые важные практические рекомендации. Требования к оформлению доклада. Объем машинописного текста доклада должен быть рассчитан на произнесение доклада в течение 7 -10 минут (3-5 машинописных листа текста с докладом).

Доклад оценивается по следующим критериям:

Критерии оценки доклада, сообщения	*Количество баллов*
Содержательность, информационная насыщенность доклада	2
Наличие аргументов	2
Наличие выводов	2
Наличие презентации доклада	2
Владение профессиональной лексикой	2
Итого:	10

Электронные презентации выполняются в программе MS PowerPoint в виде слайдов в следующем порядке: • титульный лист с заголовком темы и автором исполнения презентации; • план презентации (5-6 пунктов - это максимум); • основная часть (не более 10 слайдов); • заключение (вывод). Общие требования к стилевому оформлению презентации: • дизайн должен быть простым и лаконичным; • основная цель - читаемость, а не субъективная красота; цветовая гамма должна состоять не более чем из двух-трех цветов; • всегда должно быть два типа слайдов: для титульных и для основного текста; • размер шрифта должен быть: 24–54 пункта (заголовок), 18–36 пунктов (обычный текст); • текст должен быть свернут до ключевых слов и фраз. Полные развернутые предложения на слайдах таких презентаций используются только при цитировании; каждый слайд должен иметь заголовок; • все слайды должны быть выдержаны в одном стиле; • на каждом слайде должно быть не более трех иллюстраций; • слайды должны быть пронумерованы с указанием общего количества слайдов

4. Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем. Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);

2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить.

Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения же могут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например, стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).

2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).

3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

5. Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой *дискуссию* в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие подведением итогоа обсуждения, заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеют важное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия, демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Готовясь к конкретной теме занятия следует ознакомиться с новыми официальными документами, статьями в периодических журналах, вновь вышедшими монографиями.

6. Методические рекомендации по подготовке к дискуссии

Современная практика предлагает широкий круг типов семинарских занятий. Среди них особое место занимает *семинар-дискуссия,* где в диалоге хорошо усваивается новая информация, видны убеждения студента, обсуждаются противоречия (явные и скрытые) и недостатки. Для обсуждения берутся конкретные актуальные вопросы, с которыми студенты предварительно ознакомлены. Дискуссия является одной из наиболее эффективных технологий группового взаимодействия, обладающей особыми возможностями в обучении, развитии и воспитании будущего специалиста.

Дискуссия (от лат. discussio - рассмотрение, исследование) - способ организации совместной деятельности с целью интенсификации процесса принятия решений в группе посредством обсуждения какого-либо вопроса или проблемы.

Дискуссия обеспечивает активное включение студентов в поиск истины; создает условия для открытого выражения ими своих мыслей, позиций, отношений к обсуждаемой теме и обладает особой возможностью воздействия на установки ее участников в процессе группового взаимодействия. Дискуссию можно рассматривать как *метод интерактивного обучения* и как особую технологию, включающую в себя другие методы и приемы обучения: «мозговой штурм», «анализ ситуаций» и т.д.

Обучающий эффект дискуссии определяется предоставляемой участнику возможностью получить разнообразную информацию от собеседников, продемонстрировать и повысить свою компетентность, проверить и уточнить свои представления и взгляды на обсуждаемую проблему, применить имеющиеся знания в процессе совместного решения учебных и профессиональных задач.

Развивающая функция дискуссии связана со стимулированием творчества обучающихся, развитием их способности к анализу информации и аргументированному, логически выстроенному доказательству своих идей и взглядов, с повышением коммуникативной активности студентов, их эмоциональной включенности в учебный процесс.

Влияние дискуссии на личностное становление студента обусловливается ее целостно - ориентирующей направленностью, созданием благоприятных условий для проявления индивидуальности, самоопределения в существующих точках зрения на определенную проблему, выбора своей позиции; для формирования умения взаимодействовать с другими, слушать и слышать окружающих, уважать чужие убеждения, принимать оппонента, находить точки соприкосновения, соотносить и согласовывать свою позицию с позициями других участников обсуждения.

Безусловно, наличие оппонентов, противоположных точек зрения всегда обостряет дискуссию, повышает ее продуктивность, позволяет создавать с их помощью конструктивный конфликт для более эффективного решения обсуждаемых проблем.

Существует несколько видов дискуссий, использование того или иного типа дискуссии зависит от характера обсуждаемой проблемы и целей дискуссии.

Дискуссия- диалог чаще всего применяется для совместного обсуждения учебных и производственных проблем, решение которых может быть достигнуто путем взаимодополнения, группового взаимодействия по принципу «индивидуальных вкладов» или на основе согласования различных точек зрения, достижения консенсуса.

Дискуссия - спор используется для всестороннего рассмотрения сложных проблем, не имеющих однозначного решения даже в науке, социальной, политической жизни, производственной практике и т.д. Она построена на принципе «позиционного противостояния» и ее цель - не столько решить проблему, сколько побудить участников дискуссии задуматься над проблемой, уточнить и определить свою позицию; научить аргументировано отстаивать свою точку зрения и в то же время осознать право других иметь свой взгляд на эту проблему, быть индивидуальностью.

Условия эффективного проведения дискуссии:

- информированность и подготовленность студентов к дискуссии,

- свободное владение материалом, привлечение различных источников для аргументации отстаиваемых положений;

- правильное употребление понятий, используемых в дискуссии, их единообразное понимание;

- корректность поведения, недопустимость высказываний, задевающих личность оппонента; установление регламента выступления участников;

- полная включенность группы в дискуссию, участие каждого студента в ней.

Подготовка студентов к дискуссии: если тема объявлена заранее, то следует ознакомиться с указанной литературой, необходимыми справочными материалами, продумать свою позицию, четко сформулировать аргументацию, выписать цитаты, мнения специалистов.

В проведении дискуссии выделяется несколько этапов.

Этап 1-й, введение в дискуссию: формулирование проблемы и целей дискуссии;

определение значимости проблемы, совместная выработка правил дискуссии; выяснение однозначности понимания темы дискуссии, используемых в ней терминов, понятий.

Этап 2-й, обсуждение проблемы: обмен участниками мнениями по каждому вопросу. Цель этапа - собрать максимум мнений, идей, предложений, соотнося их друг с другом.

Этап 3-й, подведение итогов обсуждения: выработка студентами согласованного мнения и принятие группового решения.

Далее подводятся итоги дискуссии, заслушиваются и защищаются проектные задания. После этого проводится "мозговой штурм" по нерешенным проблемам дискуссии, а также выявляются прикладные аспекты, которые можно рекомендовать для включения в курсовые и дипломные работы или в апробацию на практике.

Семинары-дискуссии проводятся с целью выявления мнения студентов по актуальным и проблемным вопросам.

7. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен (зачет) - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение.

Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь

на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины. Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно, логико-графическими схемами.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальный сон, иначе в день экзамена не будет чувства бодрости и уверенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями в области управления персоналом;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам для *HR*;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах по проблемам управления персоналом.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально - ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

2. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «БЛОК-ДИАГРАММА» ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.О.16 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Направление
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль
Мехатроника и робототехника промышленных производств

Авторы: Бабич В.Н., к.т.н, Шангина Е.И., д.пед.н.

Одобрены на заседании кафедры

Инженерной графики

(название кафедры)

Зав. кафедрой

(подпись)

д.п.н., проф. Шангина Е.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 26. 08. 2024

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель

Осипов П.А.

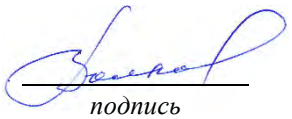
(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 18.10. 2024

(Дата)

Екатеринбург

Методические материалы к дисциплине согласованы с выпускающей кафедрой **ТМ**

Зав. кафедрой  Е.Б. Волков

подпись *И.О. Фамилия*

ВВЕДЕНИЕ

Эпюр выполняется на формате Al(594× 841) в масштабе 1:1000 и включает в себя решение следующих задач:

- построение линии выхода пласта на поверхность;
- построение прямого разреза (вкрест простирания);
- построение вертикальных профилей АВ, ВС, СД, ДА, определяемых сторонами заданного плана;
- построение линии среза пласта по горизонту 92,5;
- построение блок-диаграммы (ячеечной), ограниченного вертикальными профилями АВ, ВС, CD, DA и плоскостью нулевого уровня ваксонометрии с линией выхода пласта на поверхность.

Исходные параметры всех вариантов сведены в таблицу №1и задаютсяследующим образом:

1. Месторождение ограничено двумя параллельными плоскостями - плоскостью кровли пласта (верхняя плоскость) и плоскостью подошвы (нижняя плоскость). Плоскость кровли пластазадаётся точкой **F**(x,y,z), азимутом падения α, интервалом **l** (масштабом паденияплоскости), параметры которых представлены в табл.l.

2. Горизонтальнаямощность $\mathbf{H_г}$ пласта нужна для построения плоскости, называемой подошвой, которая также задана в табл. 1.

3. Построение блок-диаграммы осуществляется в стандартной аксонометрической проекции, указанной ее номером. В конце таблицы для каждой стандартной аксонометрической проекции этот номер присвоен. Пример выполнения графической работы представлен на рис.7.

Построение линии выхода пласта на поверхность

Для нахождения линии пересечения плоскости с топографической поверхностью необходимо найти ряд общих точек, которые одновременно принадлежат плоскости и заданной поверхности. На плане топографическая поверхность задается изогипсами - плоскими линиями, параллельными горизонтальной плоскости проекций, каждая из которых имеет свою высотную отметку. Надо построить горизонтали плоскости кровли, имеющие такие жевысотные отметки, что и изогипсы на плане.

Плоскость кровли задана точкой **F**, азимутом падения α и интервалом**l** (см. табл.1). Построив плоскость кровли на плане (задав ее масштабом заложения), находим линию пересечения плоскости кровли с топографическойповерхностью. Точки, принадлежащие линии пересечения, получаются в ре –

зультате пересечения соответствующих изогипс и горизонталей плоскости кровли, т. е. имеющих одинаковые высотные отметки, если таковые имеются в пределах плана (рис. 1).

Найденные общие точки соединяют плавной кривой, которая будет являться линией пересечения плоскости и топографической поверхности.

Полученная линия кровли пласта обводится красным цветом.

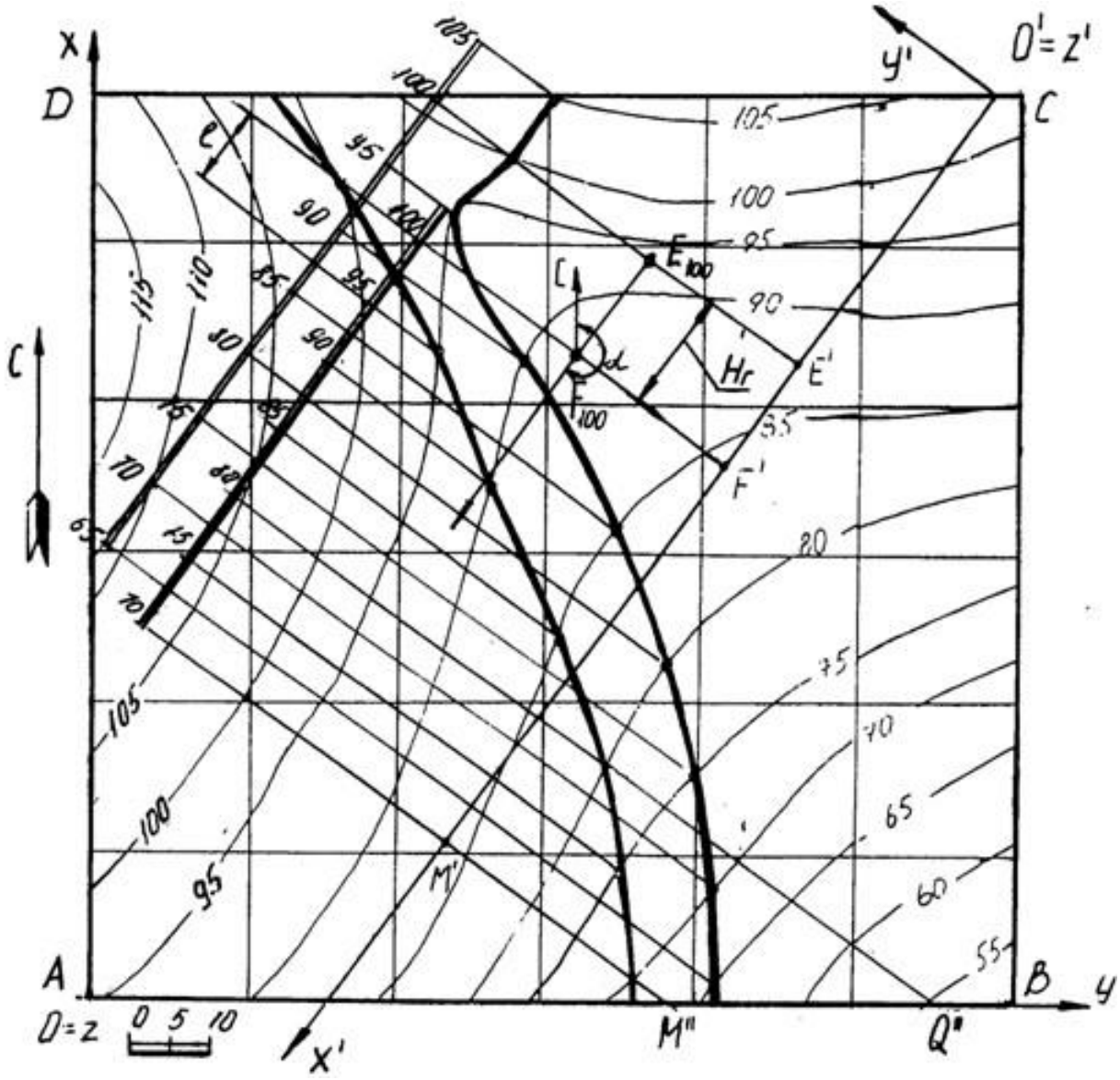


Рис 1

Пересечение плоскости подошвы пласта и топографической поверхности

Плоскость кровли пласта и плоскость подошвы пласта - две параллельные плоскости. Следовательно, на чертеже горизонтали этих плоскостей будут соответственно параллельны, масштабы заложения равны, направления падения их совпадают.

Горизонтальная мощность пласта определяется расстоянием между плоскостями кровлии подошвы пласта, измеряемое в горизонтальном направлении и в нашем случае равна $\mathbf{H}_г$ (см. табл.1). Следовательно, отложив отточки **F** расстояние, равное $\mathbf{H}_г$по направлению восстания плоскости пласта(т. к. плоскость подошвы ниже плоскости кровли), получим точку**E** с такойже высотной отметкой, как и у точки **F** (рис.1). Направление и масштаб заложения подошвы пласта будут такими же, как и у кровли пласта. Плоскостьподошвы пласта определяется точкой**E**, азимутом падения α и интервалом **l**.

Строят те горизонтали подошвы пласта, высотные отметки которых совпадают с высотными отметками изогипс. Находят общие точки, которые соединяют плавной кривой линией. Полученная линия подошвы пласта обводится синим цветом.

Полное построение линии выхода пласта на поверхность показано на рис.1.

Построение прямого разреза (вкрест простирания)

На планевыбирают вертикальную плоскость, перпендикулярную к горизонталям пласта (в удобном месте, как показано на рис. 1). Полученныйразрез называется прямым или вкрест простирания.

Разрез ограничивается нулевой плоскостью, топографической поверхностью и прямыми пересечения плоскости прямого разреза с ближайшимивертикальными плоскостями, ограниченными прямоугольником ABCD.

Для построения прямого разреза вводят декартову систему координат x'O'y' на плане, где ось O'x' совпадает с плоскостью разреза, ось O'y' перпендикулярна к оси O'x' (по часовой стрелке), ось z' проецируется в точку(рис. 1).

Вертикальный прямой разрез будет определяться осьюO'x' и осью O'z', где координата z' будет равна числовой отметке соответствующей изогипсы (рис. 2). Таким образом, получают построение вертикального прямого (вкрест простирания) разреза, на котором строят следы пласта.

Для построения следов пласта на разрезе вкрестпростирания поступают так. По горизонтали переносят точку **F** на след плоскости вертикального

разреза – осьO'x' и любую из горизонталей (например, 70) – точки F'и M'(рис. 1). На профиле (рис. 2) через полученные точки F'и M' проводят перпендикуляры, на которых откладывают высотные отметки кровли пласта. Затем проводят прямую линию – след кровли пласта.

Подошва пласта отстоит от кровли пласта на расстоянии, равном горизонтальной мощности пласта и строится параллельно плоскости кровли (рис. 2 – профиль ограничен нижней плоскостью с отметкой 40).

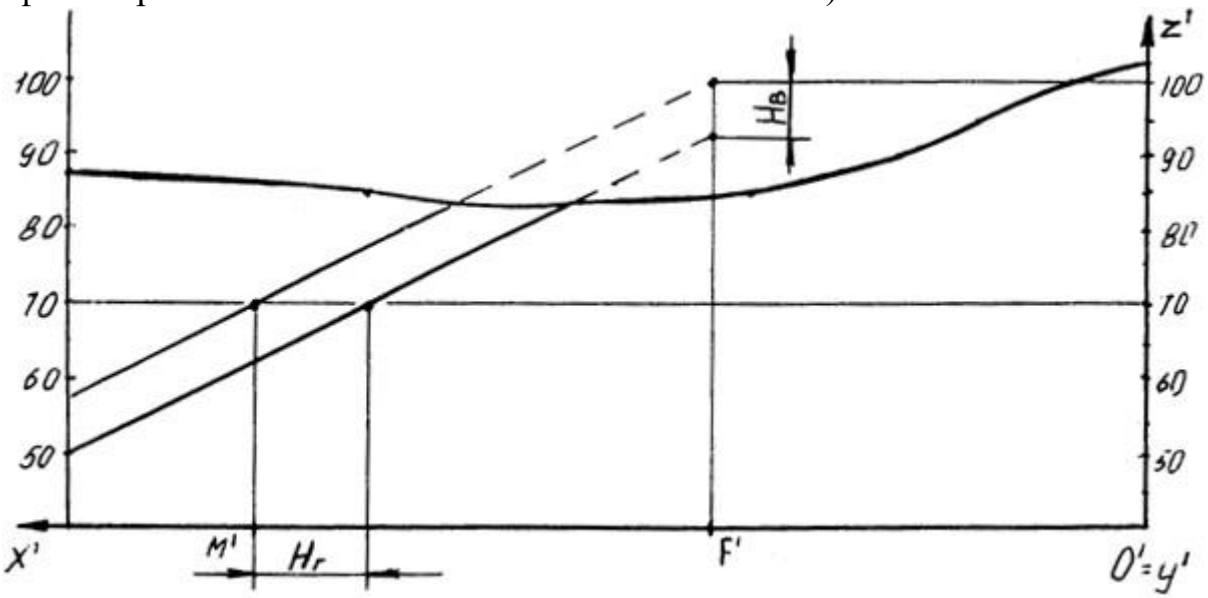


Рис. 2

Построение вертикальных профилей AB, BC, CD, DA выполняется аналогично. Пример построения вертикального профиля AB показан на рис. 3. Для построения подошвы от прямой следа плоскости кровли пласта откладывают вертикальную мощность $\mathbf{H_в}$, взятую с разреза вкрест простирания и проводят прямую, параллельную следу плоскости кровли.

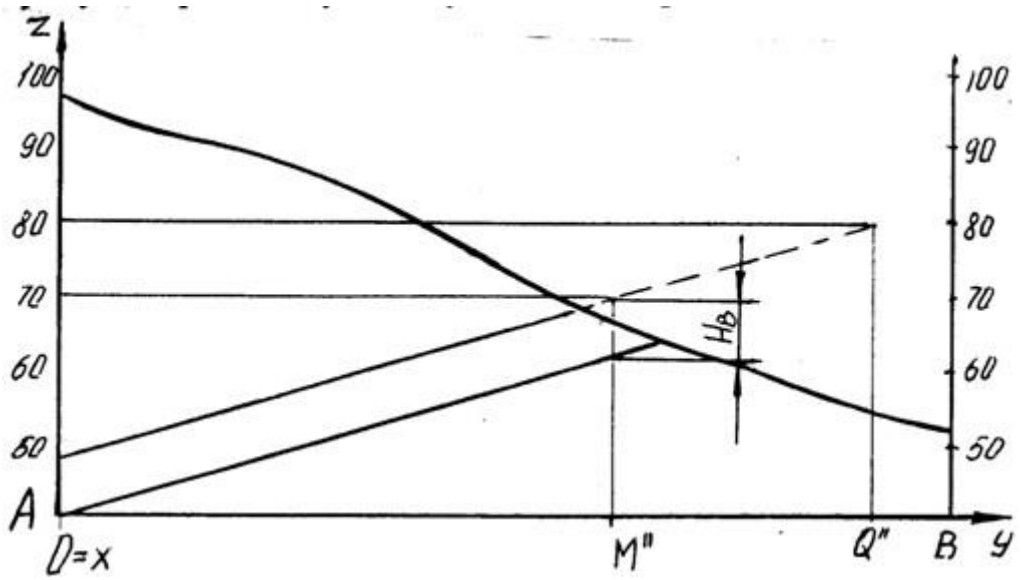


Рис. 3

Нахождение высотной отметки точки, не лежащей на изогипсе

Для построения высотной отметки точки а (рис. 4), не лежащей на изогипсе, поступают следующим образом:

- через точку А проводят кратчайшую прямую III между изогипсами 50 и 60;

- из точки пересечения с изогипсой 60 проводят прямую под произвольным углом, на которой откладывают отрезок, равный разности высотных отметок (т. е. 10) в заданном масштабе – точка II';

- соединяют полученную точку II' с точкой II, имеющей отметку 50 и с помощью подобных треугольников переносят точку А на прямую III', которую называют «высотной шкалой».

Таким образом точка А имеет высотную отметку 57.

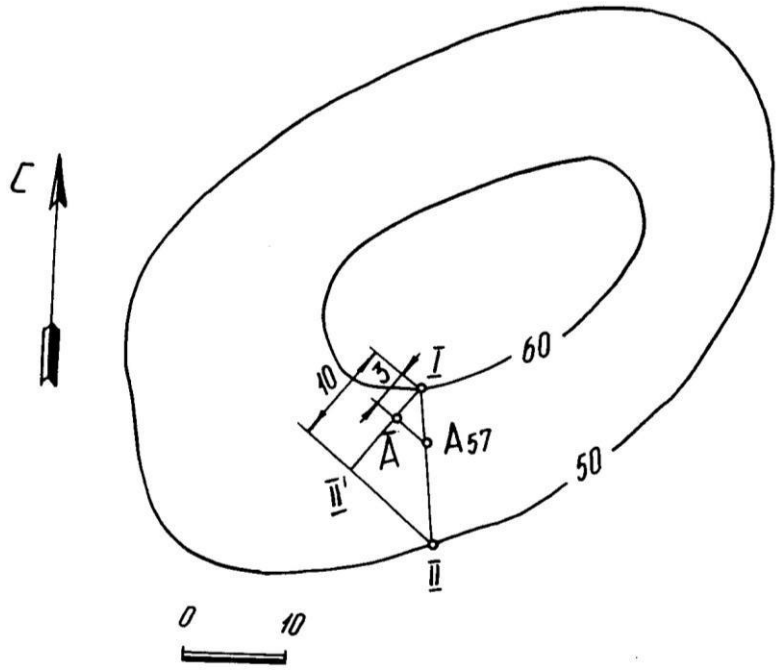
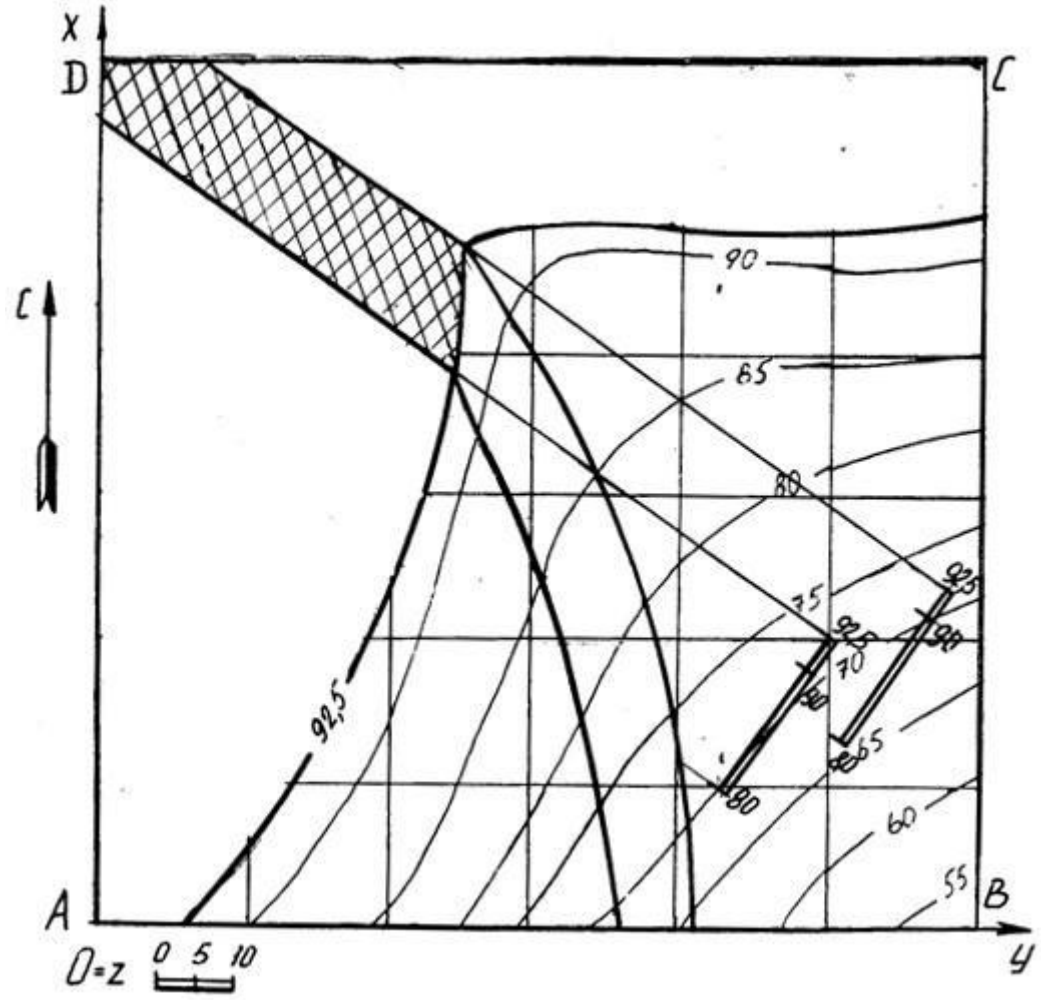


Рис. 4

Построение плана среза по горизонту 92,5

Для построенияплана среза воспользуемся умением находить высотные отметки точек, не лежащих на изогипсах, который был рассмотрен ранее.

Количество точек, необходимых для построения изогипсы 92,5, определяется самостоятельно в зависимости от конфигурации рядом лежащих изогипс. План среза по горизонту 92,5 показан на рис. 5.



Построение блок диаграммы части месторождения, ограниченного вертикальными профилями AB, BC, CD, DA и плоскостью нулевого уровня в аксонометрии с линией выхода пласта на поверхность

Блок диаграммой будем называть аксонометрическую проекцию части земной коры, ограниченную четырьмя вертикальными плоскостями, горизонтальной плоскостью (например, с отметкой ноль) и топографической поверхностью. Блок диаграмма строится ячеечная, т. е. заданный план разбивается на квадраты, размеры которых 250×250. Затем построения осуществляются по следующему алгоритму.

Алгоритм построения:

- на план наносим декартову систему координат, у которой ось X совпадает с AD, ось Yсовпадает с DC, ось Zсовпадает с точкой D;

- строим декартову систему координат в указанной аксонометрической проекции (прямоугольная изометрия, прямоугольная диметрия, косоугольная фронтальная диметрия, косоугольная горизонтальная изометрия - военная пер-

спектива, косоугольнаяфронтальнаяизометрия – кавальерная проекция) согласно ГОСТ 2.317 – 69;

- построение осуществляется по координатам тех точек, которые имеют точные высотные отметки, с учетом коэффициентов искажения по координатным осям. Пример построения показан на рис. 6.

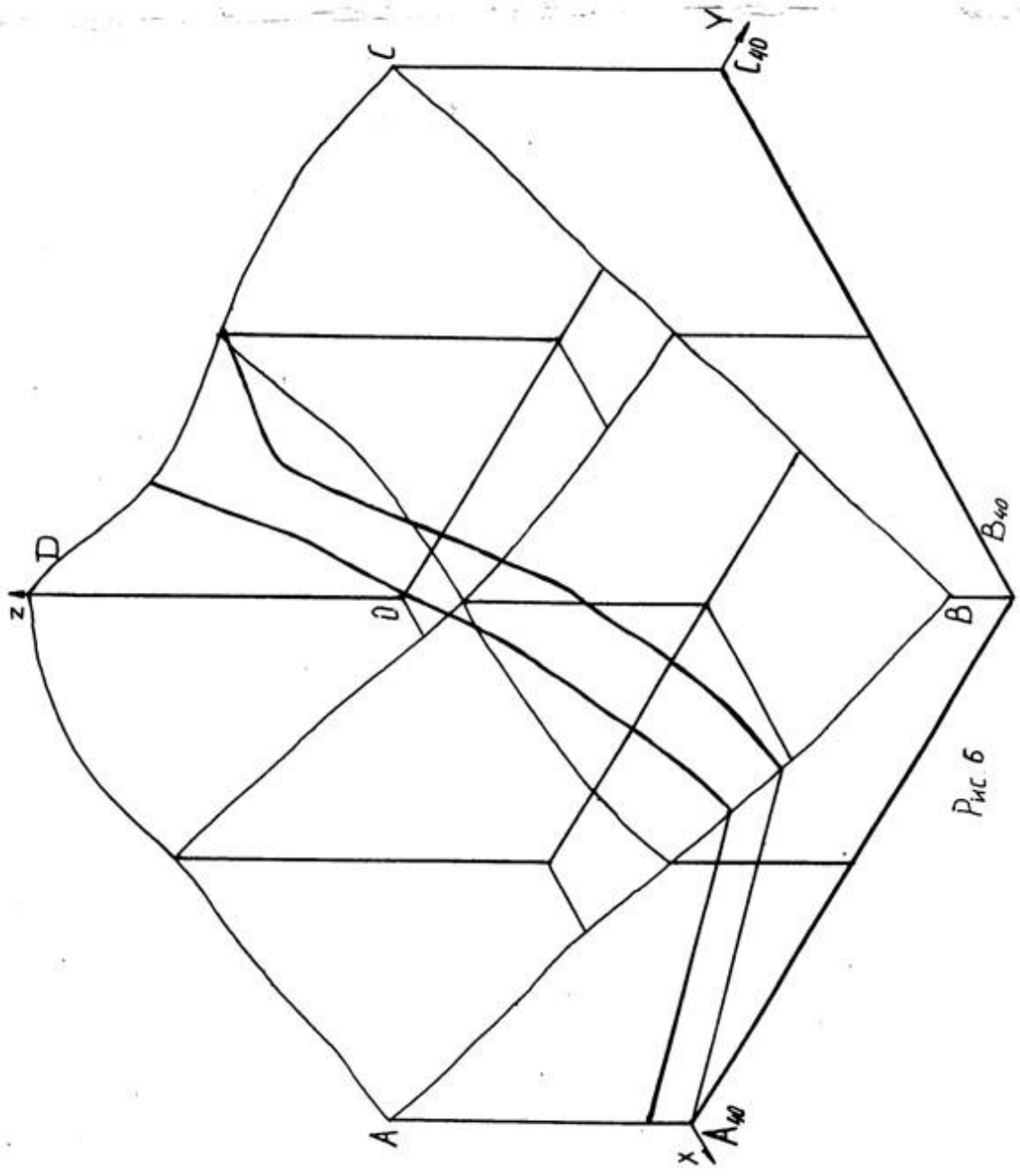


Рис 6

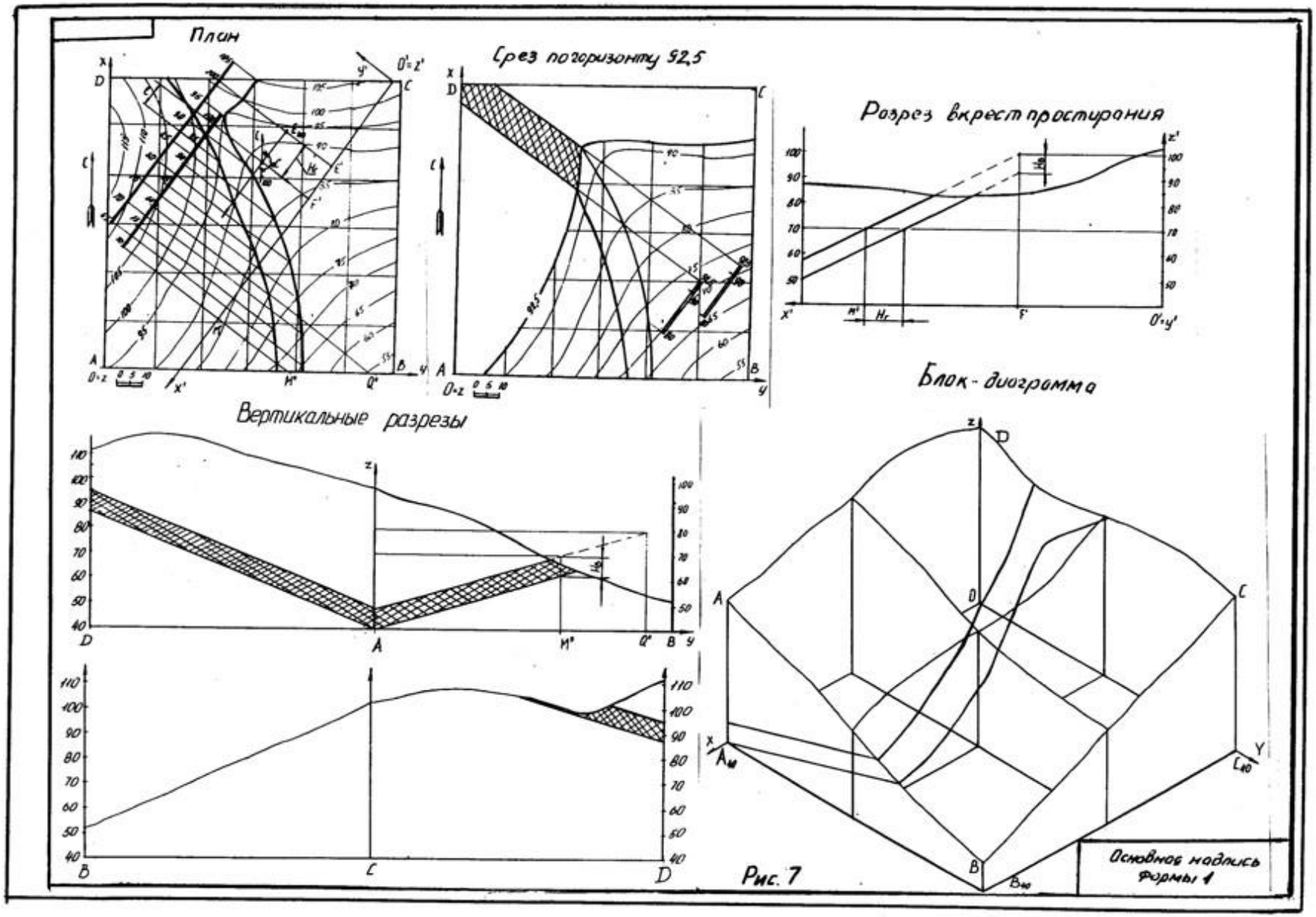

План
Срез погоризонту 92,5
Разрез вкрест простирания
Блок-диограмма
Вертикальные разрезы
Основной надпись формы 1

Рис. 7

Таблица 1

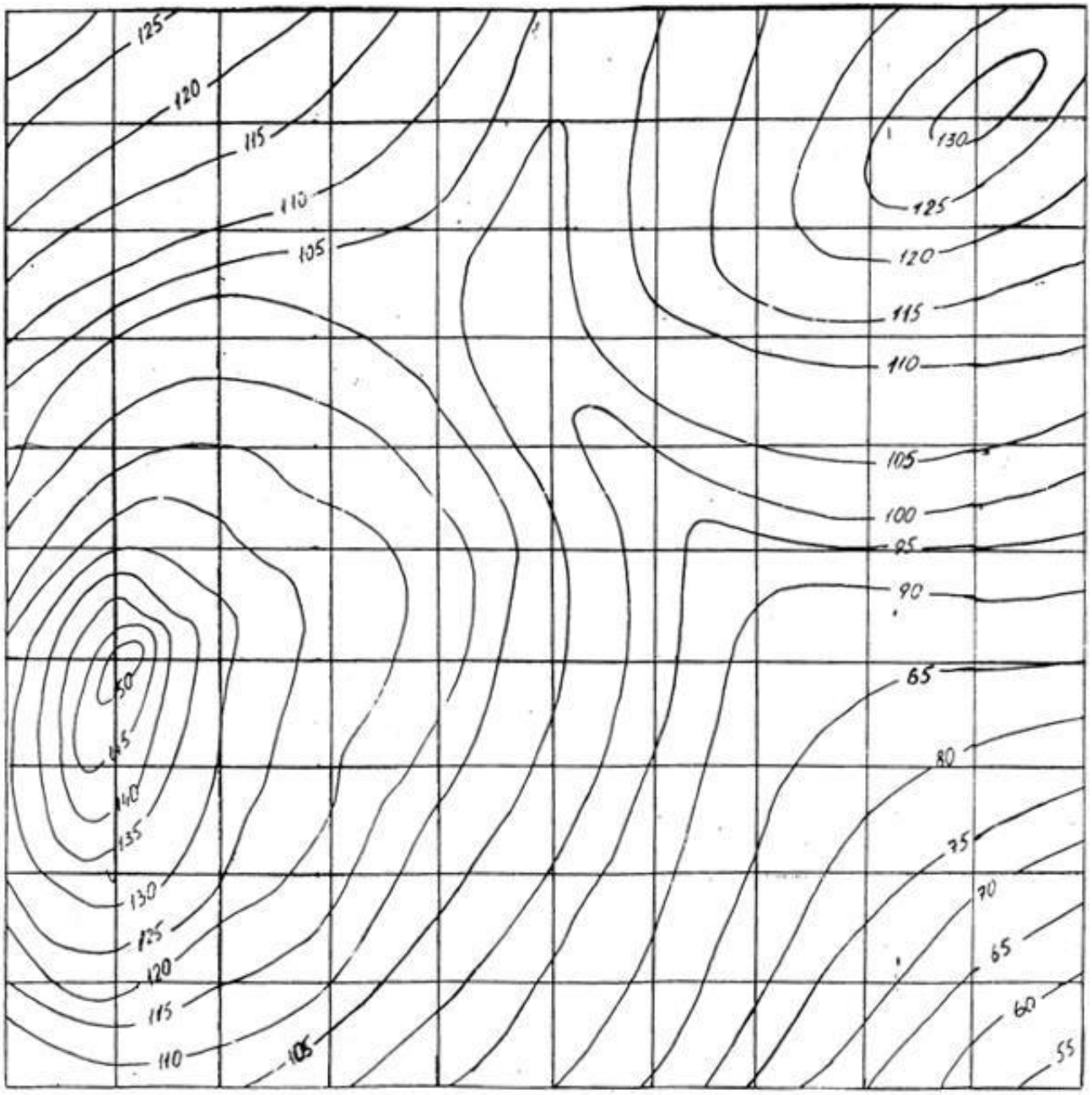
Номер варианта	Точка **F**			Азимут падения α°	Интервал плоскости кровли **l**, мм	Горизонтальная мощность $\mathbf{H_г}$, мм	Вид аксонометрии
	x	**y**	**z**				
1	2	3	4	5	6	7	8
1	46	10	120	210	20	180	1
2	20	85	110	170	20	75	2
3	67	40	100	210	20	30	3
4	78	25	120	190	20	50	4
5	98	110	105	80	20	30	5
6	40	135	105	30	20	15	1
7	60	60	85	225	20	45	2
8	38	105	100	135	14	17	3
9	46	10	120	210	20	155	4
10	20	85	110	170	20	95	5
11	67	40	100	210	20	100	1
12	78	25	120	190	20	85	2
13	98	100	105	80	20	15	3
14	40	135	105	30	20	45	4
15	60	60	85	225	20	65	5
16	38	105	100	135	14	31	1
17	55	40	95	190	20	70	2
18	46	10	120	210	20	135	3
19	20	85	110	170	20	110	4
20	67	40	100	210	20	125	5
21	78	25	120	190	20	105	1
22	135	20	120	260	20	135	2
23	20	110	115	30	20	30	3
24	98	35	80	225	20	45	4
25	38	105	100	135	14	60	5
26	46	10	120	210	20	115	1
27	115	135	130	170	20	20	2
28	27	42	100	210	20	75	3
29	115	135	130	170	20	50	4
30	97	95	115	210	20	70	5
31	135	20	120	260	20	145	1
32	58	177	80	135	14	31	2
33	27	42	100	210	20	95	3
34	115	135	130	170	20	65	4
35	97	95	115	210	20	95	5

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
36	58	177	80	135	14	42	1
37	27	42	100	210	20	115	2
38	98	35	80	225	20	25	3
39	58	177	80	135	14	68	4
40	27	42	100	210	20	140	5

1 -прямоугольная изометрия (изометрия)
2 - прямоугольная диметрия (диметрия)
3 – косоугольная фронтальная диметрия (кабинетная проекция)
4 -косоугольнаяфронтальнаяизометрия (кавальерная проекция)
5 -косоугольная горизонтальная изометрия (военная перспектива)

ПЛАН ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ



СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В. Н., Шангина Е. И. Начертательная геометрия в проекциях с числовыми отметками: Учебное пособие.- Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 1999. – 152 с.
2. Горная графическая документация. – Издание стандартов, 1983. – 200 с.
3. Ломоносов Г. Г. Инженерная графика. – М.: Недра, 1984. – 287 с.
4. Русскевич Н. Л. Начертательная геометрия. – Киев: «Вища школа», 1978. – 312 с.
5. Тарасов Б. Ф. Методы изображения в транспортном строительстве. – Ленинград: Стройиздат, 1987. – 248 с.

Бабич Владимир Николаевич
Шангина Елена Игоревна

Методическое пособие
по выполнениюиндивидуальной графической
работы «Блок-диаграмма» по дисциплине
«Начертательная геометрия. Инженерная графика»
для студентов направления 553200 –
«Геология и разведка полезных ископаемых»

2-е издание, стереотипное

Корректура кафедры инженерной графики

Подписано в печать 17.10.2003 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/8
Печ. л. 0,9 Уч. - изд. 0,83. Тираж 100 экз. Заказ №128

Лаборатория педагогики
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральская государственная горно-геологическая академия
Лаборатория множительной техники

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по учебно-методической работе
_____В. В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.О.16 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Направление

15.03.06 Мехатроника и робототехника

Профиль

Мехатроника и робототехника промышленных производств

Автор: Шангина Е.И., проф., д-р пед. н., к. т. н., зав. каф. ИГр

Одобрены на заседании кафедры

Инженерной графики

(название кафедры)

Зав. кафедрой _____

(подпись)

д.п.н., проф. Шангина Е.И.

(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 26. 08. 2024

(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета

Горно-механического

(название факультета)

Председатель _____

Осипов П.А.

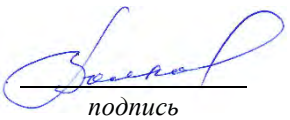
(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 18. 10. 2024

(Дата)

Екатеринбург

Методические материалы к дисциплине согласованы с выпускающей кафедрой **ТМ**

Зав. кафедрой  Е.Б. Волков

подпись *И.О. Фамилия*

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА 5
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ 6
Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса 6
Подготовка к практическим занятиям и лабораторным работам 6
Подготовка и написание контрольной работы 7
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ 7
Подготовка к зачёту 7

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов - это разнообразные виды деятельности студентов, осуществляемые под руководством, но без непосредственного участия преподавателя в аудиторное и/или внеаудиторное время.

Это особая форма обучения по заданиям преподавателя, выполнение которых требует активной мыслительной, поисково-исследовательской и аналитической деятельности.

Методологическую основу самостоятельной работы студентов составляет деятельностный подход, когда цели обучения ориентированы на формирование умений решать типовые и нетиповые задачи, то есть на реальные ситуации, где студентам надо проявить знание конкретной дисциплины, использовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Цель самостоятельной работы - закрепление знаний, полученных на аудиторных занятиях, формирование способности принимать на себя ответственность, решать проблему, находить конструктивные выходы из сложных ситуаций, развивать творческие способности, приобретение навыка организовывать своё время.

Кроме того самостоятельная работа направлена на обучение студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свой профессиональный уровень.

Самостоятельная работа реализует следующие задачи:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирование практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развитие исследовательских умений;
- получение навыков эффективной самостоятельнойпрофессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа – планируемаяучебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов,выполняемая вовнеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с

целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Основные формы организации самостоятельной работы студентов определяются следующими параметрами:

- содержание учебной дисциплины;
- уровень образования и степень подготовленности студентов;
- необходимость упорядочения нагрузки студентов при самостоятельной работе.

В соответствии с реализацией рабочей программы дисциплины в рамках самостоятельной работы студенту необходимо выполнить следующие виды работ:

для подготовки ко всем видам текущего контроля:

- повторение материала лекций;
- самостоятельное изучение курса;
- подготовка к практическим занятиям;
- подготовка к контрольной работе, написание контрольной работы.

для подготовки ко всем видам промежуточной аттестации:

- подготовка к зачёту.

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов как online, так и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, тестирование, опрос, контрольные работы, защита контрольных работ, защита зачётных работ и др.

Текущий контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

Промежуточный контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного для сдачи зачёта.

В методических указаниях по каждому виду контроля представлены материалы для самостоятельной работы и рекомендации по организации отдельных её видов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ КО ВСЕМ ВИДАМ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

Повторение материала лекций и самостоятельное изучение курса

Лекционный материал по дисциплине излагается в виде устных лекций преподавателя во время аудиторных занятий. Самостоятельная работа студента во время лекционных аудиторных занятий заключается в ведении записей (конспекта лекций).

Конспект лекций, выполняемый во время аудиторных занятий, дополняется студентом при самостоятельном внеаудиторном изучении некоторых тем курса. Самостоятельное изучение тем курса осуществляется на основе списка основной и дополнительной литературы к дисциплине.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины приведён в рабочей программе дисциплины.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на повторение материала лекций и самостоятельное изучение тем курса: *для овладения знаниями:*

- конспектирование текста;
- чтение основной и дополнительной литературы;
- составление плана текста;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей

для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций;
- повторная работа над учебным материалом;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- изучение нормативных материалов;
- составление плана и тезисов ответа на вопросы для самопроверки;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- составление библиографических списков по изучаемым темам;

для формирования навыков и умений:

- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Вопросы для самопроверки приведены в учебной литературе по дисциплине или могут быть предложены преподавателем на лекционных аудиторных занятиях после изучения каждой темы.

Подготовка к практическим занятиям

Практические занятия по дисциплине выступают средством формирования у студентов системы интегрированных умений и навыков, необходимых для освоения профессиональных компетенций, а также умений определять, разрабатывать и применять оптимальные методы решения профессиональных задач.

На практических занятиях происходит закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекций, осваиваются методики и алгоритмы решения типовых

задач по образцу и вариантных задач, разбираются примеры применения теоретических знаний для практического использования.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к практическим занятиям: *для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами;
- просмотр обучающих видеозаписей;

для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки;
- подготовка публичных выступлений;
- составление библиографических списков по изучаемым темам;

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;
- рефлексивный анализ профессиональных умений.

Тематический план изучения дисциплины и содержание учебной дисциплины приведены в рабочей программе дисциплины.

Подготовка и написание контрольной работы

Контрольная работа - индивидуальная деятельность обучающегося по концентрированному выражению накопленного знания, обеспечивает возможность одновременной работы всем обучающимся за фиксированное время по однотипным заданиям, что позволяет преподавателю оценить всех обучающихся. Контрольная работа является средством проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Рекомендуемые задания для самостоятельной внеаудиторной работы студента, направленные на подготовку к контрольной работе: *для овладения знаниями:*

- чтение основной и дополнительной литературы;
- работа со словарями, справочниками и нормативными документами.

для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций;
- ответы на вопросы для самопроверки.

для формирования навыков и умений:

- решение задач по образцу и вариативных задач;
- выполнение рисунков, схем, эскизов оборудования;

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Подготовка к зачёту

Зачёт по дисциплине может быть проведён в виде теста или включать в себя защиту контрольной работы.

Тест - это система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.

При самостоятельной подготовке к зачёту, проводимому в виде теста, студенту необходимо:

- проработать информационный материал (конспект лекций, учебное пособие, учебник) по дисциплине; проконсультироваться с преподавателем по вопросу выбора дополнительной учебной литературы;

- выяснить условия проведения теста:количествовопросоввтесте,

- продолжительность выполнения теста, систему оценки результатов и т. д.;

- приступая к работе с тестом, нужно внимательно и до конца прочитать вопрос и предлагаемые варианты ответов, выбрать правильные (их может быть несколько), на отдельном листке ответов вписать цифру вопроса и буквы, соответствующие правильным ответам.

В процессе выполнения теста рекомендуется применять несколько подходов в решении заданий. Такая стратегия позволяет максимально гибко оперировать методами решения, находя каждый раз оптимальный вариант. Не нужно тратить слишком много времени на трудный вопрос, а сразу переходить к другим тестовым заданиям, к трудному вопросу можно обратиться в конце. Необходимо оставить время для проверки ответов, чтобы избежать механических ошибок.

Зачёт также может проходить в виде защиты контрольной работы (доклад с презентацией). Методические рекомендации по подготовке и выполнению доклада с презентацией приведены в п. «Подготовка и написание контрольной работы».